量子热化中纠缠的键加和与持久几何印记

张春月，[1,2]张世新，[1,*]和李子翔[1,2,†][1]北京凝聚态物理国家研究中心与中国科学院物理研究所，北京 *100190*，中国[2]中国科学院大学，北京 *100049*，中国（日期：2026年1月6日）

刻画量子多体系统中纠缠的复杂结构仍是一项核心挑战，因为标准度量往往会掩盖其潜在的几何细节。在这封信中，我们提出一种强有力的框架，称为多重二分纠缠层析术，它通过对一组完备的不同二分划分进行探测，揭示纠缠的精细结构。我们的核心发现是“键加和定律”：纠缠熵可以精确分解为体积律基线与几何修正项之和，后者由不同作用范围交叉键的局域贡献构成。该定律将复杂的纠缠景观提炼为一组简洁的纠缠键张力 $\{\omega_j\}$，作为相互作用局域性的定量指纹。通过将这种层析术应用于哈密顿量动力学、随机量子线路和Floquet动力学，我们揭示了不同热化机制间的根本区别：哈密顿量热化态保留着持久的几何印记，其特征是显著非零的 ω_1；而随机量子线路和Floquet动力学则会彻底抹去这种结构。我们的工作确立了多重二分纠缠层析术这一多用途工具，用于研究多体系统中量子信息的几何结构。

arXiv:2601.01327v1 [quant-ph] 4 Jan 2026

引言——纠缠熵（EE）已成为理解非平衡量子动力学的核心工具，既可用于刻画热化，也能揭示信息scrambling [1–8]。在热哈密顿量系统 [9–36] 和一般随机量子电路（RQCs） [37–55], 中，纠缠熵通常会随时间迅速增长，并在接近 Haar 测度平均值 [56–60]处达到饱和。在这一主流范式中，演化至晚期的态被视为一种毫无特征的体积律系综，已有效丢弃其微观相互作用结构和初态构型的记忆 [14, 61–67]。

然而，一个根本性的概念张力依然存在：与随机电路不同，哈密顿量动力学受到守恒定律的严格约束，其中最显著的是能量守恒 [36, 68–71]。尽管人们认识到，这一约束使系统无法像 Haar 随机幺正算符那样遍历整个希尔伯特空间，但其对量子纠缠造成的具体结构性影响仍未得到探究。当前范式通常将哈密顿量热化态视为能量壳内毫无特征的态，留下一个重要问题尚未解答：物理相互作用的局域性是否会在哈密顿量热化态的纠缠几何结构上留下持久且可辨识的印记?

在本篇快报中，我们通过引入多重二分纠缠层析来揭开这一谜团——这是一种系统探测大量几何形状各异的二分划分中纠缠精细结构的框架。不同于依赖单一固定切分（例如传统半链纠缠熵）的标准方法，我们的方法能够全面且高分辨率地刻画纠缠景观。具体而言，我们根据每个二分划分的边界几何（即$\{n_j\}$ 跨越不同区域的“交叉键”数量，见图1（a））对其进行参数化，从而将单个熵值转化为量子信息的多维图谱。

这一全面的几何描述引出了我们的核心发现：哈密顿量热化态的纠缠熵显著地遵循一条简单的键加和定律。这一原理认为，任意二分划分的纠缠熵都可以精确分解为一个体积律基线，以及交叉键产生的局域贡献之和，从而将复杂的纠缠景观提炼为一组简洁的纠缠键张力 $\{\omega_j\}$。这些张力构成了定量指纹，既反映哈密顿量内在的局域性，也刻画量子纠缠的精细结构。举例而言，图1(b) 显示，热哈密顿量的饱和纠缠熵呈现出高度结构化的分布，具体表现为其与最近邻（NN）交叉键数量之间显著的线性依赖关系（n_1）；而在随机量子电路和 Floquet 动力学中，这种关系完全不存在。具体来说，我们发现了一种稳健的层级关系，$\omega_1 \gg \omega_j$ 对于 $j > 1$，它定量刻画了哈密顿量局域性持久的几何印记。我们的发现表明，能量守恒促使系统沿着由其哈密顿量局域性所定义的持久几何骨架协同热化。最终，我们的工作建立了一个通用框架，用以解析纠缠的几何起源，并为理解量子多体系统中的热化范式提供了新的见解。

模型与方法——我们研究以下系统的动力学：

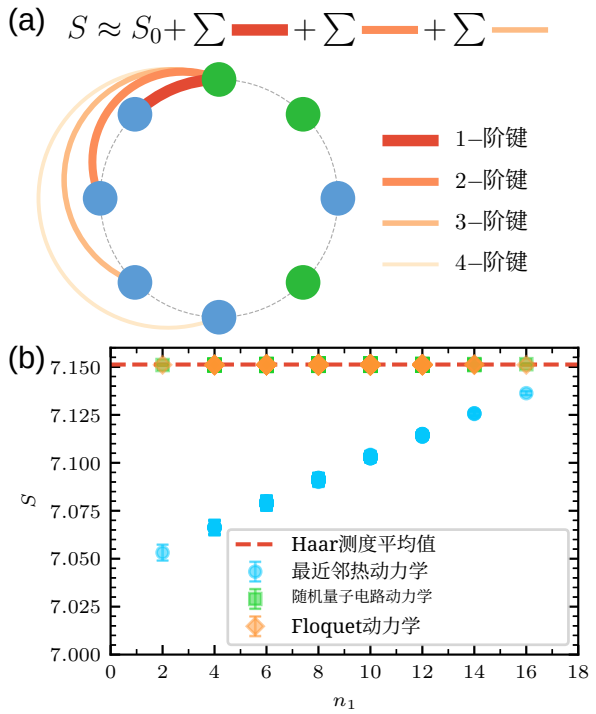


图 1. (a) 周期性边界条件下链的二分划分示意图。绿色和蓝色圆圈所表示的自旋分别构成子系统 A 及其补集。图中展示了连接至顶端自旋、阶数不同的交叉键示例。(b) 链长为 $L = 16$ 时，等尺寸二分的饱和纠缠熵随一阶交叉键数 n_1 的变化。由 $\hat{H}_{\mathrm{NN}}(W = 0.5)$ 控制的最近邻热动力学（演化时间 $t = 1000.0$）呈现出有结构的分布，且低于 Haar测度平均值。相比之下，随机量子电路（演化深度 2000）和 Floquet（演化周期数 100）动力学使饱和纠缠熵完美复现 Haar测度平均值。所有结果均取自 1000 个随机样本的平均。

一个长度为 L、具有周期性边界条件的一维自旋-1/2链。我们的主要模型是具有最近邻自旋相互作用的无序 XXZ 哈密顿量：

$$\hat{H}_{\mathrm{NN}} = \sum_{i=1}^{L} \left(\hat{S}_i^x \hat{S}_{i+1}^x + \hat{S}_i^y \hat{S}_{i+1}^y + J_z \hat{S}_i^z \hat{S}_{i+1}^z + h_i \hat{S}_i^z \right), \tag{1}$$

其中 $\hat{S}_i^\alpha$ 是自旋1/2 位于格点 i、$J_z = 0.5$，随机场 $h_i \in [-W, W]$ 服从均匀分布。我们取 $W = 0.5$ 以确保系统处于遍历热相（相诊断见补充材料（SM）第II 节）。因此，$H_{\mathrm{NN}}(W = 0.5)$控制。所有结果均通过将系统初始化为乘积态获得。

我们的主要探针是冯·诺依曼纠缠熵：

$$S = -\operatorname{Tr}\left(\hat{\rho}_{\mathrm{A}} \log_2 \hat{\rho}_{\mathrm{A}}\right), \tag{2}$$

其中，$\hat{\rho}_{\mathrm{A}}$ 是包含 n_0 个自旋的子系统 A 的约化密度算符。通过分析纠缠熵

子系统 A 的不同二分划分（详见 SM Sec. III），我们揭示了纠缠的精细结构，并发现哈密顿量的局域性在整个演化过程中留下了持久的几何印记。为了定量描述这一精细结构，我们不仅根据每个二分划分的大小 n_0，还根据其详细的几何性质来刻画它们。从概念上讲，链中的任意一对自旋都可以通过一条键连接。连接相距 j 的自旋的键称为 j阶键。对于给定的二分划分，如果一条键的两个端点自旋分别位于子系统 A 及其补集内，则称该键被“交叉”（见图 1（a））。我们将被交叉的 j阶键的数量记为 n_j，例如，n_1 表示给定二分划分的畴壁数量。集合 $\{n_j\}$ 为每个二分划分提供了一个几何标签。

结果。—从几何视角考察纠缠结构时，哈密顿量热化的独特性便立即显现。作为第一个例证，图 1(b) 展示了所有对称性不等价二分划分中、子系统大小相等（$n_0 = L/2$）时的饱和纠缠熵，随跨越的最近邻键数 n_1变化的情况。结果令人瞩目：对于在哈密顿量 $\hat{H}_{\mathrm{NN}}(W = 0.5)$下演化得到的热态，纠缠熵呈现出高度有序的分布，并且主要与n_1呈线性关系。这与随机量子电路和 Floquet 系统的动力学形成鲜明对比（详细设置见补充材料第 I节）：在这些系统中，所有饱和纠缠熵几乎都收敛至 Haar 测度平均值，基本不受二分划分的边界几何 n_1 影响。这种对局部边界结构的显著依赖，为哈密顿量动力学下热化态中局域性持续存在提供了有力的初步证据。然而，要充分揭示纠缠更精细的几何构造，还需要系统分析长程键的贡献。

为了全面剖析这种几何纠缠结构，我们引入了多二分划分纠缠层析术框架。该框架利用一系列全面的二分划分下的纠缠熵，作为高分辨率探针来表征系统的纠缠图景。通过用几何标签 $\{n_j\}$对每个二分划分进行参数化，我们可以探寻潜在的定量规律。这种层析方法确定了一组纠缠键张力 $\{\omega_j\}$，并通过以下线性拟设，以最优方式重构固定子系统大小n_0 下的纠缠熵：

$$S_{\mathrm{fitted}} = S_0 + \sum_{j=1}^{L/2-1} \omega_j n_j. \tag{3}$$

此处，纠缠键张力 $\{\omega_j\}$ 通过对数值数据进行最小二乘拟合确定。求和截断于 $j = L/2 - 1$，因为变量集合 $\{n_1, n_2, \cdots, n_{L/2}\}$ 并非线性独立，这归因于

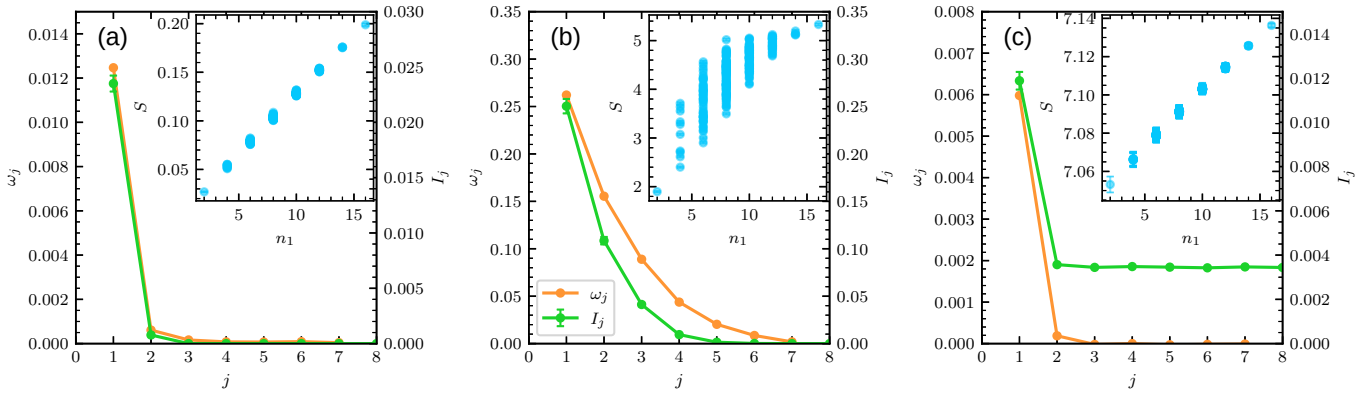


图2. $L = 16$的最近邻热动力学中纠缠结构和互信息的演化。各面板比较了三个不同阶段的纠缠键张力 $\{\omega_j\}$ 和互信息 $\{I_j\}$：(a) 早期（$t = 0.1$）、(b) 中期（$t = 2.0$）和 (c) 晚期（$t = 1000.0$），此时纠缠已达到饱和。纠缠键张力 $\{\omega_j\}$ 是通过对等尺寸二分的纠缠熵 ($n_0 = L/2 = 8$) 进行线性回归得到的，其相对于 n_1 的原始分布显示在相应的插图中。决定系数较高，证实了拟合效果极佳：$R^2 \approx 0.9993$ (a)、$R^2 \approx 0.9959$ (b) 和 $R^2 \approx 0.9995$ (c)。面板 (c) 中 $j > 1$ 对应的层级关系 $\omega_1 \gg \omega_j$ 持续存在，表明局域性在热化态中留下了持久印记。用于拟合的所有互信息和纠缠熵数据均取自 1000 个随机样本的平均值。

$\sum_{j=1}^{L/2} n_j = n_0 (L - n_0)$。如图2所示的最近邻热动力学便是一例，该假设能够以极高精度描述数值数据，得到的决定系数 R^2 始终接近于 1。这种显著的一致性揭示了一项基本的组织原理，我们称之为键加和定律。从物理上看，该定律将纠缠熵解释为一种类似能量的代价函数，其中广延项 S_0 给出体积律基线，而键可加项 $\sum \omega_j n_j$ 则代表与二分边界相关的表面张力或几何惩罚。该定律的有效性意味着，即使在体积律纠缠中，系统仍保留着精细结构：切断特定 j阶的键会产生量子化的纠缠代价 ω_j。

这些纠缠键张力的演化$\{\omega_j\}$，为哈密顿量的局域性和能量守恒如何塑造纠缠几何提供了细致的动力学图像。现在，我们将这一分析应用于最近邻热动力学，结果如图2所示。在早期（$t = 0.1$，图2 (a)），动力学主要由哈密顿量的局域性主导。纠缠主要在最近邻自旋之间产生，这一点由纠缠键张力呈现出的鲜明层级关系完美地体现出来：$\omega_1 \gg \omega_j$ 对于 $j > 1$。随着系统演化至中期（$t = 2.0$，图2(b)），纠缠沿链传播。这反映在较长程纠缠键张力的显著增长上，例如 ω_2、ω_3、$\cdots$，使得纠缠熵分布更加分散，如插图所示。最引人注目的是，在晚期（$t = 1000.0$，图2(c)），当纠缠熵达到饱和时，这种层级关系依然存在。尽管随着纠缠熵逐渐被一个较大的体积律项 S_0所主导，范围贡献 ω_1 仍显著大于其他贡献。这一核心结果表明，热哈密顿量作用足够长时间后演化得到的态在结构上并非随机，而是保留了哈密顿量局域性的强烈几何印记。这种持续性是局域哈密顿量能量守恒的直接结果；这一基本约束在随机量子电路和 Floquet 系统中并不存在。在这些系统中，纠缠几何会在饱和时被完全抹去，最终形成毫无特征的态，其中所有纠缠键张力$\{\omega_j\}$都趋近于零。

为了理解这一持久图样的微观起源，我们追踪了 $\{\omega_j\}$ 以及两点互信息 $I_j = S_{\{1\}} + S_{\{1+j\}} - S_{\{1,1+j\}}$的演化，其中 $S_{\{1\}}$、$S_{\{1+j\}}$ 和 $S_{\{1,1+j\}}$ 分别是第一个自旋、第（$1 + j$）个自旋及其并集的熵。I_j 量化了相距 j的两个自旋之间的关联。如图2所示，$\{I_j\}$ 的演化与 $\{\omega_j\}$相映照。起初，关联在局域范围内建立，其中 I_1 占主导地位。随后，关联不断传播，较长程的 I_j随之增长。最重要的是，即使系统在晚期已达到热态，$I_1 > I_j$ 中 $j > 1$的鲜明层级仍然存在。这一行为提供了清晰的微观图景，补充了我们通过多重二分划分纠缠层析术得到的发现。最近邻关联I_1 持续占主导地位，直接体现了哈密顿量内在的局域性。这种持久的层级结构源于能量守恒：能量守恒限制了系统对希尔伯特空间的探索，并阻止其形成毫无特征的 Haar 随机态。然而，区分 $\{I_j\}$ 与 $\{\omega_j\}$各自的作用十分重要。虽然 I_j能够检测局域关联的存在，但它纯粹是一种

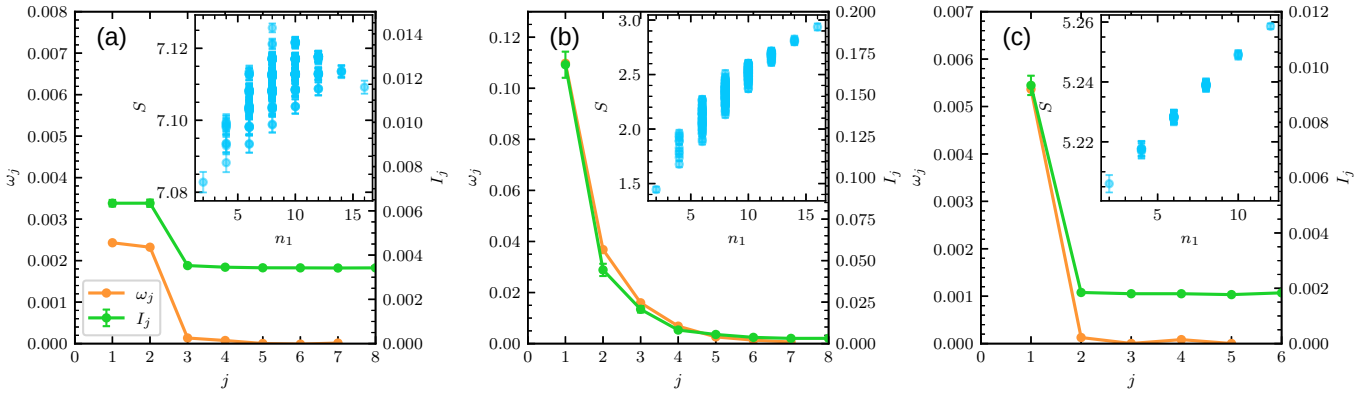


图 3. 其他哈密顿量动力学达到饱和时的纠缠键张力 $\{\omega_j\}$、 $n_0 = L/2$ 以及互信息 $\{I_j\}$。(a) 次近邻热动力学（$L = 16$、 $t = 1000.0$、 $R^2 \approx 0.9986$）。(b) 多体局域化动力学（$L = 16$、 $t = 10^{12}$、 $R^2 \approx 0.9984$）。(c) 混合场动力学（$L = 12$、 $t = 1000.0$、 $R^2 \approx 0.9990$）。所有结果均对 1000 个随机样本取平均。

局域度量。键加和定律揭示了一种更为非平凡的多体现象：这些局域关联并未被搅乱成复杂的非线性网络，而是相干地累加起来，共同决定宏观子系统的全局纠缠熵。

为探究键加和定律是否成立，以及纠缠几何如何呈现于其他哈密顿量动力学系统中，我们研究了以下三种情形（详细设置见补充材料第I节）。 R^2 的数值始终非常接近 1，这表明键加和定律在这些情形下同样成立。

我们的分析已证实，持久 $\{\omega_j\}$层级结构是哈密顿量相互作用范围的直接印记。检验这一假设的一个自然且有力的方法，是考察一个局域性经过修改的系统。为此，我们对一个次近邻（*NNN*）热动力学进行同样的ˆ层析术，该动力学由 H_{NNN} 支配，其哈密顿量扩展后包含次近邻自旋相互作用。图3（a）展示了饱和态在ˆ下的 H_{NNN}结果，与我们的假设完全吻合。加入次近邻耦合显著增强了第二个纠缠键张力 ω_2，使其升至与 ω_1相当的数值。纠缠几何的这一变化也反映在两点关联中，其中互信息 I_2 也变得与 I_1相当。这一结果有力地验证了我们的多二分划分纠缠层析术：纠缠键张力 $\{\omega_j\}$ 并非抽象的拟合参数，而是哈密顿量底层相互作用几何的定量且具有预测性的度量。

为探究非遍历相，我们将方法应用于多体局域化（MBL） [72–86] 动力学，其ˆ由 $H_{\mathrm{NN}}(W = 5.0)$所支配。饱和态呈现出截然不同的纠缠结构，如图3(b)所示。插图显示，纠缠熵分布明显较小且高度分散，这是非遍历性的标志.....

性。定量探针的结构进一步揭示了区分多体局域化与热化的具体细节。表征最短程纠缠和关联的领先纠缠键张力 ω_1 和互信息 I_1，比热态中的数值大一个数量级以上。此外， ω_j 的长尾反映了多体局域化的现象学l-bit图像 [87–95], ：纠缠由有效相互作用产生，这些相互作用随距离呈指数衰减，但在远距离处仍不为零。

最后，我们将分析扩展到不具备 $U(1)$对称性的动力学，以此证明这些发ˆ现的普适性。我们首先考虑一个无序的混合场ˆ哈密顿量 H_{MF}，它打破粒子数守恒，但仍严格满足能量守恒。让跨越多个电荷扇区的初始乘积态随时间演化，我们发现，晚期的纠缠结构[图 3(c)]呈现出一种层级结构 $\{\omega_j\}$ ，并且 $\{I_j\}$在定性上与 $U(1)$对称情形完全相同。这证实，纠缠的几何记忆是能量守恒的稳健结果，即使希尔伯特空间的探索不再受限于单一粒子数扇区，该记忆仍然存在。对于原始ˆ模型，当以不受扇区限制的乘积态初始化时，也观察到了类似的稳健性（见补充材料第V节）。这些结果表明，局域性的几何印记是哈密顿量热化的普适性标志，与额外的对称性约束无关。

讨论与结论。—在这封短文中，我们引入了多重二分纠缠层析，这是一种强大的框架，可用于刻画量子多体系统中纠缠的精细几何结构。将这一框架应用于从乘积态出发的哈密顿量动力学后，我们发现了一条极其精确的组织原理：键加和定律。该定律将复杂的纠缠景观提炼为一组简洁的纠缠键张

量， $\{\omega_j\}$，它们构成了系统纠缠几何的定量指纹。

我们的框架揭示了热化中一种严格根植于能量守恒的根本区别。尽管主流范式往往将晚期热化态视为毫无特征的体积，我们的结果表明，哈密顿量热化具有内在结构。纠缠键张力的持久层级结构（$\omega_1 \gg \omega_j$）表明，作为一种刚性约束，能量守恒使系统无法抹去其几何记忆。这与随机量子电路和 Floquet 动力学产生的毫无特征的热态形成鲜明对比。这些发现对量子热化的基础理论具有深远影响，确立了哈密顿量动力学保留着精细的信息结构。

此外，多二分划分纠缠层析成像为表征量子态提供了有力视角。近期研究日益强调，从多二分划分视角理解多体系统的重要性 [96–102]，我们的工作确立了纠缠的整体几何结构与哈密顿量的局部相互作用模式之间直接且定量的联系。通过展示这种对应关系，我们提供了一个普适且定量的框架，可通过量子纠缠的几何结构区分并分类多种量子相及其非平衡动力学。

展望未来，多二分划分层析术的多功能性将开辟若干令人振奋的研究方向。将其推广至更高维度，有望分离纠缠面积律中的普适次阶修正，例如拓扑有序态中的拓扑纠缠熵 [103, 104]，或刻画临界系统与共形场论的角系数 [105, 106]。此外，我们的方法还提供了一种解决逆问题的策略：从纠缠键张力的谱重建底层的哈密顿量性质 $\{\omega_j\}$。在实验上，我们的框架易于应用，因为所需的纠缠熵可通过随机测量 [107] 或经典阴影层析术 [108–113] 获取，与传统半链纠缠熵测量相比，无需增加实验开销。因此，我们的工作确立了纠缠层析术不仅是一种概念框架，更是一种实用而强大的新视角，可用于在实验中探测量子信息的几何结构。

致谢。C.Y.Z. 和 Z.X.L. 获国家自然科学基金委员会项目（项目编号：12347107 和 12474146）及北京市自然科学基金项目（项目编号：JR25007）资助。S.X.Z 获量子科学与技术国家科技重大专项（项目编号：2024ZD0301700）及国家自然科学基金委员会项目（项目编号：12574546）资助。

* shixinzhang@iphy.ac.cn † zixiangli@iphy.ac.cn

[1] P. Calabrese 和 J. Cardy，纠缠熵与量子场论，J. Stat. Mech.: Theory Exp. 2004, P06002 (2004). [2] J. Eisert、M. Cramer 和 M. B. Plenio，专题综述：纠缠熵的面积定律，《现代物理评论》82, 277 (2010). [3] A. M. Kaufman、M. E. Tai、A. Lukin、M. Rispoli、R. Schittko、P. M. Preiss 和 M. Greiner，通过孤立多体系统中的纠缠实现量子热化，《科学》353, 794 (2016). [4] T. Nishioka，纠缠熵：全息与重整化群，《现代物理评论》90, 035007 (2018). [5] A. Hamma、S. Santra 和 P. Zanardi，随机物理态中的量子纠缠，《物理评论快报》109, 040502 (2012). [6] T. Zhou 和 D. J. Luitz，混沌系统中时间演化算符的算符纠缠熵，Phys. Rev. B 95, 094206 (2017). [7] B. Bertini、P. Kos 和 T. c. v. Prosen，最大多体量子混沌最简模型中的纠缠扩展，Phys. Rev. X 9, 021033 (2019). [8] D. Toniolo 和 S. Bose，局域哈密顿量的动态 α-Rényi熵至多随时间线性增长，Phys. Rev. X 15, 031046 (2025). [9] J. M. Deutsch，封闭系统中的量子统计力学，Phys. Rev. A 43, 2046 (1991). [10] M. Srednicki，混沌与量子热化，Phys. Rev. E 50, 888 (1994). [11] M. Srednicki，量子化混沌系统趋近平衡态，Journal of Physics A: Mathematical and General 32, 1163 (1999). [12] M. Rigol、V. Dunjko 和 M. Olshanii，通用孤立量子系统的热化及其机制，Nature 452, 854 (2008). [13] J. M. Deutsch，本征态热化假说，《物理学进展报告》81, 082001 (2018). [14] C. Gogolin 和 J. Eisert，封闭量子系统中的平衡化、热化与统计力学的涌现，《物理学进展报告》79, 056001 2016( ). [15] G. Biroli、C. Kollath 和 A. M. Läuchli，稀有涨落对孤立量子系统热化的影响，《物理评论快报》105, 250401 (2010). [16] H. Kim 和 D. A. Huse，扩散型非可积系统中的纠缠弹道式扩展，《物理评论快报》111, 127205 (2013). [17] T. Rakovszky、F. Pollmann 和 C. W. von Keyserlingk，扩散导致的Rényi熵次弹道增长，《物理评论快报》122, 250602 (2019). [18] P. Łydżba、M. Mierzejewski、M. Rigol 和 L. Vidmar，量子混沌二次哈密顿量中的广义热化，《物理评论快报》131, 060401 (2023). [19] D. K. Mark、F. Surace、A. Elben、A. L. Shaw、J. Choi、G. Refael、M. Endres 和 S. Choi，深度热化与希尔伯特空间遍历性中的最大熵原理，Phys. Rev. X 14, 041051 (2024). [20] A. Riera-Campeny、A. Sanpera 和 P. Stras-

berg，有限热浴关联量子系统：非平衡动力学与热力学，PRX Quantum 2, 010340 (2021). [21] D. Jansen、J. Stolpp、L. Vidmar 和 F. Heidrich-Meisner，Holstein极化子模型中的本征态热化与量子混沌，Phys. Rev. B 99, 155130 (2019). [22] J. C. Louw 和 S. Kehrein，多体相互作用Sachdev–Ye–Kitaev模型的热化，Phys. Rev. B 105, 075117 (2022). [23] M. Rigol，一维费米子系统中的量子淬火与热化，Phys. Rev. A 80, 053607 (2009). [24] M. Rigol 和 L. F. Santos，有能隙系统中的量子混沌与热化，Phys. Rev. A 82, 011604 (2010). [25] N. Linden、S. Popescu、A. J. Short 和 A. Winter，趋近平衡态的量子力学演化，Phys. Rev. E 79, 061103 (2009). [26] L. F. Santos 和 M. Rigol，一维玻色子与费米子系统中量子混沌的出现及其与热化的关系，Phys. Rev. E 81, 036206 (2010). [27] C. Neuenhahn 和 F. Marquardt，相互作用费米子的热化与福克空间中的离域化，Phys. Rev. E 85, 060101 (2012). [28] S. Khlebnikov 和 M. Kruczenski，孤立量子系统的局域性、纠缠与热化，Phys. Rev. E 90, 050101 (2014). [29] D. Hahn、J.-D. Urbina、K. Richter、R. Dubertrand 和 S. L. Sondhi，强非线性晶格中的遍历与非遍历多体动力学，Phys. Rev. E 103, 052213 2021( ). [30] M. H. Muñoz Arias，多体混沌量子系统中的统计复杂性与趋近平衡之路，Phys. Rev. E 106, 044103 (2022). [31] V. P. Pavlov、Y. R. Chorbadzhiyska、C. Nation、D. Porras 和 P. A. Ivanov，运用随机矩阵理论研究量子遍历系统中的量子费舍尔信息，Phys. Rev. E 110, 024135 (2024). [32] Y. R. Chorbadzhiyska 和 P. A. Ivanov，Jahn–Teller模型中量子热化的出现，Phys. Rev. E 110, 044127 (2024). [33] L. D’Alessio、Y. Kafri、A. Polkovnikov 和 M. Rigol，从量子混沌和本征态热化到统计力学与热力学，Advances in Physics 65, 239 (2016). [34] M. Mezei 和 D. Stanford，混沌系统中的纠缠扩展，J. High Energy Phys. 2017, 65 (2017). [35] E. Bianchi、L. Hackl 和 N. Yokomizo，纠缠熵的线性增长与Kolmogorov–Sinai速率，J. High Energy Phys. 2018, 25 (2018). [36] C. M. Langlett 和 J. F. Rodriguez-Nieva，带标量U(1)荷的量子混沌哈密顿量的纠缠图样，《物理评论快报》134, 230402 (2025). [37] R. Oliveira、O. C. O. Dahlsten 和 M. B. Plenio，可高效地产生通用纠缠，《物理评论快报》98, 130502 (2007). [38] A. Nahum、J. Ruhman、S. Vijay 和 J. Haah，随机幺正动力学下的量子纠缠增长，Phys. Rev. X 7, 031016 (2017). [39] C. W. von Keyserlingk、T. Rakovszky、F. Pollmann 和 S. L. Sondhi，算符流体力学、OTOC 与无守恒定律系统中的纠缠增长，Phys. Rev. X 8, 021013 (2018). [40] A. Nahum, S. Vijay, 和 J. Haah，《随机幺正电路中的算符扩展》，Phys. Rev. X 8, 021014 (2018). [41] T. Zhou 和 A. Nahum，《随机幺正电路中纠缠的涌现统计力学》，Phys. Rev. B 99, 174205 (2019). [42] Y. Li, X. Chen, 和 M. P. A. Fisher，《混合量子电路中的测量驱动纠缠转变》，Phys. Rev. B 100, 134306 (2019). [43] B. Skinner, J. Ruhman, 和 A. Nahum，《纠缠动力学中的测量诱导相变》，Phys. Rev. X 9, 031009 (2019). [44] C.-M. Jian, Y.-Z. You, R. Vasseur, 和 A. W. W. Ludwig，《随机量子电路中的测量诱导临界性》，Phys. Rev. B 101, 104302 (2020). [45] A. Lerose, M. Sonner, 和 D. A. Abanin，《多体 Floquet 动力学的影响矩阵方法》，Phys. Rev. X 11, 021040 (2021). [46] S. Liu, M.-R. Li, S.-X. Zhang, S.-K. Jian, 和 H. Yao，《含噪混合量子电路中的普适卡达尔-帕里西-张标度》，Phys. Rev. B 107, L201113 (2023). [47] M. P. Fisher, V. Khemani, A. Nahum, 和 S. Vijay，《随机量子电路》，《凝聚态物理年度评论》14, 335 (2023). [48] Y. Han 和 X. Chen，《U(1) 对称混合量子自动机电路中的纠缠动力学》，Quantum 7, 1200 (2023). [49] S. Liu, M.-R. Li, S.-X. Zhang, S.-K. Jian, 和 H. Yao，《混合量子电路中的噪声诱导相变》，Phys. Rev. B 110, 064323 (2024). [50] S. Liu, M.-R. Li, S.-X. Zhang, 和 S.-K. Jian，《含噪混合量子电路中的纠缠结构与信息保护》，《物理评论快报》132, 240402 (2024). [51] S. Liu, H.-K. Zhang, S. Yin, 和 S.-X. Zhang，《对称随机电路中的对称性恢复与量子 Mpemba 效应》，《物理评论快报》133, 140405 (2024). [52] W. Wang, S. Liu, J. Li, S.-X. Zhang, 和 S. Yin，《测量诱导相变中的驱动临界动力学》，arXiv:2411.06648 (2024). [53] S. Liu, S.-K. Jian, 和 S.-X. Zhang，《含噪监测量子电路》，arXiv:2512.18783 (2025). [54] Y.-Q. Chen, S. Liu, 和 S.-X. Zhang，《随机电路与哈密顿量动力学中的子系统信息容量》，Quantum 9, 1783 (2025). [55] K. Chalas, P. Calabrese, 和 C. Rylands，《交叉帽态的纠缠淬火动力学》，SciPost Phys. 19, 132 (2025). [56] D. N. Page，《子系统的平均熵》，Phys. Rev. Lett. 71, 1291 (1993). [57] P. Vivo, M. P. Pato, 和 G. Oshanin，《随机纯态：超越线性统计量量化二分纠缠》，Phys. Rev. E 93, 052106 (2016). [58] E. Bianchi 和 P. Donà，《存在中心时的典型纠缠熵：Page 曲线及其方差》，Phys. Rev. D 100, 105010 (2019). [59] R. Patil, L. Hackl, G. R. Fagan, 和 M. Rigol，《具有 su(2) 对称性的自旋系统中的平均纯态纠缠熵》，Phys. Rev. B 108, 245101 (2023). [60] Y. Lu, P. Shi, X.-H. Wang, J. Hu, 和 S.-J. Ran，《量子自旋链中通过最优控制实现持续的弹道式纠缠扩展》，《物理评论快报》

133, 070402 (2024). [61] S. Goldstein, J. L. Lebowitz, R. Tumulka, 和 N. Zanghì, 《宏观量子系统的长时间行为》, 《欧洲物理学杂志 H》35, 173 (2010). [62] A. Riera, C. Gogolin, 和 J. Eisert, 《自然界与量子计算机中的热化》, 《物理评论快报》108, 080402 (2012). [63] W. W. Ho 和 S. Choi, 《量子混沌动力学中精确涌现的量子态设计》, 《物理评论快报》128, 060601 (2022). [64] S. Pilatowsky-Cameo, C. B. Dag, W. W. Ho, 和 S. Choi, 《广义斐波那契驱动量子动力学中的完全希尔伯特空间遍历性》, 《物理评论快报》131, 250401 (2023). [65] S. Pilatowsky-Cameo, I. Marvian, S. Choi, 和 W. W. Ho, 《驱动量子系统中的希尔伯特空间遍历性：阻碍与设计》, Phys. Rev. X 14, 041059 (2024). [66] M. Fava, J. Kurchan, 和 S. Pappalardi, 《通过自由概率构造设计》, Phys. Rev. X 15, 011031 (2025). [67] S. Ghosh, C. M. Langlett, N. Hunter-Jones, 和 J. F. Rodriguez-Nieva, 《量子混沌系统中量子态的晚时系综》, Phys. Rev. B 112, 094302 2025( ). [68] K. Kaneko, E. Iyoda, 和 T. Sagawa, 《通过高阶本征态热化刻画多体量子动力学的复杂性》, Phys. Rev. A 101, 042126 (2020). [69] J. F. Rodriguez-Nieva, C. Jonay, 和 V. Khemani, 《通过纠缠的微正则分布量化量子混沌》, Phys. Rev. X 14, 031014 (2024). [70] L. Mao, L. Cui, T. Schuster, 和 H.-Y. Huang, 《守恒能量的随机酉算符》, arXiv:2510.08448 (2025). [71] L. Cui, T. Schuster, L. Mao, H.-Y. Huang, 和 F. Brandão, 《哈密顿量动力学生成的随机酉算符》, arXiv:2510.08434 (2025). [72] M. Žnidarič, T. c. v. Prosen, 和 P. Prelovšek, 《随机场中海森堡 xxz 磁体的多体局域化》, Phys. Rev. B 77, 064426 (2008). [73] A. Pal 和 D. A. Huse, 《多体局域化相变》, Phys. Rev. B 82, 174411 (2010). [74] J. H. Bardarson, F. Pollmann, 和 J. E. Moore, 《多体局域化模型中的纠缠无界增长》, 《物理评论快报》109, 017202 (2012). [75] R. Vosk 和 E. Altman, 《一维多体局域化作为动力学重整化群不动点》, 《物理评论快报》110, 067204 (2013). [76] E. Altman 和 R. Vosk, 《多体局域化系统中的普适动力学与重整化》, 《凝聚态物理年度评论》6, 383 (2015). [77] M. Schreiber, S. S. Hodgman, P. Bordia, H. P. Lüschen, M. H. Fischer, R. Vosk, E. Altman, U. Schneider, 和 I. Bloch, 《在准随机光学晶格中观测相互作用费米子的多体局域化》, 《科学》349, 842 (2015). [78] S.-X. Zhang 和 H. Yao, 《准周期系统中多体局域化转变的普适性质》, 《物理评论快报》121, 206601 (2018). [79] A. Lukin, M. Rispoli, R. Schittko, M. E. Tai, A. M. Kaufman, S. Choi, V. Khemani, J. Léonard, 和 M. Greiner, 《探测多体中的纠缠

体局域化系统, 《科学》364, 256 (2019)。[80] R. Fan、P. Zhang、H. Shen 和 H. Zhai, 《多体局域化中的非时序关联》, 《科学通报》62, 707 (2017)。[81] Y. Huang、Y.-L. Zhang 和 X. Chen, 《多体局域化系统中的非时序关联函数》, 《物理学年鉴》529, 1600318 (2017)。[82] S. Liu、H.-K. Zhang、S. Yin、S.-X. Zhang 和 H. Yao, 《多体局域化系统中的对称性恢复与量子 Mpemba 效应》, 《科学通报》70, 3991 2025( )。[83] R.-Q. He 和 Z.-Y. Lu, 《通过非时序关联表征多体局域化》, Phys. Rev. B 95, 054201 (2017)。[84] K. Slagle、Z. Bi、Y.-Z. You 和 C. Xu, 《边缘多体局域化系统中的非时序关联》, Phys. Rev. B 95, 165136 (2017)。[85] R. Vosk、D. A. Huse 和 E. Altman, 《一维系统中多体局域化转变的理论》, Phys. Rev. X 5, 031032 (2015)。[86] P. Sierant、M. Lewenstein、A. Scardicchio、L. Vidmar 和 J. Zakrzewski, 《经典计算时代的多体局域化》, 《物理学进展报告》88, 026502 (2025)。[87] M. Serbyn、Z. Papić 和 D. A. Abanin, 《局域守恒律与多体局域化态的结构》, 《物理评论快报》111, 127201 (2013)。[88] D. A. Huse、R. Nandkishore 和 V. Oganesyan, 《完全多体局域化系统的现象学》, Phys. Rev. B 90, 174202 (2014)。[89] A. Chandran、I. H. Kim、G. Vidal 和 D. A. Abanin, 《在多体局域化相中构造局域运动积分》, Phys. Rev. B 91, 085425 (2015)。[90] R. Nandkishore 和 D. A. Huse, 《量子统计力学中的多体局域化与热化》, 《凝聚态物理年度评论》6, 15 (2015)。[91] V. Ros、M. Müller 和 A. Scardicchio, 《多体局域化相中的运动积分》, Nuclear Physics B 891, 420 (2015)。[92] L. Rademaker 和 M. Ortuño, 《多体局域化态的显式局域运动积分》, 《物理评论快报》116, 010404 (2016)。[93] J. Z. Imbrie、V. Ros 和 A. Scardicchio, 《多体局域化系统中的局域运动积分》, 《物理学年鉴》529, 1600278 (2017)。[94] D. A. Abanin、E. Altman、I. Bloch 和 M. Serbyn, 《专题综述：多体局域化、热化与纠缠》, 《现代物理评论》91, 021001 (2019)。[95] D. Aceituno Chávez、C. Artiaco、T. Klein Kvorning、L. Herviou 和 J. H. Bardarson, 《 ℓ-比特多体局域化模型中数熵的超缓慢增长》, 《物理评论快报》133, 126502 (2024)。[96] S. Singha Roy、S. N. Santalla、J. Rodríguez-Laguna 和 G. Sierra, 《作为几何与流的纠缠》, Phys. Rev. B 101, 195134 (2020)。[97] W.-T. Kuo、A. A. Akhtar、D. P. Arovas 和 Y.-Z. You, 《局域扰乱量子演化下的马尔可夫纠缠动力学》, Phys. Rev. B 101, 224202 (2020)。[98] A. A. Akhtar 和 Y.-Z. You, 《局域扰乱量子动力学中的多区域纠缠》, Phys. Rev. B 102, 134203 (2020)。[99] R. Fan、S. Vijay、A. Vishwanath 和 Y.-Z. You, 《随机幺正电路中的自组织纠错

含测量，Phys. Rev. B 103, 174309 (2021)。[100] D. Kolisnyk、R. A. Medina、R. Vasseur 和 M. Serbyn，《量子多体系统纯度的张量交叉插值》，arXiv:2503.17230 (2025)。[101] C.-Y. Zhang、Z.-X. Li 和 S.-X. Zhang，《纠缠态中的纠缠增长：关于纠缠生成与输运的统一视角》，arXiv:2510.08344 (2025)。[102] M. Drieb-Schoen、F. Dreier 和 W. Lechner，《二分纠缠的捆绑》，arXiv:2512.16979 (2025)。[103] A. Kitaev 和 J. Preskill，《拓扑纠缠熵》，《物理评论快报》96, 110404 (2006)。[104] M. Levin 和 X.-G. Wen，《在基态波函数中探测拓扑序》，《物理评论快报》96, 110405 2006( )。[105] P. Calabrese 和 J. Cardy，《纠缠熵与量子场论》，Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment 2004, P06002 (2004)。[106] E. Fradkin 和 J. E. Moore，《二维共形量子临界点的纠缠熵：聆听量子鼓的形状》，《物理评论快报》97, 050404 (2006)。[107] T. Brydges、A. Elben、P. Jurcevic、B. Vermersch、C. Maier、B. P. Lanyon、P. Zoller、R. Blatt 和 C. F. Roos，《通过随机化测量探测 Rényi 纠缠熵》，《科学》364, 260 (2019)。[108] H.-Y. Huang、R. Kueng 和 J. Preskill，《通过极少量测量预测量子系统的多种性质》，《自然·物理》16, 1050 (2020)。[109] M. McGinley、S. Leontica、S. J. Garratt、J. Jovanovic 和 S. H. Simon，《在可编程量子模拟器上通过经典影子层析量化信息 scrambling》，Phys. Rev. A 106, 012441 (2022)。[110] I. Avdic 和 D. A. Mazziotti，《利用影子层析与 n-可表示性条件减少测量次数》，《物理评论快报》132, 220802 (2024)。[111] S. N. Hearth、M. O. Flynn、A. Chandran 和 C. R. Laumann，《高效局域经典阴影层析与数守恒》，《物理评论快报》133，060802（2024）。[112] Y. Wang，《通过量子高维比特经典阴影层析中的高效后处理实现量子优势》，《物理评论快报》135，200601（2025）。[113] S. Zhang、X. Feng、M. Ippoliti 和 Y.-Z. You，《全息经典阴影层析》，Phys. Rev. B 111，054306 2025( )。[114] P. Ponte、Z. Papić、F. m. c. Huveneers 和 D. A. Abanin，《周期驱动系统中的多体局域化》，《物理评论快报》114，140401（2015）。[115] O. Bohigas、M. J. Giannoni 和 C. Schmit，《混沌量子谱的表征及能级涨落规律的普适性》，《物理评论快报》52，1（1984）。[116] V. Oganesyan 和 D. A. Huse，《高温下相互作用费米子的局域化》，Phys. Rev. B 75, 155111 2007( )。[117] P. Roushan、C. Neill、J. Tangpanitanon、V. M. Bastidas、A. Megrant、R. Barends、Y. Chen、Z. Chen、B. Chiaro、A. Dunsworth、A. Fowler、B. Foxen、M. Giustina、E. Jeffrey、J. Kelly、E. Lucero、J. Mutus、M. Neeley、C. Quintana、D. Sank、A. Vainsencher、J. Wenner、T. White、H. Neven、D. G. Angelakis 和 J. Martinis，《超导量子比特中相互作用光子局域化的光谱特征》，《科学》358，1175（2017）。[118] M. L. Mehta，《随机矩阵》（爱思唯尔，2004）。[119] Y. Y. Atas、E. Bogomolny、O. Giraud 和 G. Roux，《随机矩阵系综中连续能级间距比的分布》，《物理评论快报》110, 084101（2013）。[120] L. D'Alessio 和 M. Rigol，《孤立周期驱动相互作用晶格系统的长时间行为》，Phys. Rev. X 4, 041048（2014）。

《量子热化中纠缠的键可加性与持久几何印记》的补充材料

目录

I. 动力学方案描述 II. 能级间距比值分布分析 III. 对称性分析与二分几何枚举 IV. 关于互信息的更多结果 V. 拟合质量的详细分析及更多拟合结果

9

12

12

14

14

I. 动力学方案描述

我们考察长度为 L 、具有周期性边界条件（PBC）的一维自旋-1/2 链上的不同动力学方案。对于守恒 $U(1)$ 粒子数的方案，初态 $|\psi_0\rangle$ 是从零磁化（半填充）子空间中均匀抽样得到的计算基态， $\sum_{i=1}^{L}\hat{S}_i^z = 0$。我们考虑五种粒子数守恒方案，定义如下：

最近邻（*NN*）热动力学：这是我们研究的主要动力学，由一个与时间无关的热哈密顿量支配：

$$\hat{H}_{\mathrm{NN}} = \sum_{i=1}^{L}\left(\hat{S}_i^x\hat{S}_{i+1}^x + \hat{S}_i^y\hat{S}_{i+1}^y + J_z\hat{S}_i^z\hat{S}_{i+1}^z + h_i\hat{S}_i^z\right), \tag{S1}$$

其中，各向异性设为 $J_z = 0.5$。格点随机场 h_i 从区间 $[-W, W]$ 和 $W = 0.5$内独立均匀抽取，因此该哈密顿量记作 $H_{\mathrm{NN}}(W = 0.5)$。

次近邻（*NNN*）热动力学：这种动力学旨在探究长程相互作用的影响。引入次近邻耦合：

$$\hat{H}_{\mathrm{NNN}} = \hat{H}_{\mathrm{NN}}(W = 0.5) + \gamma\sum_{i=1}^{L}\left(\hat{S}_i^x\hat{S}_{i+2}^x + \hat{S}_i^y\hat{S}_{i+2}^y + J_z\hat{S}_i^z\hat{S}_{i+2}^z\right), \tag{S2}$$

其中，次近邻 相互作用强度设为 $\gamma = 24/25$。该哈密顿量仍处于热相 e.

多体局域化（*MBL*）动力学：使用与方程（S1）相同的哈密顿量实现，但采用较强的无序强度 $W = 5.0$ ，使系统进入多体局域化相。其哈密顿量记为 $\hat{} H_{\mathrm{NN}}(W = 5.0)$。

随机量子电路（*RQC*）动力学：电路通过依次施加双量子比特酉门生成。每一步中，以均匀概率从所有 L 对自旋中随机选择一对相邻自旋（i， $i+1$），并施加单个门 $\hat{U}_{i,\ i+1}$ 。酉算符为：

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\left(\hat{S}_i^x\hat{S}_{i+1}^x + \hat{S}_i^y\hat{S}_{i+1}^y\right)/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\hat{S}_i^z\hat{S}_{i+1}^z}, \tag{S3}$$

*Floquet*动力学：Floquet动力学由周期性驱动定义，其Floquet算符为：

$$\hat{F} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}T_0\hat{H}_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}T_1\hat{H}_1}, \tag{S4}$$

其中，驱动的两部分分别为

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^{L}\left(\hat{S}_i^z\hat{S}_{i+1}^z + h_i\hat{S}_i^z\right) \tag{S5}$$

and

$$\hat{H}_1 = \sum_{i=1}^{L} \left(\hat{S}_i^x \hat{S}_{i+1}^x + \hat{S}_i^y \hat{S}_{i+1}^y \right). \tag{S6}$$

ˆ参数设定为 $T_0 = 1.0$， $T_1 = 2.5$，且 H_0 中的无序强度为 $W = 5.0$。该设置改编自参考文献 [114]，但采用周期性边界条件实现。该方案同样会导致热化，但由于存在时间依赖性，不守恒能量。

除了粒子数守恒动力学之外，我们还考察了两种不具有 $U(1)$ 对称性的方案。在这些情况下，初态为不受粒子数守恒约束的随机乘积态，使动力学能够探索整个多体希尔伯特空间：

$$|\psi_0\rangle = \prod_{i=1}^{L} \otimes \left(\cos\frac{\theta_i}{2} |\uparrow\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_i} \sin\frac{\theta_i}{2} |\downarrow\rangle \right), \tag{S7}$$

其中，随机参数 $\{\theta_i\}$ 和 $\{\phi_i\}$ 使每个自旋都独立地均匀分布在布洛赫球表面。

我们首先考察在热哈密顿量ˆ H_{NN} 下的演化，其中 $W = 0.5$ [见式（S1）]。与受限于半填充扇区的构型不同，这些随机乘积态是跨越多个磁化扇区的叠加态，因此动力学能够探索多体希尔伯特空间中大得多的流形。

对于从不具有 $U(1)$ 对称性的随机乘积态出发的第二种方案，我们引入混合场哈密顿量。该模型通过在最近邻热化哈密顿量中加入无序横场项，打破总磁化强度守恒：

$$\hat{H}_{\mathrm{MF}} = \hat{H}_{\mathrm{NN}}(W = 0.5) + \sum_{i=1}^{L} g_i \hat{S}_i^x, \tag{S8}$$

其中， $\{g_j\}$ 遵循与ˆ $H_{\mathrm{NN}}(W = 0.5)$ 中 $\{h_j\}$ 相同的分布，且独立于 $\{h_j\}$。相应的动力学称为混合场动力学。

为清晰直观地展示不同的动力学方案，我们在图S1中给出了相应的示意图。这些图展示了以下方案各自不同的结构：(a) 定态哈密顿量演化，(b) 随机量子电路中的顺序门操作，以及 (c) 弗洛凯方案的周期性驱动。

作为这些示意图的补充，图S2 展示了各方案下半链纠缠熵（HCEE）的演化，呈现其趋向各自稳态的轨迹。如图所示，最近邻热化、次近邻热化和混合场动力学的 HCEE 在 $t = 10^3$时已基本饱和。在多体局域化动力学中，系统在 $t = 10^{12}$时达到其特征稳态。同样，随机量子电路和 Floquet动力学分别在电路深度2000 和100 个驱动周期时达到完全饱和。正文中的分析均采用这些
用于刻画晚期纠缠景观的饱和数据点。

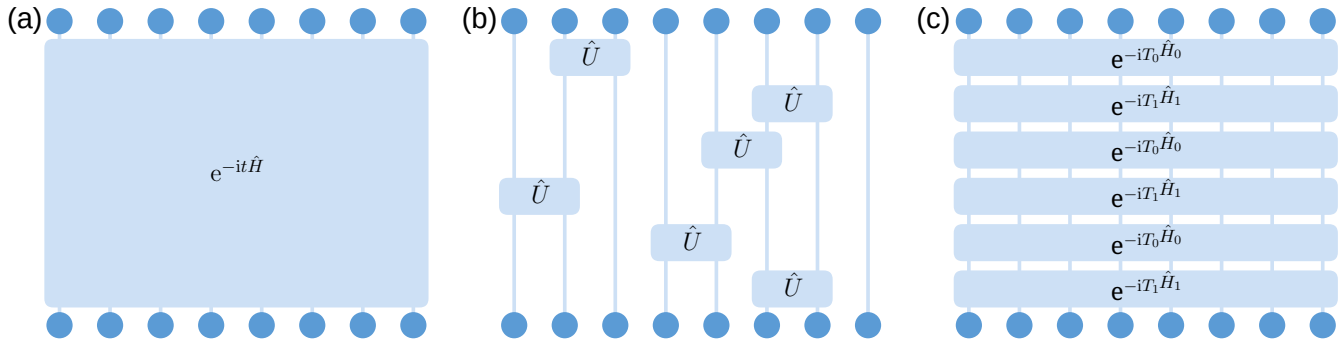


图 S1. 哈密顿量动力学示意图（其中ˆ $H_{\mathrm{NN}}(W = 0.5)$、ˆ $H_{\mathrm{NN}}(W = 5.0)$ˆ H_{NNN} 和ˆ H_{MF} 均由ˆH表示）（a）、随机量子电路动力学（b）和 Floquet动力学（c）。蓝色圆圈表示自旋。

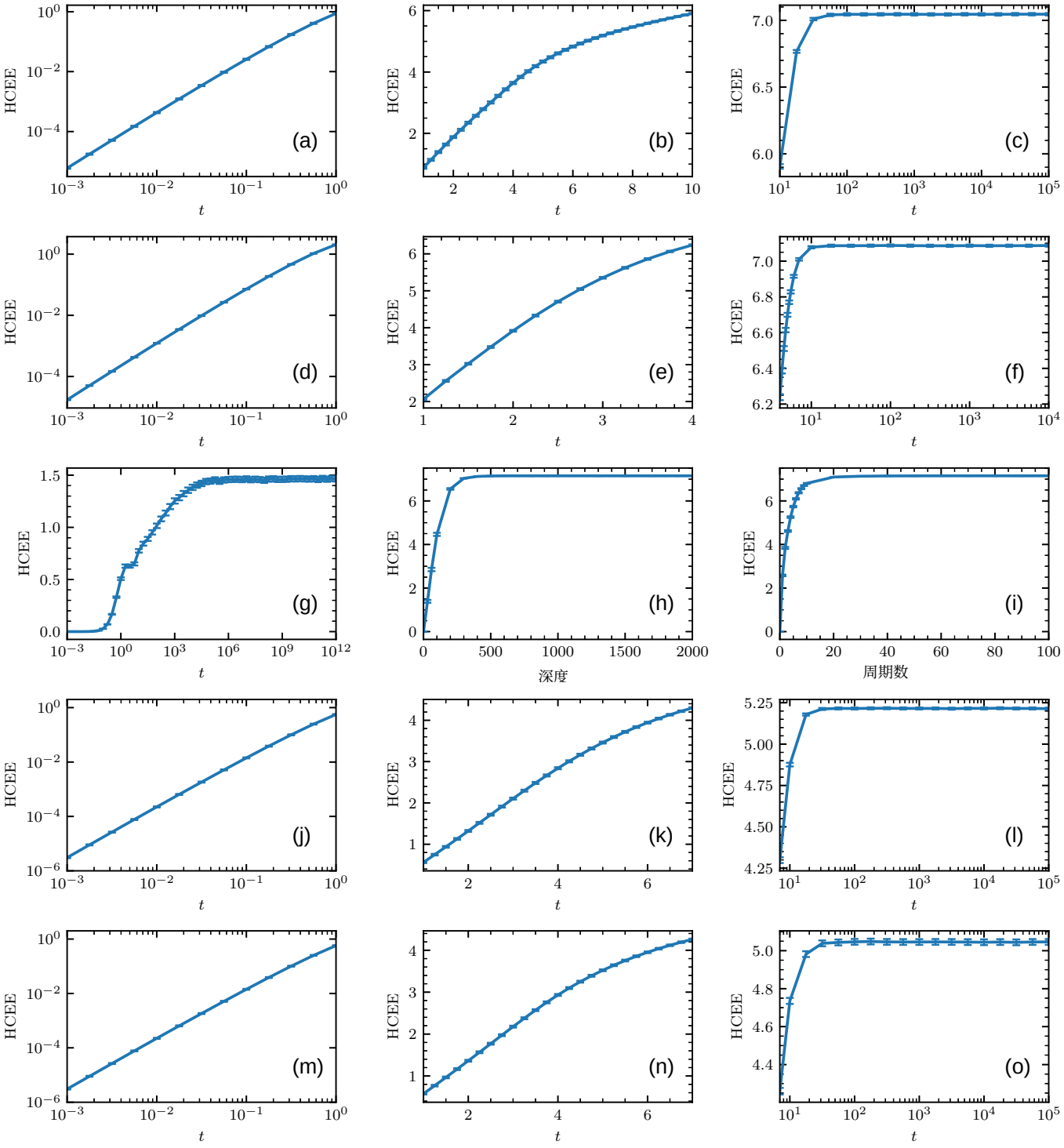


图 S2. 所研究的各种动力学下 HCEE 的演化。第一行（a-c）展示了最近邻热动力学的 HCEE 演化，包括（a）初始线性增长、（b）随后的减缓以及（c）最终饱和。类似地，第二行（d-f）、第四行（j-l）和第五行（m-o）分别展示了次近邻热动力学、混合场动力学以及由 $\hat{} H_{\mathrm{NN}}(W = 0.5)$ 支配、从随机乘积态出发的动力学在相同三个阶段中的演化。第三行给出了（g）多体局域化动力学、（h）随机量子电路动力学和（i）Floquet动力学的完整 HCEE 演化。对于哈密顿量动力学（a-g）和（j-o），横轴为演化时间 t；对于随机量子电路（h）和 Floquet（i）动力学，横轴分别表示电路深度和演化周期数。混合场动力学以及由 $\hat{} H_{\mathrm{NN}}(W = 0.5)$ 支配、从随机乘积态出发的动力学的模拟在长度为 $L = 12$ 的链上进行，而所有其他动力学则针对 $L = 16$ 进行。多体局域化动力学的结果对 1000 个无序和初态实现取平均，而所有其他动力学则对 200 个实现取平均。

II. 能级间距比分布分析

本节将证明各种动力学的热化性质。相邻能级间距比的分布， $p(r)$是区分热化相与非热化相的有力探针，这种方法植根于随机矩阵理论 [73, 115–118]。我们将这一诊断方法应用于四个哈密顿量（$\hat{H}_{\mathrm{NN}}(W=0.5)$、$\hat{H}_{\mathrm{NNN}}$、$\hat{H}_{\mathrm{NN}}(W=5.0)$ 和 $\hat{H}_{\mathrm{MF}}$）以及 Floquet算符 $\hat{F}$，以确认它们的动力学特性。

我们对以及整个系统的能谱和半填充扇区内的其他算符，其中 $\hat{S}^z_{\mathrm{tot}}=\sum_{i=1}^{L}\hat{S}^z_i=0$，分别如此。对于哈密顿量系统，我们分析排序后本征能量谱中间三分之一的部分，这是符合参考文献 [73]的标准做法。对于 Floquet算符 $\hat{F}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}T_0\hat{H}_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}T_1\hat{H}_1}$，我们分析其所有本征值 $\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_k}\}$，并将准能量 $\{\theta_k\}$限定在范围 $[-\pi,\pi)$ 内。

给定按升序排列的本征能量 $\{E_k\}$ 或准能量 $\{\theta_k\}$ 列表，相邻能级间距分别定义为 $\delta_k=E_{k+1}-E_k$ 或 $\delta_k=\theta_{k+1}-\theta_k$。随后，将能级间距比 r_k 定义为两个相邻间距中较小者与较大者之比：

$$r_k=\frac{\min\left(\delta_k,\delta_{k+1}\right)}{\max\left(\delta_k,\delta_{k+1}\right)}. \tag{S9}$$

根据所有此类比值，我们构造了 $\{r_k\}$ 在所有情况下的直方图，如图 S3所示，并给出了数值平均值 $\bar{r}$。

这一诊断工具能够清晰区分不同的动力学区间。对于我们模型的热化情形，预计 $\{r_k\}$ 的直方图在哈密顿量系统和 Floquet系统中分别遵循高斯正交系综（GOE）和圆正交系综（COE）。相比之下，多体局域化相以泊松分布为特征。如图 S3所示，我们的数值结果与相应的理论基准完全一致。三个热化哈密顿量和 Floquet算符的分布分别与 GOE 和 COE 曲线相符，证实它们处于热化区间。相反，多体局域化哈密顿量遵循泊松分布，这是其多体局域化特性的明确标志。对于每种情形，这些结果还进一步得到 $\bar{r}$ 的支持；其与相应分布的理论平均值非常接近：$\langle r\rangle_{\mathrm{GOE}}=4-2\sqrt{3}\approx0.536$[119]、$\langle r\rangle_{\mathrm{COE}}\approx0.527$ [120] 和 $\langle r\rangle_{\mathrm{Poisson}}=2\ln 2-1\approx0.386$ [119]。

III. 对称　　性分析与二分几何枚举

我们方法的一个核心方面，是利用系统的对称性来简化分析。正如正文所述，我们的分析需要对多种随机性来源（例如初始态、无序和电路实现）进行平均。结合周期性边界条件（PBC），这一过程使系综平均系统恢复平移和宇称对称性。

这些对称　　性带来两个至关重要的结果，大幅降低了分析的复杂度：

1. 任意两个自旋之间的互信息仅取决于它们的间隔距离 j，记作 I_j。2. 对所有 $2^{L-1}-1$ 非平凡二分划分的纠缠熵（EE）分析，都可以简化为研究一个规模小得多的最小集合，即对称性非等价代表二分。

对于长度为偶数 L 的一维自旋链，形成子系统 A 的方式有 2^L 种。然而，由于纠缠熵关于子系统及其补集具有对称性，我们只考虑子系统大小 n_0 不超过链长一半的二分划分，即 $n_0\leqslant L/2$。$n_0=0$ 的情况是平凡的。因此，不同的非平凡二分划分总数为 $\sum_{n_0=1}^{L/2-1}\binom{L}{n_0}+\frac{1}{2}\binom{L}{L/2}=2^{L-1}-1$。通过平移或宇称操作可相互映射的二分划分被视为对称等价，因为对它们取平均后会得到相同的纠缠熵值。因此，我们只需考虑一组缩减后的代表二分。我们将链长为 L 且子系统大小固定为 n_0 时，此类代表二分的数量记为 $N(L,\ n_0)$。

我们的多重二分纠缠层析基于通过交叉键向量 $\left(n_1,n_2,\cdots,n_{L/2-1}\right)$ 对二分划分进行的几何表征。虽然对称性等价二分必定具有相同的交叉键向量，但交叉键向量相同并不意味着两个二分划分必定对称性等价。事实上，在对称操作下不等价的两个二分划分可能会偶然具有相同的交叉键向量。

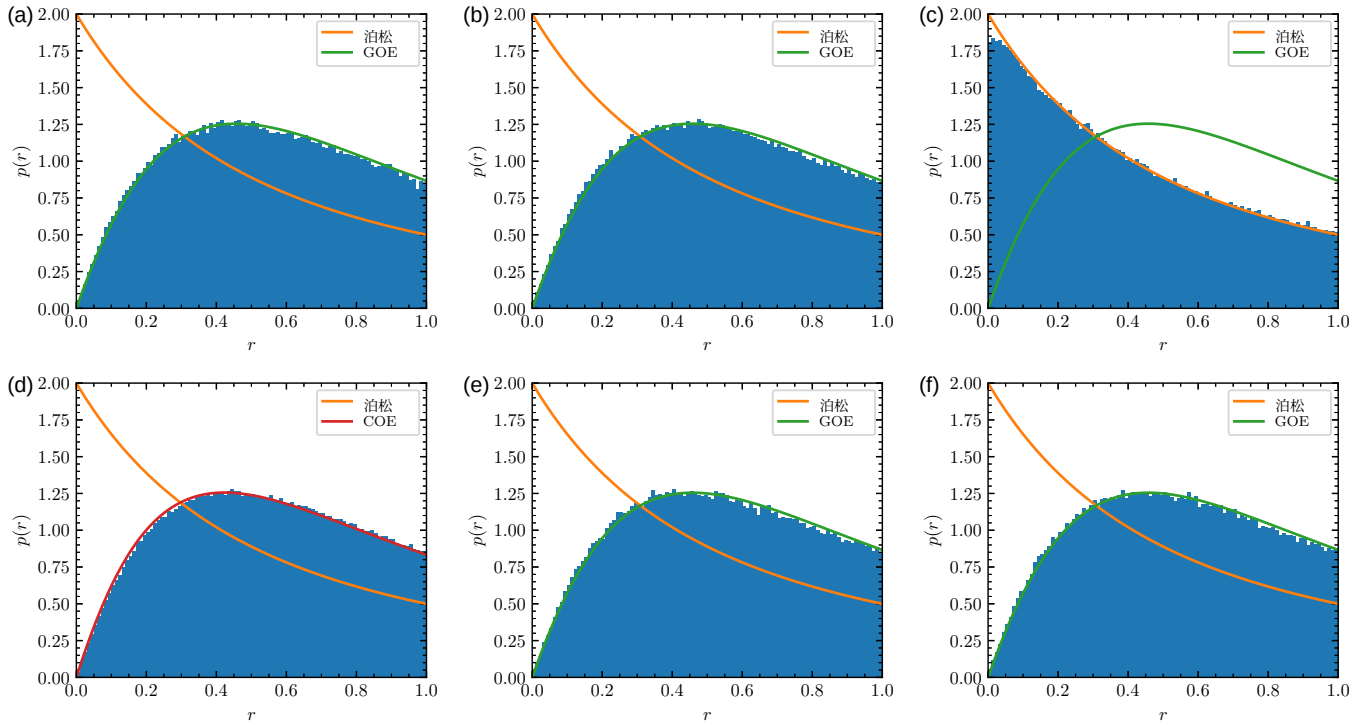


图 S3. 各种算符的能级间距比值分布 $p(r)$。作为比较，图中以实线叠加了理论预测。子图 (a-d) 展示了系统尺寸为 $L=16$ 时，$\hat{}H_{\mathrm{NN}}(W=0.5)$、$\hat{}H_{\mathrm{NNN}}$、$\hat{}H_{\mathrm{NN}}(W=5.0)$ 和 $\hat{}F$ 在半填充扇区内的结果。由于我们在考虑由 $\hat{}H_{\mathrm{NN}}(W=0.5)$ 控制的动力学时采用了较小的系统尺寸，因此 (f) 中还展示了系统尺寸为 $L=12$ 时，$\hat{}H_{\mathrm{NN}}(W=0.5)$ 在半填充扇区内的另一项结果。(e) 展示了 $L=12$ 时，$\hat{}H_{\mathrm{MF}}$ 在整个希尔伯特空间中的结果。(a-d) 中的每个直方图均由 100 个独立样本汇总而成，各样本具有相应强度的无序实现；(e) 和 (f) 中的样本数分别为 200 和 1000。(a) $\hat{}H_{\mathrm{NN}}(W=0.5)$ 的最近邻热化情形。$L=16$。$\bar{r}\approx 0.531$。(b) $\hat{}H_{\mathrm{NNN}}$ 的次近邻热化情形。$\bar{r}\approx 0.530$。(c) $\hat{}H_{\mathrm{NN}}(W=5.0)$ 的多体局域化情形。$\bar{r}\approx 0.390$。(d) $\hat{}F=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}T_0\hat{}H_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}T_1\hat{}H_1}$ 的 Floquet 热化情形。$\bar{r}\approx 0.531$。(e) $\hat{}H_{\mathrm{MF}}$ 的混合场热化情形。$\bar{r}\approx 0.531$。(f) $\hat{}H_{\mathrm{NN}}(W=0.5)$ 的最近邻热化情形。$L=12$。$\bar{r}\approx 0.531$。

值得注意的是，我们的数值结果表明，即使共享相同的交叉键向量，这类对称性不等价二分划分也可能产生略有不同的平均纠缠熵值。这种非平凡差异意味着，每个$N(L,n_0)$ 个代表二分都构成拟合框架中的一个独立数据点 $\left(n_1,n_2,\cdots,n_{L/2-1},S\right)$。因此，对于每个固定的子系统大小 n_0 和链长 L，拟合均基于包含 $N(L,n_0)$ 个样本的数据集进行。

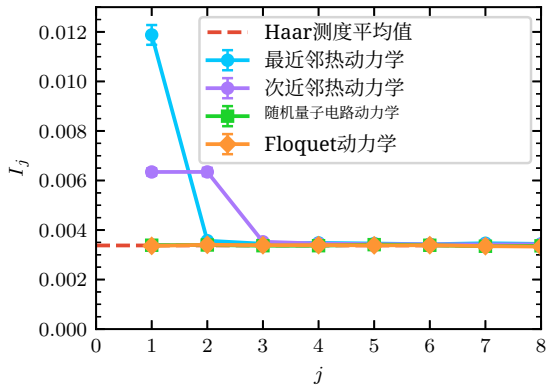
表 I. 对于具有周期性边界条件、长度为 $L=12$ 或 16 的自旋链，本表列出了每种子系统大小 n_0 下，彼此不等价的对称性代表性二分划分的数量 $N(L,\ n_0)$，以及唯一交叉键几何构型的数量 $M(L,\ n_0)$。

n_0	1	2	3	4	5	6	7	8
$N(16,\ n_0)$	1	8	21	72	147	280	375	257
$M(16,\ n_0)$	1	8	21	70	137	246	327	254
$N(12,\ n_0)$	1	6	12	29	38	35		
$M(12,\ n_0)$	1	6	12	28	35	35		

为评估自变量的多样性，我们还统计了固定子系统大小下不同交叉键向量的数量，记为 $M(L,n_0)$。该数量表示回归预测变量空间中不同位置的数量。根据定义，$M(L,n_0)\leqslant N(L,n_0)$。如表 I 所示，对于本文考察的情况，$M(L,n_0)$ 的数值仅略小于 $N(L,n_0)$ 的数值。这证实所采样的几何构型并非高度简并，而是良好地分布于整个预测变量空间中（事实上，对于表 I 所列情况，最大简并度不超过 3），从而确保了拟合过程的可靠性。

IV. 关于互信息的更多结果

为阐明正文中讨论的纠缠键张力层级 $\{\omega_j\}$，本节系统比较了不同热动力学下的饱和互信息 $\{I_j\}$（图 S4）。正如多重二分纠缠层析所观察到的，随机量子电路和 Floquet动力学完美再现了 Haar 测度平均值。相比之下，两个哈密顿量动力学表现出短程互信息；具体而言，在发生直接自旋相互作用的距离处，互信息显著高于较长距离处的数值。这些互信息的趋势与所有动力学方案下得到的纠缠键张力结果高度一致。



图S4。 $L = 16$各种热动力学的饱和互信息 $\{I_j\}$。对于最近邻热动力学和次近邻热动力学，结果展示的是演化时间$t = 1000.0$ 时的数据；对于随机量子电路，展示的是电路深度为2000时的数据；对于Floquet动力学，展示的是经过100个周期后的数据。所有数据均取1000个随机样本的平均值。

V. 拟合质量的详细分析及更多拟合结果

本节将对由我们的多二分划分纠缠层析术得到的线性拟合结果进行系统分析。为展示研究结果的普适性，我们不仅给出正文中讨论的等尺寸二分（$n_0 = L/2$）结果，还展示若干不等尺寸二分（$n_0 < L/2$）的结果。我们重点考察较大的 n_0 值，因为这些值涉及更丰富的交叉键几何构型，并且有限尺寸效应更小。对于每种动力学方案，我们选取具有代表性的时间点（或演化深度/周期），以展示演化不同阶段的纠缠键张力 $\{\omega_j\}$。下面的图展示了不同方案中的结果，为正文讨论的键纠缠张力层级和键加和定律的稳健性提供了清晰证据。

用于拟合的所有纠缠熵数据均取自 1000 个随机样本的平均值。每幅图均采用三列格式，以全面展示拟合质量和 underlying physical data：第一列显示提取出的纠缠键张力 $\{\omega_j\}$ 随键序 j的变化。这揭示了纠缠的几何结构。第二列显示纠缠熵 S 的原始分布随最近邻交叉键数量 n_1的变化。这展示了原始数据的结构。第三列直接比较实际测量的纠缠熵值（S）与我们的键加和模型预测的数值（S_{fitted}）。红色虚线表示理想情况 $S = S_{\text{fitted}}$。数据点紧密聚集在该直线周围，从视觉上证实了我们的多重二分纠缠层析具有极高的质量和预测能力。图 S5 至图 S7 展示的是最近邻热动力学的情形。图 S8 至图 S10 展示的是次近邻热动力学的情形。图 S11 至图 S13 展示的是多体局域化动力学的情形。图 S14 至图S16 展示的是混合场动力学的情形。图S17 至图 S19 展示的是由 $\hat{} H_{\text{NN}}(W = 0.5)$ 控制、从不具有电荷 $U(1)$守恒的随机乘积态出发的动力学情形，其定义见公式（S7）。图S20 和图S21 展示的是随机量子电路动力学的情形。图S22 和图S23 展示的是 Floquet动力学的情形。

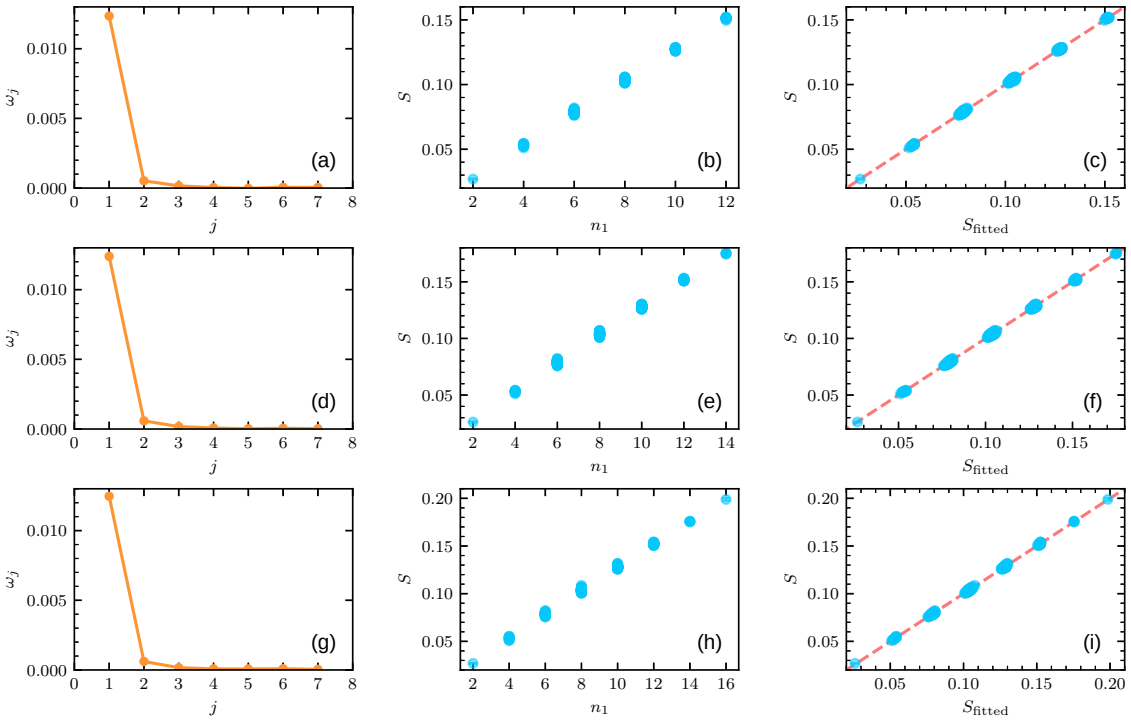


图 S5. $L = 16$ 的最近邻热动力学结果。演化时间 $t = 0.1$。(a-c) $n_0 = 6$, $R^2 \approx 0.9994$。(d-f) $n_0 = 7$, $R^2 \approx 0.9993$ $n_0 = 8$ $R^2 \approx 0.9993$ 。(g-i) , 。

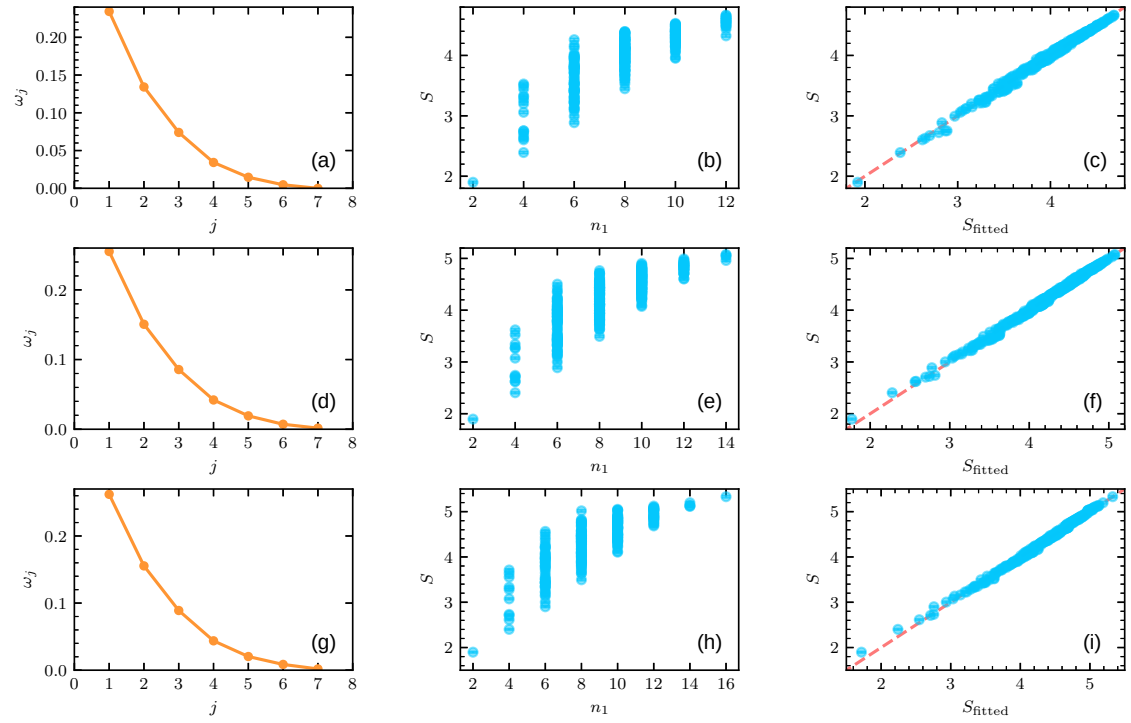


图 S6. $L = 16$ 的最近邻热动力学结果。演化时间 $t = 2.0$。(a-c) $n_0 = 6$, $R^2 \approx 0.9933$。(d-f) $n_0 = 7$, $R^2 \approx 0.9957$ $n_0 = 8$ $R^2 \approx 0.9959$ 。(g-i) , 。

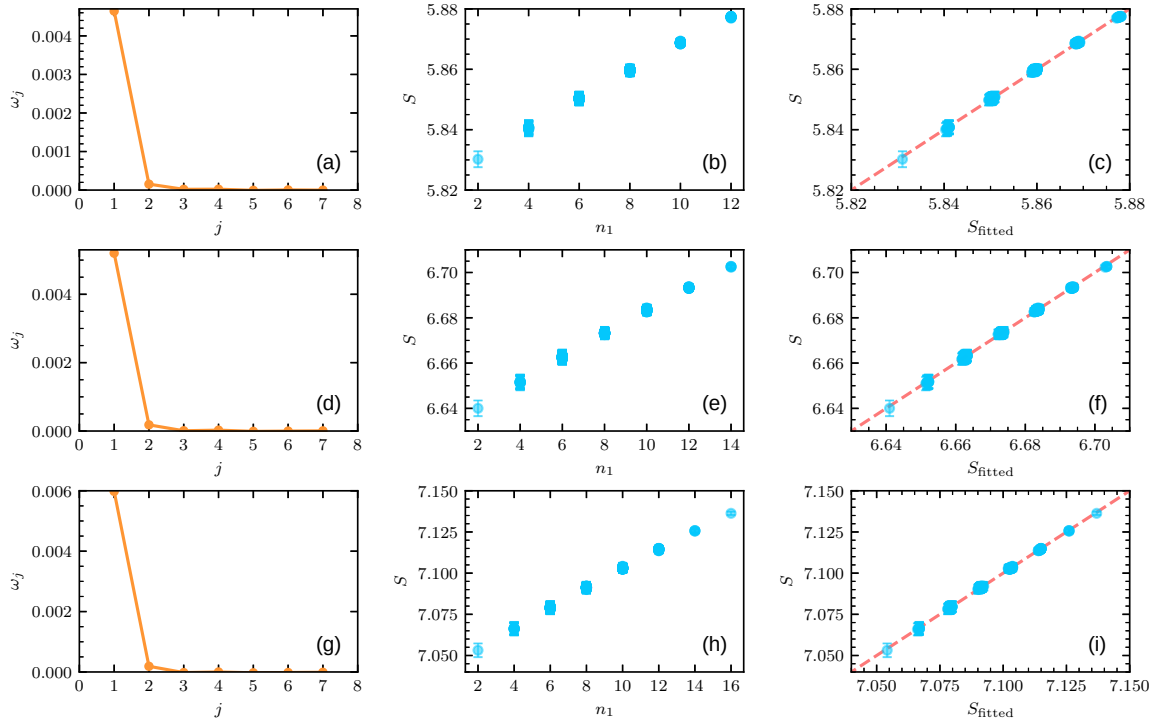


图 S7. $L = 16$ 的最近邻热动力学结果。演化时间 $t = 1000.0$。(a-c) $n_0 = 6$, $R^2 \approx 0.9994$。(d-f) $n_0 = 7$, $R^2 \approx 0.9994$ $n_0 = 8$ $R^2 \approx 0.9995$ 。(g-i) , 。

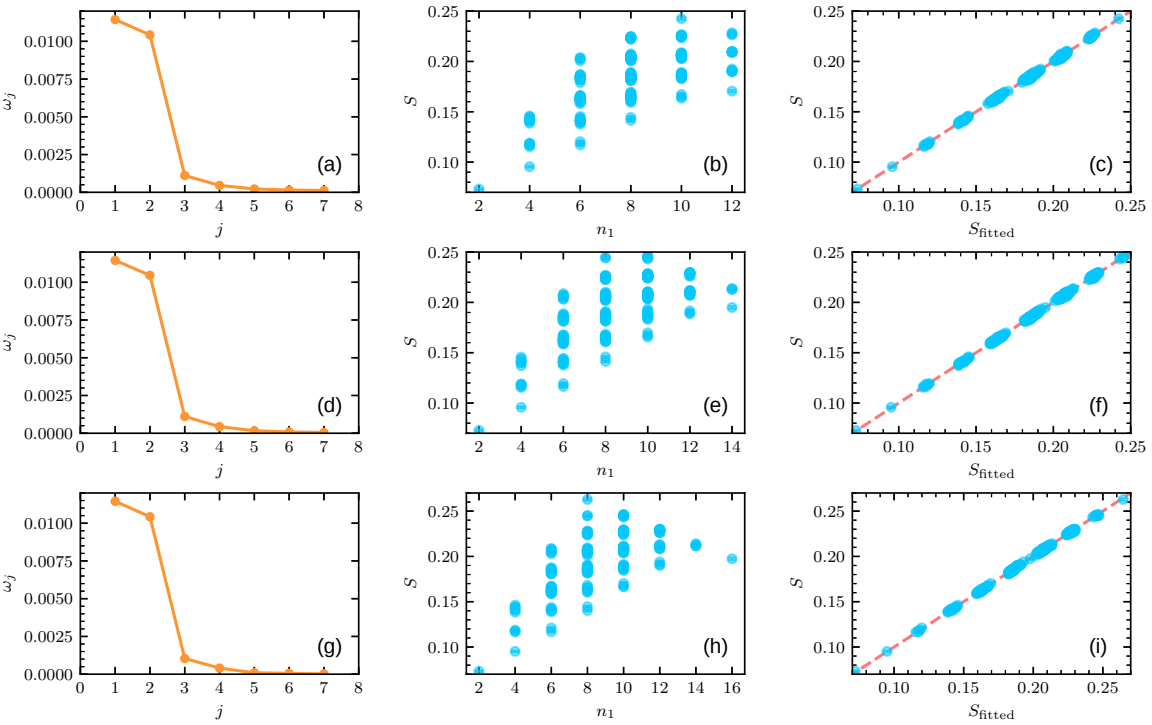


图 S8. $L = 16$ 的次近邻热动力学结果。演化时间 $t = 0.1$。(a-c) $n_0 = 6$, $R^2 \approx 0.9989$。(d-f) $n_0 = 7$, $R^2 \approx 0.9991$ $n_0 = 8$ $R^2 \approx 0.9992$ 。(g-i) , 。

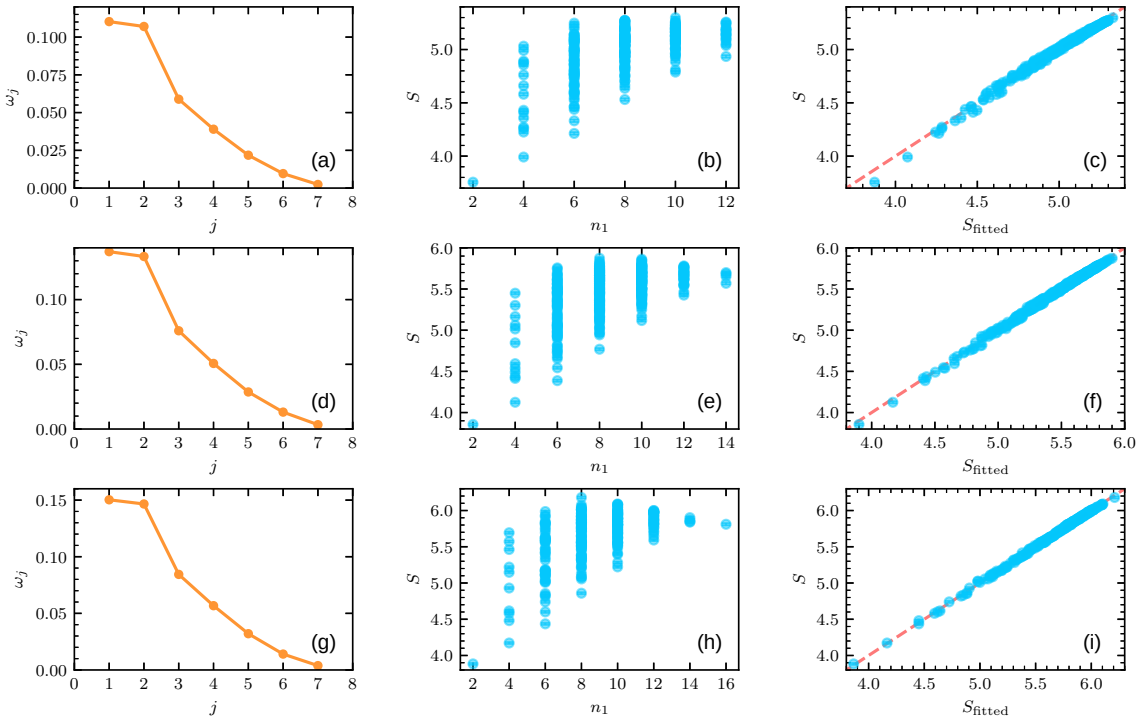


图 S9。 $L = 16$ 的次近邻热动力学结果。演化时间 $t = 2.0$。 （a-c） $n_0 = 6$、 $R^2 \approx 0.9923$。 （d-f） $n_0 = 7$、 $R^2 \approx 0.9974$ $n_0 = 8$ $R^2 \approx 0.9989$ 。 （g-i），。

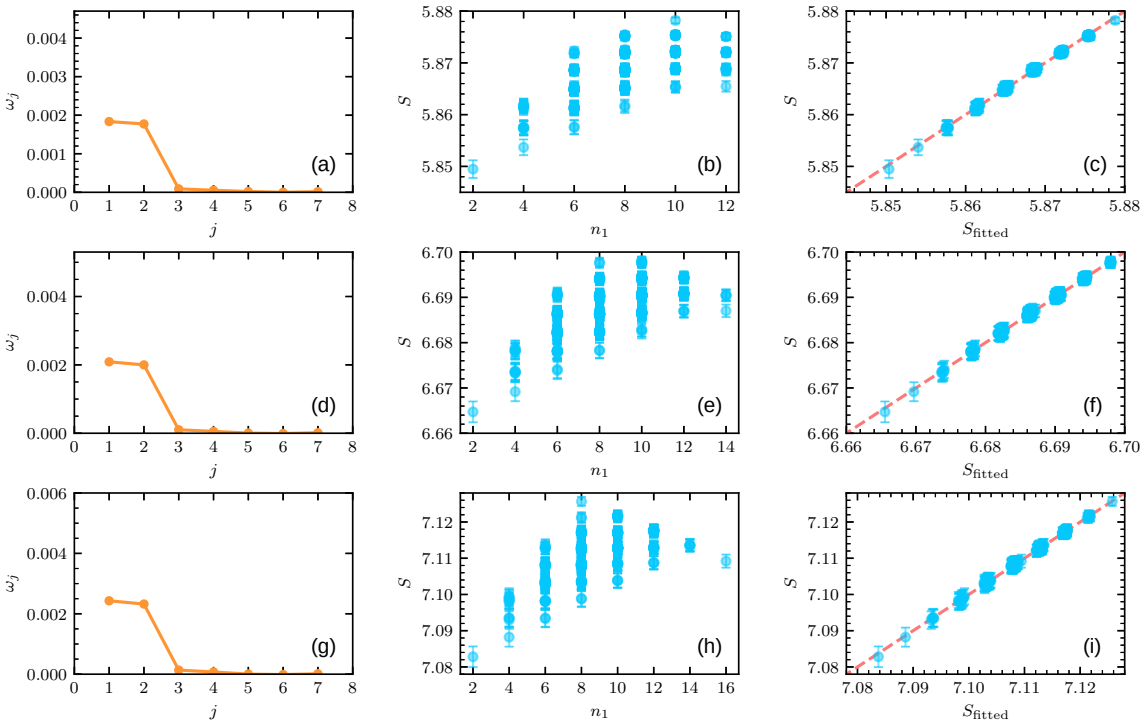


图 S10。 $L = 16$ 的次近邻热动力学结果。演化时间 $t = 1000.0$。 （a-c） $n_0 = 6$、 $R^2 \approx 0.9979$。 （d-f） $n_0 = 7$、 $R^2 \approx 0.9982$ $n_0 = 8$ $R^2 \approx 0.9986$ 。 （g-i），。

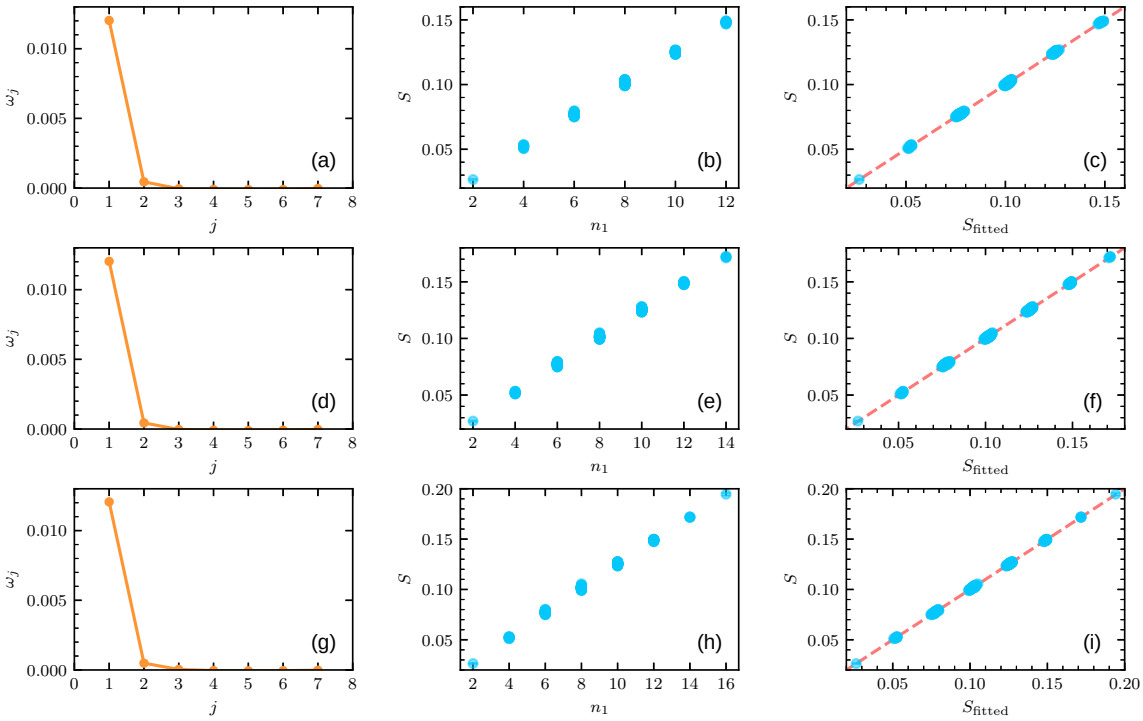


图 S11. $L = 16$ 的多体局域化动力学结果。演化时间 $t = 0.1$。(a-c) $n_0 = 6$, $R^2 \approx 0.9996$。(d-f) $n_0 = 7$, $R^2 \approx 0.9997$。(g-i) $n_0 = 8$, $R^2 \approx 0.9998$。

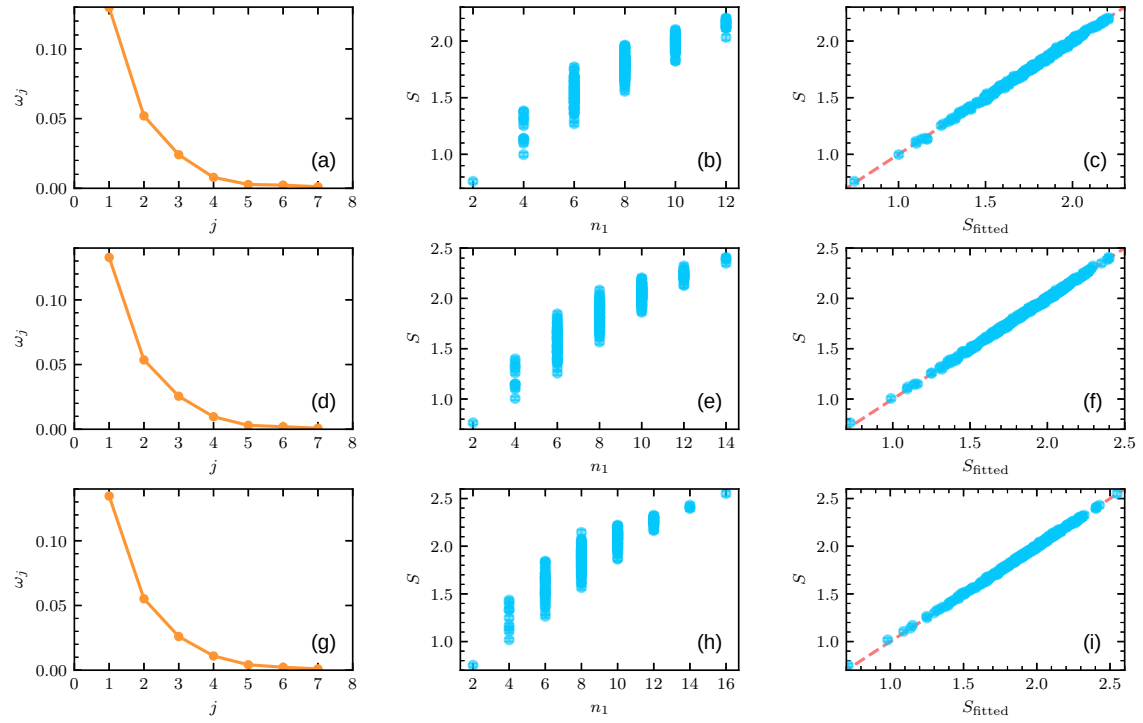


图 S12. $L = 16$ 的多体局域化动力学结果。演化时间 $t = 10.0$。(a-c) $n_0 = 6$, $R^2 \approx 0.9976$。(d-f) $n_0 = 7$, $R^2 \approx 0.9981$ $n_0 = 8$ $R^2 \approx 0.9984$ 。(g-i) , 。

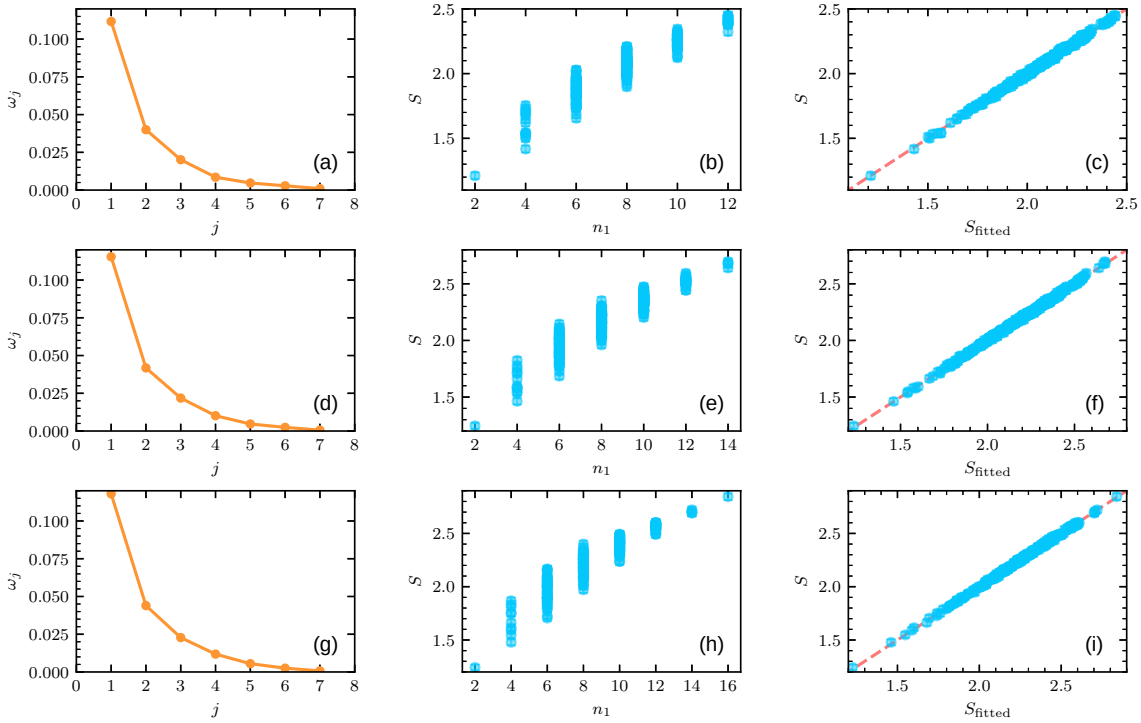


图 S13. $L = 16$ 的多体局域化动力学结果。演化时间 $t = 1000.0$。(a-c) $n_0 = 6$, $R^2 \approx 0.9972$。(d-f) $n_0 = 7$, $R^2 \approx 0.9976$ $n_0 = 8$ $R^2 \approx 0.9981$ 。(g-i) , 。

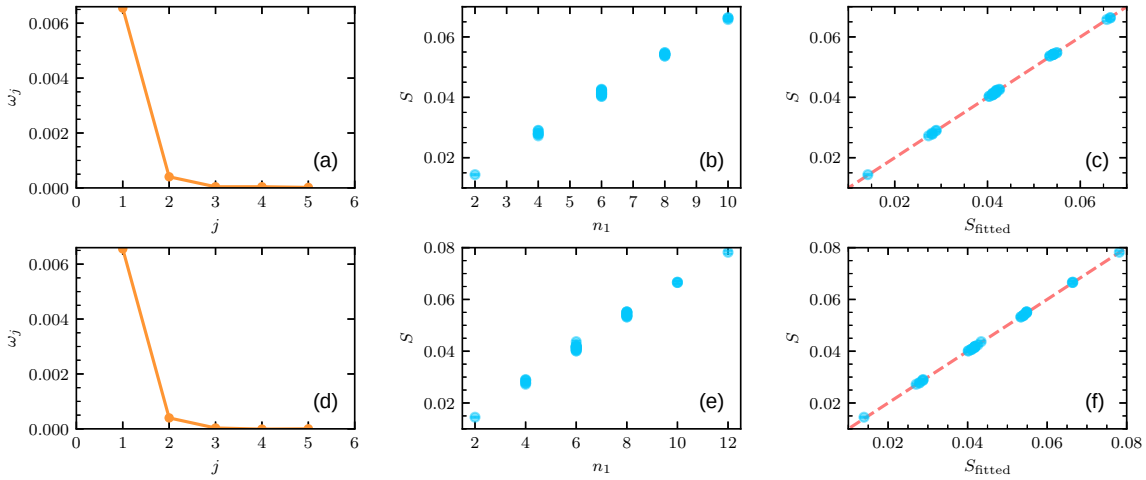
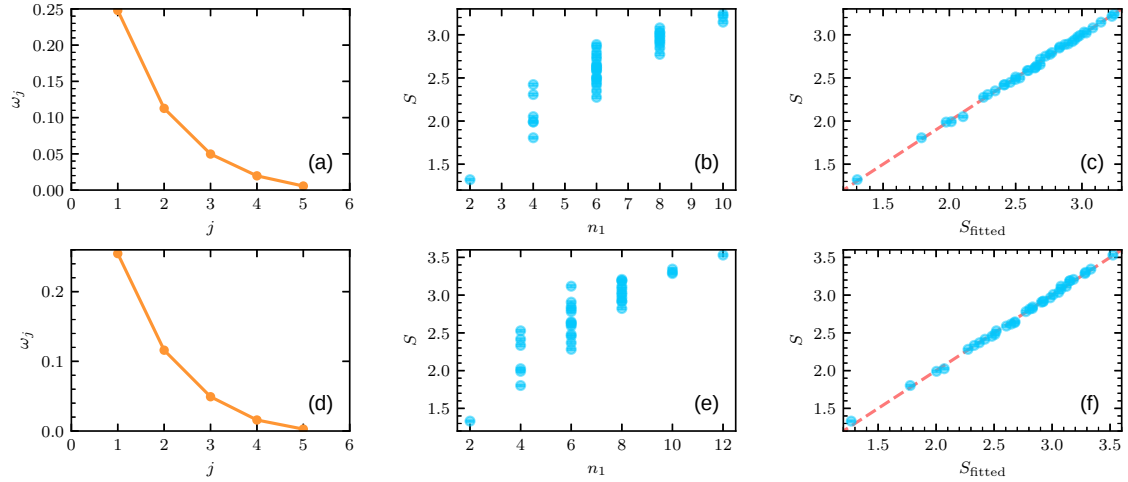
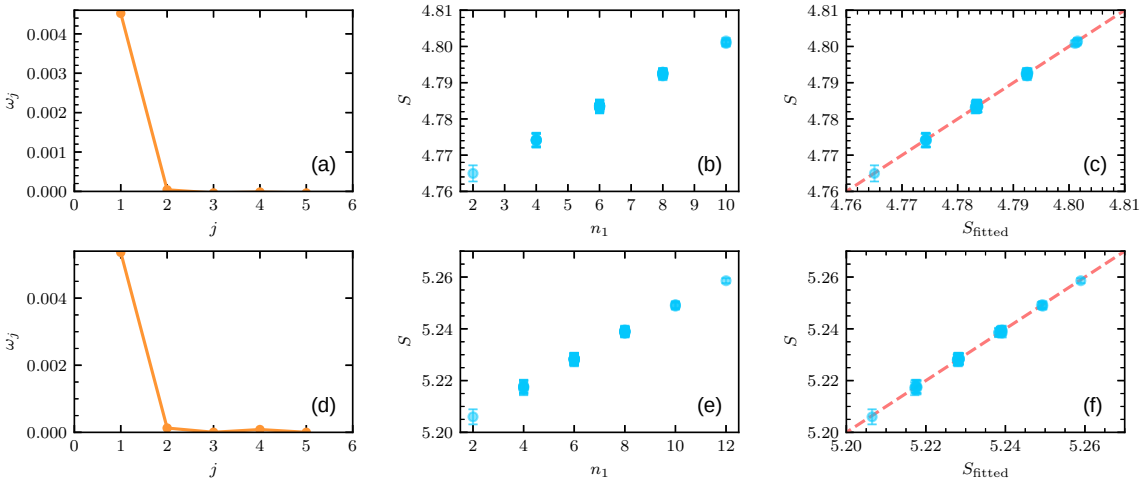


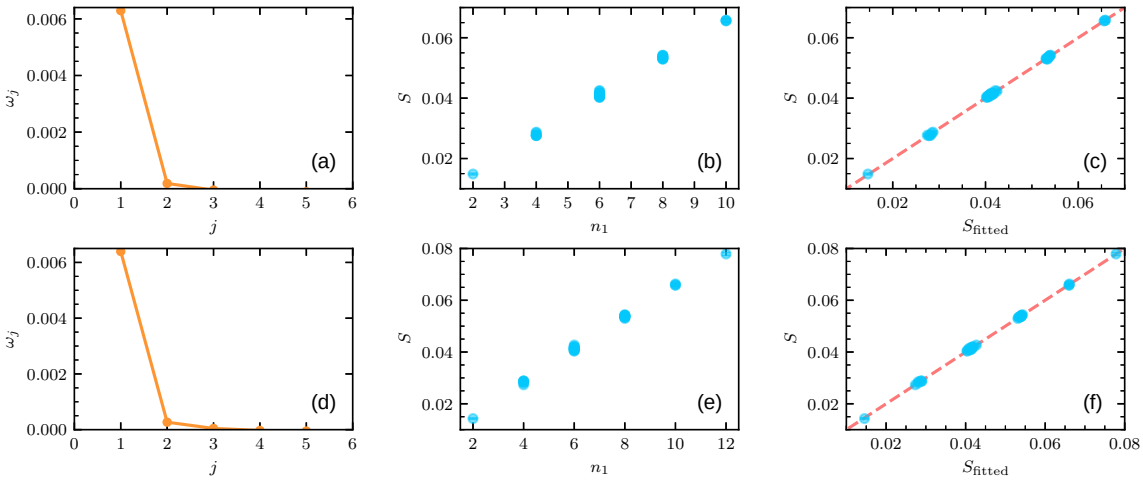
图 S14. $L = 12$ 的混合场动力学结果。演化时间 $t = 0.1$。(a-c) $n_0 = 5$, $R^2 \approx 0.9997$。(d-f) $n_0 = 6$, $R^2 \approx 0.9997$ 。



图S15. $L = 12$的混合场动力学结果。演化时间 $t = 2.0$。(a-c) $n_0 = 5$, $R^2 \approx 0.9978$。(d-f) $n_0 = 6$, $R^2 \approx 0.9975$ 。



图S16. $L = 12$的混合场动力学结果。演化时间 $t = 1000.0$。(a-c) $n_0 = 5$, $R^2 \approx 0.9991$。(d-f) $n_0 = 6$, $R^2 \approx 0.9990$ 。



图S17. 从随机乘积态出发，由 $\hat{} H_{\text{NN}}(W = 0.5)$ 支配的动力学结果，适用于 $L = 12$。演化时间 $t = 0.1$。(a-c) $n_0 = 5$, $R^2 \approx 0.9996$。(d-f) $n_0 = 6$, $R^2 \approx 0.9998$。

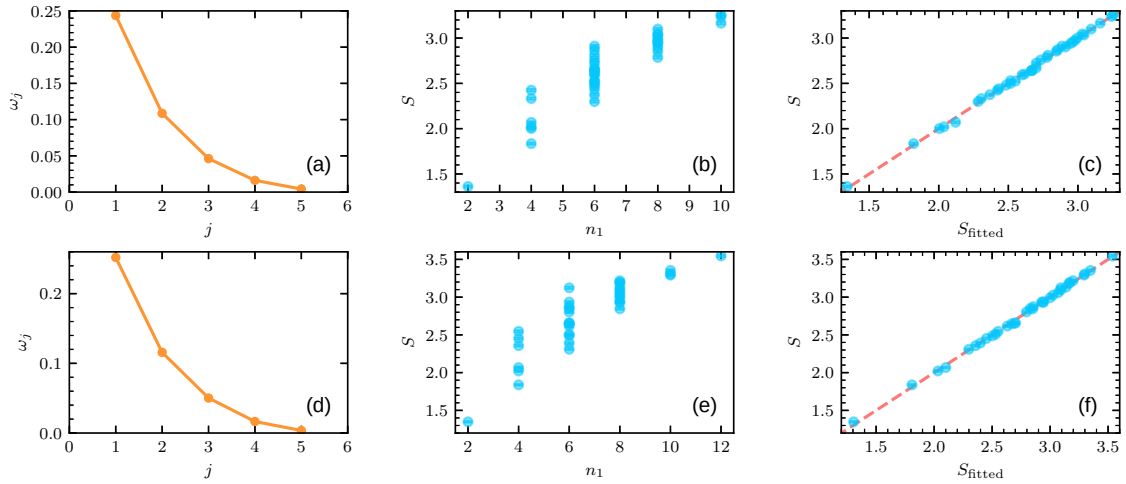


图 S18. 由 $\hat{} H_{\text{NN}}(W = 0.5)$ 控制的动力学从随机乘积态出发，在 $L = 12$ 下的结果。演化时间为 $t = 2.0$。（a-c） $n_0 = 5$、 $R^2 \approx 0.9980$。（d-f） $n_0 = 6$、 $R^2 \approx 0.9983$。

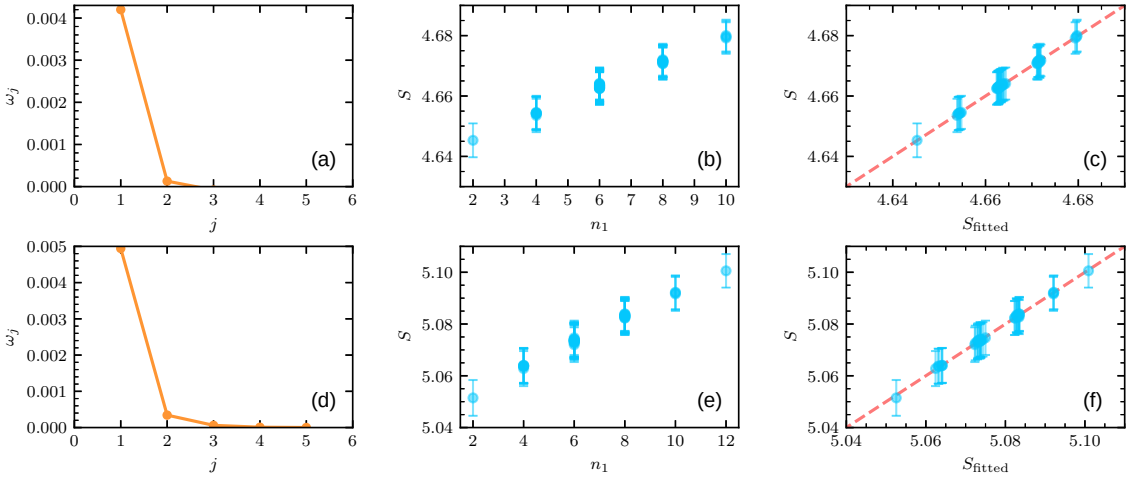
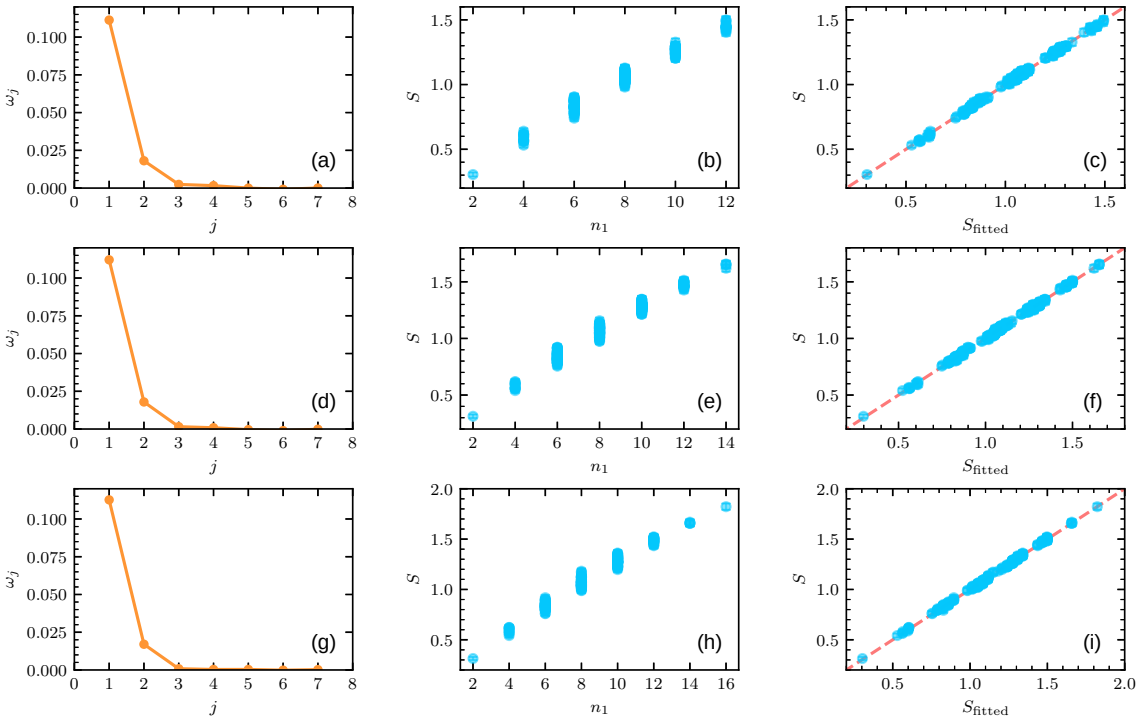
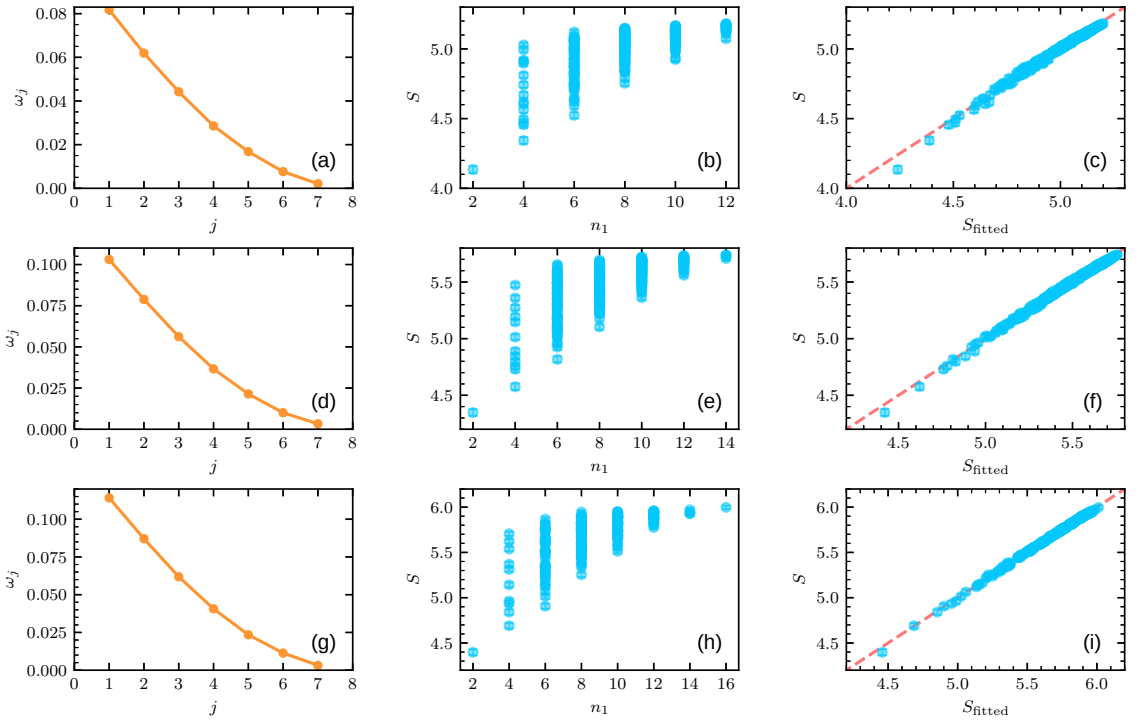


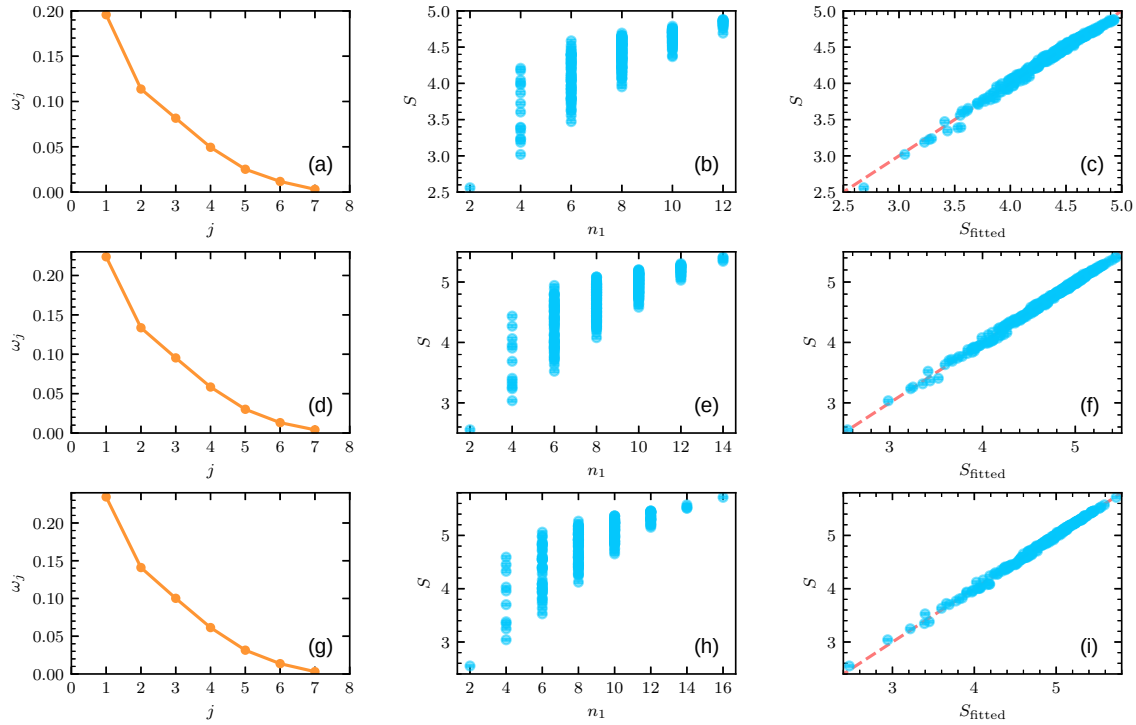
图 S19. 由 $\hat{} H_{\text{NN}}(W = 0.5)$ 控制的动力学从随机乘积态出发，在 $L = 12$ 下的结果。演化时间为 $t = 1000.0$。（a-c） $n_0 = 5$、 $R^2 \approx 0.9991$。（d-f） $n_0 = 6$、 $R^2 \approx 0.9986$。



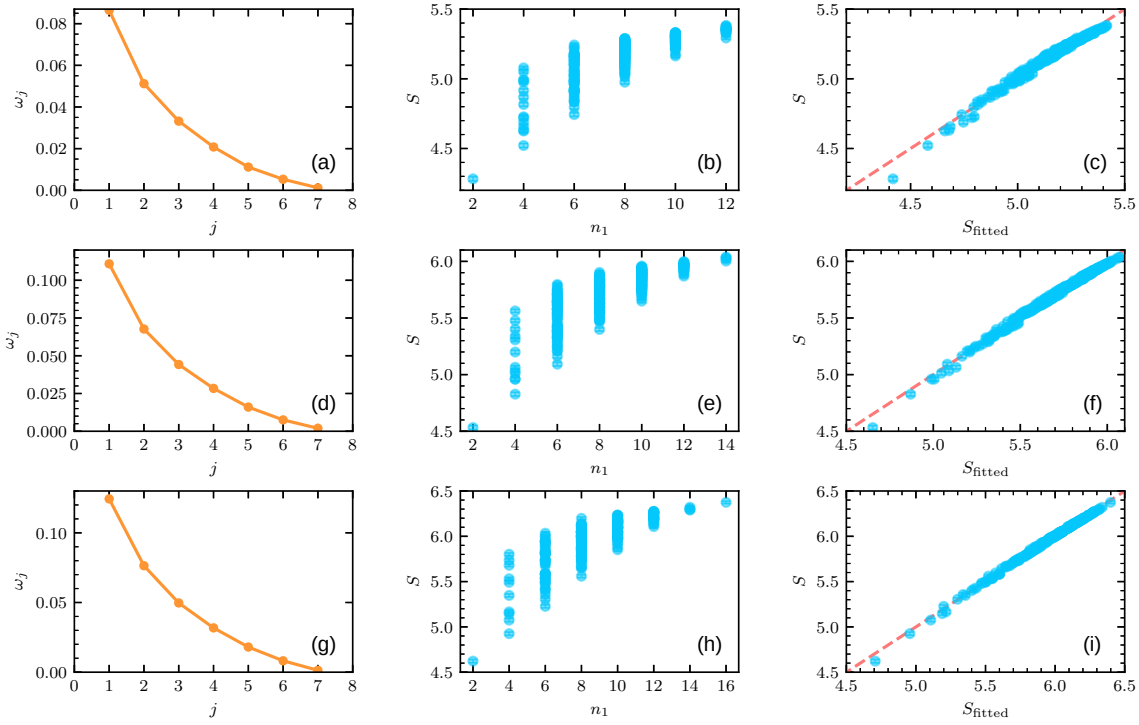
图S20. $L = 16$ 的随机量子电路动力学结果。演化深度为 5。(a-c) $n_0 = 6$, $R^2 \approx 0.9975$。(d-f) $n_0 = 7$, $R^2 \approx 0.9975$。(g-i) $n_0 = 8$, $R^2 \approx 0.9978$。



图S21. $L = 16$ 的随机量子电路动力学结果。演化深度为 100。(a-c) $n_0 = 6$, $R^2 \approx 0.9919$。(d-f) $n_0 = 7$, $R^2 \approx 0.9968$。(g-i) $n_0 = 8$, $R^2 \approx 0.9986$。



图S22. $L = 16$ 的 Floquet动力学结果。演化周期数为 1。(a-c) $n_0 = 6$, $R^2 \approx 0.9899$。(d-f) $n_0 = 7$, $R^2 \approx 0.9955$。(g-i) $n_0 = 8$, $R^2 \approx 0.9964$。



图S23. $L = 16$ 的 Floquet动力学结果。演化周期数为 3。(a-c) $n_0 = 6$, $R^2 \approx 0.9836$。(d-f) $n_0 = 7$, $R^2 \approx 0.9942$。(g-i) $n_0 = 8$, $R^2 \approx 0.9977$。