arXiv:2601.01334v1 [econ.TH] 4 Jan 2026

风险下保留判断的共识

Leo Kurata 和 Kensei Nakamura

2026年1月6日

摘要

本文研究风险下的偏好聚合。在我们的模型中，每个个体都有一个由一组期望效用函数表示的不完备偏好关系。经典的帕累托原则并未涉及包含犹豫不决情形的共识。为考察尊重此类共识的影响，我们引入了帕累托原则的一个版本，即在部分个体保留判断时也可适用的原则。我们的主要结果表明，根据这一原则，对于个体效用函数的每一种组合，都存在一个相应的社会效用函数，该函数由个体效用函数的加权和构成。这些聚合规则能够保证标准帕累托原则无法确保的自然属性。

关键词：偏好聚合，风险，帕累托原则，不完备偏好，功利主义*JEL*：D71,D81

一、引言

本文探讨一个集体决策问题：个人并不确定自己对风险前景的偏好，因此有时会保留判断。关于市场、机制和规范福利标准的浩瀚文献，将帕累托原则（或效率）视为比较社会状态最基本的概念。该标准要求，如果所有个人对两个备选方案的偏好一致，那么这种一致也应反映在社会偏好中。换言之，根据这一原则，社会偏好应与个人的一致意见相容。尽管这一标准广受欢迎，却忽略了个人可能保留判断时所存在的一种一致意见（即他们的偏好可能不满足完备性）。

作者感谢 Kaname Miyagishima、Koichi Tadenuma 和 Shohei Yanagita 提供的宝贵意见。本研究得到科研费（编号：25KJ2146 和 25KJ1298）的资助。Kurata：早稻田大学经济学研究生院，东京，日本（电子邮箱：leo.kurata.ac@gmail.com）。Nakamura：一桥大学经济学研究生院，东京，日本（电子邮箱：kensei.nakamura.econ@gmail.com）。

假设一些个人认为政策 A 优于政策 B，而其余个人由于难以比较这两项政策而保留判断。在这种情况下，帕累托原则无从给出结论，因为不存在“政策 A 优于政策 B”这一一致意见。然而，个人之间仍存在另一种一致意见：政策 B**不**弱于政策 A。为了将这些一致意见纳入考量，本文考察了帕累托原则的对偶原则，并称之为帕累托* 原则。[1] 该原则要求，如果所有个人都认为一个风险前景并不弱于另一个风险前景，那么社会偏好也应得出同样的结论。

与 Danan、Gajdos 和 Tallon（2015）一样，我们研究这样一种框架：所有主体都遵循期望多效用模型（Dubra、Maccheroni 和 Ok，2004）：每个主体都有一组效用函数；当且仅当对每个合理的效用函数而言，前一个前景的期望效用至少与后一个前景一样高时，该主体才认为前一个前景弱优于后一个前景。也就是说，除非所有效用函数对这两种彩票给出相同的评价，否则他们会对二者的比较保留判断。Danan、Gajdos 和 Tallon（2015）研究了帕累托原则在这一框架下的影响。粗略而言，他们证明，每个社会效用函数都必须通过类似 Harsanyi（1955）的加权功利主义规则，由某种个体效用函数组合构造而成。

我们的主要结果刻画了帕累托* 原则的影响，并表明这一原则的作用与标准帕累托原则互为补充。具体而言，从每个个体的效用函数集合中任取一个效用函数。根据我们的定理，帕累托* 原则要求社会偏好尊重所选效用函数的组合。更准确地说，**对于每一种个体效用函数组合，都必须存在一个可由这些效用函数的加权和实质性表示的社会效用函数**。这些规则禁止社会偏好忽视任何一种个体效用函数组合。

由此可以立即得出，在我们的规则下，所有个体共同拥有的效用函数也会被社会偏好所采纳。换言之，社会规划者不能任意舍弃所有个体都认为合理的效用函数。请注意，Danan、Gajdos 和 Tallon（2015）提出的规则不具备这一性质，因为它们允许舍弃某些效用函数的组合。此外，结合标准的帕累托原则后，帕累托* 原则表明，如果所有个体拥有一组共同的效用函数，那么社会规划者也必须拥有同一组效用函数。因此，帕累托* 原则确保社会规划者尊重个体偏好中体现的共识。

本文结构安排如下：第二节将我们的模型形式化。第三节给出主定理并阐释其含义。第四节考察……的影响

[1]Kurata 和 Nakamura（2025）也在歧义背景下研究了这一公理。详情请见第五节。

帕累托* 原则的各种变体。第五节讨论相关文献。

II. 模型

我们研究 Danan、Gajdos 和 Tallon（2015）考察的模型。设Z 为一个有限结果集。我们用 $\Delta(Z)$表示Z上的彩票集合。设$N = \{1, 2, \ldots, n\}$为由$n \geq 2$个个体组成的集合。社会规划者记为 0。每个个体$i \in N \cup \{0\}$在 $\Delta(Z)$上具有非退化偏好关系 $\succsim_i$。对于所有l、$l' \in \Delta(Z)$，若个体i认为l 至少与l'同样可取，我们记为$l \succsim_i l'$。 $\succsim_i$ 的对称部分和非对称部分分别记为 $\sim_i$ 和 $\succ_i$。

我们假设每个关系 $\succsim_i$ 都可由期望多效用模型（Dubra、Maccheroni 和 Ok，2004）表示。也就是说，对于每个$i \in N \cup \{0\}$，都存在一个非空紧凸集 $\mathcal{U}_i$，其元素是从Z到 $\mathbb{R}$的非恒定函数，并且对于所有l、$l' \in \Delta(Z)$，

$$l \succsim_i l' \iff \left[\sum_{z \in Z} l(z) u_i(z) \geq \sum_{z \in Z} l'(z) u_i(z) \quad \text{for all } u_i \in \mathcal{U}_i \right].$$

也就是说，如果对于所有纳入考虑的效用函数，l 的期望效用水平都不低于 l'，那么个体 i 弱偏好 l 而非 l'。这类偏好通常并不完备。如果两种效用函数$\mathcal{U}_i$给出的评价相互矛盾，个体 i 对 l 与 l' 之间的比较就保留判断；也就是说，存在 $u_i, u'_i \in \mathcal{U}_i$ 使得 $\sum_{z \in Z} l(z) u_i(z) > \sum_{z \in Z} l'(z) u_i(z)$，但 $\sum_{z \in Z} l'(z) u'_i(z) > \sum_{z \in Z} l(z) u'_i(z)$。注意，如果集合 $\mathcal{U}_i$是单元素集，那么 $\succsim_i$ 就成为一种期望效用偏好关系。

对于从 Z 到 $\mathbb{R}$ 的两个非恒定函数 u 和 u'，若存在某个 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}$ 使得 $u = \alpha u' + \beta$，则记作 $u \approx u'$。对于从 Z 到 $\mathbb{R}$ 的两个非空紧凸集 $\mathcal{U}$和 $\mathcal{U}'$（其中元素均为非恒定函数），若满足 (i) 对所有 $u \in \mathcal{U}$，都存在 $u' \in \mathcal{U}'$，使得 $u \approx u'$；且 (ii) 对所有 $v' \in \mathcal{U}'$，都存在 $v \in \mathcal{U}$，使得 $v \approx v'$，则记作 $\mathcal{U} \approx \mathcal{U}'$。因此，$\mathcal{U} \approx \mathcal{U}'$表示这两个集合之间的差异仅在于正仿射变换。

我们为偏好剖面引入一个假设。若存在z^*、$z_* \in Z$，使得对所有$u \in \bigcup_{i \in N} \mathcal{U}_i$，均有$u(z^*) > u(z_*)$，则称$(\mathcal{U}_i)_{i \in N}$ 具有无冲突对。也就是说，该假设要求存在一对结果，其中一个显然优于另一个。

III. 主要刻画

在偏好聚合中，社会评价通常要求尊重个人一致同意的结论。以下是最标准的形式化表述。

公理1 (帕累托)。 对于所有 $l, l' \in \Delta(Z)$，若对所有 $i \in N$，均有 $l \succsim_i l'$，则 $l \succsim_0 l'$。

我们考察上述内容的“对偶”情形。考虑这样一种情况：一些人严格偏好彩票 l'胜过另一种彩票 l，而其余人无法对二者进行比较。那么，

帕累托没有提出任何结论，因为其前提并不成立。然而，我们可以观察到，这些人达成了另一种形式的一致，即没有 任何人认为l至少不差于l'。下述公理要求社会规划者尊重这种一致性。也就是说，如果人们认为l不至少优于另一种彩票l'，那么社会规划者也应得出相同的结论。

公理2 (帕累托*)。 对于所有 $l,l' \in \Delta(Z)$，若对所有 $i \in N$，$l \not\succsim_i l'$，则 $l \not\succsim_0 l'$。

根据 Danan、Gajdos 和 Tallon（2015），帕累托意味着 $\mathcal{U}_0$ 中的每个效用函数都必须表示为个人效用函数的加权和；也就是说，对于每个$u_0 \in \mathcal{U}_0$，都存在一个组合（$u_1,u_2,\ldots, u_n$）$\in \Pi_{i\in N}\mathcal{U}_i$，使得

$$u_0 = \sum_{i\in N} \alpha_i u_i + \beta$$

对于某个（α， β）$\in \left(\mathbb{R}^n_+ \setminus \{\mathbf{0}\}\right) \times \mathbb{R}$.[2] 这一结果是将 Harsanyi（1955年）的聚合定理自然推广到多效用情形。

我们的主定理表明，帕累托* 导出了一个与原始帕累托公理所蕴含的结论互为对偶的推论。

定理1。 假设每个 $i \in N \cup \{0\}$ 都具有一个期望多效用偏好关系 $\succsim_i$，且该关系与 $\mathcal{U}_i$ 相关，并且$(\mathcal{U}_i)_{i\in N}$ 存在一个无冲突对。那么，当且仅当对于每个$(u_1,u_2,\ldots,u_n) \in \Pi_{i\in N}\mathcal{U}_i$，都存在一个 $u_0 \in \mathcal{U}_0$，使得

$$u_0 = \sum_{i\in N} \alpha_i u_i + \beta$$

对于某个$(\alpha,\beta) \in \left(\mathbb{R}^n_+ \setminus \{\mathbf{0}\}\right) \times \mathbb{R}$。

这是将 Harsanyi 聚合定理推广到我们框架中的另一种方式（参见 De Meyer 和 Mongin，1995）。根据定理1，对于效用函数的每一种组合（$u_1,u_2,\ldots,u_n$）$\in \Pi_{i\in N}\mathcal{U}_i$，个体效用函数都以功利主义方式进行聚合。与 Danan、Gajdos 和 Tallon（2015）的结果相比，最重要的区别在于，帕累托* 原则确保**聚合过程中会用到效用函数的所有组合**。也就是说，这些规则禁止社会规划者忽略任何个体效用函数组合。

定理1的证明。“若”部分。设 $l, l' \in \Delta(Z)$ 满足对所有 $i \in N$ 均有 $l \not\succsim_i l'$。那么，对于每个 $i \in N$，都存在 $u_i \in \mathcal{U}_i$ 使得 $\sum_{z\in Z} l'(z)u_i(z) > \sum_{z\in Z} l(z)u_i(z)$。由于存在 $u_0 \in \mathcal{U}_0$ 使得对某个 $(\alpha,\beta) \in \left(\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}\right) \times \mathbb{R}$，有 $u_0 = \sum_{i\in N} \alpha_i u_i + \beta$，因此我们有

$$\sum_{z\in Z} l'(z)u_0(z) = \sum_{i\in N}\alpha_i \sum_{z\in Z} l'(z)u_i(z) + \beta > \sum_{i\in N}\alpha_i \sum_{z\in Z} l(z)u_i(z) + \beta = \sum_{z\in Z} l(z)u_0(z).$$

[2] 令$\mathbf{0}$ 和$\mathbf{1}$ 分别表示 $\mathbb{R}^k$中的零向量和全一向量。为简洁起见，我们省略对k 的依赖。

因此，我们有 $l \not\succsim_0 l'$。

“仅当”部分。反设帕累托* 成立，但存在 $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \Pi_{i\in N} \mathcal{U}_i$，使得对于所有 $u_0 \in \mathcal{U}_0$，u_0都不能写成 $u_0 = \sum_{i\in N} \alpha_i u_i + \beta$，其中 $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}^n_+ \setminus \{\mathbf{0}\}\right) \times \mathbb{R}$。令 $A = \left\{\sum_{i\in N} \alpha_i u_i + \beta \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^Z$。那么，由于每个$u_0$ 都不是常数，我们有

$$A \cap \mathcal{U}_0 = \emptyset. \tag{1}$$

令 $B = \left\{\alpha_0 u_0 + \beta_0 \mid \left(\alpha_0, \beta_0\right) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R},\, u_0 \in \mathcal{U}_0\right\} \cup \{\mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^Z$。那么，由（1）可得

$$A \cap B = \{\mathbf{0}\}.$$

注意到 A 和B 是凸锥。[3] 根据 Klee（1955）的定理2.7，存在$\lambda \in \mathbb{R}^Z \setminus \{\mathbf{0}\}$，使得对于所有 $\varphi \in A \setminus (-A)$ 以及所有 $\varphi' \in B$,

$$\sum_{z\in Z} \lambda(z)\varphi(z) > 0 \geq \sum_{z\in Z} \lambda(z)\varphi'(z).$$

我们证明 $A \cap (-A) = \{\gamma \mathbf{1}\}_{\gamma\in\mathbb{R}}$。反设存在一个非常值元素 $\psi \in A \cap (-A)$。由于 $(\mathcal{U}_i)_{i\in N}$具有一个无冲突对，因此存在 $(z^*, z_*) \in Z^2$，使得对于所有 $i \in N \cup \{0\}$ 以及所有 $u_i \in \mathcal{U}_i$, $u_i(z^*) > u_i(z_*)$。由于 ψ 非常值，存在 $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$，使得 $\psi = \sum_{i\in N} \alpha_i u_i + \beta$。因此，我们有 $\psi(z^*) > \psi(z_*)$。类似地，$\psi \in (-A)$ 蕴含 $\psi(z^*) < \psi(z_*)$，这就产生了矛盾。

因此，根据A和B的定义，对于所有$i \in N$、所有$u_0 \in \mathcal{U}_0$、所有 $\left(\alpha_0, \beta_0\right) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}$以及所有$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{z\in Z} \lambda(z)\left(\alpha_i u_i(z) + \beta_i\right) > 0 \geq \sum_{z\in Z} \lambda(z)\left(\alpha_0 u_0(z) + \beta_0\right). \tag{2}$$

对于每个$u \in \bigcup_{i\in N\cup\{0\}} \mathcal{U}_i$，令$\hat{u}$表示一个函数，使得$\sum_{z\in Z} \hat{u}(z) = 0$且$\hat{u} = \alpha u + \beta$对某个$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}$成立。然后，根据(2)，对于所有$i \in N$以及所有$u_0 \in \mathcal{U}_0$,

$$\sum_{z\in Z} \lambda(z)\hat{u}_i(z) > 0 \geq \sum_{z\in Z} \lambda(z)\hat{u}_0(z).$$

令 $\lambda = -\min_{z\in Z} \lambda(z) + 1$。由于 $\sum_{z\in Z} \hat{u}(z) = 0$对于所有$u \in \{u_1, \ldots, u_n\} \cup \mathcal{U}_0$均成立，因此对于所有$i \in N$以及所有$u_0 \in \mathcal{U}_0$,

$$\sum_{z\in Z} \left(\lambda(z) + \underline{\lambda}\right)\hat{u}_i(z) > 0 \geq \sum_{z\in Z} \left(\lambda(z) + \underline{\lambda}\right)\hat{u}_0(z). \tag{3}$$

[3]要证明A是一个锥，令 $\varphi \in A$且 $\lambda \in \mathbb{R}_{++}$。那么，存在$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}$使得$\varphi = \sum_{i\in N} \alpha_i u_i + \beta$。由于$\lambda\varphi = \sum_{i\in N} \lambda\alpha_i u_i + \lambda\beta$也成立，因此$A$是一个锥。通过类似的论证，可以验证$B$也是一个锥。

令l，$l'\in\Delta(Z)$ 满足：对于所有$z\in$Z </style}，

$$l(z)=\frac{\lambda(z)+\underline{\lambda}}{\sum_{z'\in Z}\lambda(z')+|Z|\underline{\lambda}}\ (>0)\ \text{ and }\ l'(z)=\frac{1}{|Z|}.$$

由（3）以及l和l'的定义可知，对于所有$i\in N$以及所有$u_0\in\mathcal{U}_0$，

$$\sum_{z\in Z}l(z)\hat{u}_i(z)>\sum_{z\in Z}l'(z)\hat{u}_i(z)\ \text{ and }\ \sum_{z\in Z}l'(z)\hat{u}_0(z)\geq\sum_{z\in Z}l(z)\hat{u}_0(z).$$

根据$\hat{u}$的构造，对于每个$i\in N$以及l，我们都有$l'\not\succsim_i l$和$l'\succsim_0$。这与帕累托*相矛盾。

□

请注意，在 Danan、Gajdos 和 Tallon（2015）刻画的聚合规则中，Harsanyi 的结果所确保的一项重要性质被舍弃了。为说明这一点，假设所有个体都具有与某个共同函数u相关联的期望效用偏好，并且规划者也遵循期望效用理论。那么，根据 Harsanyi 定理，规划者的效用函数必须是u。如果将这一观察推广到多效用情形，我们会预期：（i）如果所有个体的效用集中都包含u，那么规划者的效用集中也应包含它；（ii）如果所有个体都拥有共同的效用集（相差一个正仿射变换），那么规划者的效用集应与之相同。然而，由于 Danan、Gajdos 和 Tallon（2015）的聚合规则允许规划者持有任意足够小的效用函数集合，因此这些规则未必满足上述直观且在规范意义上令人信服的性质。

相较之下，施加帕累托*即可确保这些性质。以下推论将正式阐述这些结论。

推论1。 假设每个$i\in N\cup\{0\}$都有与$\mathcal{U}_i$相关联的期望多效用偏好关系，且$(\succsim_i)_{i\in N}$有一个无冲突对。以下两项陈述成立：

1. 设u是从Z到$\mathbb{R}$的非恒定函数。帕累托*意味着，如果存在$u_i\in\mathcal{U}_i$，使得对每个$i\in N$，$u_i\approx u$，那么对某个$u_0\in\mathcal{U}_0$，有$u_0\approx u$。 *2.* 设$\mathcal{U}$是从Z到$\mathbb{R}$的非恒定函数构成的非空紧凸集。帕累托和帕累托*意味着，如果对每个$i\in N$，都有$\mathcal{U}_i\approx\mathcal{U}$，那么$\mathcal{U}_0\approx\mathcal{U}$。

IV. 进一步结果

A. 非反转

我们研究尊重个体偏好的一个最弱条件，并探讨其含义。以下条件要求：如果所有个体都偏好一个彩票l而非另一个l'，那么社会规划者不应偏好l'而非l；也就是说，不应发生偏好逆转。

公理 3（非反转）。 对于所有l、$l'\in\Delta(Z)$，如果对于所有$i\in N$，$l\succ_i l'$，那么$l'\not\succsim_0 l$。

注意，非反转弱于帕累托*以及严格部分的帕累托条件（即，对于所有 l、l′ ∈ Δ(Z)，如果对于所有 i ∈N，l $\succ_i$l′，那么 l $\succ_0$l′）。为了刻画这一要求的蕴含，我们关注带有一些附加约束的多效用表示。对于 Δ(Z)上的一个二元关系 $\gtrsim$，如果一个 $\mathcal{U}$ 从 Z 到 ℝ 的函数集合满足：对于所有 u ∈$\mathcal{U}$以及所有 l、l′ ∈ Δ(Z)，l $\succ$l′意味着$\sum_{z\in Z}$ l (z)u(z) > $\sum_{z\in Z}$ l′(z)u(z)，则称其严格递增。如果赋予集合 Z 离散拓扑，我们不失一般性地可以假设，每个$\mathcal{U}$与一个期望多效用偏好相关联的集合都是严格递增的。[4]

下面的命题刻画了非反转的含义。

命题1. 假设每个 $i \in N \cup\{0\}$ 都有一个与严格递增集 $\mathcal{U}_i$ 相关联的期望多效用偏好关系$\gtrsim_i$，并且$(\mathcal{U}_i)_{i\in N}$ 包含一个无冲突对。那么，当且仅当存在$(u_0,u_1,\ldots,u_n) \in \Pi_{i\in N\cup\{0\}}\,\mathcal{U}_i$使得非反转成立：

$$u_0 = \sum_{i\in N} \alpha_i u_i + \beta$$

对于某个 $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^n_+ \setminus \{\mathbf{0}\}) \times \mathbb{R}$。

该命题表明，在非反转条件下，至少存在一个社会效用函数$u_0 \in \mathcal{U}_0$以及至少一种组合（$u_1,u_2,\ldots,u_n$）∈ $\Pi_{i\in N}\,\mathcal{U}_i$，使得$u_0$由（$u_1,u_2,\ldots,u_n$）的加权和构造而成。如果这一性质对所有社会效用函数都成立，则该规则对应于帕累托含义。另一方面，如果这一性质对所有个体效用函数的组合都成立，则它对应于帕累托*的含义。

B. 双效用主义

Danan、Gajdos 和 Tallon（2015）考察了一条弱于帕累托公理的公理，其定义如下。

公理4 (帕累托无差异)。对于所有 l，$l\prime$ ∈ Δ(Z)，若对所有 $i \in N$，均有 $l \sim_i l\prime$，则 $l \sim_0 l\prime$。

他们证明，帕累托无差异成立，当且仅当社会偏好采取双效用主义的形式；也就是说，对于所有$u_0 \in \mathcal{U}_0$，存在（u_i，v_i）$_{i\in N} \in \prod_{i\in N}\mathcal{U}^2{}_i$使得$u_0 = \sum_{i\in N}\alpha_i u_i - \sum_{i\in N}\alpha'{}_i v_i + \beta$对于某个（$\alpha$，$\alpha'$，$\beta$）∈ $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}$且（$\alpha$，$\alpha'$）≠（$\mathbf{0}$，$\mathbf{0}$）。负权重的部分出现在帕累托无差异之下，因为这一公理允许

[4]设 $\gtrsim$是由 $\mathcal{U}$关联的期望多效用偏好。根据 Dubra、Mac- cheroni 和 Ok（2004）的命题2，存在函数 u*: Z → ℝ，使得对于所有 l,l′ ∈ Δ(Z)，若 l $\succ$l′（分别地，l ∼l′），则$\sum_{z\in Z}$ l (z)u*(z) > $\sum_{z\in Z}$ l′(z)u*(z)（分别地，$\sum_{z\in Z}$ l (z)u*(z) = $\sum_{z\in Z}$ l′(z)u*(z)）。令$\mathcal{U}^* = \{u + \varepsilon u^* \mid (\varepsilon,u) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathcal{U}\}$，这是一个严格递增集。那么，$\gtrsim$也由 $\mathcal{U}^*$表示。为此，取 l,l′ ∈ Δ(Z)。若 l $\gtrsim$l′，则对所有 $(\varepsilon,u) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathcal{U}$，都有$\sum_{z\in Z}$ l (z)[u(z) + εu*(z)] ≥ $\sum_{z\in Z}$ l′(z)[u(z) + εu*(z)]。反过来，假设对所有 $(\varepsilon,u) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathcal{U}$，均有$\sum_{z\in Z}$ l (z)[u(z) + εu*(z)] ≥ $\sum_{z\in Z}$ l′(z)[u(z) + εu*(z)]。那么，对所有 u ∈$\mathcal{U}$，我们有$\sum_{z\in Z}$ l(z)u(z) ≥$\sum_{z\in Z}$ l′(z)u(z)，这意味着 l $\gtrsim$l′。这里的论证仿照了 Evren 和 Ok（2011）中推论1的证明。

社会偏好以相反方向响应个人偏好（例如，对于所有$i \in N$，$l \succsim_i l'$，但$l' \succsim_0 l$）。

类似地，我们引入帕累托的一个弱化形式，并考察其含义。对于所有$i \in N$以及所有$l, l' \in \Delta(Z)$，若$l \rhd\lhd_i l'$，则记作$l \rhd\lhd_i l'$。也就是说，$l \not\succsim_i l'$且$l' \not\succsim_i l$。因此，$l \rhd\lhd_i l'$表示个体i无法比较l与l'。下面的公理要求：如果所有个体都无法比较l与l'，那么社会规划者也应保留判断。

公理5 (帕累托不可比性)。对于所有$l, l' \in \Delta(Z)$，若对所有$i \in N$，均有$l \rhd\lhd_i l'$，则$l \rhd\lhd_0 l'$。

我们称一个组合$(u_i, v_i)_{i\in N} \in \prod_{i\in N} \mathcal{U}^2 i$为双独立的，如果$\sum_{i\in N} \alpha_i u_i + \beta \neq \sum_{i\in N} \alpha' i\, v_i + \beta'$对所有$(\alpha, \beta)$、$(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}$且$(\alpha, \alpha') \neq (0,0)$都成立。这意味着$\{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n, 1\}$线性无关（注意，要满足此条件，$|Z| \geq 2n+1$必须成立）。下面的命题表明，帕累托不可比性意味着，每个组合$(u_i, v_i)_{i\in N} \in \prod_{i\in N} \mathcal{U}^2 i$都通过双功利主义聚合得到社会规划者的认可。注意，反向结论并不成立。

命题2. 假设每个$i \in N \cup \{0\}$都具有与$\mathcal{U}_i$相关联的期望多效用偏好关系$\succsim_i$。那么，帕累托不可比性意味着，对于每个双独立组合$(u_i, v_i)_{i\in N} \in \prod_{i\in N} \mathcal{U}^2 i$，都存在一个$u_0 \in \mathcal{U}_0$，使得

$$u_0 = \sum_{i\in N} \alpha_i u_i - \sum_{i\in N} \alpha'_i v_i + \beta$$

对于某个$(\alpha, \alpha', \beta) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}$，其满足$(\alpha, \alpha') \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$。

V. 相关文献

最后，我们讨论相关文献。Harsanyi（1955）是风险下偏好聚合领域的开创性研究。Harsanyi证明，若所有个体和社会规划者都具有期望效用偏好，那么帕累托原则将导出功利主义社会评价。这一聚合定理引发了关于其伦理意义（例如，Sen，1977年、1986年；Weymark，1991年；Fleurbaey和Mongin，2016）以及分配公平（例如，Diamond，1967年；Epstein和Segal，1992年；Fleurbaey，2010年）的广泛讨论。

个体具有不完备多效用偏好时的聚合问题已在 Danan、Gajdos 和 Tallon（2013、2015）中得到研究。由于前者研究的是多档案设置，后者与本文的关系更为密切。Danan、Gajdos 和 Tallon（2015）刻画了帕累托原则和针对无差异关系的一致性原则的含义。另一方面，本文研究对偶公理，并表明该公理具有互补性的含义（定理1）。本文定理所刻画的聚合规则能够确保自然的一致性性质，而 Danan 等人（2015）的规则忽略了这些性质（推论1）。

在歧义情形下，Danan、Gajdos、Hill 和 Tallon（2016）以及 Pivato 和 Tchouante（2024）研究了个体具有多重先验的不完备偏好关系设置（Bewley，2002）。Danan、Gajdos、Hill 和 Tallon（2016）研究了帕累托原则的含义，并证明了一个部分可能性结果。其局限性源于虚假的一致性，这促使他们引入一个较弱的公理。他们的第二个结果表明，在较弱的帕累托原则下，社会信念集包含于个体信念集并集的凸包中。等价地，每个社会先验都必须通过线性汇聚，由某些个体先验的组合构造而成。Pivato 和 Tchouante（2024）在不同的领域中为这些信念聚合规则提供了另一种基础。这些规则与风险情形下由帕累托原则推导出的聚合规则相对应（Danan、Gajdos 和 Tallon，2015）。

在配套论文 Kurata 和 Nakamura（2025）中，我们在具有歧义的框架下引入了帕累托⋆原则。由于这一公理继承了原始帕累托原则的问题，因此无法得出积极的结果。Kurata 和 Nakamura（2025）还考察了帕累托⋆原则的一种弱化形式，并刻画了这样的信念聚合规则：每一种个体先验的组合都受到某个社会先验的认可。这一结果对应于本文的主定理。尽管二者相似，但该文采用的证明策略无法用于我们的刻画；因此，本文也为相关文献作出了技术性贡献。在 Kurata 和 Nakamura（2025）的证明中，分离超平面定理可直接应用于社会信念集与某种个体先验组合的凸包，而超平面的系数对应于导致矛盾的模糊前景。另一方面，我们考虑由效用函数生成的锥，随后将分离超平面定理的一种变体应用于扩展后的集合。超平面的系数未必对应于彩票，因为系数之和可能不等于 1，且各元素也可能为负。我们通过提出一种调整方法来处理这一问题。

附录

A.1. 命题*1*的证明

“若”部分。设 $l, l' \in \Delta(Z)$ 满足对所有 $i \in N$ 均有 $l \succ_i l'$。那么，对于每个 $i \in N$，由于 $\mathcal{U}_i$ 是一个严格递增集，我们有 $\sum_{z\in Z} l'(z)u_i(z) > \sum_{z\in Z} l(z)u_i(z)$，对所有 $u_i \in \mathcal{U}_i$ 均成立。由于存在 $(u_0, u_1, \ldots, u_n) \in \Pi_{i\in N\cup\{0\}} \mathcal{U}_i$，使得 $u_0 = \sum_{i\in N} \alpha_i u_i + \beta$ 对某个 $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}\right) \times \mathbb{R}$ 成立，因此我们有

$$\sum_{z\in Z} l'(z)u_0(z) = \sum_{i\in N} \alpha_i \sum_{z\in Z} l'(z)u_i(z) + \beta > \sum_{i\in N} \alpha_i \sum_{z\in Z} l(z)u_i(z) + \beta = \sum_{z\in Z} l(z)u_0(z).$$

因此，我们有 $l \not\succeq_0 l'$。

“只有-if”部分。反设非反转成立 s

但是，对于所有的 $(u_0, u_1, \ldots, u_n) \in \prod_{i \in N \cup \{0\}} \mathcal{U}_i$，$u_0$ 都不能写成 $u_0 = \sum_{i \in N} \alpha_i u_i + \beta$ 的形式，其中 $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}\right) \times \mathbb{R}$。令 $A \subseteq \mathbb{R}^Z$ 表示集合 $\left\{\sum_{i \in N} \alpha_i u_i + \beta \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}, (u_1, \ldots, u_n) \in \prod_{i \in N} \mathcal{U}_i\right\}$。那么，由于每个 $u_0 \in \mathcal{U}_0$ 都是非常数的，我们有

$$A \cap \mathcal{U}_0 = \emptyset. \tag{4}$$

令 $B = \{\alpha_0 u_0 + \beta_0 \mid (\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}, u_0 \in \mathcal{U}_0\} \cup \{\mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^Z$。于是，（4）蕴含 $A \cap B = \{\mathbf{0}\}$。注意，$A$ 和 B 是凸锥。根据 Klee（1955）的定理2.7，存在 $\lambda \in \mathbb{R}^Z \setminus \{\mathbf{0}\}$，使得对于所有 $\varphi \in A \setminus (-A)$ 和 $\varphi' \in B$，

$$\sum_{z \in Z} \lambda(z)\varphi(z) > 0 \geq \sum_{z \in Z} \lambda(z)\varphi'(z).$$

按照定理1证明中的论证，我们有 $A \cap (-A) = \{\gamma \mathbf{1}\}_{\gamma \in \mathbb{R}}$。

因此，根据 A 和 B 的定义，对于所有 $(u_0, u_1, \ldots, u_n) \in \Pi_{i \in N \cup \{0\}} \mathcal{U}_i$、所有 $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}$ 以及所有 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}^n$，

$$\sum_{z \in Z} \lambda(z)\left(\alpha_i u_i(z) + \beta_i\right) > 0 \geq \sum_{z \in Z} \lambda(z)\left(\alpha_0 u_0(z) + \beta_0\right). \tag{5}$$

对每个 $u \in \bigcup_{i \in N \cup \{0\}} \mathcal{U}_i$，令 $\hat{u}$ 表示一个函数，使得 $\sum_{z \in Z} \hat{u}(z) = 0$ 且 $\hat{u} = \alpha u + \beta$ 对某个 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}$ 成立。于是，由 (5) 可知，对所有 $(u_0, u_1, \ldots, u_n) \in \Pi_{i \in N \cup \{0\}} \mathcal{U}_i$，

$$\sum_{z \in Z} \lambda(z)\hat{u}_i(z) > 0 \geq \sum_{z \in Z} \lambda(z)\hat{u}_0(z).$$

令 $\lambda = -\min_{z \in Z} \lambda(z) + 1$。由于对所有 $u \in \bigcup_{i \in N \cup \{0\}} \mathcal{U}_i$，都有 $\sum_{z \in Z} \hat{u}(z) = 0$，因此对所有 $i \in N$ 以及所有 $u_0 \in \mathcal{U}_0$，

$$\sum_{z \in Z} \left(\lambda(z) + \underline{\lambda}\right)\hat{u}_i(z) > 0 \geq \sum_{z \in Z} \left(\lambda(z) + \underline{\lambda}\right)\hat{u}_0(z). \tag{6}$$

令 $l, l' \in \Delta(Z)$ 满足：对所有 $z \in Z$，

$$l(z) = \frac{\lambda(z) + \underline{\lambda}}{\sum_{z' \in Z} \lambda(z') + |Z|\underline{\lambda}} \ (> 0) \quad \text{and} \quad l'(z) = \frac{1}{|Z|}.$$

由 (6) 及 l 和 l' 的定义可知，对所有 $i \in N$ 以及所有 $u_0 \in \mathcal{U}_0$，

$$\sum_{z \in Z} l(z)\hat{u}_i(z) > \sum_{z \in Z} l'(z)\hat{u}_i(z) \quad \text{and} \quad \sum_{z \in Z} l'(z)\hat{u}_0(z) \geq \sum_{z \in Z} l(z)\hat{u}_0(z).$$

根据 $\hat{u}$ 的构造，对于每个 $i \in N$，都有 $l \succ_i l'$，且 $l' \succsim_0 l$。这与非反转相矛盾。

□

A.2. 命题2的证明

反设帕累托不可比性成立，但存在一个双独立组合 $(u_i, v_i)_{i\in N} \in \prod_{i\in N} \mathcal{U}^2_i$，使得对于所有 $u_0 \in \mathcal{U}_0$，u_0 都不能写成 $u_0 = \sum_{i\in N} \alpha_i u_i - \sum_{i\in N} \alpha'_i v_i + \beta$，其中任意 $(\alpha, \alpha', \beta) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}$ 都满足 $(\alpha, \alpha') \neq (0,0)$。令 $A \subseteq \mathbb{R}^Z$ 表示集合 $\{\sum_{i\in N} \alpha_i u_i - \sum_{i\in N} \alpha'_i v_i + \beta \mid (\alpha, \alpha', \beta) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}\}$。那么，由于每个 u_0 都不是常数，我们有

$$A \cap \mathcal{U}_0 = \emptyset. \tag{7}$$

令 $B = \{\alpha_0 u_0 + \beta_0 \mid (\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R},\ u_0 \in \mathcal{U}_0\} \cup \{\mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^Z$。于是，由(7)可得 $A \cap B = \{\mathbf{0}\}$。注意，$A$ 和 B 都是凸锥。应用 Klee（1955）的定理2.7，可知存在 $\lambda \in \mathbb{R}^Z \setminus \{\mathbf{0}\}$，使得对于所有 $\varphi \in A \setminus (-A)$ 以及所有 $\varphi' \in B$,

$$\sum_{z\in Z} \lambda(z)\varphi(z) > 0 \geq \sum_{z\in Z} \lambda(z)\varphi'(z).$$

由于 $(u_i, v_i)_{i\in N} \in \prod_{i\in N} \mathcal{U}^2_i$ 是双独立的，对于每个 $i \in N$，$u_i \notin A \cap (-A)$ 和 $v_i \notin A \cap (-A)$。根据A和B的定义，对于所有 $i \in N$、所有 $u_0 \in \mathcal{U}_0$、所有 $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}$，以及所有 (α, β), $(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{z\in Z} \lambda(z)(\alpha_i u_i(z) + \beta_i) > 0 > \sum_{z\in Z} \lambda(z)\left(\alpha'_i v_i(z) + \beta'_i\right)$$

and

$$\sum_{z\in Z} \lambda(z)\left(\alpha_0 u_0(z) + \beta_0\right) \leq 0.$$

对于每个 $u \in \{u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m\} \cup \mathcal{U}_0$，我们以类似于定理 1 证明的方式定义 $\hat{u}$。于是，对于所有 $i \in N$ 以及所有 $u_0 \in \mathcal{U}_0$,

$$\sum_{z\in Z} \lambda(z)\hat{u}_i(z) > 0 > \sum_{z\in Z} \lambda(z)\hat{v}_i(z) \quad \text{and} \quad \sum_{z\in Z} \lambda(z)\hat{u}_0 \leq 0.$$

令 $\lambda = -\min_{z\in Z} \lambda(z) + 1$。由于对于所有 $u \in \{u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m\} \cup \mathcal{U}_0$，$\sum_{z\in Z} \hat{u}(z) = 0$，因此对于所有 $i \in N$ 以及所有 $u_0 \in \mathcal{U}_0$,

$$\sum_{z\in Z} \left(\lambda(z) + \underline{\lambda}\right)\hat{u}_i(z) > 0 > \sum_{z\in Z} \left(\lambda(z) + \underline{\lambda}\right)\hat{v}_i(z) \quad \text{and} \quad \sum_{z\in Z} \left(\lambda(z) + \underline{\lambda}\right)\hat{u}_0 \leq 0. \tag{8}$$

设 l、$l_\prime \in \Delta(Z)$ 满足：对于所有 $z \in Z$,

$$l(z) = \frac{\lambda(z) + \underline{\lambda}}{\sum_{z'\in Z} \lambda(z') + |Z|\underline{\lambda}} \ (> 0) \quad \text{and} \quad l'(z) = \frac{1}{|Z|}.$$

根据（8）以及l和l'的定义，对于所有$i \in N$,

$$\sum_{z\in Z} l(z)\hat{u}_i(z) > \sum_{z\in Z} l'(z)\hat{u}_i(z) \quad \text{and} \quad \sum_{z\in Z} l'(z)\hat{u}_i(z) > \sum_{z\in Z} l(z)\hat{u}_i(z),$$

但对所有$u_0 \in \mathcal{U}_0$,

$$\sum_{z\in Z} l(z)\hat{u}_0(z) \leq \sum_{z\in Z} l'(z)\hat{u}_0(z).$$

根据$\hat{u}$的构造，对于每个$i \in N$，我们都有$l' \rhd\lhd_i l$以及$l' \gtrsim_0 l$。这与帕累托不可比性相矛盾。

□

REFERENCES

Bewley, Truman。 2002年。“奈特式决策理论。第一部分。”《经济学与金融决策》 2579–110。

Danan, Eric、ThibaultGajdos、Brian Hill 和 Jean-Marc Tallon。2016年。“稳健的社会决策。”《美国经济评论》 106（9）：2407–2425。

Danan, Eric、Thibault Gajdos 和 Jean-Marc Tallon。 2013年。“对冯·诺依曼—摩根斯特恩效用集合进行聚合。”《经济理论杂志》 148（2）：663–688。

Danan, Eric、Thibault Gajdos 和 Jean-Marc Tallon。 2015年。“不完备偏好下的 Harsanyi 聚合定理。”《美国经济学杂志：微观经济学》 7（1）：61–69。

De Meyer, Bernard 和 Philippe Mongin。 1995。“关于仿射聚合的注记。”《经济学快报》47(2)：177–183。

Diamond, PeterA. 1967年。“基数福利、个人主义伦理学与效用的人际比较：评论。”《政治经济学杂志》75 (5)：765–766。

Dubra, Juan、Fabio Maccheroni 和 Efe A Ok。 2004。“没有完备性公理的期望效用理论。”《经济理论杂志》115 (1)：118–133。

Epstein, LarryG 和 UziSegal。 1992年。“二次社会福利函数。”《政治经济学杂志》100 (4)：691–712。

Evren, Özgür 和 Efe A Ok。 2011。“关于偏好关系的多效用表示。”《数理经济学杂志》47(4-5)：554–563。

Fleurbaey,Marc. 2010年。“评估风险社会情境。”《政治经济学杂志》118（4）：649–680。

Fleurbaey, Marc 和 Philippe Mongin。 2016。“聚合定理的功利主义相关性。”《美国经济学杂志：微观经济学》8 (3)：289–306。

Harsanyi, JohnC。 1955年。“基数福利、个人主义伦理学与效用的人际比较。”《政治经济学杂志》63 (4)：309–321。

Klee,VL. 1955年. “凸锥的分离性质.” 《美国数学学会会刊》6 (2): 313–318.

Kurata, Leo, and KenseiNakamura. 2025. “保留判断与稳健集体决策.” `https://arxiv.org/abs/2512.16240`, 工作论文.

Pivato, Marcus, andÉliseFloreTchouante. 2024年. “基于近乎客观不确定性的贝叶斯社会聚合.” 《理论经济学》19 (3): 1351–1398.

Sen, Amartya. 1977年. “非线性社会福利函数：对Harsanyi教授的回应.” 收录于《特殊科学中的基础问题》，由Butts, Richard和Jaakko Hintikka编，297–302，多德雷赫特，荷兰：D. Reidel.

Sen, Amartya. 1986年. “社会选择理论.” 收录于《数理经济学手册》，由Arrow, Kenneth J.和Michael D. Intriligator编，第3卷，1073–1181，阿姆斯特丹：North-Holland.

Weymark, JohnA. 1991年。“重新审视关于功利主义的Harsanyi–Sen辩论。”载于《幸福感的人际比较》，Elster, Jon和John E. Roemer编，第255–320页。剑桥：剑桥大学出版社。