arXiv:2601.01348v2 [math.CV] 27 Feb 2026

拟圆上的分数阶 Besov-Sobolev 空间

Huaying Wei* 和 Michel Zinsmeister†

2026年3月2日

摘要

设 Γ 为一条有界若尔当曲线，Ω_i,Ω_e 为其两个补分量。对于 $p \in (1,\infty)$ $s \in (0,1)$，我们将两个空间 $\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_{i,e})$ 定义为分别在 Ω_i 和 Ω_e 中满足以下条件的调和函数 u 所构成的集合

$$\iint_{\Omega_{i,e}} |\nabla u(z)|^p d(z,\Gamma)^{(1-s)p-1} dxdy < +\infty.$$

当这些空间可以与定义在边界上的函数空间（迹空间）等同起来时，我们探讨它们是否相等。当 Γ 为单位圆时，这两个空间与齐次分数阶 Besov-Sobolev 空间相一致，而拟圆框架似乎是恰当的推广。在此框架下，我们研究 Plemelj-Calderón 算子的有界性，并运用所得结果证明：对于某些 p, s，若这两个空间相等，则它们是某个加权 Sobolev 空间在 Γ 上的限制。

若进一步假设 Γ 是可求长的，我们将$B^s_{p,\ p}(\Gamma)$定义为满足以下条件的函数 $f \in L^p(\Gamma)$所构成的空间：

$$\iint_{\Gamma\times\Gamma} \frac{|f(z)-f(\zeta)|^p}{|z-\zeta|^{1+ps}} |dz||d\zeta| < +\infty.$$

同样地，对于单位圆，这些空间与齐次分数阶 Besov-Sobolev 空间重合。尽管弦弧性质是等式成立的充要条件

$$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_i) = \mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_e) = B^s_{p,p}(\Gamma)$$

在 $s = 1/p,\ \ p \geq 2$的情形下，对于一般的 $s \in (0,\ 1)$则不再如此。然而，我们证明了对于径向 Lipschitz 曲线等式仍然成立。最后，我们以 Maz'ya 的思想为指导，将部分结果重新诠释为某种"近似的"狄利克雷原理。

关键词： 柯西积分、分数阶 Sobolev 空间、Besov 空间、拟圆、弦弧曲线、Lipschitz曲线、Dirichlet 空间**2020年数学主题分类：** 主要分类 42B20、46E35；次要分类 31A05、30H35

*天津大学应用数学中心，中华人民共和国天津市卫津路92号，邮编300072，电子邮箱：hywei@tju.edu.cn

†Institut Denis Poisson，法国奥尔良，45067，电子邮箱： zins@univ-orleans.fr

目录

1 引言 3

1.1 狄利克雷原理.3 1.2 主要定理陈述.5 1.3 普莱梅利–卡尔德龙问题：另外两个主要定理的陈述 8

2 拟圆上$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Gamma)$ 的普莱梅利–卡尔德龙问题：不可求长情形 9

2.1$\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p,}(\Omega)$ 稠密子空间中函数的边界值 . . . . . 10 2.2$\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p,}(\Omega)$ 中函数的边界值.12 2.3$\mathcal{B}^{1/2}_{2\,2}$,(Γ) 的普莱梅利–卡尔德龙问题.13 2.4$\mathcal{B}^{1-1/p}_{p\,p,}(\Gamma)$ 的普莱梅利–卡尔德龙问题.16 2.5 一般$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Gamma)$ 的普莱梅利–卡尔德龙问题.17 2.6$\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p,}(\Gamma)$ 的普莱梅利–卡尔德龙问题.21

3 A_p-拟圆盘上的加权 Sobolev 空间 22

3.1 $\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)$ 中函数的边界值.22 3.2$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)$ 上的迹映射.23 3.3 加权 Sobolev 空间上的迹映射.24 3.4 几乎狄利克雷原理.28

4 弦弧曲线上 $B^s_{p,p}(\Gamma)$ 的普莱梅利–卡尔德龙问题：可求长情形 28

4.1 平面域中分数阶 Sobolev 空间经典事实回顾。28 4.2 弦弧曲线上的普莱梅利–卡尔德龙问题.29 4.3 Lipschitz曲线上的普莱梅利–卡尔德龙问题.32

5 Douglas 与 Littlewood-Paley：弦弧情形 32

5.1 共轭算子.33 5.2 算子 $V_{s,p}$ 在$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)$.34 5.3 等式 $\mathcal{B}^s_{2,2}(\Omega) = B^s_{2,2}(\Gamma)$.37 5.4 等式 $\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega) = B^s_{p,p}(\Gamma)$.41 5.5 再探几乎狄利克雷原理.46

6 附录 **46**

1 引言

1.1 狄利克雷原理

在本文中，我们将考虑一条有界若尔当曲线 Γ，并将 Ω_i,Ω_e 称为其在球面上的补集的内部和外部连通分支。若 f 是定义在 Γ 上的连续函数，且 F 是 f 到 $\Omega_{i,e}$的连续延拓，并且进一步假设其在 $\Omega_{i,e}$中 C^1，我们称 (2–)能量为以下量

$$\mathcal{E}_{i,e}(F) = \iint_{\Omega_{i,e}} |\nabla F(z)|^2 dxdy \leq +\infty.$$

狄利克雷原理指出，在 f 的所有延拓中，能量最低的是调和延拓。请注意，连续函数的调和延拓的（2–）能量可能是无限的，在这种情况下，每个延拓的（2–）能量都是无限的。当 $\Gamma = \mathbb{T}$ 为单位圆时，我们将 $\mathcal{D}(\mathbb{D}_i)$ 定义为单位圆盘 $\Omega_i = \mathbb{D}_i$上的狄利克雷空间，即 $\mathbb{D}_i$ 中具有有限（2–）能量的调和函数空间。该空间与 L^2（$\mathbb{T}$）函数的泊松积分空间一致，满足

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n||\hat{f}(n)|^2 < \infty.$$

正如 Douglas 在 [14] 中所指出的，它也与以下函数的泊松积分空间一致：L^2（$\mathbb{T}$）-函数，使得

$$\iint_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} \frac{|f(z)-f(\zeta)|^2}{|z-\zeta|^2}|dz||d\zeta| < \infty.$$

映射 $z \mapsto 1/\bar{z}$ 是关于单位圆的反射，从 $\{1/2 \lhd |z| < 2\}$ 到其自身是双 Lipschitz 映射。因此，如果 $u_i \in \mathcal{D}(\mathbb{D}_i)$ 是 $f \in L^2$（$\mathbb{T}$）的泊松积分，那么 $\mathbb{D}_e = \mathbb{C}\setminus \mathbb{D}_i$ 中 f的泊松延拓 u_e 也具有有限能量。

狄利克雷空间是齐次分数阶索伯列夫空间的一种特殊情形。更确切地说，若 $0 < s < 1$，我们将 $H^s(\mathbb{T})$ 定义为 $L^2(\mathbb{T})$ 中由满足以下条件的函数 f 构成的子空间

$$\|f\|_{H^s}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2s}|\hat{f}(n)|^2 < \infty.$$

不难看出，上述量，即 H^s-半范数的平方，与另外两个量等价（特别是，在 $s = 1/2$ 的情形下，二者相差一个乘法常数）：

1. Littlewood-Paley 半范数的平方

$$\iint_{\mathbb{D}_i} |\nabla u_i(z)|^2 (1-|z|)^{1-2s} dxdy,$$

2. Douglas范数（的平方）

$$\iint_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} \frac{|f(z)-f(\zeta)|^2}{|z-\zeta|^{1+2s}}|dz||d\zeta|.$$

Littlewood-Paley 这一名称的由来在于，对于 $s=0$ Littlewood-Paley 半范数恰好等于 L^2范数，其中g(f)是与f 相关联的 Littlewood-Paley 函数（见 [44]）。

用 Besov 空间的术语来说，

$$H^s(\mathbb{T}) = B^s_{2,2}(\mathbb{T}),$$

而且这个空间也与 $(I-\Delta)^{-s/2}(L^2(\mathbb{T}))$ 相同，也就是说，它是阶数为 s 的 Bessel 势空间。

我们可以将 2 替换为 $p>1$，进一步推广这些空间，并将 $B^s_{p,p}(\mathbb{T})$ 定义为满足以下任一条件的 $L^p(\mathbb{T})$-函数集：

1. (Littlewood-Paley)

$$\iint_{\mathbb{D}_i} |\nabla u_i(z)|^p (1-|z|)^{(1-s)p-1} dxdy < \infty,$$

2. (Douglas)

$$\iint_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} \frac{|f(z)-f(\zeta)|^p}{|z-\zeta|^{1+ps}} |dz||d\zeta| < \infty.$$

需要注意的是，如果 $p\neq 2$,

$$B^s_{p,p}(\mathbb{T}) \neq (I-\Delta)^{-s/2}(L^p(\mathbb{T})),$$

因此，为避免混淆，我们将采用 Besov 术语。空间 $B^s_{p,p}(\mathbb{T})$,$s\in(0,1)$，$p\in(1,\infty)$ 是两个 Sobolev 空间之间的“中间”空间，因此在文献中也称为分数阶 Sobolev 空间。本文中，我们将它们（以及推广到更一般的若尔当曲线上的情形）称为分数阶 Besov-Sobolev 空间。

本文的主要目标是将这些概念推广到更一般的若尔当曲线。对若尔当曲线 Γ 的首要限制是，我们希望它与 $\mathbb{T}$ 一样具有反射性质，也就是说，存在一个跨越 Γ 的反射，并且该反射在 Γ 的某个邻域内是双 Lipschitz 的。满足这一性质的曲线广为人知：它们就是拟圆，即圆的拟共形像 [1]。从几何上说，若尔当曲线 Γ 是拟圆，当且仅当存在 $C>1$ 使得

$$\forall z_1, z_2 \in \Gamma, \quad \min(\operatorname{diam}(\gamma_1), \operatorname{diam}(\gamma_2)) \leq C|z_1 - z_2|$$

其中 γ_j, $j=1$, 2 是 Γ 上端点为 z_1, z_2 的两条子弧。

拟圆不一定是光滑的，拟圆的豪斯多夫维数可以取 $[1,2)$ 中的任意值。例如，冯·科赫雪花曲线是一条处处没有切线的拟圆，其豪斯多夫维数与闵可夫斯基维数相同，均为 log 4/log 3。

从现在起，我们所考虑的所有若尔当曲线都假定为拟圆。

1.2 主要定理的陈述

设 Γ 为一个拟圆，$\Omega_{i,e}$ 为 $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ 的内部和外部连通分支，如上所述。假设 Ω 是这两个分支之一，相应地，$\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{D}_i$和 $\mathbb{D}_e$之一。我们对 $p>1$ 和 $0<s<1$定义，

$$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)=\{u \text{ harmonic in } \Omega:\ \|u\|^p_{\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)}=\iint_\Omega |\nabla u(z)|^p d(z,\Gamma)^{(1-s)p-1}dxdy<\infty\}.$$

现在，我们为这些空间中的函数定义其在 Γ上的边界值（适用于 p, s 的某些取值），这将使我们能够把$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)$ 认作定义在Γ 上的一个函数空间，并将其记为$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega\to\Gamma)$。

为了定义这个空间，我们区分三种情形，即 $s>1/p$, $s=1/p$, $s<1/p$。

1. 情形 $s>1/p$：我们将看到，在这种情况下$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)$ 是指数为 $\alpha=s-1/p$的Hölder空间。属于$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)$ 的函数的边界值，就是它在 Γ上的限制。

2. 情形 $s=1/p$：这里我们利用一个重要事实：这些空间是共形不变的。特别地，若 $f\in\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)$，则 $f\circ\varphi\in\mathcal{B}^s_{p,p}(\mathbb{D})$，其中 φ 是一个从 $\mathbb{D}$ 到 Ω 的黎曼映射，并且这个同构 T 几乎是等距的，因为根据科比畸变定理，

$$\forall f\in\mathcal{B}^{1/p}_{p,p}(\Omega),\quad \frac{1}{4}\|f\|_{\mathcal{B}^{1/p}_{p,p}(\Omega)}\le\|Tf\|_{\mathcal{B}^{1/p}_{p,p}(\mathbb{D})}\le 4\|f\|_{\mathcal{B}^{1/p}_{p,p}(\Omega)}.$$

由于后一个空间包含于调和Hardy空间 $h^p(\mathbb{D})$ 中，我们得出 f 在 $L^p(\omega,\ \Gamma)$ 中具有良定义的边界值，其中 ω 是 Ω 的调和测度。

3. 情形 $s<1/p$：这里我们采用不同的方法。令 $C_c^\infty(\mathbb{C})|_\Gamma=\{f|_\Gamma:\ f\in C_c^\infty(\mathbb{C})\}$，$C_c^\infty(\mathbb{C})$-函数是支集紧包含于 $\mathbb{C}$ 中的 C^∞-函数。令 $\mathrm{D}^s_p(\Gamma)$ 表示 $C_c^\infty(\mathbb{C})|_\Gamma$ 中满足以下条件的函数集合：它们到 Ω_i 的调和延拓 e 属于 $\mathrm{B}^s_{p,p}(\Omega_{i,e})$，并将这些延拓组成的集合记为 $\mathrm{D}^s_p(\Omega_{i,e})$。我们将边界值空间 $\mathrm{B}^s_{p,p}(\Omega_{i,e}\to\Gamma)$ 定义为该空间的抽象闭包，即 $\mathrm{D}^s_p(\Gamma)$ 中柯西序列的等价类，并赋予 $\mathrm{B}^s_{p,p}(\Omega_{i,e})$-范数。注意，这一过程仅为 $\mathrm{D}^s_p(\Omega_{i,e})$ 在 $\mathrm{B}^s_{p,p}(\Omega_{i,e})$ 中的闭包定义了边界值，而该闭包可能并非整个空间。然而，本情形下的空间 $\mathrm{B}^s_{p,p}(\Omega_{i,e})$ 存在相当大的问题，而 $\mathrm{D}^s_p(\Omega_{i,e})$ 在 $\mathrm{B}^s_{p,p}(\Omega_{i,e})$ 中的闭包实际上是该空间更稳健的变体。

对于所有这些情况，我们定义

$$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Gamma)=\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_i\to\Gamma)\cap\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_e\to\Gamma),$$

配备自然范数。上述情形 2 尤其值得关注，特别是因为两个调和测度可能彼此奇异。这一缺陷已由 [40] 以及 [5] 通过展示实现“传输”的变量替换而排除

两侧空间之间的算子恰好是一个同构，从而表明对于所有拟圆，这三个空间相等。

当进一步假设 Γ 是可求长的时，我们沿用 Douglas [14] 的定义 ，

$$B^s_{p,p}(\Gamma) = \{f \in L^p(\Gamma) : \|f\|^p_{B^s_{p,p}(\Gamma)} = \iint_{\Gamma\times\Gamma} \frac{|f(z)-f(\zeta)|^p}{|z-\zeta|^{1+ps}}|dz||d\zeta| < \infty\}.$$

在本文及下文中，$|dz|$ 表示弧长测度。若 Γ 是单位圆，则三个空间 $\mathcal{B}^s_{p、\,p}(\Omega_i \to \Gamma)$、$\mathcal{B}^s_{p、\,p}(\Omega_e \to \Gamma)B^s_{p、\,p}(\Gamma)$ 重合（见 [45] 第 151 页），但一般而言它们没有理由重合。寻找相等的情形是我们的目标之一。为了陈述这方面的第一个结果，我们需要一些定义：

如果一条曲线 Γ 是弦弧（或 K-弦弧）的，则称其为弦弧曲线；如果它是某个圆的双 Lipschitz 像，则同样如此。这些曲线的几何特征在于，它们是可求长的，并且

$$\exists K > 1: \quad \forall z_1, z_2 \in \Gamma,\ \min(\mathrm{length}(\gamma_1), \mathrm{length}(\gamma_2)) \le K|z_1 - z_2|,$$

其中 γ_j、$j = 1$、2 是 Γ 上端点为 z_1、z_2 的两个子弧。注意，弦弧曲线尤其是可求长的拟圆（但反之不成立）。

我们还需要径向 Lipschitz 曲线这一概念。这类曲线在极坐标下由方程 $z(\theta) = r(\theta)e^{i\theta}$ 给出，其中 $r : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 是 2π-周期的 Lipschitz 连续函数（Lipschitz 曲线的范数将在第 5 节中定义）。径向 Lipschitz 曲线特别是弦弧曲线。

定理 1.1. 设 $p > 1$。若 Γ 是弦弧曲线，则

$$\mathcal{B}^{1/p}_{p,p}(\Omega_i \to \Gamma) = \mathcal{B}^{1/p}_{p,p}(\Omega_e \to \Gamma) = B^{1/p}_{p,p}(\Gamma). \tag{1.1}$$

反之，若 Γ 是可求长拟圆，且 *(1.1)* 成立，并且 $p \ge 2$，则 Γ 是弦弧曲线。

第二个结论最初由 [50] 证明，随后又由本文作者证明。关于第一个结论的证明，请参见 [27–29]（另见 [40, 41, 43]）。情形 $s = 1/p$ 的特殊之处在于（且本定理的证明主要依赖于）空间 $\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p}(\Omega_{i,e})$ 的共形不变性以及传输算子的存在性。

在第 5 节中，我们将证明这方面的主要结果（见定理 5.5 和 5.7），粗略地说，

Th定理 1.2 (见推论 5.10)。若 Γ 是一条径向*Lipschitz*曲线，且其范数为 M，则

$$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_i \to \Gamma) = \mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_e \to \Gamma) = B^s_{p,p}(\Gamma). \tag{1.2}$$

对于任意 $s \in (0、1)$ 以及 $p \in \left(1 + \frac{2}{\pi\,\text{反正切}\,M}、\ 1 + \frac{2}{\pi\,\text{反正切}\,M}\right)$。特别地，当 $M \to 0$ 时，此区间收敛到 $(1、\ \infty)$；当 $M \to \infty$ 时，则收敛到单点集 $\{2\}$。

在第 3 节中，我们还将证明一个关于一般拟圆的相关结果。在陈述该结果之前，我们需要引入一些概念。

Astala [3] 引入了“闵可夫斯基内容”的概念 $h(\Gamma)$：其准确的定义将在下文回顾，这里只提及，$h(\Gamma)$是闵可夫斯基

维数，前提是 Γ 它是自相似分形集（例如冯·科赫雪花曲线）；而弦弧曲线恰好是满足 $h(\Gamma) = 1$的拟圆。

穆肯霍普特权重 A_p，$p > 1$ 是 $\mathbb{C}$ 中满足以下条件的权函数：Hardy-Littlewood 极大函数在 $L^p(\omega, \mathbb{C})$ 中有界。设 ω 是这样的一个权函数。我们将加权 Sobolev 空间 $W^{1,p}(\omega, \mathbb{C})$ 定义为满足以下条件的温和分布空间：f使得 f 局部可积，并且在分布意义下，$\nabla f \in L^p(\omega, \mathbb{C})$。

定理1.3（见定理 3.5）。设 Γ 为一个拟圆，且 $\omega(z) = d(z, \Gamma)^{(1-s)p-1}$。如果

$$p > 2, \quad \frac{h(\Gamma)}{2} - \frac{h(\Gamma)-1}{p} < s < 1 - \frac{h(\Gamma)-1}{p} \tag{1.3}$$

（当 Γ 为弦弧时，后者化为 $1/2 < s < 1$）并且

$$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_i \to \Gamma) = \mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_e \to \Gamma), \tag{1.4}$$

then

$$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_i \to \Gamma) = \mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_e \to \Gamma) = W^{1,p}(\omega, \mathbb{C})|_\Gamma. \tag{1.5}$$

我们在此指出，在该定理中，条件（1.3）用于保证 $W^{1,p}(\omega, \mathbb{C})$ 由连续函数组成，从而其在 Γ 上的限制是有意义的；条件（1.3）还可以确保 ω 是一个 A_p-权函数。

满足方程 (1.4) 的数对 (p, s) 的例子有 $(p, 1/p)$ 和 (∞, s)，其中$s < 1/2$。若能在这些特殊空间之间进行插值，便可得到更多满足 (1.4) 的空间。我们将在后续论文中探讨这一可能性。定理 1.2 给出了另一类满足 (1.4) 的拟圆：由此可知，在这种情况下

$$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_i \to \Gamma) = \mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_e \to \Gamma) = B^s_{p,p}(\Gamma) = W^{1,p}(\omega, \mathbb{C})|_\Gamma.$$

本研究的一个推论是提出了“几乎狄利克雷原理”，它推广了维数2 中的一个结果；该结果由 Maz'ya 提出，并由 Mironescu-Russ 简化（[32], [33]）。我们称拟圆盘Ω 满足关于 p, s 的几乎狄利克雷原理，$f: \Gamma \to \mathbb{C}$具有连续延拓 $F: \Omega \to \mathbb{C}$，且属于 $C^1(\Omega)$ 并满足

$$\iint_\Omega |\nabla F(z)|^p d(z, \Gamma)^{(1-s)p-1} dxdy < \infty$$

属于 $\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega \to \Gamma)$，或者换句话说，满足

$$\iint_\Omega |\nabla u(z)|^p d(z, \Gamma)^{(1-s)p-1} dxdy < \infty,$$

其中，u 是 f 在 Ω 中的调和延拓。

推论1.4 (见推论 5.12)。如果 Γ 是一条范数为 M 的径向*Lipschitz*曲线，那么 $B^s_{p,p}(\Omega)$ 具有近似*Dirichlet*性质，当

$$\frac{1}{2} < s < 1 \quad and \quad 2 < p < 1 + \frac{\pi}{2\arctan M},$$

它收敛到$(2, \infty)$（当 $M \to 0$ 时），并收敛到单点 *{2}*（当 $M \to \infty$ 时）。

证明定理1.3的工具之一是普列梅利-卡尔德隆性质，它本身也具有独立研究价值。

1.3 普莱梅利–卡尔德龙问题：另外两个主要定理的陈述

给定平面上的有界若尔当曲线 Γ 和定义在 Γ 上的一个（复值）函数 f，求两个分别定义在内部和外部连通分支 Ω_i 与 Ω_e 中的全纯函数 G_i，G_e，使得

$$f = G_i|_\Gamma + G_e|_\Gamma.$$

这里，边界迹是在某种意义下定义的。

这个问题实际上最早由索霍茨基于1873年提出并解决，之后普列梅利在1908年试图解决希尔伯特第22问题时，重新发现了这个问题，并将其作为一项主要内容（[38]）。首先假设 Γ 是光滑的，并且 f 是定义在 C^1上的一个 Γ-函数。思路是使用柯西积分，并定义

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma.$$

这定义了一个在曲线 Γ 外全纯的函数。此外，该函数在 Γ 上从内侧和外侧都有边界值，并且在 Γ上满足Plemelj公式：

$$F_i|_\Gamma = Tf + 1/2f,$$
$$F_e|_\Gamma = Tf - 1/2f$$

其中 $F_i = F|_{\Omega_i}$、$F_e = F|_{\Omega_e}$ 和柯西积分

$$Tf(z) = \frac{1}{2\pi i}\text{p.v.}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\zeta - z|>\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

于是，利用 $G_i = F_i$ 和 $G_e = -F_e$，问题得以解决。

当然，对于更一般的曲线和函数，结论仍然成立。后续的推广放宽了对曲线 Γ 和函数 f的光滑性要求：要使 Plemelj公式成立，实际上只需 Γ 是可求长的，且 $f \in L^1(\Gamma)$。对于这个问题，现代方法是在给定的空间中求解：例如，卡尔德隆（[6]）提出，哪些可求长曲线满足这样的性质：对于任意 $f \in L^2(\Gamma)$，Plemelj函数 $F_i|_\Gamma$ 和 $F_e|_\Gamma$ 也属于 $L^2(\Gamma)$？等价地说，算子 T 何时在 $f \in L^2(\Gamma)$上有界？科伊夫曼-麦金托什-迈耶（[10]）对Lipschitz曲线解决了这个问题（卡尔德隆此前已对Lipschitz常数较小的曲线解决了此问题（[6]）），随后戴维（[11]）给出了最终答案（利用Lipschitz情形的结果 [10]）：他证明了 T 在 $f \in L^2(\Gamma)$（或$L^p(\Gamma)$，$1 < p < \infty$）上有界，当且仅当 Γ 是阿尔福斯正则的，也就是说，对于某个与所选圆盘无关的 C，Γ 落在半径为 r 的圆盘内的部分，其长度不超过 Cr。

现在，对于不一定是可求长的曲线，也可以讨论普莱梅利–卡尔德龙问题。[54] 中给出了一个例子，其中提出了赫尔德类的普莱梅利–卡尔德龙问题，并在某些特殊情形下予以解决。其思路是用恒等式替代柯西积分

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\bar\partial f(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta$$

该恒等式对任意测试函数 $f \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ 都成立，由此可知，在可求长边界的情形下，

$$F_i(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_e} \frac{\bar{\partial} f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \qquad z \in \Omega_i,$$
$$F_e(z) = \frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_i} \frac{\bar{\partial} f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \qquad z \in \Omega_e.$$

后来，Astala（ [3]）针对赫尔德类得到了更精确的结果：我们将在第2节讨论这些结果，并与分数阶 Besov-Sobolev 空间作比较 $\mathcal{B}^s_{p,\ p}(\Gamma)$。最近，针对临界 Besov 空间的普列梅利-卡尔德隆问题（即$s = 1/p$的情形）已由 Liu-Shen [28], 和 Matsuzaki [31]加以研究。
Schippers-Staubach 则从更广泛的角度进一步讨论了这一问题；参见 [42]及其中的参考文献。

在第2节中，我们将讨论以下普莱梅利–卡尔德龙问题：给定 $p > 1$， $s \in (0,\ 1)$，能否将函数 $f \in \mathcal{B}^s_{p,\ p}(\Gamma)$ 写成两个函数 $F_{i,\ e}$ 之和，使它们在 $\Omega_{i,\ e}$ 中全纯，且其边界值属于 $\mathcal{B}^s_{p,\ p}(\Gamma)$?

本文在这一方向上的主要结果是定理 2.3、2.4、2.9 以及推论 2.13、3.6（分别关注不同的 $(p,\ s)$ 值）。这些结果的先验版本如下。

定理 1.5。 假设 Γ 是一个拟圆。对于 $p > 1$, $s \in (0,1)$，当满足以下条件时， $C_c^\infty(\mathbb{C})|_\Gamma \cap B^s_{p,p}(\Gamma)$ 具有先验普列梅利-卡尔德隆性质：

$$(p-1)(h(\Gamma)-1) < sp < p + 1 - h(\Gamma)$$

当 Γ 是弦弧时，该条件可化简为 $0 < s < 1$ 。

假设曲线 Γ 是可求长的，因此空间$B^s_{p,p}(\Gamma)$定义良好。我们将看到，$B^s_{p,p}(\Gamma)$上的普列梅利-卡尔德隆问题更容易处理：在第 4 节中，我们将证明以下结论：

定理 1.6 (见定理 4.4)。 假设曲线 Γ 是弦弧。对于 $0 < s < 1$和 $1 < p < \infty$，柯西积分算子 T 在 $B^s_{p,p}(\Gamma)$上有界。

2 拟圆上的 $\mathbf{B}^s_{p,p}(\Gamma)$ 普列梅利-卡尔德隆问题：不可求长情形

本节的主要目标是探讨拟圆上空间$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Gamma)$、 $p > 1$ 和 $0 < s < 1$的普莱梅利–卡尔德龙问题 Γ。现在我们引入几个与拟圆密切相关、将在后文中用到的概念。

回顾一下，拟圆盘是平面上的拟共形同胚将单位圆盘 $\mathbb{D}_i$ 映射得到的像，其边界曲线称为拟圆。若平面上的同胚 Φ 的梯度按分布意义属于 $L^2_{loc}(\mathbb{C})$，且此外存在一个常数 $k < 1$ 使得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = \mu(z)\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

对于满足 $\|\mu\|_\infty \le k$的函数 $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$。若令 $K = \frac{1+k}{1-k}$，则 K 表示拟共形映射对圆的无穷小像所产生的最大偏心率。

任意拟圆 Γ 都存在一个关于 Γ 的拟共形反射，该反射在 Γ 附近是双 Lipschitz 的。这里，拟共形反射是指 R 上的反拟共形自同胚 $\mathbb{C}$，满足 $R \circ R = $ 在 $\mathbb{C}$ 上为恒等映射，而限制在Γ上时为恒等映射。具体而言，设 Φ 是 $\mathbb{C}$ 的一个拟共形同胚，则 $R(z) = \Phi \circ (1/\Phi^{-1}(z))$ 是关于拟圆 $\Gamma = \partial\Phi(\mathbb{D}_i)$ 的拟共形反射。

设 Ω_i 和 Ω_e 是由拟圆 Γ 围成的区域。若 φ_i 和 φ_e 分别是从 $\mathbb{D}_i$ 到 Ω_i、从 $\mathbb{D}_e$ 到 Ω_e 的共形同构，则它们可以延拓为闭包之间的同胚，使得 $h = \varphi_e^{-1} \circ \varphi_i$ 是 $\mathbb{T}$ 上的同胚，并且按如下意义是拟对称的：存在一个常数 $C > 0$，使得

$$C^{-1} \le \frac{|h(e^{i(t+\alpha)}) - h(e^{it})|}{|h(e^{it}) - h(e^{i(t-\alpha)})|} \le C$$

对每个 $t \in \mathbb{R}$ 和 $-\pi/2 < \alpha \le \pi/2$。此外，每个拟对称性都可以由某个拟圆以这种方式得到。关于这些拟共形理论的结果，详细内容请参阅 [1]。

2.1 稠密子空间中函数的边界值 $\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p}(\Omega)$

设 Γ 是一条若尔当曲线，且 $p > 1$。我们回顾一下，空间 $\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p}(\Omega_{i,e})$ 称为 p-临界 Besov 空间，具有共形不变这一显著性质：若 Ω,Ω' 是两个 Jordan 域，且 $\varphi : \Omega \to \Omega'$ 是一个双全纯映射，那么映射 $u \mapsto u \circ \varphi$ 是 $\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p}(\Omega')$ 与 $\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p}(\Omega)$ 之间的准等距映射。为尽可能做到自包含，下面给出证明的概要：由变量替换 $\zeta = \varphi(z)$，可得

$$\iint_{\Omega'} |\nabla u(\zeta)|^p d(\zeta,\Gamma')^{p-2} dxdy = \iint_{\Omega} |\nabla u(\varphi(z))|^p d(\varphi(z),\Gamma')^{p-2} |\varphi'(z)|^2 dxdy.$$

现在，科比畸变定理（见 [1]）推出

$$\forall z \in \Omega, \quad \frac{1}{4} \le \frac{d(\varphi(z),\Gamma')}{d(z,\Gamma)|\varphi'(z)|} \le 4, \tag{2.1}$$

由此便可得到结论。

将这一结果应用于 $\Omega' = \mathbb{D}$（即由单位圆 $\mathbb{T}$ 所围成的内圆盘或外圆盘），我们看到，Ω 上所有的 p-临界 Besov 空间都与$\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p}(\mathbb{D})$准等距。经典结果 [44] 表明，由$\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p}(\mathbb{D})$中可连续延拓至 $\mathbb{D}$ 的函数构成的空间$\mathcal{C}^p(\mathbb{D})$在$\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p}(\mathbb{D})$中稠密。由以下事实也可推出这一点：多项式在伯格曼空间 A^p_{p-2}（即满足以下条件的 $\mathbb{D}$中的解析函数 g）中稠密

$$\iint_{\mathbb{D}} |g(z)|^p |1-|z|^2|^{p-2} dxdy < \infty.$$

由于两个 Jordan 域之间的双全纯同胚可延拓为它们的闭包之间的同胚，因此类似的性质也适用于相应的空间 $\mathcal{C}^p(\Omega)$。

在本小节中，我们证明对于任意拟圆 Γ，$\mathcal{C}_p(\Omega_i)|_\Gamma = \mathcal{C}_p(\Omega_e)|_\Gamma$。接下来，我们先讨论 $p=2$ 的情形。

设 $u_i \in \mathcal{C}_2(\Omega_i)$ 且 $f = u_i|_\Gamma$。回顾一下，存在一个跨越 Γ 的拟共形反射 R。令 $v(z) = u_i(R(z))$ $z \in \Omega_e$。由 R 在 Γ 周围的双 Lipschitz 性质，我们有如下

$$\iint_{\Omega_e} |\nabla v(z)|^2 dxdy < \infty$$

（严格来说，∞ 处存在一个技术问题，该问题已在附录中解决）。接下来我们运用狄利克雷原理，得到

$$\iint_{\Omega_e} |\nabla u_e(z)|^2 dxdy \le \iint_{\Omega_e} |\nabla v(z)|^2 dxdy < +\infty,$$

其中 $u_e = P_e(f)$ 表示 f 在 Ω_e 中的调和延拓。也就是说，传输算子

$$\mathcal{C}_2(\Omega_i) \ni u_i \mapsto u_e \in \mathcal{C}_2(\Omega_e)$$

是有界的。实际上，它是一个有界同构，因为交换 Ω_i 和 Ω_e 的角色即可证明逆算子的有界性，从而得证。

对于一般的 $p \neq 2$ 情形，我们无法使用狄利克雷原理，因此改用几乎狄利克雷原理。回顾一下，对于 $\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)$、$p>1, 0<s<1$，若几乎狄利克雷原理成立，则对于任意定义在 Γ 上的 f，记其在 Ω 中的调和延拓为 u，并令 v 为 f 到 Ω 的任意连续延拓，且该延拓属于 $C^1(\Omega)$，我们有

$$\iint_{\Omega} |\nabla u(z)|^p d(z,\Gamma)^{(1-s)p-1} dxdy \le C \iint_{\Omega} |\nabla v(z)|^p d(z,\Gamma)^{(1-s)p-1} dxdy$$

对于某个常数 C，该常数仅取决于Ω p， s。文献 [33] 证明了，对于所有 $p>1$，$0<s<1$，几乎狄利克雷原理对$\mathcal{B}^s_{p,\,p}(\mathbb{D}_i,\,e)$成立。

引理 2.1。设 Γ 是一个拟圆，且 $1<p<\infty$。几乎狄利克雷原理对空间 $B^{1/p}_{p\,p,}(\Omega_i,\,e)$ 成立。

证明。将 $\mathbb{D}_i$ 中的几乎狄利克雷原理应用于 $s=1/p$，可得

$$\iint_{\mathbb{D}_i} |\nabla u(z)|^p (1-|z|)^{p-2} dxdy \le C \iint_{\mathbb{D}_i} |\nabla v(z)|^p (1-|z|)^{p-2} dxdy, \tag{2.2}$$

记号与前文相同： u 是边界值为 $u|_\Gamma = f$ 的调和函数， v 是 f 延拓到 $\mathbb{D}_i$ 的任意 C^1 延拓。设 φ 是一个从 $\mathbb{D}_i$ 到 Ω_i 的共形映射。利用空间 $W^{1,\,p}(\omega,\ \mathbb{D}_i)$ 的共形不变性，其中 $\omega(z) = (1-|z|)^{p-2}$，并作变量替换，可得

$$\iint_{\Omega_i} |\nabla(u\circ\varphi^{-1})|^p d(z,\,\Gamma)^{p-2} dxdy \le C \iint_{\Omega_i} |\nabla(v\circ\varphi^{-1})|^p d(z,\,\Gamma)^{p-2} dxdy. \tag{2.3}$$

注意到 $u\circ\varphi^{-1}$ 是调和的，我们便证明了空间 $\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p,}(\Omega_i)$. 的几乎狄利克雷原理。空间 $\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p,}(\Omega_e)$的断言也可类似处理。 □

因此，若 f 是在 Γ 上的连续函数，则它到 Ω_i 的调和延拓属于 $\mathcal{C}^p(\Omega_i)$，当且仅当它到 Ω_e 的调和延拓属于 $\mathcal{C}^p(\Omega_e)$。于是，$C_p(\Omega_i \to \Gamma) = C_p(\Omega_e \to \Gamma)$，因此我们可以定义 $\mathcal{C}^p(\Gamma) = \mathcal{C}^p(\Omega_{i,e} \to \Gamma)$。

令 $\varphi_{i、e}$ 表示从 $\mathbb{D}_{i、e}$ 到 $\Omega_{i、e}$ 的黎曼映射，如前所述。由共形不变性可得，$f \circ \varphi_{i、e} \in \mathrm{C}^p(\mathbb{T})$，以及 $f \circ \varphi_e = f \circ \varphi_i \circ h$，其中 $h = \varphi_i^{-1} \circ \varphi_e$ 是一个称为保角焊接的圆周同胚。正如我们上文所回顾的，这个同胚具有拟对称性：由此可推得，$V_h : g \mapsto g \circ h$ 是 $\mathrm{C}^p(\mathbb{T})$ 的一个同构，并且可扩展为 $\mathrm{B}^{1/p}_{p\,p、}(\mathbb{T})$ 与 $V_h^{-1} = V_{h^{-1}}$ 之间的同构。现在，若考虑单位圆的任意拟对称性 h，我们知道 [1]，h 是某个拟圆的保角焊接。由这一几何方法可得，对于任意拟对称性 h，V_h 是 $\mathrm{B}^{1/p}_{p\,p、}(\mathbb{T})$ 的一个同构。反过来，Nag-Sullivan [37] 在 $p = 2$ 的情形下，以及 Bourdaud [5] 在一般情形下证明了：如果 h 是一个圆周同胚，且 V_h 是 $\mathrm{B}^{1/p}_{p\,p、}(\mathbb{T})$ 的一个同构，那么 h 必须是拟对称性。Vodop'Yanov [48],，以及后来 Bourdaud [5] 还证明了，如果 $s \neq 1/p$，则满足 V_h 在 $\mathrm{B}^s_{p、\,p}(\mathbb{T})$ 上按同构方式作用的圆周同胚 h 正是双 Lipschitz 映射；它们构成拟对称群的一个真子群。

2.2 $\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p}$中函数的边界值(Ω)

对于一个在边界上连续的函数 u $\mathrm{B}^{1/p}_{p\,p}(\Omega_i)$，其边界值是显然的：它就是该函数在边界上的限制。此外，我们刚刚已经看到，如果在 Ω_e 中对这个边界值取调和延拓，就会得到一个函数 $v \in \mathrm{B}^{1/p}_{p\,p}(\Omega_e)$，其范数与原函数的范数等价。现在考虑一般函数 $u \in \mathrm{B}^{1/p}_{p\,p}(\Omega_i)$：正如我们所看到的，该函数是序列 $(u_n) \in \mathrm{C}^p(\Omega_i)$ 的极限，于是我们将 f_n 定义为 u_n 的边界值。将 f_n 调和延拓到 Ω_e 后，所得序列是 $\mathrm{B}^{1/p}_{p\,p}(\Omega_e)$ 中的柯西序列，因此收敛到某个 $v \in \mathrm{B}^{1/p}_{p\,p}(\Omega_e)$。我们可以将二元组 $(u,\ v)$ 视为 u 的边界值的抽象版本，也可以视为 v 的边界值。所有这类边界函数组成的集合记为 $\mathrm{B}^{1/p}_{p\,p}(\Gamma)$。

具体而言，我们使用黎曼映射 $\varphi_{i,e}$：$u \circ \varphi_i \in \mathrm{B}^{1/p}_{p\,p、}(\mathbb{D}_i) \subset h^p(\mathbb{D})$，即圆盘上的经典调和 Hardy 空间，因此它在圆上几乎处处具有径向边界值，从而定义了一个函数 $b_i \in L^p(\mathbb{T})$。注意，这一事实在 Ω_i 中可表述为：u 沿着内部射线，在 ω_i-几乎处处的意义下存在极限，其中 ω_i 表示 Ω_i中的调和测度。注意，这个极限 b_i 刻画了 u。我们也可以对 v 做同样的处理，并定义一个类似的函数 $b_e \in L^p(\mathbb{T})$。当 $u \in \mathrm{C}^p(\Omega_i)$ 时，我们已经看到 $b_e = V_h(b_i)$，其中 h 是 Γ的保角焊接。遗憾的是，在 $L^p(\mathbb{T})$ 中这没有意义，因为 h 不一定关于勒贝格测度绝对连续；从几何上看，这意味着 ω_i 和 ω_e 不一定彼此绝对连续。尽管如此，如果将 $\mathrm{B}^{1/p}_{p\,p、}(\mathbb{T})$ 上的 V_h 理解为 $V_h|_{\mathcal{C}^{1/p}_p(\mathbb{T})}$ 的完备化，那么关系 $b_e = V_h(b_i)$ 仍然成立。

在 $p = 2$的情形下，Schippers-Staubach（[40], [43]）对边界值给出了更为具体的描述：我们概述他们的论证。一方面，对于任意$u \in \mathcal{B}^{1/2}_{2\,2、}(\Omega_i)$，与之前一样，我们有 $u \circ \varphi_i \in \mathcal{B}^{1/2}_{2\,2、}(\mathbb{D}_i)$。在这种情形下，$u \circ \varphi_i$在圆 $\mathbb{T}$ 上处处都有径向边界值，除去一个对数容量为零的博雷尔集 F_1，从而定义了一个函数 $b_i \in L^2(\mathbb{T})$。另一方面，设$h = \varphi_i^{-1} \circ \varphi_e$为相对于拟圆 $p = 2$的保角

焊接，它是一个拟对称映射（正如我们上文指出的，h^{-1}也是如此）。由于拟对称映射会将对数容量为零的博雷尔集映为对数容量为零的博雷尔集（见 [2]），我们知道 $F_2 := h^{-1}(F_1)$也是一个对数容量为零的博雷尔集。于是，$b_e = b_i \circ \varphi_i^{-1} \circ \varphi_e = V_h(b_i)$在 $\mathbb{T}\setminus F_2$ 上定义良好，并属于 $L^2(\mathbb{T})$。已知并集 $F_1 \cup F_2$的对数容量也为零；特别地，其勒贝格测度为零，因为对数容量为零的集合具有零勒贝格测度。令 $P_e(b_e)$为b_e在 $\mathbb{D}_e$ 中的调和延拓，而 $v := P_e(b_e) \circ \varphi_e^{-1}$则是 $b_i \circ \varphi_i^{-1}$在Ω_e 中的调和延拓。我们可以看到，u 和 v 沿着 Γ上的每一条内部射线都具有相同的边界值，但有一个集合除外；该集合相对于 Ω_i 和Ω_e的调和测度均为零。此外，由于空间$\mathrm{B}_{p\,p}^{1/p}(\Omega_i,e)$随 p增大，$1 < p < 2$的情形也适用同样的论证。

2.3 关于$\mathcal{B}_{2\,2}^{1/2}(\Gamma)$ 的普列梅利-卡尔德隆问题

现在我们可以讨论关于$\mathcal{B}_{2\,2}^{1/2}(\Gamma)$ 的普列梅利-卡尔德隆问题。本小节的主要结果是定理 2.3，该定理已在文献中得到证明；参见 [40], [29]。不过，我们在下面给出的证明也值得记录，并将在后续小节中进一步使用。论证分为两个步骤。第一步，我们考虑空间 $C_c^\infty(\mathbb{C})|_\Gamma$ 中的函数，该空间是 Γ 上 $C_c^\infty(\mathbb{C})$ 的限制空间。第二步是一个逼近过程。

对于任意测试函数 f，有如下结论。

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\bar\partial f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{2.4}$$

事实上，

$$\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\bar\partial f(\zeta)}{z - \zeta} d\xi d\eta = \bar\partial f(z) * \left(\frac{1}{\pi z}\right) = \bar\partial\left(\frac{1}{\pi z}\right) * f(z) = \delta_0 * f(z) = f(z)$$

其中，$*$ 表示卷积，δ_0 表示位于 0 处的狄拉克测度。定义

$$\widehat{F_i}(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_e} \frac{\bar\partial f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \qquad z \in \Omega_i, \tag{2.5}$$

$$\widehat{F_e}(z) = \frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_i} \frac{\bar\partial f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \qquad z \in \Omega_e. \tag{2.6}$$

容易看出，F_i 和 F_e 分别是 Ω_i 和 Ω_e 中的全纯函数，且在 ∞ 处有 $\widehat{F_e}(z) = O(\frac{1}{|z|})$。此外，可以证明 $\widehat{F_i}$ 和 $\widehat{F_e}$ 都在 $\mathbb{C}$ 上定义了连续函数。由 (2.4) 可知，在 Γ 上，

$$f = \widehat{F_i} - \widehat{F_e}. \tag{2.7}$$

这里，我们利用了拟圆 Γ 相对于二维勒贝格测度的面积为零这一事实。对（2.5）两边求导，得到

$$\widehat{F_i}'(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_e} \frac{\bar\partial f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta = B(\bar\partial f \chi_{\Omega_e})(z).$$

这里， χ_{Ω_e} 是区域 Ω_e 的示性函数，而 B 表示 Beurling算子，即与 $-\frac{1}{\pi}$p.v. $\frac{1}{z^2}$的卷积，它是 $L^2(\mathbb{C})$上的等距映射。于是

$$\begin{aligned}\|\widehat{F_i}\|_{\mathcal{B}^{1/2}_{2,2}(\Omega_i)} &= \|\widehat{F_i}'\|_{L^2(\Omega_i)} = \|B(\bar{\partial} f \chi_{\Omega_e})\|_{L^2(\Omega_i)} \\ &\le \|B(\bar{\partial} f \chi_{\Omega_e})\|_{L^2(\mathbb{C})} = \|\bar{\partial} f\|_{L^2(\Omega_e)} \le \|\bar{\partial} f\|_{L^2(\mathbb{C})}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

同样，由（2.6）可知

$$\|\widehat{F_e}\|_{\mathcal{B}^{1/2}_{2,2}(\Omega_e)} \le \|\bar{\partial} f\|_{L^2(\mathbb{C})}. \tag{2.9}$$

引理 2.2。对于任意 $f \in C_c^\infty(\mathbb{C})$，（2.5）和（2.6）中的积分只取决于拟圆 Γ 上的边界值 f，而不取决于属于 $B^{1/2}_{2\,2}$、(Ω_i, e) 的 f 到 Ω_i 和 Ω_e 的特定延拓。特别地，分别在（2.5）和（2.6）中定义的 $\widehat{F_i}$ 和 $\widehat{F_e}$ 等于

$$F_i(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_e} \frac{\bar{\partial} u_e(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \qquad z \in \Omega_i, \tag{2.10}$$

$$F_e(z) = \frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_i} \frac{\bar{\partial} u_i(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \qquad z \in \Omega_e \tag{2.11}$$

因此

$$f = F_i - F_e \tag{2.12}$$

在 Γ 上。其中，u_i 和 u_e 分别是 f 到 Ω_i 和 Ω_e 的调和延拓。

证明。注意到，由于边界函数 f 在 Γ 上连续，u_i 和 u_e 分别在 Ω_i 和 Ω_e 上连续。根据狄利克雷原理，$u_{i,\,e} \in \mathcal{B}^{1/2}_{2\,2}(\Omega_{i,\,e})$。通过与 F_i 和 F_e 类似的计算，我们可以看到，全纯函数 $F_i \in \mathcal{B}^{1/2}_{2\,2}(\Omega_i)$ 和 $F_e \in \mathcal{B}^{1/2}_{2\,2}(\Omega_e)$。

根据 Gol'dshtein-Latfullin-Vodop'yanov 的定理 [18]（另见 [22]），单连通区域 Ω 满足条件 $W^{1,2}(\mathbb{C})|_\Omega = W^{1,2}(\Omega)$ 当且仅当 $\partial\Omega$ 是拟圆时，u_i 可通过在 Ω 上定义 $U_i = u_i \circ R_e$扩展为 $U_i \in W^{1,2}(\mathbb{C})$，其中 R 是关于 Γ的拟共形反射。存在一个 $C_c^\infty(\mathbb{C})$ 序列 $(U_{i,n})$，在 $W^{1,2}(\mathbb{C})$ 中收敛于 U_i（例如参见 [26] 第 11 章）。将 $U_{i,n}|_\Gamma$ 记为 $f_{i,n}$。根据前文所述，$f_{i,n}$ 可在 Γ 上写作 $F_{i,n} - F_{e,n}$。这里，

$$\widehat{F_{i,n}}(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_e} \frac{\bar{\partial} U_{i,n}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \qquad z \in \Omega_i$$

and

$$\widehat{F_{e,n}}(z) = \frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_i} \frac{\bar{\partial} U_{i,n}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \qquad z \in \Omega_e.$$

注意到，$\widehat{F_{i,n}}$ 和 $\widehat{F_{e,n}}$ 分别在 Ω_i, Ω_e中全纯，在 $\mathbb{C}$中连续，并且当 $z \to \infty$时，$\widehat{F_{e,n}}(z) = O(\frac{1}{|z|})$。与 (2.8) 中的推理类似，我们得到

$$\begin{aligned}\|\widehat{F_{e,n}} - F_e\|_{\mathcal{B}^{1/2}_{2,2}(\Omega_e)} &= \|(\widehat{F_{e,n}} - F_e)'\|_{L^2(\Omega_e)} \le \|\bar{\partial} U_{i,n} - \bar{\partial} u_i)\|_{L^2(\Omega_i)} \\ &\le \|\nabla(U_{i,n} - u_i)\|_{L^2(\Omega_i)} \le \|U_{i,n} - U_i\|_{W^{1,2}(\mathbb{C})} \to 0\end{aligned}$$

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$当 $n \to \infty$时。结合 $F_{e,n}$ 和 F_e 在 Ω_e 中的全纯性，以及 $F_{e,n}(z)$、$-F_e(z)$ 当 $z \to \infty$ 时为 $O(\frac{1}{|z|})$，这意味着序列 $(\widehat{F_e}_{,n})$ 在 Ω_e 的每个点处都趋于 F_e，当 $n \to \infty$时。根据狄利克雷原理，我们还可以看出

$$\|\nabla(P_i(f_{i,n}) - u_i)\|_{L^2(\Omega_i)} \le \|\nabla(U_{i,n} - u_i)\|_{L^2(\Omega_i)} \to 0$$

其中，$P_i(f_{i,\,n})$ 表示 Ω_i 中 $f_{i,\,n}$的调和延拓。因此，在每个点 $z \in \Gamma$处，我们都有 $f_{i,\,n}(z) \to f(z)$。

$\widehat{\quad}$序列 $(F_{i,\,n})$ 也收敛到 Ω_i中的一个全纯函数，记为 $G_i \in \mathcal{B}^{1/2}_{2\,2\,,}(\Omega_i)$。这表明函数 f 在 Γ 上有一个分解

$$f = G_i - F_e. \tag{2.13}$$

现在考虑 u_e Ω_e 中 f 的调和延拓，以及 U_e 属于 $W^{1,\,2}(\mathbb{C})$ 的 u_e的一个延拓。若取一个由 $C_c^\infty(\mathbb{C})$ 构成的序列 $(U_{e,\,n})$，使其收敛到 U_e，则可以像之前一样证明，

$$f = F_i - G_e. \tag{2.14}$$

根据分解的唯一性（参见例如 [28]），我们看到这两个$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$分解 (2.13)、(2.14) 与 (2.7) 相同，因此 $F_i = F_i$，$F_e = F_e$ 且$f = F_i - F_e$ 在 Γ。

□

关于上述证明，我们补充两点说明。首先，利用引理 2.2 证明中的一部分论证，可以看出 $C_c^\infty(\mathbb{C})|_\Gamma$ 是$\mathcal{B}^{1/2}_{2\,2\,,}(\Gamma)$的稠密子集。具体而言，对于任意的 $f \in \mathcal{B}^{1/2}_{2\,2\,,}(\Gamma)$，其在 Ω_i 中的调和延拓 u_i 可以延拓到 $U_i \in W^{1,2}(\mathbb{C})$。存在一个由 $C_c^\infty(\mathbb{C})$ 中的元素构成的序列 $(U_{i,n})$，收敛到 U_i in$_{W^{1,2}}(\mathbb{C})$。利用狄利克雷原理，我们可以得出该断言。

其次，我们说明，如果拟圆 Γ 是可求长的，那么引理 2.2 中的断言可以由广义格林公式（见 [30] 第 150 页）轻易推出。该公式指出，若 f 在区域 G 中具有 L^1-阶导数，且 $\Omega \subset G$ 是边界 $\Gamma = \partial\Omega$ 可求长的 Jordan 域，则

$$\iint_\Omega f_{\bar z} dx dy = -\frac{i}{2}\int_\Gamma f dz.$$

设 $f \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ 和 Γ 为一条可求长乔丹曲线，且设 u_e 为 f 在 Γ 上的限制函数向 Ω_e 的调和延拓，并且在 $\Omega_e \cup \Gamma$ 中连续。根据狄利克雷原理，$u_e \in W^{1,\,2}(\Omega_e)$。正如我们之前所注意到的，利用关于 Γ 的拟共形反射，可以将 u_e 延拓为 $U_e \in W^{1,\,2}(\mathbb{C})$。注意，$f - U_e$ 在 $\mathbb{C}$ 中具有 L^2 阶导数。根据广义格林公式，

$$\iint_{\Omega_e} \frac{\bar\partial(f-u_e)(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta = -\frac{i}{2}\int_\Gamma \frac{(f-u_e)|_\Gamma(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega_i$$

由于 $(f - u_e)|_\Gamma = 0$ 在 Γ 上，该式等于 0。因此，我们得到

$$\iint_{\Omega_e} \frac{\bar\partial f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta = \iint_{\Omega_e} \frac{\bar\partial u_e(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

这意味着，只要Γ是可求长的，积分就不依赖于具体的延拓。

定理 2.3. 设 Γ 为一个拟圆。任意函数 $f \in B^{1/2}_{2\,2}{}_{,}(\Gamma)$ 都存在唯一的分解 $f = F_i - F_e$ 于 Γ上，见(2.12)，其中$F_{i,\ e}$为全纯函数，$F_{i,\ e} \in B^{1/2}_{2\,2}{}_{,}(\Omega_{i,\ e})$且

$$\|F_{i,e}\|_{\mathcal{B}^{1/2}_{2,2}(\Omega_{i,e})} \le C\|f\|_{\mathcal{B}^{1/2}_{2,2}(\Gamma)}$$

对于每个 $f \in B^{1/2}_{2\,2}{}_{,}$（$\Gamma$），其中常数 C 仅取决于 Γ。

证明。现在令 f 为 $\mathcal{B}^{1/2}_{2\,2}{}_{,}$（$\Gamma$）的任意函数。可以证明，在这一更一般的情形下，按（2.10）和（2.11）定义的函数 F_i 和 F_e 仍然是良定义的，在定义域内全纯，并且在 $\mathbb{C}$ 中连续。通过与上述相同的推理，我们得到

$$\|F_i\|_{\mathcal{B}^{1/2}_{2,2}(\Omega_i)} \le \|u_e\|_{\mathcal{B}^{1/2}_{2,2}(\Omega_e)} \simeq \|f\|_{\mathcal{B}^{1/2}_{2,2}(\Gamma)},$$
$$\|F_e\|_{\mathcal{B}^{1/2}_{2,2}(\Omega_e)} \le \|u_i\|_{\mathcal{B}^{1/2}_{2,2}(\Omega_i)} \simeq \|f\|_{\mathcal{B}^{1/2}_{2,2}(\Gamma)}.$$

此处及下文中，记号“$A \simeq B$”表示存在一个常数 C，使得 $A/C \le B \le CA$。在上文中，隐常数仅取决于 Γ。

回顾一下，C_c^∞（$\mathbb{C}$）$|_\Gamma$ 是 $\mathcal{B}^{1/2}_{2\,2}{}_{,}$（$\Gamma$）的稠密子集。利用（2.12），不难通过逼近过程证明 $f = F_i|_\Gamma - F_e|_\Gamma$。细节留给读者。 □

2.4 普莱梅利–卡尔德龙问题 $\mathcal{B}^{1-1/p}_{p\,p}{}_{,}$（$\Gamma$）

空间 $\mathcal{B}^{1/2}_{2\,2}{}_{,}(\Gamma)$ 有两个显著性质：它是共形不变的，而且其定义不涉及到边界的距离。正如我们所见，对于所有拟圆，该空间都满足普列梅利-卡尔德隆性质。对于 $p \ne 2$，这两个性质有所分化：共形性质在空间 $\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p}{}_{,}(\Gamma)$ $p > 1$ 中仍然成立，但其定义中会出现距离项 $d(z,\Gamma)^{p-2}$。下一小节将讨论这种情形，并一并讨论带有距离项 $d(z,\Gamma)^{(1-s)p-1}$ 的一般情形 $s \in (0,1)$。另一性质则延伸到了 $\mathcal{B}^{1-1/p}_{p\,p}{}_{,}(\Gamma)$。注意，$1 - 1/p = 1/p'$，其中 p' 是 p 的共轭系数。

将 $\tilde{\mathcal{B}}^{1-1/p}_{p\,p}{}_{,}(\Gamma)$ 定义为 $C_c^\infty(\mathbb{C})|_\Gamma \cap \mathcal{B}^{1-1/p}_{p\,p}{}_{,}(\Omega_i \to \Gamma) \cap \mathcal{B}^{1-1/p}_{p\,p}{}_{,}(\Omega_e \to \Gamma)$ 在$\mathcal{B}^{1-1/p}_{p\,p}{}_{,}(\Gamma)$ 中的闭包。我们有如下

定理 2.4. 设 Γ 为拟圆且 $p > 2$。每个 $f \in \tilde{B}^{1-1/p}_{p\,p}{}_{,}$（$\Gamma$）均有唯一分解 $f = F_i - F_e$，其中 $F_{i,\ e}$ 为全纯函数，$F_{i,\ e} \in B^{1-1/p}_{p\,p}{}_{,}(\Omega_{i,\ e})$ 且

$$\|F_{i,e}\|_{\mathcal{B}^{1-1/p}_{p,p}(\Omega_{i,e})} \le C\|f\|_{\mathcal{B}^{1-1/p}_{p,p}(\Gamma)}$$

对每个 $f \in \tilde{B}^{1-1/p}_{p\,p}{}_{,}$（$\Gamma$），其中常数 C 仅依赖于 Γ和 p。

在继续证明该定理之前，我们必须先恰当地定义 $\mathcal{B}^{1-1/p}_{p\,p}{}_{,}(\Gamma)$ 的含义。事实上，属于 $\mathcal{B}^{1-1/p}_{p\,p}{}_{,}(\Omega_{i,e})$ 的函数在 $\Omega_{i,e}$ 的闭包上是指数为 $\alpha = 1 - 2/p$ 的 Hölder连续函数。对此有两种不同的证明方法。首先，$s = 1 - 1/p > 1/p$，我们稍后将证明，属于 $\mathcal{B}^{s}_{p,p}(\Omega_{i,e})$ 的函数在 $\Omega_{i,e}$ 的闭包上是α-Hölder连续的，其中 $\alpha = s - 1/p$。另一种证明同一结论的方法是借助 Jones定理：属于$\mathcal{B}^{1-1/p}_{p\,p}{}_{,}(\Omega_{i,e})$ 的函数可以延拓

为一个属于 $W^{1,p}(\mathbb{C})$ 的函数，尽管显然在这种情况下，不能像上文 的情形那样使用拟共形反射论证进行延拓（参见 [22], 另见 [8]）。莫雷不等式指出， $W^{1,p}(\mathbb{C}) \subset \Lambda^{\alpha}(\mathbb{C})$, $p > 2$ (注意，此包含关系在 $\mathbb{R}^n$ 中对 $p > n$成立) 对于 $\alpha = 1 - 2/p$，即 $\mathbb{C}$中指数为 α 的 Hölder连续函数空间。了解这一事实后，可以将空间 $\mathcal{B}_{p\,p}^{1-1/p,}(\Gamma)$ 重新定义为 Γ 上的$\Lambda^{1-2/p}$-函数空间，其中函数在 $\Omega_{i,e}$ 上的调和延拓属于$\mathcal{B}_{p\,p}^{1-1/p,}(\Omega_{i,e})$，也就是说，

$$\mathcal{B}_{p,p}^{1-1/p}(\Gamma) = \Lambda^{1-2/p}(\Gamma) \cap \mathcal{B}_{p,p}^{1-1/p}(\Omega_i \to \Gamma) \cap \mathcal{B}_{p,p}^{1-1/p}(\Omega_e \to \Gamma).$$

证明。 根据 Jones定理，证明与 $p = 2$ 的证明完全相同，因为对于所有 $p > 1$，Beurling 变换在 $L^p(\mathbb{C})$ 上有界。注意，在 $p = 2$ 的情形中使用的唯一性论证在这里仍然成立，因为对于 $p > 2$， $L^p(\Omega_i) \subset L^2(\Omega_i)$，并且根据附录中的论证，$\mathcal{B}_{p\,p}^{1-1/p,}(\Omega_e) \subset \mathcal{B}_{2\,2}^{1/2\,,}(\Omega_e)$。

□

2.5 一般 $\mathcal{B}_{p,p}^{s}(\Gamma)$ 的普列梅利-卡尔德隆问题

为了处理一般 $p > 1, s \in (0,1)$ 的 Plemelj-Calderón性质，我们需要考察 Beurling变换在 $L^p(\omega, \mathbb{C})$ 上的有界性，其中 ω 是一个权函数。权函数指的是 $\mathbb{C}$ 中非负的局部可积函数。由于 Beurling变换是一个 Calderón-Zygmund算子，我们知道，当且仅当 ω 属于所谓的 A_p 类时，这一性质才成立，其定义如下。

定义 2.5。 权函数 $\omega: \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ 称在 $\mathbb{C}$ 上满足 A_1 条件，如果存在 $C > 0$，使得对平面上的任意圆盘 D，

$$\frac{1}{|D|} \iint_D \omega(z) dxdy \leq C\omega(z)$$

对几乎所有 $z \in D$成立；而 ω 称满足 A_∞ 条件，如果

$$\frac{1}{|D|} \iint_D \omega(z) dxdy \leq C \exp\left(\frac{1}{|D|} \iint_D \log \omega(z) dxdy\right).$$

对任意 $p > 1$， A_p 类是由满足以下条件的权函数 $\omega: \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ 构成的集合：存在 $C > 1$，使得对平面上的每个圆盘 D，

$$\frac{1}{|D|} \iint_D \omega(z) dxdy \left(\frac{1}{|D|} \iint_D w(z)^{-\frac{1}{p-1}} dxdy\right)^{p-1} \leq C. \tag{2.15}$$

为便于后续使用，我们指出， $\mathbb{T}$ 上的 A_p-权函数类似地定义。已知，对所有 $p > 1$， $A_1 \subset A_p \subset A_\infty$， $\omega \in A_p$ 等价于 $\omega^{-1/(p-1)} \in A_{p'}$，其中 $1/p + 1/p' = 1$，且当 $1 < p_1 < p_2$时 $A_{p_1} \subset A_{p_2}$。由霍尔德不等式，(2.15) 不等式的左侧恒不小于 1；因此，可以将此类理解为满足某种反向赫尔德不等式。如果权函数 ω 满足 A_p，那么任意 Calderón-Zygmund 算子在加权空间 $L^p(\omega, \mathbb{C})$上有界（见 [9]）。

如果 $f \in C_c^\infty(\mathbb{C})$，我们回顾一下

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\bar{\partial} f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

$$= F_i(z) - F_e(z)$$

其中

$$F_i(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_e}\frac{\bar{\partial}f(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta, \quad F_e(z) = \frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_i}\frac{\bar{\partial}f(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta.$$

注意

$$F_i'(z) = B(\bar{\partial}f\chi_{\Omega_e})(z) = B(\bar{\partial}u_e\chi_{\Omega_e})(z)$$

and

$$F_e'(z) = -B(\bar{\partial}f\chi_{\Omega_i})(z) = -B(\bar{\partial}u_i\chi_{\Omega_i})(z)$$

由引理 2.2 可知，其中 $u_{i,\ e}$ 是 $f|_\Gamma$ 到 $\Omega_{i,\ e}$的调和延拓。由此可见，蕴含 $F_{i,\ e} \in \mathcal{B}^s_{p,\ p}(\Omega_{i,\ e})$ 的 Γ 充分条件是权函数 $\omega(z) = d(z,\ \Gamma)^{(1-s)p-1}$ 满足 A_p 条件。具体而言，在此条件下，我们有如下结论。

$$\|F_i\|_{\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_i)} \le C\|u_e\|_{\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_e)} \le C\|f\|_{\mathcal{B}^s_{p,p}(\Gamma)},$$
$$\|F_e\|_{\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_e)} \le C\|u_i\|_{\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_i)} \le C\|f\|_{\mathcal{B}^s_{p,p}(\Gamma)}$$

其中 C 是一个绝对常数。

条件 d（z，Γ）$^{(1-s)p-1}$ 关于 A_p 对曲线几何的依赖性已由 Astala 研究 [3]。为了陈述他的结果，我们首先需要引入一些概念。

设紧集 $E \subset \mathbb{C}$ 和 $0 < \delta \le 2$，令

$$M_\delta(E,t) = \frac{|E + D(0,t)|}{t^{2-\delta}}.$$

这里，$E + D(0,\ t)$ 按照定义 $\{e + z\colon\ e \in E,\ \ z \in D(0,\ t)\}$，是距 E小于 t 的点集，称为闵可夫斯基香肠。（这里以及下文中，我们用 $|E + D(0,\ t)|$ 表示集合 $E + D(0,\ t)$ 的勒贝格测度。）接着，我们定义一种闵可夫斯基内容:

$$h_\delta(E) = \sup_{0<t\le \mathrm{diam}(E)} M_\delta(E,t).$$

这里提到，在 $h_\delta(E)$ 的定义中，$M_\delta(E,\ t)$ 有时会在文献中被替换为

$$H_\delta(E,t) := \inf\{nt^\delta\colon\ E \subset \cup_{i=1}^n D(z_i,t),\ n \in \mathbb{N}\}.$$

这种替换不会造成任何区别，因为存在普适常数 c_1 和 c_2，使得（见 [36]）

$$c_1 M_\delta(E,t) \le H_\delta(E,t) \le c_2 M_\delta(E,t).$$

定义 2.6。我们称若尔当曲线 Γ 是 δ-正则的，如果存在 $C > 0$，使得对于每个圆盘 D（z、R）$\subset \mathbb{C}$,

$$h_\delta(\Gamma \cap D(z,R)) \le CR^\delta.$$

已知 1-正则性等价于阿尔福斯正则性。

已证明，对于任意拟圆 Γ，存在 $\delta < 2$，使得 Γ 是 δ-正则的。因此，对于拟圆 Γ，我们有，

$$h(\Gamma) = \inf\{\delta : \Gamma \text{ is } \delta\text{-regular}\} \in [1, 2)$$

我们也可以说，Γ 的正则度为 $h(\Gamma)$。关于 $h(\Gamma)$及其与豪斯多夫维数 $\dim_H(\Gamma)$ 的关系；请参见 Γ；参见 [3]。

定义 2.7。复平面中的紧子集 E 称为疏松的，如果存在 $c \in (0,1)$ 和 $r_0 > 1$，使得对于每个 $z \in \mathbb{C}$ 和 $0 < r \le r_0$，圆盘 $D(z, r)$都包含一个半径为 cr 且与 E不相交的圆盘。

定理 2.8 ([3])。设 $\alpha \in (0,1)$，且 Γ 是一条疏松的若尔当曲线。对于任意 $1 < p < \infty$，我们有，

$$d(z,\Gamma)^{\alpha-1} \in A_p \Leftrightarrow d(z,\Gamma)^{\alpha-1} \in A_1 \Leftrightarrow \alpha > h(\Gamma) - 1. \tag{2.16}$$

~定义 $\mathcal{B}^s_{p,p}(\Gamma)$ 为.....的闭包

$$C_c^\infty(\mathbb{C})|_\Gamma \cap \mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_i \to \Gamma) \cap \mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_e \to \Gamma)$$

在 $\mathcal{B}^s_{p,\ p}(\Gamma)$。注意，每个拟圆都是疏松的（见 [47]）。现在我们可以陈述本小节的主要定理。

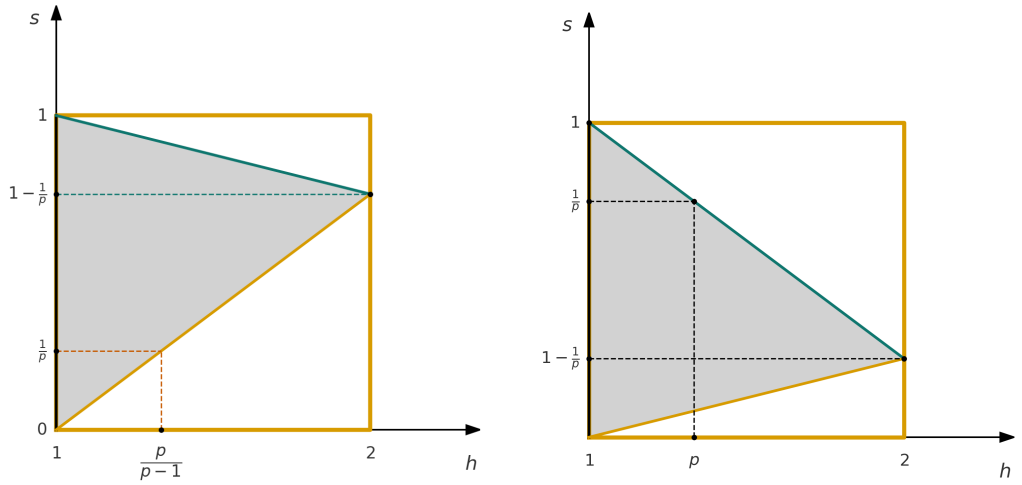

图 1：由点 $(h(\Gamma)\ s)$ 形成的区域：情形 p>2 和情形 p<2

定理 2.9。设 Γ 为一条拟圆，且 $1 < p < \infty$, $0 < s < 1$。若点 $(h(\Gamma)\ s)$位于阴影区域内（见图 *1*）；也就是说，

$$(h(\Gamma) - 1)\frac{p-1}{p} < s < \frac{p + 1 - h(\Gamma)}{p} \tag{2.17}$$

（若 $h(\Gamma)=1$，即 Γ 为一条弦弧曲线，则可将其简化为 $0<s<1$），那么任意 $f\in B^s_{p,p}(\Gamma)$ 都存在一个分解 $f=F_i-F_e$，其中 $F_{i,e}$ 为全纯，$F_{i,e}\in B^s_{p,p}(\Omega_{i,e})$ 并且

$$\|F_{i,e}\|_{\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_{i,e})}\le C\|f\|_{\mathcal{B}^s_{p,p}(\Gamma)} \tag{2.18}$$

对任意 $f\in B^s_{p,p}(\Gamma)$ 其中常数 C 仅取决于 Γ 和 p,s。

证明。根据上述讨论，显然，若 $d(z,\Gamma)^{(1-s)p-1}\in A_p$ 成立，则（2.18）成立。首先假设 $s>\frac{p-1}{p}$，因此 $(1-s)p<1$。由定理 2.8，$d(z,\Gamma)^{(1-s)p-1}\in A_p\Leftrightarrow(1-s)p>h(\Gamma)-1\Leftrightarrow s<\frac{p+1-h(\Gamma)}{p}$。

现在假设 $s<\frac{p-1}{p}$。那么 $d(z,\Gamma)^{(1-s)p-1}\in A_p\Leftrightarrow d(z,\Gamma)^{\frac{1-(1-s)p}{p-1}}\in A_{p'}$。这里，$\frac{1-(1-s)p}{p-1}p=\frac{sp}{p-1}-1$，其中 $\frac{sp}{p-1}<1$。再次由定理 2.8，我们得到 $d(z,\Gamma)^{(1-s)p-1}\in A_p\Leftrightarrow s>\frac{p-1}{p}(h-1)$。该分解可证明与定理 2.3 中的分解类似。$s=1-1/p$ 的情形已在上一小节中讨论。 □

我们将 $\mathcal{A}$ 定义为定理 2.9 中涉及的可容许集合，即

$$\mathcal{A}=\{(h(\Gamma),p,s)\in[1,2)\times(1,+\infty)\times(0,1):(h(\Gamma)-1)(p-1)<sp<p+1-h(\Gamma)\},$$

因此，如果 Γ 是一个拟圆，并且 $p>1$，$s\in(0,1)$ 满足 $(h(\Gamma)\ p,\ s)\in\mathcal{A}$，那么对于 $\mathcal{B}^s_{p,p}(\Gamma)$，普列梅利-卡尔德隆性质成立。图 1 展示了首先固定 $p>1$ 时 $\mathcal{A}$ 的切片，图 2 展示了给定 $h(\Gamma)$ 时的切片。

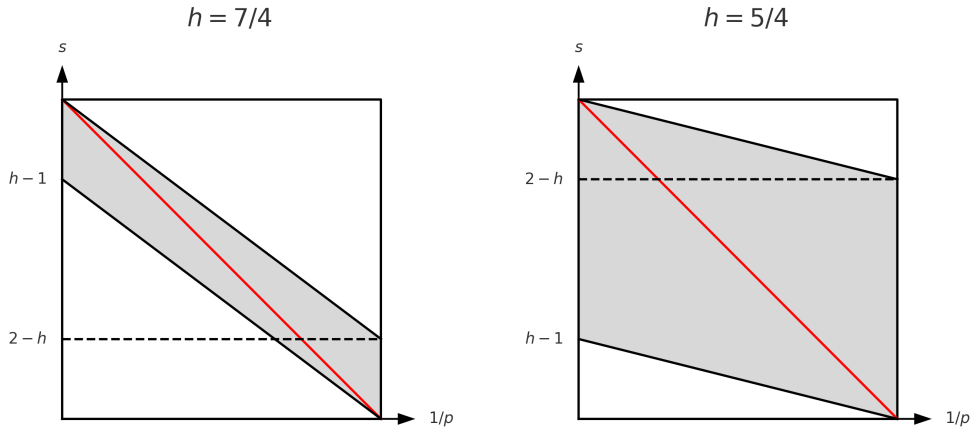

图 2：由点 $(p,\ s)$ 形成的区域：h>3/2 情形和 h<3/2 情形

注 2.10. 我们以一则关于图 1 中阴影区域上方三角形区域的评论来结束本小节。将区域 Ω_i 分成若干部分：

$$E_0=\{z\in\Omega_i:\ d(z,\Gamma)\ge 2^{-1}\},$$
$$E_n=\{z\in\Omega_i:\ 2^{-(n+1)}\le d(z,\Gamma)<2^{-n}\},\quad n=1,2,3,\cdots$$

若 $t < R$ 由基本覆盖定理可知，存在一个常数 C_1 使得（参见 [3]）

$$t^{h(\Gamma)-2}|\{z \in D(z_0, R) : d(z, \Gamma) < t\}| \le C_1 R^{h(\Gamma)}$$

其中， $D(z_0, R)$表示以 z_0 为中心、半径为 R的开圆盘。由此可知 $|E_n| \le C_2 2^{-n(2-h(\Gamma))}$。接着，通过直接计算可以看出，积分$\iint_{\Omega_i} d(z, \Gamma)^{(1-s)p-1} dxdy$ 收敛当且仅当级数 $\sum 2^{-n(p-sp+1-h(\Gamma))}$ 收敛，即 $s < (p+1-h(\Gamma))/p$。因此，假设 $s \ge (p+1-h(\Gamma))/p$，可以看出，即使是最简单的函数 $u(z) = z$ 也不属于空间$\mathcal{B}^s_{p,\,p}(\Omega_i)$。

2.6 $\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p,}(\Gamma)$ 的普莱梅利–卡尔德龙问题

回顾一下，$\mathcal{C}^p(\Omega_{i,\,e})$是$\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p,}(\Omega_{i,\,e})$的稠密子空间，其边界值定义良好，因此$\mathcal{C}^p(\Omega_i \to \Gamma) = \mathcal{C}^p(\Omega_e \to \Gamma)$；这个边界值空间称为$\mathcal{C}^p(\Gamma)$。于是，我们可以抽象地将$\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p,}(\Gamma)$中函数的边界值定义为$\mathcal{C}^p(\Gamma)$中柯西序列的等价类。

我们可以注意到，以这种方式定义的稠密子空间不太容易处理，因为我们不知道共形映射的显式形式。下面的结果给出了$\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p,}(\Gamma)$的一个显式稠密子空间。

定理 2.11. 设 Γ 是一个拟圆。若 $h(\Gamma) < p < {}^{h}{}_{(\Gamma)\ h(\Gamma)-1,}$ 则 $C^\infty_c(\mathbb{C})|_\Gamma$ 在 $B^{1/p}_{p\,p,}(\Gamma)$中稠密。

注 2.12. 在定理 2.11 的假设下，当 $s < 1/p$ 时，我们唯一能说的是$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Gamma)$包含$\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p,}(\Gamma)$，因此也包含 $C^\infty_c(\mathbb{C})|_\Gamma$。

定理 2.11 的证明. 关于 p的假设恰好是使$(h(\Gamma)\ p, \frac{1}{p}) \in \mathcal{A}$成立的条件。若该条件满足，则有 $\omega(z) = d(z, \Gamma)^{p-2}$ 是一个 A_p-权函数，特别地，在 $\mathbb{C}$上局部可积。设 $g \in C^\infty_c(\mathbb{C})$。于是，

$$\iint_{\Omega_{i,e}} |\nabla g|^p d(z, \Gamma)^{p-2} dxdy \le \iint_{\mathbb{C}} |\nabla g|^p d(z, \Gamma)^{p-2} dxdy < \infty.$$

由此以及几乎狄利克雷原理（引理 2.1）可证明 $g|_\Gamma \in \mathcal{B}^{1/p}_{p\,p,}(\Gamma$).

对于一般的 $f \in \mathcal{B}^{1/p}_{p\,p,}(\Gamma)$，我们将采用第2.1小节第一段中关于$\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p,}(\Omega_{i,e})$边界值的论证。设 u 为 f在 Ω_i上的调和延拓。注意到 $\omega \in A_p$，我们看到 u具有延拓 $U \in W^{1,p}(\omega, \mathbb{C})$到整个平面（见 [8]），并且存在一个序列 U_n，其属于 $C^\infty_c(\mathbb{C})$，使得（见引理 3.3 以及 [8]）

$$\|U_n - u\|_{W^{1,p}(\omega,\, \Omega_i)} \le \|U_n - U\|_{W^{1,p}(\omega,\, \mathbb{C})} \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{2.19}$$

根据几乎狄利克雷原理（引理 2.1），(2.19) 蕴含

$$\|P_i(U_n|_\Gamma) - u\|_{\mathcal{B}^{1/p}_{p,p}(\Omega_i)} \to 0.$$

此处和下文中的记号 P_i 分别表示定义在 Γ 上的函数在 Ω_i 和 Ω_e 中的调和延拓。(2.19) 还蕴含，序列 (U_n) 是 $W^{1,p}(\omega,\Omega_e)$ 中的柯西序列；随后再次利用几乎狄利克雷原理，序列 $(P_e(U_n|_\Gamma))$ 也是 $W^{1,p}(\omega,\Omega_e)$ 中的柯西序列，因而收敛于某个 $v\in \mathcal{B}^{1/p}_{p\,p,}(\Omega_e)$。

因此，

$$\|U_n|_\Gamma - f\|^p_{\mathcal{B}^{1/p}_{p,p}(\Gamma)} = \|P_i(U_n|_\Gamma)-u\|^p_{\mathcal{B}^{1/p}_{p,p}(\Omega_i)} + \|P_e(U_n|_\Gamma)-v\|^p_{\mathcal{B}^{1/p}_{p,p}(\Omega_e)} \to 0.$$

定理 2.11 的证明至此完成。 □

由定理 2.9 和定理 2.11 可立即得到以下结论。**推论 2.13**。设 Γ 为拟圆。若 $h(\Gamma) < p < {}^{h}_{(\Gamma)}\ {}_{h(\Gamma)-1}$，则任意函数 $f\in B^{1/p}_{p\,p,}(\Gamma)$ 都可以在 Γ 上分解为 $f=F_i-F_e$，其中 F_i 和 F_e 为全纯函数，$F_{i,e}\in B^{1/p}_{p\,p,}(\Omega_{i,e})$ 以及

$$\|F_{i,e}\|_{\mathcal{B}^{1/p}_{p,p}(\Omega_{i,e})} \le C\|f\|_{\mathcal{B}^{1/p}_{p,p}(\Gamma)}$$

对于每个 $f\in B^{1/p}_{p\,p,}(\Gamma)$，其中常数 C 取决于 Γ 和 p。

注 2.14。我们已经知道，当 $p=2$ 时，这个分解是唯一的。由于空间 $\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p,}(\mathbb{D})$ 随 p 增大而增大，因此对于 $h(\Gamma)<p\le 2$，唯一性仍然成立。

3 A_p-加权 Sobolev 空间上的拟圆盘

3.1 函数在$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)$中的边界值

设 Γ 是一条拟圆，Ω 是其互补域之一 $\Omega_{i,\ e}$ 如上所述。上一节已讨论临界情形 $s=1/p$ 下 $\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)$ 函数的边界值。正如引言中所述，我们现在将定义 $\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)$ $p>1$, $s\in(0,1)$ 中函数的边界值。正如我们将看到的，$s<1/p$ 和 $s>1/p$ 两种情形截然不同。现在我们考虑 $s>1/p$ 的情形。

命题 3.1. 设 Ω 是由有界若尔当曲线 Γ 围成的区域。对于任意满足 $s\in(1/p,1)$ 的 $u\in B^s_{p,p}(\Omega)$，存在一个常数 $C>0$，使得

$$|\nabla u(z)| \le C d(z,\Gamma)^{\frac{-1-(1-s)p}{p}}, \qquad z\in\Omega.$$

证明。令 $z\in\Omega$ 和 D 为圆盘 $D(z,d(z,\Gamma)/2)$。根据调和函数的平均值性质，可以写出

$$\nabla u(z) = \frac{1}{|D|}\iint_D \nabla u(\zeta)\,d\xi\,d\eta.$$

因此，根据霍尔德不等式，

$$|\nabla u(z)|^p \le \frac{4}{\pi d(z,\Gamma)^2}\iint_D |\nabla u(\zeta)|^p\,d\xi\,d\eta$$

$$\leq Cd(z,\Gamma)^{-1-(1-s)p}\iint_D |\nabla u(\zeta)|^p d(\zeta,\Gamma)^{(1-s)p-1}d\xi d\eta$$
$$\leq C\|u\|^p_{\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)} d(z,\Gamma)^{-1-(1-s)p}.$$

□

由此可得，存在 $C>0$ 使得 $|\nabla u(z)|\leq Cd(z,\Gamma)^{\alpha-1}$ 且 $\alpha = s-1/p$。当 Γ 是拟圆时，我们可以应用 Gehring-Martio 的以下结果（ [17]）。

命题 3.2。设 Ω 是一个由拟圆 Γ 和 $\alpha\in(0,1]$围成的区域。以下条件等价:

(1) $\forall z\in\Omega$ $|\nabla u(z)|\leq Cd(z,\Gamma)^{\alpha-1}$，其中某个常数为 $C>0$;
(2) $u\in\Lambda^\alpha(\Omega)$。

这里， $\Lambda^\alpha(\Omega)$ 表示阶数为 α 的 *Hölder* 函数空间。

若此时 $s\in(1/p,1)$，则 $\alpha = s-1/p\in(0,1)$，而 Gehring-Martio 定理蕴含 $B^s_{p,p}(\Omega)$ 中的函数在 Ω 上连续，因此 $B^s_{p,p}(\Omega_{i,e})$ 中函数的边界值定义良好，并刻画 u，即该函数是这一连续边界值的唯一调和延拓。现在，对于这一范围 $s\in(1/p,1)$，我们可以将空间 $B^s_{p,p}(\Gamma)$ 定义为如下函数空间：其元素是在 Γ 上的 $(s-1/p)$-Hölder 函数 f，其调和延拓 $u_{i,e}$ 到 $\Omega_{i,e}$ 后属于 $B^s_{p,p}(\Omega_{i,e})$；并为 $B^s_{p,p}(\Gamma)$ 配备自然范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}^s_{p,p}(\Gamma)}$，使得 $\|f\|^p_{B^s_{p,p}(\Gamma)} = \|u_i\|^p_{B^s_{p,p}(\Omega_i)} + \|u_e\|^p_{B^s_{p,p}(\Omega_e)}$。

3.2 $\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)$ 上的迹映射

正如我们已经看到的，在 $s>1/p$ 的情形下，空间 $\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_{i,e})$ 具有良定义的边界值；按照引言中采用的术语，迹映射

$$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_{i,e})\to\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_{i,e}\to\Gamma)$$

是一个同构。本小节的目标是讨论能够推出

$$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_i\to\Gamma) = \mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_e\to\Gamma).$$

我们已经知道 $s=1/p$ 和 $h(\Gamma)<p<h(\Gamma)/(1-h(\Gamma))$ 的结果（但在这种情况下，边界值的含义有所不同）。

另一种情形是 $p=\infty$：上文在 Gehring-Martio 定理相关讨论中引入的空间 $\Lambda^s(\Omega)$ 与 Besov 空间 $\mathcal{B}^s_{\infty,\infty}(\Omega)$ 相同。Hinkkanen 的一个定理 [20]（另见 [54]）指出，如果曲线 Γ 是任意一条若尔当曲线，且如果$f\in\Lambda^s(\Gamma)$ 满足 $s<1/2$，那么 f 在 $\Omega_{i,e}$ 上的调和延拓属于 $\mathcal{B}^s_{\infty,\infty}(\Omega)$，其范数由 f 的范数控制，并且指标 $1/2$ 是临界的。Hinkkanen 的结果对所有若尔当曲线都成立；对于黎曼映射具有 $1\leq K\leq 2$的 K-拟共形延拓的拟圆，该结果已在 [54] 中改进为 $s<1/K$。因此，我们定义

$$K_* := \min(K,2).$$

与前文一样，设 P_e 为一个算子，它将定义在 Γ上的函数映射为其在 Ω_e中的调和延拓。我们已回顾过，如果

$$h(\Gamma) < q < \frac{h(\Gamma)}{1-h(\Gamma)}, \quad 0 < \sigma < 1/K_*$$

then

$$P_e : \mathcal{B}^{1/q}_{q,q}(\Omega_i \to \Gamma) \to \mathcal{B}^{1/q}_{q,q}(\Omega_e),$$
$$P_e : \mathcal{B}^{\sigma}_{\infty,\infty}(\Omega_i \to \Gamma) \to \mathcal{B}^{\sigma}_{\infty,\infty}(\Omega_e),$$

二者均为有界的。我们希望对这些结果进行插值。众所周知，在复插值的意义下，对于单位圆盘 $\mathbb{D}$，当 $0 < \theta < 1$ 时，

$$[\mathcal{B}^{1/q}_{q,q}(\mathbb{D}), \mathcal{B}^{\sigma}_{\infty,\infty}(\mathbb{D})]_\theta = \mathcal{B}^{s}_{p,p}(\mathbb{D}),$$

with

$$s = \frac{1-\theta}{q} + \theta\sigma,$$
$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{q}.$$

如果上述插值结论对拟圆仍然成立，那么利用算子 P_e的插值，我们便能得到许多新的例子，说明 Γ 内部与外部的 Besov-Sobolev空间相等。我们坚信拟圆上的这种插值成立，但至今尚未证明，只有可求长情形例外，这将在第 4 节讨论。

3.3 加权 Sobolev 空间上的迹映射

设 ω 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的一个 A_p-权函数，其中 $p > 1$。加权 Sobolev 空间$W^{1,p}(\omega, \mathbb{C})$ 是由满足以下条件的温和分布 T 构成的空间： T 局部可积，且在分布意义下取值的 ∇T 是 $L^p(\omega, \mathbb{C})$ 中的一个函数。若 $(h(\Gamma)\ p, s) \in \mathcal{A}$，我们将对 $\omega(z) = d(z, \Gamma)^{(1-s)p-1} \in A_p$ 使用这些空间。

出于通常的技术原因，我们需要知道 $C^\infty_c(\mathbb{C})$-函数在 $W^{1,p}(\omega, \mathbb{C})$中稠密。更一般情形的证明见 [8]。

引理 3.3。 若 $\omega \in A_p$，则空间 $C^\infty_c(\mathbb{C})$ 在 $W^{1,p}(\omega, \mathbb{C})$中稠密。

证明。 考虑 $f \in W^{1,p}(\omega, \mathbb{C})$：不失一般性，我们可以假设 f具有紧支撑。于是，令 (φ_ε) 为 $C^\infty_c(\mathbb{C})$-单位近似，从而$f_\varepsilon = f * \varphi_\varepsilon \in C^\infty_c(\mathbb{C})$。现在

$$\|f - f_\varepsilon\|^p_{W^{1,p}(\omega,\, \mathbb{C})} = \iint_{\mathbb{C}} |\nabla f(z) - \nabla f_\varepsilon(z)|^p \omega(z) dxdy$$

根据勒贝格控制收敛定理，该式收敛于 0。事实上， $|\nabla f_\varepsilon|$ 受到 ∇f 的 Hardy-Littlewood极大函数控制，并且由 $\omega \in A_p$ 可知，这个极大函数属于 $L^p(\omega,\ \mathbb{C})$（见 [34]）。 □

在经典情形 $\omega \equiv 1$ 下，我们回顾：如果 $p > 2$ ，那么 $W^{1,\,p}(\mathbb{C}) \subset \Lambda^{\alpha}(\mathbb{C})$，其中 $\alpha = 1 - 2/p$；此外，由于该性质具有局部性，对于$W^{1,\,p}(D)$也有类似的包含关系，其中 D 为一个圆盘。

命题 3.4。若 $p > 2$，则以下两个嵌入断言成立：

- 若 $\omega \in A_1$，则 $W^{1,\,p}(\omega, \mathbb{C})$ 中的所有函数都是连续的；
- 若 $\omega(z) = d(z, \Gamma)^{(1-s)p-1}$ 仅假设为局部可积，则只要 $s > \frac{h(\Gamma)}{2} - \frac{h(\Gamma)-1}{p}$，同样的结论仍成立。

这里回顾一下，当 $\omega(z) = d(z, \Gamma)^{(1-s)p-1}$ 时，已知对于任意 $q > 1$，$\omega \in A_q \Leftrightarrow \omega \in A_1$，若 $h(\Gamma) - 1 < (1-s)p < 1$，即 $1 - \frac{h-1}{p} s > 1 - 1/p$。

命题 *3.4* 的证明。首先假设 $\omega \in A_1$。选取 q 使得 $2 < q < p$，并令D 为 $\mathbb{C}$中的一个开圆盘。由霍尔德不等式，得到

$$\int_D |\nabla f(x)|^q dxdy \leq \left(\int_D |\nabla f(x)|^p \omega(x) dxdy \right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_D \omega(x)^{-\frac{q}{p-q}} dxdy \right)^{1-\frac{q}{p}} < \infty \qquad (3.1)$$

因为 $f \in W^{1,p}(\omega, \mathbb{C})$，且 $\omega \in A_1 \subset A_{p/q}$，这等价于 $\omega^{-q/(p-q)} \in A_{p/(p-q)}$，尤其意味着 $\omega^{-q/(p-q)}$ 局部可积。最后，我们应用上文提到的索博列夫嵌入定理。

对于第二种情形，若 D 是一个包含 Γ 的圆盘，那么根据注 2.10 中的同样计算，我们得到

$$\iint_D d(z, \Gamma)^{\beta} dxdy < \infty$$

若 $\beta > h(\Gamma) - 2$。根据前面的计算可知，定理成立的充分条件是 (3.1) 右端的第二个积分有限；若存在 $q \in (2, p)$ 使得

$$-\frac{q}{p-q}((1-s)p - 1) > h(\Gamma) - 2.$$

该条件等价于，在 $h = h(\Gamma)$ 的条件下：

$$F(q, s, p, h) = q(h - 1 - (1-s)p) + p(2-h) > 0.$$

函数 F 关于 q为仿射函数，因此，最后一个不等式成立当且仅当

$$\max(F(2, s, p, h), F(p, s, p, h)) > 0.$$

But

$$F(2, s, p, h) = 2p\left(s - \left(\frac{h}{2} - \frac{h-1}{p}\right)\right),$$
$$F(p, s, p, h) = p^2\left(s - \left(1 - \frac{1}{p}\right)\right).$$

注意到，如果 $p > 2$，即可轻易得到该命题，

$$\frac{h}{2} - \frac{h-1}{p} < 1 - \frac{1}{p}.$$

□

现在假设拟圆 Γ满足

$$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_i \to \Gamma) = \mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_e \to \Gamma),$$

我们将这个边界值空间称为 $\mathcal{B}^s_{p,\ p}(\Gamma)$.

定理 3.5. </style}如果 ,(Γ _ $h)_{-}(\Gamma)_p^{-1}$ 且 $\omega \in A_p$，其中 $\omega(z) = d(z,\Gamma)^{(1-s)p-1}$，那么 $W^{1,p}(\omega,\mathbb{C})$ 中的元素都是 $\mathbb{C}$ 中的连续函数，并且

$$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Gamma) = W^{1,p}(\omega,\mathbb{C})|_\Gamma, \tag{3.2}$$

其中 $W^{1,p}(\omega,\mathbb{C})|_\Gamma = \{f|_\Gamma : \quad f \in W^{1,p}(\omega,\mathbb{C})\}$。

定理 3.5 的证明。我们首先证明 $\mathrm{B}^s_{p,p}(\Gamma) \subset W^{1,p}(\omega,\mathbb{C})|\Gamma$。设 $f \in \mathrm{B}^s_{p,p}(\Gamma)$，并令 u_i为 f 在 Ω_i 上的调和延拓。根据假设 $u_i \in W^{1,p}(\omega,\Omega_i)$，由 [8] 的一个定理可知，由于 Γ 是拟圆，$\omega \in A_p$, u_i 可以延拓为属于 $W^{1,p}(\omega,\mathbb{C})$ 的函数。

为了证明 $W^{1,\ p}(\omega,\ \mathbb{C})|_\Gamma \subset \mathcal{B}^s_{p,\ p}(\Gamma)$，我们先来考察 $f \in C^\infty_c(\mathbb{C})$。回忆一下,

$$F_i(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_e} \frac{\bar\partial f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad F_e(z) = \frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_i} \frac{\bar\partial f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

分别在 Ω_i 和 Ω_e 中全纯，而事实 $\omega \in A_p$ 蕴含$F_{i,\ e} \in \mathcal{B}^s_{p,\ p}(\Omega_{i,\ e} \to \Gamma)$，根据假设，这等于 $\mathcal{B}^s_{p,\ p}(\Gamma)$。利用 $f|_\Gamma = F_i - F_e$，我们可以看到 $f|_\Gamma \in \mathcal{B}^s_{p,\ p}(\Gamma)$。

现在令 $f \in W^{1,p}(\omega,\mathbb{C})$。为证明 $f|_\Gamma \in \mathrm{B}^s_{p,p}(\Gamma)$，我们根据引理 3.3 使用标准逼近论证。存在一个序列 $(f_n) \in C^\infty_c(\mathbb{C}) \cap W^{1,p}(\omega,\mathbb{C})$，在 $W^{1,p}(\omega,\mathbb{C})$ 范数下收敛到 f。根据前面的讨论，我们可以写成 $f_n|_\Gamma = (F_n)_i - (F_n)_e$，其中 $(F_n)_{i,e} \in \mathrm{B}^s_{p,p}(\Omega_{i,e})$，并且 $(F_n)_i$ 和 $(F_n)_e$ 是 $\mathrm{B}^s_{p,p}(\Omega_{i,e})$ 中的收敛序列。由于 $\mathrm{B}^s_{p,p}(\Omega_i \to \Gamma) = \mathrm{B}^s_{p,p}(\Omega_e \to \Gamma)$，可得 $f|_\Gamma \in \mathrm{B}^s_{p,p}(\Gamma)$。

□

推论 3.6. 在定理 *3.5* 的假设下，空间 $C^\infty_c(\mathbb{C})|_\Gamma$ 在 $B^s_{p,p}(\Gamma)$中稠密，因此定理 *2.9* 的结论对所有 $f \in B^s_{p,p}(\Gamma)$都成立。

我们以一个问题结束本小节。在定理 3.5 的假设下，若 $f \in \mathcal{B}^s_{p,p}(\Gamma)$，那么将其在两侧分别作调和延拓，从而延拓到整个平面后，是否属于 $W^{1,p}(\omega,\mathbb{C})$? 一般而言，我们不知道这个问题的答案，但对于正则性更高（ s更大）的情形，答案是肯定的:

命题 3.7. 设 Γ 是一个拟圆，且 f 是一个在 $\mathbb{C}$ 上 α-*Hölder*连续的函数，满足 $\alpha > h(\Gamma) - 1$，并且在 $\mathbb{C}|\Gamma$上属于 C^1 类。若函数$F(z) = \nabla f(z)$ $z \in \mathbb{C}|\Gamma$ （几乎处处定义）属于 $L^1_{loc}(\mathbb{C})$，则按分布的意义有 $\nabla f = F$。

证明。设 φ 是 $\mathbb{R}$ 中一个支集包含于 $[-1,1]$的 C^∞_c-函数。照例，我们定义单位近似 $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$。由此，我们可以定义二元单位近似

$$\psi_\varepsilon(z) = \psi_\varepsilon(x+iy) = \varphi_\varepsilon(x)\varphi_\varepsilon(y).$$

不妨假设 f 具有紧支撑，则函数 $f*\psi_\varepsilon$ 是一个具有紧支撑的 C^∞-函数，并在 $\mathbb{C}$ 中一致收敛到 f。由此我们推得

$$\iint_{\mathbb{C}} \nabla(f*\psi_\varepsilon)(z)h(z)dxdy = -\iint f*\psi_\varepsilon(z)\nabla h(z)dxdy$$

对于任意 $h \in C_c^\infty(\mathbb{C})$，右侧当 ε趋于 0 时收敛到 $-\iint_{\mathbb{C}} f(z)\nabla h(z)dxdy$。

我们将左侧分成两部分：

令 Γ_ε 为距 Γ小于 2ε 的点集。那么

$$\iint_{\mathbb{C}\setminus\Gamma_\varepsilon} \nabla(f*\psi_\varepsilon)(z)h(z)dxdy = \iint_{\mathbb{C}\setminus\Gamma_\varepsilon} (\nabla F)*\psi_\varepsilon(z)h(z)dxdy$$

当 ε 趋于 0 时，它收敛到 $\iint_{\mathbb{C}} \nabla F(z)h(z)dxdy$。为了完成命题的证明，现在只需证明

$$\iint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial(f*\psi_\varepsilon)(z)}{\partial x}dxdy$$

收敛到 0；对于 y，同样的结论也成立。但

$$\frac{\partial(f*\psi_\varepsilon)}{\partial x}(z) = f*\frac{\partial(\psi_\varepsilon)}{\partial x}(z)$$

这也等于

$$\int_{[-\varepsilon,\varepsilon]} \varphi_\varepsilon(t_2)\left(\int_{[-\varepsilon,\varepsilon]} (f(x-t_1,y-t_2)-f(x,y-t_2))\varphi_\varepsilon'(t_1)dt_1\right)dt_2,$$

因为 $\int_{[-\varepsilon,\varepsilon]} \varphi_\varepsilon'(t_1)dt_1 = 0$。现在 $|f(x-t_1,\ y-t_2)-f(x,\ y-t_2)| \le C\varepsilon^\alpha$ 以及 $|\varphi_\varepsilon'(t_1)| \le C\varepsilon^{-2}$。由于我们在长度为 2ε的区间上进行积分，整个积分的绝对值有界于 $C\varepsilon^{\alpha-1}$。

最后，

$$\iint_{\Gamma_\varepsilon} \left|f*\frac{\partial(\psi_\varepsilon)}{\partial x}(z)\right|dxdy \le |\Gamma_\varepsilon|\varepsilon^{\alpha-1}.$$

但我们知道 $|K\Gamma_\varepsilon|\varepsilon^{h(\Gamma)-2} \le C$；因此得到

$$|\Gamma_\varepsilon|\varepsilon^{\alpha-1} \le C\varepsilon^{\alpha+1-h(\Gamma)},$$

结论得证。 □

根据命题 3.7，该问题得到肯定回答的充分条件是满足定理 3.5 的假设以及 $s > \frac{1}{p} + (h(\Gamma)-1)$。请注意，该条件未必与定理的假设相容，尤其是与以下事实相容：$\omega \in A_p$：实际上我们需要

$$\frac{1}{p} + h - 1 < 1 + \frac{1-h}{p},$$

这等价于

$$p > \frac{h}{2-h},$$

而当 $h > 4/3$ 时，该条件构成了一个新的约束。

3.4 几乎狄利克雷原理

我们首先回顾经典的狄利克雷原理。若 Ω 是一个 Jordan 域，且 $\partial\Omega = \Gamma$，同时 f 是定义在 Γ 上的连续函数，并具有连续延拓 $F: \Omega \to \mathbb{C}$，该延拓属于 $C^1(\Omega)$，那么，如果 $\overline{u}$ 表示 f 到 Ω 的调和延拓，则有

$$\iint_\Omega |\nabla u(z)|^2 dxdy \le \iint_\Omega |\nabla F(z)|^2 dxdy.$$

现在，设 Γ 是一个拟圆，且 $p > 1$，$s \in (0, 1)$。如果存在 $C > 0$ 使得 $\mathcal{B}^s_{p,\,p}(\Omega)$ 满足几乎狄利克雷原理，我们就称之为满足几乎狄利克雷原理：

$$\iint_\Omega |\nabla u(z)|^p d(z,\Gamma)^{(1-s)p-1} dxdy \le C \iint_\Omega |\nabla F(z)|^p d(z,\Gamma)^{(1-s)p-1} dxdy.$$

Maz'ya [32] 已证明单位圆盘对所有 $p > 1$，$s \in (0, 1)$ 都满足几乎狄利克雷原理，其证明后来由 [33]加以简化。定理 3.5 表明，若 Γ 满足该定理的假设，则几乎狄利克雷原理成立。

4 弦弧曲线上的$B^s_{p,\,p}(\Gamma)$ 普列梅利-卡尔德隆问题：可求长情形

4.1 平面域中分数阶 Sobolev 空间的经典事实回顾。

我们已经讨论过 Sobolev 空间 $W^{1,\,p}(\mathbb{C})$，$1 < p < \infty$，它由满足以下条件的温和分布 f 组成：f 局部可积，且按分布意义求得的 ∇f 属于 $L^p(\mathbb{C})$。半范数

$$\|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{C})} = \left(\iint_{\mathbb{C}} |\nabla f(z)|^p dxdy \right)^{\frac{1}{p}}$$

赋予 $W^{1,\,p}(\mathbb{C})$ 一个模去常数的 Banach 空间结构，在文献中称为齐次 Sobolev 空间。非齐次 Sobolev 空间定义为$\mathbb{W}^{1,\,p}(\mathbb{C}) = W^{1,\,p}(\mathbb{C}) \cap L^p(\mathbb{C})$。它是一个配备如下范数的 Banach 空间

$$\|f\|_{\mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{C})} = \left(\|f\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{C})} + \|f\|^p_{L^p(\mathbb{C})} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中的一个开集。$W^{1,\,p}(\Omega)$ 和 $\mathbb{W}^{1,\,p}(\Omega)$ 应以类似方式定义。我们指出，如果开集 Ω 满足经典的 Poincaré 不等式，即

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \le C \|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

对每个 $f \in C^\infty_c(\Omega)$，其中常数 C 仅取决于 Ω 和 p，那么这两个空间相同。例如，有界弦弧域就是这样的区域。有界拟圆盘也满足 Poincaré 不等式，因为它是 Sobolev 空间$W^{1,\,p}(\mathbb{C})$ 的延拓域（见 [8, 22]），因此可以在一个足够规则的更大区域中应用 Poincaré 不等式；结合延拓定理，即可得出结论。

对于 $0 < s < 1$，我们将 $\mathbb{C}$ 中的分数阶 Besov-Sobolev 空间 $B^s_{p,\ p}(\mathbb{C})$ 定义为由满足以下条件的 $L^p(\mathbb{C})$-函数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 构成的空间

$$\int_{\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}} \frac{|f(z)-f(\zeta)|^p}{|z-\zeta|^{2+sp}} dz d\zeta < \infty.$$

（我们指出，如果 $s \geq 1$ 且 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中的一个连通开集，那么任何可测函数$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$，只要上述被积函数的积分 $|f(z)-f(\zeta)|^p/|z-\zeta|^{2+sp}$在 $\Omega \times\Omega$ 上收敛，实际上都是常数。）这些空间可以看作 $W^{0,p}(\mathbb{C})$（即 $L^p(\mathbb{C})$）与 $\mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{C})$之间的中间空间。更确切地说，它们可以通过对这两个空间进行实插值得到：$[L^p(\mathbb{C})\ \mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{C})]_{s,p} = B^s_{p,p}(\mathbb{C})$，见 [46]。注意到它们也是特殊的 Besov 空间。我们称其为分数阶 Besov-Sobolev 空间。如果改用复插值，我们将得到空间 $H^s_p(\mathbb{C})$，其元素由 L^p-函数的 Bessel 势组成：$[L^p(\mathbb{C})\ \mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{C})]_s = H^s_p(\mathbb{C})$。已知$B^s_{p,p}(\mathbb{C}) = H^s_p(\mathbb{C})$当且仅当 $p = 2$（如果 $p \neq 2$，这两个空间甚至不同构）。

为后续使用，我们将分数阶 Besov-Sobolev 空间的定义推广到 $s \in (1,2)$ 的情形：若 $f \in B^{s-1}_{p\,p,}(\mathbb{C})$ 且$\nabla f \in B^{s-1}_{p\,p,}(\mathbb{C})$，则称 $f \in B^s_{p,p}(\mathbb{C})$，其中 $s \in (1,2)$。类似地，该定义也可推广到其他非整数阶$s > 0$。已知对于非整数阶 $s > 0$和 $1 < p < \infty$，空间 $C^\infty_c(\mathbb{C})$ 在 $B^s_{p,p}(\mathbb{C})$ 中稠密。

现在考虑平面上的一个弦弧子域。回顾一下，弦弧域是平面上的一个双 Lipschitz 同胚作用于一个圆盘所得的像。这个名称源于这样一个事实：Jordan 域 Ω 是弦弧域，当且仅当 $\Gamma = \partial\Omega$ 是一条弦弧曲线。

我们将 $B^s_{p,p}(\Omega)$ 简单定义为：$B^s_{p,p}(\mathbb{C})$ 中函数在 Ω 上的限制所构成的空间。这样的函数尤其满足

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{|f(z)-f(\zeta)|^p}{|z-\zeta|^{2+sp}} dz d\zeta < \infty$$

而满足这一最后性质的函数可以延拓为 $B^s_{p,p}(\mathbb{C})$ 中的函数 .

若 Ω 是边界为 Γ 的弦弧域，我们可以如下定义 Γ 上的分数阶 Besov-Sobolev 空间 $B^s_{p,p}(\Gamma)$：$0 < s < 1, p > 1$,

$$B^s_{p,p}(\Gamma) = \{f \in L^p(\Gamma) : \iint_{\Gamma\times\Gamma} \frac{|f(z)-f(\zeta)|^p}{|z-\zeta|^{1+ps}} |dz||d\zeta| < \infty\}.$$

我们将迹算子 γ 定义为 $C^\infty_c(\mathbb{C})$ 中的算子，其定义为 $\gamma(u) = u|_\Gamma$。

定理 4.1（第 182 页，见 [24]）。设 Ω 为一个弦弧域，且 $s \in (1/p, 1+1/p)$。迹算子 γ 可延拓为一个有界线性算子，从 $B^s_{p,p}(\Omega)$ 映 *onto*$B^{s-1/p}_{p\,p,}(\Gamma)$，其阶数损失为 $1/p$，且其核为 $C^\infty_c(\Omega)$ 在 $B^s_{p,p}(\Omega)$中的闭包。

4.2 弦弧曲线上的普列梅利-卡尔德隆问题

现在我们回到普莱梅利–卡尔德龙问题。回顾一下，对于每个 $p \in (1+\infty)$，柯西积分算子 T在 $L^p(\Gamma)$ 上有界（即 $B^0_{p,\ p}(\Gamma)$）（见第 1.3 小节）

若 Γ 是弦弧。本小节的目标是证明，对于所有 $p \in (1, +\infty)$ 和 $s \in (0,1]$，算子 T 在 $B^s_{p,\ p}(\Gamma)$ 上有界。我们首先证明，利用 $B^0_{p,\ p}(\Gamma)$，该结果对 $B^1_{p,\ p}(\Gamma)$ 成立。

定理 4.2. 算子 T 在 $B^1_{p,p}(\Gamma)$上有界；此外，它在 $B^1_{p,p}(\Gamma)$ 上的算子范数等于其在 $L^p(\Gamma)$ 上的算子范数。

在证明该定理之前，我们必须准确界定当 Γ 是弦弧曲线时（或者为说明其弦弧常数而称为 K-弦弧曲线时），$B^1_{p,p}(\Gamma)$ 的含义。不失一般性，设 length$(\Gamma) = 2\pi$。令 $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ 为从单位圆盘 $\mathbb{D}$ 映到 Γ 的内部区域 Ω 的黎曼映射；它可以延拓为闭包之间的同胚，使得 φ 在 $\mathbb{T}$ 上的限制是拟对称的（见 [39]）。令 $t \mapsto z(t)$ 表示 Γ 的弧长参数化，并令$\lambda(e^{it}) = z(t)$，使得 $\varphi = \lambda \circ h$，其中 h 是$\mathbb{T}$ 到 $|h'| = |\varphi'|$的绝对连续同胚。容易看出，λ 是从 $\mathbb{T}$ 到Γ的双 Lipschitz 同胚。事实上，对于任意 $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$,

$$K^{-1}|e^{it_1} - e^{it_2}| \le |\lambda(e^{it_1}) - \lambda(e^{it_2})| \le \pi/2|e^{it_1} - e^{it_2}|.$$

我们称 $f \in L^p(\Gamma)$ 属于 $B^1_{p,\ p}(\Gamma)$，如果 $f \circ \lambda$ 是函数 $h \in L^p(\mathbb{T})$ 的原函数。我们将函数 f' 定义为 $f' \circ \lambda\lambda' = h$。那么 $f' \in L^p(\Gamma)$。空间 $B^1_{p,\ p}(\Gamma)$ 配备自然范数$\|f\|_{B^1_{p,\ p}(\Gamma)} = \|f'\|_{L^p(\Gamma)}$。

为准备证明，我们引入以下定义。将 $\Gamma_r = \tau(|z| = r)$ 称为“圆形曲线”，其中 τ 是一个将 $\mathbb{D}$ 映射到 Ω 的黎曼映射。弦弧域 Ω 中指标为 p 的 Hardy空间$E^p(\Omega)$ 由 Ω 内范数有限的全纯函数 F 组成

$$\|F\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \sup_r \int_{\Gamma_r} |F(w)|^p |dw| \right)^{1/p}.$$

注意，τ是闭包 $\mathbb{D}$ 到 $\Omega \cup \Gamma$上的一个同胚，并且在 $\mathbb{T}$ 上绝对连续，因为 Γ是可求长的。

定理 *4.2* 的证明。令 $f \in B^1_{p,p}(\Gamma)$。由 David 定理，我们可以写成

$$f' = G_i + G_e \tag{4.1}$$

在 Γ 上。这里，G_i 和 G_e 分别属于 Ω_i 和 Ω_e 中指标为 p 的 Hardy空间，因此 G_i 和 G_e 关于弧长测度几乎处处在 Γ 上具有非切向边界极限，仍分别记为 G_i 和 G_e，使得$\|G_i\|_{L^p(\Gamma)}$ 和$\|G_e\|_{L^p(\Gamma)}$ 均由上方的$\|f\|_{B^1_{p,p}(\Gamma)}$控制。

回忆一下，$G_i \in E^p(\Omega_i) \subset E^1(\Omega_i)$，因此 $G_i \circ \tau\tau' \in E^1(\mathbb{D}_i)$。现在令 Φ_i为 Ω_i 中 G_i 的一个原函数。于是我们看到 $(\Phi_i \circ \tau)' = G_i \circ \tau\tau' \in E^1(\mathbb{D}_i)$。根据 Hardy-Littlewood 的一个结果（例如参见 [16]第89页），我们得出 $\Phi_i \circ \tau$ 在$\mathbb{D}_i$上连续，并且在 $\mathbb{T}$上绝对连续，从而 $(\Phi_i \circ \tau)'(\zeta) = \lim_{r\to 1}(\Phi_i \circ \tau)'(r\zeta)$ 在 $\mathbb{T}$ 上几乎处处成立，因此 $(\Phi_i \circ \tau)'(\zeta) = G_i \circ \tau(\zeta)\tau'(\zeta)$ 在 $\mathbb{T}$ 上几乎处处成立。利用这一点，我们在 Γ 上定义 $\Phi_i' = G_i$，并且类似地可以在 Γ 上定义 $\Phi_e' = G_e$。结合（4.1），通过调整常数可得,

$$f = \Phi_i + \Phi_e$$

在 Γ 上，Φ_i 的范数、$_e$ 在 B_p^1 中的范数以及 $_p(\Gamma)$ 的范数均由 $\|f\|_{B_p^1}$、$_p(\Gamma)$ 从上方控制。由 Plemelj公式，我们得出算子 T 关于范数 $\|\cdot\|_{B_{p,p}^1(\Gamma)}$ 在 $B_{p,p}^1(\Gamma)$ 上有界；此外，还有 $\|T\|_{B_{p,p}^1(\Gamma)\to B_{p,p}^1(\Gamma)} = \|T\|_{L^p(\Gamma)\to L^p(\Gamma)}$。 □

现在我们准备证明本小节的主要结果：算子 T 在 $B_{p,p}^s(\Gamma)$ 上对 $0 < s < 1$有界。由 $B_{p,p}^s(\Gamma)$ 与 $B_{p,p}^s(\mathbb{T})$ 同构可知，这归结为证明具有如下核的算子

$$\mathrm{p.v.}\frac{\lambda'(\zeta)}{\lambda(\zeta)-\lambda(\xi)}$$

在 $B_{p,p}^s(\mathbb{T})$ 上有界。令 $g = f\circ\lambda$。该算子的更精确的定义为

$$\widetilde{T}g(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{T}}\frac{g(\zeta)\lambda'(\zeta)}{\lambda(\zeta)-\lambda(\xi)}d\zeta.$$

下面引入卡尔德隆插值定理。

定理 4.3 (见 [46], 第6章第38页， [4] 以及 [7]). 设 $s_0, s_1 \in [0,1]$. 若 $s_0 \neq s_1$ 则根据 *Banach* 空间的复插值理论，有

$$B_{p,p}^s(\mathbb{T}) = [B_{p,p}^{s_0}(\mathbb{T}), B_{p,p}^{s_1}(\mathbb{T})]_\theta$$

其中 $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$，且指数 $\theta \in (0,1)$。

复插值的下述函子性质是插值理论中的一条基本结论。设 (A_0, A_1) 和 (B_0, B_1) 是两个 Banach 空间插值对，且 L 是一个从 $A_0 + A_1$ 映射到 $B_0 + B_1$ 的线性算子，使得其在 A_j 上的限制是一个从 A_j 到 B_j 的线性有界算子，范数为 M_j，其中 $j = 0,1$。则 L 在 $[A_0, A_1]_\theta$, $0 < \theta < 1$上的限制是一个从$[A_0, A_1]_\theta$到 $[B_0, B_1]_\theta$的线性有界算子，范数为 M_θ。此外，众所周知，复插值方法是指数为 θ 的精确插值函子（例如见 [4] 第 88 页），这意味着

$$M_\theta \le M_0^{1-\theta}M_1^\theta. \tag{4.2}$$

现在只需应用 Calderón插值定理，即可得出以下 g.

定理 4.4. 对于 $0 < s < 1$ 和 $1 < p < \infty$，算子 T 在 $B_{p,p}^s(\Gamma)$上有界。

证明。 在定理 4.3 中取 $s_0 = 0$ 和 $s_1 = 1$，可得

$$B_{p,p}^s(\mathbb{T}) = [L^p(\mathbb{T}), B_{p,p}^1(\mathbb{T})]_s. \tag{4.3}$$

~由戴维定理和定理 4.2，可得算子 T 在~ ~$B_{p,p}^s(\mathbb{T})$上有界，其算子范数为 $\|T\|_{B_{p,p}^s(\mathbb{T})\to B_{p,p}^s(\mathbb{T})} = \|T\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})}$；等价地，算子 T 在 $B_{p,p}^s(\Gamma)$上有界，其算子范数为 $\|T\|_{B_{p,p}^s(\Gamma)\to H^s(\Gamma)} = \|T\|_{L^p(\Gamma)\to L^p(\Gamma)}$。 □

由 Plemelj公式可知，每个函数 $f \in B_{p,p}^s(\Gamma)$ 都能唯一地写成 $f = \Phi_i + \Phi_e$，其中 $\|\Phi_{i,e}\|_{B_p^s,p(\Gamma)} \le C\|f\|_{B_{p,p}^s(\Gamma)}$，对某个常数 C 而言， $\Phi_{i,e}$ 分别是 Ω_i 和 Ω_e 中全纯函数的边界值。 $0 < s \le 1$ 的分解唯一性可由 $s = 0$ 的情形推出。

4.3 Lipschitz曲线上的普列梅利-卡尔德龙问题

显然，定理 4.4 对经过 ∞ 的弦弧曲线 Γ 同样成立，特别地，对 Lipschitz曲线 Γ 也成立（即存在一个 Lipschitz函数 $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，其图像为 Γ）。Murai 的一个定理 [35] 指出，对于 Lipschitz 范数为 M 的 Lipschitz曲线 Γ，$\|T\|_{L^p(\Gamma)\to L^p(\Gamma)}$ 不超过 $C(1+M)^{3/2}$（另见 [12]），其中 C 是一个普适常数。将这一结果代入前述定理，可得关于 $\|T\|_{B^{1-1/p}_{p\,p}(\Gamma)\to B^{1-1/p}_{p\,p}(\Gamma)}$ 的相同界。不过，范数 $\|T\|_{B^{1-1/p}_{p\,p}(\Gamma)\to B^{1-1/p}_{p\,p}(\Gamma)}$ 只取决于 Beurling 变换的 $L^p(\mathbb{C})$ 有界性（见第 2 节），因此实际上与 M 无关。为了得到关于 $\|T\|_{B^s_{p,\,p}(\Gamma)\to B^s_{p,\,p}(\Gamma)}$ 的更优估计，我们因而对 $0<s<1-1/p$ 使用 Calderón插值定理，在 $L^p(\Gamma)$ 与 $B^{1-1/p}_{p\,p}(\Gamma)$ 之间进行插值；对 $1-1/p<s<1$，则在 $B^{1-1/p}_{p\,p}(\Gamma)$ 与 $B^1_{p,\,p}(\Gamma)$ 之间进行插值。更确切地说，我们利用

$$B^s_{p,p}(\Gamma)=[L^p(\Gamma),B^{1-1/p}_{p,p}(\Gamma)]_{\frac{ps}{p-1}},\qquad 0<s<1-1/p;$$
$$B^s_{p,p}(\Gamma)=[B^{1-1/p}_{p,p}(\Gamma),B^1_{p,p}(\Gamma)]_{ps+1-p},\quad 1-1/p<s<1.$$

利用(4.2)，我们得到

定理4.5。 如果 Γ 是*Lipschitz*曲线，其*Lipschitz*常数为 M，那么对于$0<s<1$，有

$$\|T\|_{B^s_{p,p}(\Gamma)\to B^s_{p,p}(\Gamma)}\le C(1+M)^{\frac{3}{2}|1-\frac{ps}{p-1}|}$$

其中 C 仅取决于 p 。

5 Douglas与Littlewood-Paley：弦弧的比较 e

设 Γ 是一条长度为 2π 且内部域 Ω包含0的弦弧曲线，并且 $1<p<\infty$、$0<s<1$。回顾一下，我们有两种方式将单位圆 $\mathbb{T}$ 上的分数阶 Besov-Sobolev 空间推广到 Γ。第一种可以称为Douglas方法：我们将$B^s_{p,p}(\Gamma)$定义为满足以下条件的函数 $f\in L^p(\Gamma)$的集合

$$\|f\|^p_{B^s_{p,p}(\Gamma)}:=\iint_{\Gamma\times\Gamma}\frac{|f(z)-f(\zeta)|^p}{|z-\zeta|^{1+ps}}|dz||d\zeta|<\infty,$$

它们是介于 $B^0_{p,\,p}(\Gamma)$（即 $L^p(\Gamma)$）和 $B^1_{p,\,p}(\Gamma)$ 之间的中间空间。

令 $B^s_{p,p}(\Omega)$、$0\le s\le 1$ 为 Ω 中所有 $f\in B^s_{p,p}(\Gamma)$ 的调和延拓 u 所组成的集合。则 $B^0_{p,p}(\Omega)=E^p(\Omega)\oplus\overline{E^p(\Omega)}$。更确切地说，在 $E^p(\Omega)$ 中存在唯一的一对全纯函数 φ 和 ψ，满足 $\varphi(0)=u(0)$ 且 $\psi(0)=0$，使得 $u=\varphi+\overline{\psi}$。由于$\Gamma$ 是可求长的，因此几乎处处谈论切向方向是有意义的，并且 $E^p(\Omega)$ 中的每个函数 φ 在 Γ 上几乎处处都有非切向极限；反过来，φ 是其边界极限函数的调和延拓。此外，由于 Ω 是弦弧域，特别是 Smirnov域，$E^p(\Omega)$ 与多项式的 $L^p(\Gamma)$ 闭包重合。基于此，$E^p(\Omega)$ 可以被视为其边界函数的集合，因此，将 $B^0_{p,p}(\Omega)$ 与$B^0_{p,p}(\Gamma)$ 视为同一对象是合理的。最后，对于任意 $0\le s\le 1$，由于空间 $B^s_{p,p}(\Omega)$ 随 s 递减，为方便起见，我们可以将 $B^s_{p,p}(\Omega)$ 与 $B^s_{p,p}(\Gamma)$ 视为同一对象，并在二者之间自由切换。

第二个由 Littlewood-Paley理论定义：考虑满足如下条件的函数$f \in L^p(\Gamma)$ 集合，其调和延拓 u 在 Ω 中满足

$$\|u\|^p_{\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)} := \iint_\Omega |\nabla u(z)|^p d(z,\Gamma)^{(1-s)p-1} dxdy < \infty.$$

这类函数的集合记作$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)$。

本节的主要目标是在关于 Γ的某些条件下证明$B^s_{p,p}(\Gamma) = \mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)$，或者更确切地说，证明$\|f\|_{B^s_{p,p}(\Gamma)} \simeq \|u\|_{\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)}$。这里，隐常数仅依赖于 Γ、 s 和 p。

5.1 共轭算子

假设 Ω 是一个有界弦弧域，且 $\mathbb{D}$ 是单位圆盘。设 z_0 是 Ω 中的一点。若 u 在 Ω 中是调和的，那么众所周知，存在唯一的调和函数$\tilde{u}$ 在 Ω 中，使得 $\tilde{u}(z_0) = 0$，且 $u + i\tilde{u}$ 在 Ω 中是全纯的。当 $\Omega = \mathbb{D}$时， $\tilde{u}$ 是 $H(f)$的调和延拓（泊松延拓），其中 H 是希尔伯特变换:

$$H(f)(e^{i\theta}) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta-\varphi|>\epsilon} \cot\Big(\frac{\theta-\varphi}{2}\Big) f(e^{i\varphi}) d\varphi.$$

根据柯西-黎曼方程， $|\nabla\tilde{u}| = |\nabla u|$。因此，我们看到$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)$ 在共轭运算下不变。我们将$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)$ 中由全纯函数构成的子空间记作$\mathcal{HB}^s_{p,p}(\Omega)$，即由满足 $u, \tilde{u} \in \mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)$的 $u + i\tilde{u}$ 组成的集合。

因此，$B^s_{p,p}(\Gamma)$ =$\mathrm{B}^s_{p,p}(\Omega)$成立的一个必要条件是，$B^s_{p,p}(\Gamma)$在共轭下稳定。令 $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$为一个黎曼映射，且 $\varphi(0) = z_0$。回顾一下， $t \mapsto z(t)$表示 Γ 的弧长参数化，并且 $\lambda(e^{it}) = z(t)$，使得 $\varphi = \lambda \circ h$，其中$h$ 是 $\mathbb{T}$ 的一个绝对连续同胚，且具有 $|h'| = |\varphi'|$。回顾一下， λ 是一个从 $\mathbb{T}$ 到 Γ的双 Lipschitz 同胚。简单计算可知，若 $f \in B^s_{p,p}(\Gamma)$；也就是说， $g = f \circ \lambda \in B^s_{p,p}(\mathbb{T})$，且 u 是其在Ω上的调和延拓，那么 $\tilde{u}$ 就是 $\tilde{f} = \tilde{g} \circ \lambda^{-1}$的调和延拓。这里，

$$\tilde{g} = V_h^{-1} \circ H \circ V_h(g),$$

其中 $V_h(g) = g \circ h$。

众所周知（参见 [9], 第 247 页，见 [16]） ， $V_h^{-1} H V_h$ 在 $L^p(\mathbb{T})$ 上有界 $1 < p < \infty$, 当且仅当 $|h'| = |\varphi'|$ 属于 A_p 上的 $\mathbb{T}$。基于关于极限情形$s = 0$的这一说明，我们现在陈述一般情形下的一个定理 $0 \le s \le 1$。

定理 5.1。 对于 $p > 1, 0 \le s \le 1$，假设 Γ 满足

- $|\varphi\prime| \in A_p$ 若 $1 < p \le 2$;
- $|\varphi\prime| \in A_{p'}$ $(1/p\prime + 1/p = 1)$ 如果 $p > 2$。

˜那么，$B^s_{p,p}(\Gamma)$ 在共轭下稳定；此外，共轭算子 $f \mapsto f$ $on B^s_{p,p}(\Gamma)$ 是有界的。

根据此定理，我们将 $\mathrm{HB}^s_{p,p}(\Gamma)$ 定义为$B^s_{p,p}(\Gamma)$ 的子空间，它由满足 f,$f \in B^s_{p,p}(\Gamma)$ 的函数 $\tilde{}$ $\tilde{}f + if$ 组成；并将 $\mathrm{HB}^s_{p,p}(\Omega)$ 定义为 $B^s_{p,p}(\Omega)$ 的解析子空间。

在证明之前，我们先讨论一下定理 5.1 的假设。若ω 是一个 A_∞权函数，我们定义 $\delta(\omega) = \inf\{q > 1 : \omega \in A_q\}$。已知 [9] 若$\omega \in A_q$ 对某个 $q > 1$ 成立，则 $\delta(\omega) < q$（见 [16]第 254 页）。上述定理意味着，给定 $p > 1$，使结论成立的曲线类 Γ 取决于 p。反过来，若从满足 $|\varphi'| \in A_2$ 的曲线 Γ 出发，那么通过定义 $\delta = \delta(|\varphi'|)$，结论对

$$\delta < p < \frac{\delta}{\delta - 1}.$$

另一方面，已知（见 [21]） Γ 是弦弧曲线意味着 $|\varphi'|$ 具有A_∞，但也存在一些弦弧曲线，使得 $|\varphi'| \notin A_2$ （见 [23]）。因此我们知道，弦弧条件不足以保证定理 5.1 成立。

证明。我们刚刚看到， $V_h^{-1} H V_h$ 在 $L^p(\mathbb{T})$上有界，当且仅当对任意 $1 < p < \infty$, $|\varphi'| \in A_p$。现在令$f \in B^1_{p,p}(\Gamma)$，使得 $g = f \circ \lambda \in B^1_{p,p}(\mathbb{T})$，即满足 $g' \in L^p(\mathbb{T})$的 $g \in L^p(\mathbb{T})$的集合。我们有$(g \circ h)' = \overline{g' \circ h} h' \in L^p(|h'|^{1-p})$。回忆一下，权函数 $\omega \in A_{p'}$ 当且仅当 $\omega^{-\frac{1}{p}\prime-1} \in A_p$。由此， $|h'|^{1-p} \in A_p$ 等价于$|h'| = |\varphi'| \in A_{p'}$。于是，我们有 $H((g \circ h)') \in L^p(|h'|^{1-p})$，其范数由$(g \circ h)'$ 的$L^p(|h'|^{1-p})$-范数控制（见 [9]）；这意味着$(\tilde{g})' \in L^p(\mathbb{T})$，其中 $\tilde{g} = V_h^{-1} H V_h(g)$，因此 $\tilde{f} = \tilde{g} \circ \lambda^{-1} \in B^1_{p,p}(\Gamma)$，使得$\|\tilde{f}\|_{B^1_{p,p}(\Gamma)}$由$\|f\|_{B^1_{p,p}(\Gamma)}$控制。由于权函数 A_p 随 p 递增，并由以下复插值定理（见定理 4.3）：

$$[L^p(\mathbb{T}), B^1_{p,p}(\mathbb{T})]_s = B^s_{p,p}(\mathbb{T}) \tag{5.1}$$

定理由此得证。 □

特别地，曲线 Γ 满足径向 Lipschitz 条件是一个自然的条件，可以推出 $|\varphi'| \in A_2$。事实上，如果 Γ 是径向Lipschitz曲线，则可以证明 $|\varphi'|$ 满足 Helson-Szegö 条件（具体证明见第 5.3 小节）：$\log|\varphi'| = u + Hv$，其中 $u \in L^\infty$, $v \in L^\infty$ 且 $\|v\|_\infty < \pi/2$, 由 Helson-Szegö 定理（ [16]）可知，这等价于 $|\varphi'| \in A_2$。现在我们可以陈述:

推论 5.2. </style}对于，若 满足，则 ,$_2(\Gamma)$ 在共轭 $\tilde{}$作用下稳定；此外，共轭算子 $f \mapsto \tilde{f}$ 在 $B^s_{2,2}(\Gamma)$ 上有界。该结论特别适用于径向 *Lipschitz* 曲线。

5.2 算子$V_{s,\ p}$ 作用于 $\mathcal{B}^s_{p,\ p}(\Omega)$

设 Ω,Ω′ 是两个包含 0 的 Jordan 域，且 φ 是一个将 Ω 全纯映射到 Ω′ 并固定 0 的全纯微分同胚。令 $f \in \mathcal{HB}^s_{p,p}(\Omega')$。利用变量替换 $\zeta = \varphi(z)$，我们有

$$\iint_{\Omega'} d(\zeta, \Gamma')^{(1-s)p-1} |f'(\zeta)|^p d\xi d\eta = \iint_{\Omega} d(\varphi(z), \Gamma')^{(1-s)p-1} |(f \circ \varphi)'(z)|^p |\varphi'(z)|^{2-p} dx dy.$$

根据科比畸变定理（见 (2.1)），存在一个普适常数 $C>1$，使得

$$\begin{aligned} &C^{-|(1-s)p-1|}\iint_{\Omega} d(z,\Gamma)^{(1-s)p-1}|V_{s,p}(f)'(z)|^p dxdy \\ \leq &\iint_{\Omega'} d(\zeta,\Gamma')^{(1-s)p-1}|f'(\zeta)|^p d\xi d\eta \\ \leq &C^{|(1-s)p-1|}\iint_{\Omega} d(z,\Gamma)^{(1-s)p-1}|V_{s,p}(f)'(z)|^p dxdy, \end{aligned} \tag{5.2}$$

其中 $V_{s,\ p}$ 是由下式定义的算子

$$V_{s,p}(f)(z)=\int_0^z (f\circ\varphi)'(u)\varphi'(u)^{1/p-s}du.$$

换言之，算子 $V_{s,\ p}$ 是 $\mathcal{HB}^s_{p,\ p}(\Omega)$ 与 $\mathcal{HB}^s_{p,\ p}(\Omega')$ 之间的有界同构，其算子范数为

$$\|V_{s,p}\|,\ \|V_{s,p}^{-1}\|\leq C^{|(1-s)-1/p|}.$$

注意，对于 $s=1-1/p$，该算子不过是与 φ 的复合；在这种情况下，$V_{1-1/p,\ p}$ 是一个等距映射。

为便于后续使用，当 $p=2$ 时，算子 $V_{s,\ p}$ 将简写为 V_s .

为了更好地理解算子 V_s，我们用分部积分将其改写为:

$$\begin{aligned} V_s(f)(z)&=f\circ\varphi(z)\varphi'(z)^{1/2-s}-(1/2-s)\int_0^z f\circ\varphi(u)\varphi'(u)^{1/2-s}\frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)}du \\ &=T_sf(z)-(1/2-s)S(T_s(f))(z), \end{aligned}$$

其中

$$T_sf(z)=f\circ\varphi(z)\varphi'(z)^{1/2-s}$$

and

$$Sg(z)=\int_0^z g(u)\frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)}du.$$

现在我们专门讨论 $s=0$ and $(\Omega,\Omega')=(\mathbb{D},\Omega)$。回顾一下，Hardy空间$E^2(\Omega)$ 是全纯函数 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ such that $T_0(f)\in E^2(\mathbb{D})$ 所构成的空间，即单位圆盘上的经典Hardy空间。若函数 $g\in \mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$，则 $g\in E^2(\mathbb{D})$；此外，g 在 $\mathbb{T}$ 上的边界值具有有界平均振荡（简称 BMO），其含义是

$$\sup_{I\subset\mathbb{T}}\frac{1}{|I|}\int_I |g(z)-g_I||dz|<\infty,$$

其中，上确界取遍 $\mathbb{T}$ 的所有子弧 I，而 g_I 表示 g 在 I 上的积分平均值。已知当区域 $\varphi(\mathbb{D})$ 为弦弧时，$\log\varphi'\in\mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$，但反之不成立。根据 Fefferman-Stein，$\log\varphi'\in\mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$ 当且仅当

$$d\mu=\left|\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\right|^2(1-|z|)dxdy$$

是 $\mathbb{D}$Carleson测度（例如，参见 [16]第六章）。

定理 5.3。 设Ω 是一个包含0 的 *Jordan* 域，且 φ 黎曼映射从 $\mathbb{D}$ 映到Ω 并固定0。以下命题成立：

(1) 若 $\log\varphi' \in \mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$ 则 $E^2(\Omega) \subset \mathcal{HB}^0_{2,2}(\Omega)$；

(2) 若 Ω 是弦弧域，则 $HB^0_{2,2}(\Omega) \subset E^2(\Omega)$。

此外，关于范数 $\|\cdot\|_{E^2(\Omega)}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}^0_{2,2}(\Omega)}$，这些包含关系是连续的。

证明。 假设 $\log\varphi' \in \mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$；也就是说， μ 在 $\mathbb{D}$中是 Carleson测度。令 $f \in E^2(\Omega)$满足 $T_0 f \in E^2(\mathbb{D})$。于是由 Carleson（例如参见 [16]中的定理 3.9）

$$\iint_{\mathbb{D}} |T_0(f)|^2 d\mu \le C\|T_0 f\|^2_{E^2(\mathbb{D})}$$

其中 C 是一个仅取决于 μ的 Carleson 范数的常数。由于 $E^2(\mathbb{D}) = \mathcal{HB}^0_{2,2}(\mathbb{D})$，我们有

$$\iint_{\mathbb{D}} |(T_0 f)'|^2 (1-|z|) dxdy < \infty.$$

最后，

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{D}} |(V_0 f)'(z)|^2 (1-|z|) dxdy &= \iint_{\mathbb{D}} \Big|(T_0 f)'(z) - \frac{1}{2} T_0 f(z) \cdot \frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\Big|^2 (1-|z|) dxdy \\ &\le 2\iint_{\mathbb{D}} |(T_0 f)'|^2 (1-|z|) dxdy + \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{D}} |T_0(f)|^2 d\mu \\ &< \infty.\end{aligned}$$

结合（5.2），这就完成了对陈述（1）的证明。

为证明陈述（2），我们需要定义全纯函数 f in $\mathbb{D}$ 的（Littlewood-Paley）g-函数：

$$\mathrm{g}(f)(e^{i\theta}) = \left(\int_0^1 (1-r)|f'(re^{i\theta})|^2 dr\right)^{1/2}.$$

现在设 $f \in \mathcal{HB}^0_{2,2}(\Omega)$。那么 $V_0(f) \in \mathcal{HB}^0_{2,2}(\mathbb{D})$，进而推出 t

$$\iint_{\mathbb{D}} (1-|u|)|(f\circ\varphi)'(u)|^2 |\varphi'(u)| du dv < \infty,$$

换言之，$\mathrm{g}(f\circ\varphi) \in L^2(\mathbb{T}, |\varphi'|d\theta)$。由于假设 Γ 是弦弧曲线，我们有 $|\varphi'|$ 在 $\mathbb{T}$ 上具有权函数 A_∞。于是可以应用 Gundy-Wheeden 的一个定理 [19]（另见 [21]），该定理表明：当且仅当 $f\circ\varphi$ 的非切向极大函数 $\mathrm{n}(f\circ\varphi)$ 属于 $L^2(\mathbb{T}, |\varphi'|d\theta)$ 时，$\mathrm{g}(f\circ\varphi) \in L^2(\mathbb{T}, |\varphi'|d\theta)$。另一方面，对于任意“圆形曲线” Γ_r，我们有（见 [21] 第233页）

$$\int_{\Gamma_r} |f(\zeta)|^2 d\sigma(\zeta) \le C\|\mathrm{n}(f\circ\varphi)\|^2_{L^2(\mathbb{T},|\varphi'|d\theta)},$$

这意味着 $f \in E^2(\Omega)$。 □

请注意，对于这个定理，我们不需要 $|\varphi'|$ 在 $\mathbb{T}$上具有 A_2 。然而，根据推论 5.2，这一条件对于下面的推论成立是必要的，因为如果它没有连接起来，那么 $E^2(\Omega \to \Gamma)$-函数的实部所构成的（实）空间就是实空间 $L^2_{\mathbb{R}}(\Gamma,\ d\sigma)$ 的真子空间

推论 5.4。 设 Ω 是一个以 Γ 为边界的弦弧域。若 $|\varphi'| \in A_2$ ，则 $B^0_{2,\ 2}(\Gamma) = B^0_{2,2}(\Omega)$。

5.3 等式 $\mathcal{B}^s_{2,\ 2}(\Omega) = B^s_{2,\ 2}(\Gamma)$

在本小节中，我们的目标是证明以下定理，它是本文的主要定理之一。

定理 5.5。 设 Ω 是一个以 Γ 为边界的有界弦弧域，满足 $0 \in \Omega$，且 φ 是将 0 固定的黎曼映射。若 Γ 满足

$$\log|\varphi'| = b_1 + Hb_2, \qquad b_1,\ Hb_1,\ b_2 \in L^\infty(\mathbb{T})\ and\ \|b_2\|_\infty < \frac{\pi}{2}, \tag{5.3}$$

那么，对于 $0 \le s \le 1$，$B^s_{2,\ 2}(\Omega) = B^s_{2,\ 2}(\Gamma)$ 且范数可比。特别地，结论对径向 *Lipschitz* 域也成立。

在继续之前，我们先来理解为何假设条件 (5.3)。Helson-Szegö 定理（参见 [16]第 IV 章）指出，log 满足， $b_2 \in L^\infty(\mathbb{T})$ 且 $\|b_2\|_\infty < \pi/2$ ，当且仅当 $|\varphi'| \in A_2$ 在 $\mathbb{T}$ 上；而这仅用于保证对所有 $0 \le s \le 1$ ，$B^s_{2,\ 2}(\Gamma)$ 在共轭下稳定（见推论 5.2）。注意 $\mathrm{Arg}\varphi' = H\log|\varphi'| = Hb_1 - b_2$。额外假设 $Hb_1 \in L^\infty(\mathbb{T})$ 用于推出 $\mathrm{Arg}\varphi'$ 有界；从几何上说，这意味着边界曲线不会过度螺旋。例如，对于双螺旋曲线，$\mathrm{Arg}\varphi'$ 持续增大并趋于无穷。

设 $r(\theta): \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 是一个 2π-周期连续函数。则曲线$\Gamma = \{r(\theta)e^{i\theta}: \ \theta \in [0, 2\pi)\}$ 称为关于 0 的星形约当曲线，而由 Γ 围成的区域 Ω 称为星形域。回顾一下，如果进一步地， $r(\theta)$ 是一个 Lipschitz函数，即存在一个正的常数 $C(\Gamma)$，使得 $\|r'\|_\infty \le C(\Gamma)$，那么曲线 Γ 称为径向Lipschitz曲线，而 Ω 称为径向 Lipschitz 区域。设 φ 是一个将 $\mathbb{D}$ 映射到 Ω 且固定 0 的黎曼映射。众所周知，Ω 关于 0 是星形域，当且仅当

$$\varphi'(0) \neq 0 \text{ and } \mathrm{Arg}\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)} \in \left(-\frac{\pi}{2}\alpha, \frac{\pi}{2}\alpha\right), \tag{5.4}$$

其中 $\alpha = 1$。($\varphi'(0) \neq 0$ 的条件意味着 $\log(\varphi(z)/z)$ 在 $\mathbb{D}$ 上连续，因此 $\log|\varphi(z)^{-}/z| \in L^\infty$，且 $\mathrm{Arg}(\varphi(z)/z) \in L^\infty$。(5.4) 与此条件相结合，表明 $\mathrm{Arg}\varphi' \in L^\infty$。简单计算可知，$\Omega$ 是径向 Lipschitz 区域，当且仅当条件 (5.4) 成立，其中常数 $\alpha < 1$ 取决于 $C(\Gamma)$，由此可知 Ω 是弦弧域（见 [39] 中第 172 页）。注意，

$$\log|\varphi'(z)| = \log\left|\frac{\varphi(z)}{z}\right| + \log\left|\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right| = \log\left|\frac{\varphi(z)}{z}\right| - H\left(\mathrm{Arg}\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right),$$

and

$$H\left(\log\left|\frac{\varphi(z)}{z}\right|\right)=\operatorname{Arg}\frac{\varphi(z)}{z}.$$

我们知道，径向Lipschitz曲线 Γ 满足条件 (5.3)。因此，该径向 Lipschitz 区域具有定理 5.5 的所有性质。

以下 Voigt 的抽象插值定理 [49] 是我们证明定理 5.5 及后续定理 5.7 的主要工具:

定理 5.6。 假设 (X_0, X_1)、(Y_0, Y_1) 是两个 *Banach* 空间的插值对，并假设 $\check{}X$ 是$(X_0\cap X_1, \|\cdot\|_{X_0\cap X_1})$的稠密子空间。记带状区域为 $S:=\{z=s+it\in\mathbb{C}:\ 0\le s\le 1\}$，插值空间为 $X_s:=[X_0,X_1]_s, Y_s:=[Y_0,Y_1]_s$。设 $(T_z;\ z\in S)$ 是一族线性映射 $T_z:\check{}X\to Y_0+Y_1$，满足以下性质:

(i) 对于所有 $x\in\check{}X$，函数 $T_{(\cdot)}x:\ S\to Y_0+Y_1$ 连续，在 S上有界，并且在 S中解析;

(ii) 对于 $j=0,1$, $x\in\check{}X$，函数 $\mathbb{R}\ni t\mapsto T_{j+it}x\in Y_j$ 是连续的，并且

$$M_j:=\sup\{\|T_{j+it}x\|_{Y_j}; t\in\mathbb{R}, x\in\check{X}, \|x\|_{X_j}\le 1\}<\infty.$$

那么，对于所有 $s\in[0,1]$, $T_s(\check{}X)\subset Y_s$,

$$\|T_sx\|_{Y_s}\le M_0^{1-s}M_1^s\|x\|_{X_s}\quad for\ all\ x\in\check{X}.$$

现在我们开始证明定理 5.5。显然，我们只需证明$\mathcal{HB}^s_{2,2}(\Omega)$ =与$\mathrm{HB}^s_{2,2}(\Omega)$相等且具有可比范数。回顾一下，带标准权函数$A^p_\alpha$ 的 Bergman 空间定义为单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中满足$g\in L^p(\mathbb{D},(1-|z|^2)^\alpha dxdy)$的全纯函数 g 构成的集合，即

$$\|g\|^p_{A^p_\alpha}=\iint_{\mathbb{D}}|g(z)|^p(1-|z|^2)^\alpha dxdy<\infty$$

其中 $p>0$ 且 $\alpha>-1$。这里，假设 $\alpha>-1$ 至关重要，因为当 $\alpha\le -1$时，空间 $L^p(\mathbb{D},(1-|z|^2)^\alpha dxdy)$ 不包含除 0 以外的任何全纯函数。 A^p_α 的定义扩展到 α 为任意实数的情形；这与传统定义的 $\alpha>-1$ 一致（见 [53]中的定理13）。从定义可知，若 $\alpha<\beta$，则严格包含关系 $A^p_\alpha\subset A^p_\beta$ 成立。

特别地，为了我们的目的，我们指出，空间 A^2_{-1} 是经典 Hardy空间 $E^2(\mathbb{D})$，也就是满足以下条件的 $\mathbb{D}$中的全纯函数 g 所组成的集合:

$$\int_{\mathbb{D}}|g'(z)|^2(1-|z|^2)dxdy<\infty.$$

我们还需要使用 $p=2$ 和 $\alpha=1-2s$ 且 $0\le s<1$的情形，即:

$$A^2_{1-2s}=\{g\text{ analytic in }\mathbb{D}:\iint_{\mathbb{D}}|g(z)|^2(1-|z|^2)^{1-2s}dxdy<\infty\}.$$

这是希尔伯特空间中的一个闭线性子空间 $L^2(\mathbb{D},\ (1-|z|^2)^{1-2s}dxdy)$。对于这些空间，以下插值定理（见 [53]中的定理 36）成立：

$$[A_1^2, A_{-1}^2]_s = A_{1-2s}^2, \qquad 0 < s < 1 \tag{5.5}$$

且范数等价。

设 φ 是从 $\mathbb{D}$ 到 Ω 且固定 0 的共形映射。对于任意 $f \in \mathcal{HB}^s_{2,\ 2}(\Omega), 0 \le s < 1$，由 (5.2) 可知

$$\iint_{\mathbb{D}} |V_s(f)'(z)|^2(1-|z|)^{1-2s}dxdy \simeq \iint_{\Omega} |f'(\zeta)|^2 d(\zeta,\Gamma)^{1-2s}d\xi d\eta$$

其中隐常数仅依赖于 s，且

$$V_s(f)'(z) = (f\circ\varphi)'(z)\varphi'(z)^{1/2-s}.$$

由此可知

$$f \in \mathcal{HB}^s_{2,2}(\Omega) \ \Leftrightarrow\ V_s(f)' \in A^2_{1-2s} \tag{5.6}$$

且范数可比。注意，任意 $g \in A^2_{1-2s}$ 都可以写成 $V_s(f)'$ 的形式，只需选取 $f(z) = \int_0^z g\circ\varphi^{-1}(u)(\varphi^{-1})'(u)^{3/2-s}du$。

受等价关系 (5.6) 的启发，我们将$\mathcal{HB}^1_{2,2}(\Omega)$ 定义为 Ω 中满足 $V_1(f)' \in A^2_{-1}$ 的解析函数f 所构成的集合。容易看出，f 是 $E^2(\Omega)$ 中某个函数的原函数。更准确地说，回想一下 $A^2_{-1} = E^2(\mathbb{D})$，我们有

$$\int_\Gamma |f'(\zeta)|^2|d\zeta| = \int_{\mathbb{T}} |f'\circ\varphi(z)\varphi'(z)^{1/2}|^2|dz| = \int_{\mathbb{T}} |V_1(f)'(z)|^2|dz| < \infty.$$

根据此定义，$\mathcal{HB}^1_{2,2}(\Omega) = \mathrm{HB}^1_{2,2}(\Omega)$。回顾定理 5.3，我们还知道，$\mathcal{HB}^0_{2,2}(\Omega) = \mathrm{HB}^0_{2,2}(\Omega)$，且二者具有等价范数。将其与 (5.6) 结合可知，问题归结为证明

$$f \in \mathrm{HB}^s_{2,2}(\Omega) \ \Leftrightarrow\ V_s(f)' \in A^2_{1-2s} \tag{5.7}$$

对于 $0 < s < 1$，二者具有可比范数。为此，下面我们将使用定理 5.6。

回顾 (A_1^2, A_{-1}^2) 是一个插值对，且 $[A_1^2, A_{-1}^2]_s = A_{1-2s}^2,\ 0 < s < 1$。注意，Ω 的边界曲线 Γ 是一条弦弧曲线，它是 $\mathbb{T}$ 在双利普希茨映射 λ 下的像，因此由 (4.3) 可知，$(\mathrm{HB}^0_{2,2}(\Omega), \mathrm{HB}^1_{2,2}(\Omega))$ 是一个插值对，并且 $[\mathrm{HB}^0_{2,2}(\Omega), \mathrm{HB}^1_{2,2}(\Omega)]_s = \mathrm{HB}^s_{2,2}(\Omega)$。注意，Ω 是一个弦弧域，特别是一个 Smirnov域，这等价于 Hardy空间$E^2(\Omega)$（即 $\mathrm{HB}^0_{2,2}(\Omega)$）与 $L^2(\Gamma)$ 闭包中的 B 多项式集合在 Γ 上一致（见 [15] 中的定理 10.6）。由于 $\mathrm{HB}^1_{2,2}(\Omega)$ 是满足 $f' \in E^2(\Omega)$ 的函数 $f \in E^2(\Omega)$ 集合，集合 B 也是 $\mathrm{HB}^1_{2,2}(\Omega)$ 的稠密子空间。由包含关系 $\mathrm{HB}^1_{2,2}(\Omega) \subset \mathrm{HB}^0_{2,2}(\Omega)$，我们有 $\mathrm{HB}^0_{2,2}(\Omega) \cap \mathrm{HB}^1_{2,2}(\Omega) = \mathrm{HB}^1_{2,2}(\Omega)$。

在 $\check{B}$ 上定义一族线性映射 $(T_z;\ \ z \in S)$：

$$T_z(f) := e^{cz^2}V_z(f) = e^{cz^2}f'\circ\varphi(\varphi')^{\frac{3}{2}-z}.$$

这里，c 是一个常数，稍后将确定。现在我们将证明，对于每个$z \in S$，线性映射 T_z 将 $\check{B}$ 映射到 A_1^2，后者也是和空间 $A_1^2 + A_{-1}^2$，并且满足定理 5.6 的性质 (i) 和 (ii)。

ˇ 首先，我们证明，对于每个 $z = s + it \in S$ 和每个多项式 $f \in B$，积分

$$\iint_{\mathbb{D}} |T_z(f)(\zeta)|^2(1-|\zeta|)d\xi d\eta \tag{5.8}$$

收敛。由简单计算可得 $|e^{cz^2}|^2 = e^{2c(s^2-t^2)}$，$|(\varphi')^{\frac{3}{2}-z}|^2 = e^{2t\mathrm{Arg}\varphi'}|\varphi'|^{3-2s}$ and $|f'\circ\varphi|^2 < C_1$，因为 Ω 的直径有限。这里，常数C_1 取决于 f 和 Ω。于是

$$\iint_{\mathbb{D}} |T_z(f)(\zeta)|^2(1-|\zeta|)d\xi d\eta \le C_1 e^{2c}\left(e^{-ct^2}e^{t\|\mathrm{Arg}\varphi'\|_\infty}\right)^2 \iint_{\mathbb{D}} |\varphi'|^{2(1-s)}|\varphi'(\zeta)|(1-|\zeta|)d\xi d\eta$$

令 $A := \|\mathrm{Arg}\varphi'\|_\infty$ 并取 $c \ge A^2/4$，则有 $e^{-ct^2}e^{tA} \le e$。由科比畸变定理（见 (2.1)），$|\varphi'(\zeta)|(1-|\zeta|)$ 与 $d(\varphi(\zeta), \Gamma)$ 可比，而后者因 Ω 的直径有界而有界。由霍尔德不等式，

$$\iint_{\mathbb{D}} |\varphi'|^{2(1-s)}d\xi d\eta \le \pi^s\left(\iint_{\mathbb{D}} |\varphi'|^2 d\xi d\eta\right)^{1-s} < \infty.$$

由此可得，积分 (5.8) 收敛，而且其上界仅取决于 Ω 和给定的 f。这意味着线性映射 T_z 将 ˇB 映到 A^2_1，并且对于任意 $f \in$ ˇB，函数 $T_{(\cdot)}f\colon\ S \to A^2_1$ 有界。特别地，

$$\begin{aligned}\|T_{it}f\|^2_{A^2_1} &= \iint_{\mathbb{D}} |T_{it}(f)(\zeta)|^2(1-|\zeta|^2)d\xi d\eta \\ &\le e^{2c+3}\iint_{\mathbb{D}} |f'\circ\varphi|^2|\varphi'|^2|\varphi'|(1-|\zeta|)d\xi d\eta \\ &\le 4e^{2c+3}\iint_{\Omega} |f'(z)|^2 d(z,\Gamma)dxdy,\end{aligned}$$

根据定理 5.3，它与 $\|f\|^2_{B^0_{2,\,2}(\Omega)}$ 可比。因此，

$$M_0 := \sup\{\|T_{it}f\|_{A^2_1};\ t\in\mathbb{R}, f\in\check{B}, \|f\|_{B^0_{2,2}(\Omega)} \le 1\} < \infty.$$

接下来，对于任意 $t \in \mathbb{R}$，任意满足 $\|f\|_{B^1_{2,\,2}(\Omega)} \le 1$ 的 $f \in$ ˇB，根据定理 5.3，范数 $\|T_{1+it}(f)\|_{A^2_{-1}}$ 与 $\int_{\mathbb{T}} |T_{1+it}(f)(\zeta)|^2|d\zeta|$ 可比。注意到

$$|T_{1+it}(f)(\zeta)|^2 = |f'\circ\varphi(\zeta)|^2|\varphi'(\zeta)|e^{2c}\left(e^{-ct^2}e^{t\mathrm{Arg}\varphi'(\zeta)}\right)^2, \qquad \zeta\in\mathbb{T},$$

于是我们有

$$\int_{\mathbb{T}} |T_{1+it}(f)(\zeta)|^2|d\zeta| \le e^{2(1+c)}\int_{\Gamma} |f'(\zeta)|^2|d\zeta| \le e^{2(1+c)}.$$

因此，

$$M_1 := \sup\{\|T_{1+it}f\|_{A^2_{-1}};\ t\in\mathbb{R}, f\in\check{B}, \|f\|_{B^1_{2,2}(\Omega)} \le 1\} < \infty.$$

根据参数化积分的连续性，所有函数 $S \ni z \mapsto T_z f \in A^2_1$、$\mathbb{R} \ni t \mapsto T_{it}f \in A^2_1$ 和 $\mathbb{R} \ni t \mapsto T_{1+it}f \in A^2_{-1}$ 都是连续的。

最后，为了证明对于任意 $f \in$ ˇB，$\circ S \ni z \mapsto T_z f \in A^2_1$ 是一个全纯映射，我们使用关于无限维全纯性的一般结果（见 [25]第 206 页）。该结果指出：

设 X 和 Y 是复数域上的 Banach 空间， U 是 X 的一个区域。那么，连续函数 $f: U \to Y$ 是全纯的，当且仅当存在对偶空间 Y^* 的一个全子集A，使得对于每个 $\alpha \in A$，函数 $\alpha \circ f$: $U \to \mathbb{C}$ 都是全纯的。这里，如果对于所有 $\alpha \in A$， $\alpha(y) = 0$ 都蕴含 $y = 0$，则称 Y^* 的子集 A 是全子集。

已知，假设 $\alpha > -1$ 和 $0 < p < \infty$ 满足不等式

$$(1 - |\zeta|^2)^{\frac{2+\alpha}{p}} |g(\zeta)| \leq C\|g\|_{A^p_\alpha} \tag{5.9}$$

其中常数 C 仅依赖于 α，且对任意 $\zeta \in \mathbb{D}$ 均成立（见 [53]第 73 页的定理 2.1）。对每个 $\zeta \in \mathbb{D}$, 定义 $l_\zeta(g) = g(\zeta)$，其中 $g \in A^2_1$。在（5.9）中取 $p = 2$、$\alpha = 1$，可得 $\|l_\zeta\| \leq C(1 - |\zeta|^2)^{-3/2}$, 这意味着 $l_\zeta \in (A^2_1)^*$。令 $A := \{l_\zeta;\ \zeta \in \mathbb{D}\}$。显然， A 是（A^2_1）*的全子集。现在，对每个 $l_\zeta \in A$, 可以看出该函数

$$\overset{\circ}{S} \ni z \mapsto l_\zeta \circ T_z(f) = e^{cz^2} f' \circ \varphi(\zeta)(\varphi')^{3/2-z}(\zeta) \in \mathbb{C}$$

是全纯的。

接着应用定理 5.6，可知对所有 $s \in (0,\ 1)$， $T_s(\check{B}) \subset A^2_{1-2s}$，此外，

$$\|T_s(f)\|_{A^2_{1-2s}} \leq M_0^{1-s} M_1^s \|f\|_{B^s_{2,2}(\Omega)}, \qquad \text{for all } f \in \check{B}. \tag{5.10}$$

由于 $\check{B}$ 在 $\mathrm{HB}^0_{2,2}(\Omega) \cap \mathrm{HB}^1_{2,2}(\Omega)$ 中稠密，且对于所有 $s \in [0,1]$， $\mathrm{HB}^0_{2,2}(\Omega) \cap \mathrm{HB}^1_{2,2}(\Omega)$ 在 $\mathrm{HB}^s_{2,2}(\Omega)$ 中稠密（见 [49]），因此立即可知，$\check{B}$ 在 $\mathrm{HB}^s_{2,2}(\Omega)$ 中稠密。因此，(5.10) 对所有 $f \in \mathrm{HB}^s_{2,2}(\Omega)$ 都成立。有界逆定理表明，算子 T_s 的逆算子也有界。定理 5.5 的证明至此完成。

5.4 等式 $\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega) = B^s_{p,p}(\Gamma)$

在本小节中，我们的目标是证明以下定理

定理 5.7。 设 Ω 是一个由 Γ 围成的有界弦弧域，其中 $0 \in \Omega$，且 φ是将 0固定的黎曼映射。设 $0 < s < 1, 1 < p < \infty$。若 Γ 满足 $Arg\, \varphi' \in L^\infty$，且满足以下任一条件

- $when\ p \geq 2,\ |\varphi'| \in A_{p'} \quad (1/p + 1/p' = 1);$
- $when\ p < 2,\ |\varphi'| \in A_p$

则有 $\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega) = B^s_{p,p}(\Gamma)$，且范数可比。

我们回顾一下，如果 $\delta = \inf\{q > 1 :\ |\varphi'| \in A_q\}$，则该定理对以下情况成立:

$$\delta < p < \frac{\delta}{\delta - 1}.$$

特别地， $\delta < 2$ 从而 $|\varphi'| \in A_2$。这意味着，根据定理 5.1， $B^s_{p,p}(\Gamma)$ 在共轭下稳定。结合 $\mathrm{Arg}\, \varphi' \in L^\infty$，由定理 5.5 还可得， $\mathcal{B}^s_{2,2}(\Omega) = B^s_{2,2}(\Gamma), 0 \leq s \leq 1$，且范数可比。这两条结果将在定理 5.7 的证明中用到。

另一方面，在定理 5.7 的证明中，我们还需要用到以下结论：当曲线 Γ 为弦弧时（见定理 1.1），$\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p,}(\Omega) = B^{1/p}_{p\,p,}(\Gamma)$，且范数可比。为方便起见，我们在此略述其证明：设$f \in B^{1/p}_{p\,p,}(\Gamma)$，其在 Ω 中的调和延拓仍记为 f，则由以下推理可得结论：

$$\|f\|_{B^{1/p}_{p,p}(\Gamma)} \simeq \|f\circ\lambda\|_{B^{1/p}_{p,p}(\mathbb{T})} \simeq \|f\circ\varphi\|_{B^{1/p}_{p,p}(\mathbb{T})} \simeq \|f\circ\varphi\|_{\mathcal{B}^{1/p}_{p,p}(\mathbb{D})} = \|f\|_{\mathcal{B}^{1/p}_{p,p}(\Omega)},$$

其中隐常数仅取决于 Ω 和 p。上述步骤依次成立的原因是：(1) λ 是将 $\mathbb{T}$ 映射到 Γ上的双 Lipschitz 同胚；(2) $\lambda^{-1}\circ\varphi$ 是拟对称映射；(3) 当 $\Gamma = \mathbb{T}$ 时，这是众所周知的，正如我们之前所提到的；(4) 空间 $\mathcal{B}^{1/p}_{p\,p,}(\Omega)$ 是共形不变的。

回顾一下，$\mathcal{B}^{s}_{p,\ p}(\Omega)$ 具有共轭不变性。在定理 5.7 的假设下，我们已经看到，$B^{s}_{p,\ p}(\Gamma)$ 也具有共轭不变性（见定理 5.1）；因此，为了证明定理 5.7，我们只需证明以下结论

定理 5.8。设 Ω 是一个有界弦弧域，其边界为 Γ，其中 $0\in\Omega$，且 φ是其固定 0 的黎曼映射。设 $0<s<1, 1<p<\infty$。若 Γ 满足 $Arg\,\varphi'\in L^\infty$，则有

$$\mathcal{HB}^{s}_{p,p}(\Omega) = HB^{s}_{p,p}(\Gamma) \tag{5.11}$$

且范数可比。该结论尤其适用于径向 *Lipschitz* 域。

证明。对于任意 $f\in\mathcal{HB}^{s}_{p,p}(\Omega)$，$0<s<1, 1<p<\infty$，由 (5.2) 可知

$$\iint_{\mathbb{D}} |V_{s,p}(f)'(z)|^p(1-|z|)^{(1-s)p-1}dxdy \simeq \iint_{\Omega} |f'(\zeta)|^p d(\zeta,\Gamma)^{(1-s)p-1}d\xi d\eta$$

其中隐常数仅依赖于 s 和 p，且

$$V_{s,p}(f)'(z) = (f\circ\varphi)'(z)\varphi'(z)^{1/p-s}.$$

由此可得

$$f\in\mathcal{HB}^{s}_{p,p}(\Omega) \ \Leftrightarrow\ V_{s,p}(f)'\in A^p_{(1-s)p-1} \tag{5.12}$$

且范数可比。注意，任意 $g\in A^p_{\ (1-s)p-1}$ 均可写成$V_{s,p}(f)'$的形式，其中取 $f(z) = \int_0^z g\circ\varphi^{-1}(u)(\varphi^{-1})'(u)^{1+1/p-s}du$，可知算子$\mathcal{HB}^{s}_{p,p}(\Omega)\ni f\mapsto V_{s,p}(f)'\in A^p_{\ (1-s)p-1}$ 是一个有界同构。这归结为证明以下结论：

$$f\in \mathrm{HB}^{s}_{p,p}(\Omega) \ \Leftrightarrow\ V_{s,p}(f)'\in A^p_{(1-s)p-1} \tag{5.13}$$

且范数可比。为此，我们将使用下面的定理 5.6。

我们已经证明，对于任意 $1<p<\infty$，$\mathcal{HB}^{1/p}_{p\,p,}(\Omega) = \mathrm{HB}^{1/p}_{p\,p,}(\Omega)$，只要 Γ 是一条弦弧曲线；并且对于任意 $0<s<1$，$\mathcal{HB}^{s}_{2,\ 2}(\Omega) = \mathrm{HB}^{s}_{2,\ 2}(\Omega)$，此外若 Γ 满足 $\mathrm{Arg}\varphi'\in L^\infty$，那么等价关系 (5.13) 对于 $s=1/p$、$1<p<\infty$已经成立，对于$0<s<1$、$p=2$也成立。

回想一下，$(A^p_{p-2},\ A^2_{1-2s})$ 是一个插值对，并且对于 $0\le\theta\le 1$,

$$[A^p_{p-2},A^2_{1-2s}]_\theta = A^q_{(1-\alpha)q-1}. \tag{5.14}$$

我们还看到，$(\mathrm{HB}^{1/p}_{p\,p},\ (\Omega),\ \mathrm{HB}^{s}_{2,\ 2}(\Omega))$ 是一个插值对，并且

$$[\mathrm{HB}^{1/p}_{p,p}(\Omega),\mathrm{HB}^{s}_{2,2}(\Omega)]_\theta = \mathrm{HB}^{\alpha}_{q,q}(\Omega) \tag{5.15}$$

条件是 Γ 是一条弦弧曲线。这里,

$$\begin{aligned}\alpha=\alpha(\theta) &:= (1-\theta)/p+\theta s,\\ q=q(\theta) &:= 2p/(2(1-\theta)+\theta p).\end{aligned} \tag{5.16}$$

经过一些简单的算术运算可得出结论：对于任意给定的 $\alpha\in(0,\ 1)$ 和 $q\in(1,\ \infty)$，存在 $p\in(1,\ \infty)$、$s\in(0,\ \min(1,\ 5/2-2/p))$ 以及 $\theta\in[0,1]$，使得 (5.16) 成立。回想一下，在定理 5.5 的证明中，我们已经证明 $\check{}B$（Γ 上的多项式集）在 $\mathrm{HB}^{s}_{2,\ 2}(\Omega)$ 中稠密。使用类似的论证可知，$\check{}B$ 在 $\mathrm{HB}^{1/p}_{p\,p,\ }(\Omega)$ 中也稠密，因此 $\check{}B$ 是交空间 $\mathrm{HB}^{1/p}_{p\,p,\ }(\Omega)\cap\mathrm{HB}^{s}_{2,\ 2}(\Omega)$ 的稠密子空间。

$\tilde{}$定义一族线性映射（$T_z;\ \ z=\theta+it\in S$），S 表示一个竖直带状区域，其中 $0\le\theta\le 1$ 同前，在 B 上定义为

$$\widetilde{T}_z(f) := e^{cz^2}V_{\alpha(z),q(z)}(f)' = e^{cz^2}f'\circ\varphi(\varphi')^{\frac{1}{q(z)}+1-\alpha(z)} = e^{cz^2}f'\circ\varphi(\varphi')^{(\frac{1}{2}-s)z+1}.$$

这里，我们仍像定理 5.5 的证明中那样选取常数 $c\ge A^2/4$，其中$A:=\|\mathrm{Arg}\varphi'\|_\infty$，使得 $e^{-ct^2}e^{tA}\le e$。我们将证明，对于每个 $z=\theta+it\in S$，线性映射 $\widetilde{T}_z$ 将 $\check{}B$ 映射到 $A^p_{p-2}+A^2_{1-2s}$，且映射族（$\widetilde{T}_z$）满足定理 5.6 的性质 (i) 和 (ii)。

我们先对每个 $z=\theta+it\in S$ 以及每个 $f\in\check{}B$估计 $|\widetilde{T}_z\ (f)\ \ (\zeta)\ |^p$。经过简单计算可得

$$|e^{cz^2}|^p = e^{pc(\theta^2-t^2)}\le e^{pc}e^{-ct^2p},$$

and

$$|(\varphi')^{(1/2-s)z+1}|^p = e^{t(s-1/2)p\mathrm{Arg}\varphi'}\left(|\varphi'|^{1+(1/2-s)\theta}\right)^p\le e^{|t|pA}\left(|\varphi'|^{1+(1/2-s)\theta}\right)^p.$$

存在一个常数 C_1，使得 $|f'\circ\varphi|^p<C_1$，因为以 0 为内点的区域 Ω 的直径有限。于是

$$|\widetilde{T}_z(f)(\zeta)|^p\le C_1e^{pc}\left(e^{-ct^2+|t|A}\right)^p\left(|\varphi'|^{1+(1/2-s)\theta}\right)^p\le C_1e^{pc}e^p\left(|\varphi'|^{1+(1/2-s)\theta}\right)^p. \tag{5.17}$$

为了证明线性映射 $\widetilde{T}_z$ 将 $\check{}B$ 映射到 $A^p_{p-2}+A^2_{1-2s}$，我们分以下三种情况讨论:

情形 1：当 $s\le 1/2$

$$\iint_{\mathbb{D}}|\widetilde{T}_z(f)(\zeta)|^2(1-|\zeta|)^{1-2s}d\xi d\eta\le C_1e^{2c}e^2\iint_{\mathbb{D}}\left(|\varphi'|^{1+(1/2-s)\theta}\right)^2(1-|\zeta|)^{1-2s}d\xi d\eta$$

$$\leq C_1 e^{2c} e^2 \iint_{\mathbb{D}} |\varphi'|^2 |\varphi'|^{(1-2s)\theta} (1-|\zeta|)^{(1-2s)\theta} d\xi d\eta$$

其上界为一个仅取决于 s和 Ω 的常数。

情形 2。当 $s > 1/2$ 和 $p \geq 2$

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{D}} |\widetilde{T}_z(f)(\zeta)|^p (1-|\zeta|)^{p-2} d\xi d\eta \leq & C_1 e^{pc} e^p \iint_{\mathbb{D}} \left(|\varphi'|^{1+(1/2-s)\theta}\right)^p (1-|\zeta|)^{p-2} d\xi d\eta \\ \leq & C_1 e^{pc} e^p \iint_{\mathbb{D}} \left((|\varphi'|(1-|\zeta|))^{1+(1/2-s)\theta}\right)^{p-2} |\varphi'|^{2+(1-2s)\theta} d\xi d\eta \\ \leq & C_1 e^{pc} e^p \mathrm{diam}(\Gamma)^{p-2} \iint_{\mathbb{D}} |\varphi'|^{2+(1-2s)\theta} d\xi d\eta\end{aligned}$$

利用霍尔德不等式可知，该式有界，且上界仅依赖于 p和 Ω .

情形 3。当 $1/2 < s < \min(1, 5/2 - 2/p)$ 和 $1 < p < 2$ 时，只需证明对所有$\theta \in (0,1)$,

$$\iint_{\mathbb{D}} |\varphi'(z)|^{2+p\theta\left(\frac{1}{2}-s\right)} d(\varphi(z), \Gamma)^{p-2} dxdy < \infty.$$

首先，由于 $s > 1/2$ 和 $p < 2$ ，我们有

$$1 < 2 + p\theta\left(\frac{1}{2} - s\right) < 2.$$

由霍尔德不等式,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} |\varphi'(z)|^{2+p\theta(\frac{1}{2}-s))} d(\varphi(z), \Gamma)^{p-2} dxdy \\ \leq &\left(\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} |\varphi'(z)|^2 d(\varphi(z), \Gamma)^{\frac{2(p-2)}{2+p\theta(\frac{1}{2}-s)}} dxdy\right)^{\frac{2+p\theta(\frac{1}{2}-s)}{2}},\end{aligned}$$

通过变量替换 $\zeta = \varphi(z)$，最后一个积分等于

$$\iint_{\Omega} d(\zeta, \Gamma)^{\frac{2(p-2)}{2+p\theta(\frac{1}{2}-s)}} d\xi d\eta.$$

由于该区域是 Lipschitz 区域，此积分有限当且仅当

$$\frac{2(p-2)}{2 + p\theta(\frac{1}{2} - s)} > -1,$$

或者，等价地，当且仅当

$$0 < \theta < 2\frac{1 - \frac{1}{p}}{s - \frac{1}{2}}.$$

因此，有限的一个充分条件是

$$2\frac{1 - \frac{1}{p}}{s - \frac{1}{2}} > 1 \Leftrightarrow s < \frac{5}{2} - \frac{2}{p}.$$

~因此，当 $1 < p < \infty, 0 < s < \min(1, 5/2 - 2/p)$ 时，线性映射 T_z将 ˇB 映射为 $A^p_{p-2} + A^2_{1-2s}$，并且对于所有 $f \in$ ˇB，映射 $\widetilde{T}_{(\cdot)}(f) : S \to A^p_{p-2} + A^2_{1-2s}$ 是有界的。

将 $\theta=0$ 代入 (5.17)，可得

$$\iint_{\mathbb{D}}|\widetilde{T}_{it}(f)|^p(1-|z|^2)^{p-2}dxdy\le C(p,c)\iint_{\Omega}|f'(\zeta)|^p d(\zeta,\Gamma)^{p-2}d\xi d\eta$$

其中常数 $C(p,c)$ 仅依赖于 p 和 c。由此可得

$$M_0:=\sup\{\|\widetilde{T}_{it}f\|_{A^p_{p-2}};\ t\in\mathbb{R},f\in\check{B},\|f\|_{B^{1/p}_{p,p}(\Gamma)}\le 1\}<\infty.$$

在 (5.17) 中取 $\theta=1$，我们可以看到

$$\iint_{\mathbb{D}}|\widetilde{T}_{1+it}(f)|^2(1-|z|^2)^{1-2s}dxdy\le C(c,s)\iint_{\Omega}|f'(\zeta)|^2 d(\zeta,\Gamma)^{1-2s}d\xi d\eta$$

其中 $C(s,c)$ 是一个仅依赖于 s 和 c的常数。由此可知

$$M_1:=\sup\{\|\widetilde{T}_{1+it}f\|_{A^2_{1-2s}};\ t\in\mathbb{R},f\in\check{B},\|f\|_{B^s_{2,2}(\Gamma)}\le 1\}<\infty.$$

由参数化积分的连续性可知，所有函数 $S\ni z\mapsto\widetilde{T}_zf\in A^p_{p-2}+A^2_{1-2s}$、$\mathbb{R}\ni t\mapsto\widetilde{T}_{it}f\in A^p_{p-2}$和 $\mathbb{R}\ni t\mapsto\widetilde{T}_{1+it}f\in A^2_{1-2s}$ 都是连续的。最后，对于任意$f\in\check{B}$，映射 $\circ S\ni z\mapsto\widetilde{T}_zf\in A^p_{p-2}+A^2_{1-2s}$ 的全纯性证明与定理 5.5 的证明类似。这里省略细节。定理 5.8 的证明至此完成。

□

注 5.9。回顾一下，在定理 5.5 和 5.7 中，我们只关注了有界域的情形。无界域的情形实际上可以转化为有界情形；详情请见附录，对于无界情形也有类似的结论。

设 Γ 为一条径向 Lipschitz 曲线，且 $\Omega_{i,\ e}$ 为 Γ的内部域和外部域。设 $\varphi_{i,\ e}$ 为 $\Omega_{i,\ e}$的黎曼映射。由 Helson-Szegö 定理可知，在 $\mathbb{T}$上有 $|\varphi'_{i,\ e}|\in A_p$,$p<2$。令

$$p_0^{i,e}=\inf\{p>1:\ |\varphi'_{i,e}|\in A_p\}\ \text{ and }\ p_0=\max(p_0^i,p_0^e).$$

我们以曲线的几何性质估计 p_0 来结束本小节。注意到这两个函数

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z\varphi'_{i,e}(z)}{\varphi_{i,e}(z)}\right)$$

具有相同的 L^∞范数，且该范数小于 $\pi/2$。我们将 M 定义为该范数的正切，并将这个数称为 Γ的 Lipschitz 范数。现在我们采用定理 5.5 下方的相同论证：

$$\log|\varphi'_{i,e}(z)|^p=\log\left|\frac{\varphi_{i,e}(z)}{z}\right|^p+\log\left|\frac{z\varphi'_{i,e}(z)}{\varphi_{i,e}(z)}\right|=\log\left|\frac{\varphi_{i,e}(z)}{z}\right|^p-H\left(p\operatorname{Arg}\frac{z\varphi'_{i,e}(z)}{\varphi_{i,e}(z)}\right),$$

因此，根据 Helson-Szegö 定理可得，$|\varphi'_{i,\ e}|^p$ 是单位圆$\mathbb{T}$ 上的一个 A_2-权函数，当 $p<\frac{\pi}{\arctan M}$时成立；特别地，对于 $p=1$也成立。另一方面，设 ω是一个A_2-权函数，$\tilde{p}$ 是满足 $\omega^p\in A_2$的所有 p 的上确界。不难看出，$\delta(\omega)(:=\inf\{q>1:\ \omega\in A_q\})\le 1+\frac{1}{\tilde{p}}$。于是我们得到 p_0的一个估计值：

$$1+\frac{1}{\frac{\pi}{2\arctan M}}=1+\frac{2\arctan M}{\pi}.$$

于是我们可以陈述定理 5.7 的以下推论。

推论 5.10. 若 Γ 是一条 M 径向*Lipschitz*曲线，且 $p \in \left(1+\frac{2}{\arctan\frac{1}{M}}, 1+\frac{2}{\frac{\pi}{2}-\arctan M}\right)$,$s \in (0,1)$ 那么

$$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_i \to \Gamma) = \mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_e \to \Gamma) = B^s_{p,p}(\Gamma). \tag{5.18}$$

请注意，当 $M \to 0$ 时，这个 p 值区间收敛到 $(1, \infty)$；当 $M \to \infty$ 时，则收敛到单点$\{2\}$ 。

5.5 重访几乎狄利克雷原理。

在第 3 节中，我们证明了定理 3.5。该定理指出，给定一个拟圆 Γ，$p > 2$，$\frac{h(\Gamma)-1}{p} < \frac{1}{s-1} - h(\Gamma)^{-1}$ （注意，当 Γ 为弦弧时，$h(\Gamma) = 1$，因而$1/2 < s < 1$），那么如果

$$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_i \to \Gamma) = \mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_e \to \Gamma)$$

那么我们有，这个记为 $\mathcal{B}^s_{p,p}(\Gamma)$ 的空间等于 $W^{1,p}(\mathbb{C}, \omega)|_\Gamma$。此外，我们还证明了包含关系 $W^{1,p}(\mathbb{C}, \omega)|_\Gamma \subset \mathcal{B}^s_{p,p}(\Gamma)$ 蕴含空间 $\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_i, e)$ 满足几乎狄利克雷原理，也就是说，存在 $C > 0$，使得对于 Ω 上任意连续函数 F，若其在 Ω 中为 C^1-函数，记 u 为 $F|_\Gamma$ 在 Ω 中的调和延拓，则

$$\|u\|^p_{\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega)} \le C \iint_\Omega |\nabla F(z)|^p d(z,\Gamma)^{(1-s)p-1} dxdy.$$

与之前一样，令 $\varphi_{i,e}$ 为 $\Omega_{i,e}$的一个黎曼映射，并令

$$p_0^{i,e} = \inf\{p > 1 : |\varphi'_{i,e}| \in A_p\} \text{ and } p_0 = \max(p_0^i, p_0^e).$$

定理 5.11. 若 Γ 是一条径向*Lipschitz*曲线，则 $B^s_{p,p}(\Omega_i)$ 具有近似*Dirichlet*性质，当且仅当 $2 < p < \frac{p_0}{p_0-1}$ 且 $s > 1/2$。

证明。 这直接由定理 3.5、5.1 和 5.7 得出。 □

利用上一小节中 p_0 的估计值，我们得到以下推论 .

推论 5.12. 若 Γ 是一条范数为 $M > 0$ 的径向*Lipschitz*曲线，则 $B^s_{p,p}(\Omega_i)$ 具有近似*Dirichlet*性质，当

$$2 < p < 1 + \frac{\pi}{2\arctan M}, \quad \frac{1}{2} < s < 1.$$

这个 p 值区间在 $M \to 0$ 时收敛到 $(2, \infty)$，并在 $M \to \infty$ 时收敛到单点 $\{2\}$ 。

6 附录

设 Γ 是一条具有 $\infty \notin \Gamma$ 的若尔当曲线，且 Ω_i, e 是上述 $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ 的连通分支。在本文中，我们一直以类似的方式处理 Ω_i 和 Ω_e ： 这样做时，我们忽略了 Ω_e 是无界的这一事实，因此还需要额外的论证。本附录旨在弥补这一缺漏。

不失一般性，设 Γ 包含于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中，且 0 是一个内点。映射 $z \mapsto 1/z$ 将 Ω_e 变换为边界为 $\Gamma' = 1/\Gamma$ 的有界域 Ω_i'；Ω_i' 包含 0，而 0 对应于 Ω_e 中的 ∞。若 $u(1/z)$ 在有界域 Ω_i' 中是调和的，我们就称 u 在以 ∞ 为内点的区域 Ω_e 中是调和的。令 $p > 1$ 和 $s \in (0, 1)$ 取通常的定义，并考虑 $u \in \mathcal{B}^s_{p,\ p}(\Omega_e)$。令 $v : \Omega_i' \to \mathbb{C}$ 定义为 $v(z) = u(1/z)$。通过变量替换 $z = 1/w$，由科比畸变定理 (2.1) 可得

$$\iint_{\Omega_e} |\nabla u(w)|^p d(w,\Gamma)^{(1-s)p-1} du dv \simeq \iint_{\Omega_i'} |\nabla v(z)|^p d(z,\Gamma')^{(1-s)p-1} |z|^{2(sp-1)} dx dy \quad (6.1)$$

其中隐常数是普适的。我们有如下

命题 6.1. 若 $u \in \mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_e)$ 则 $v \in \mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_i')$。

证明。设 $r < 1/4$和 R_1, R_2满足 $\frac{1}{2} + r < R_1 \leq R_2 < 1 - r$。对于任意满足$|\zeta| < r$的 ζ，环域 $A_\zeta = \{R_1 < |z - \zeta| < R_2\}$ 包含于环域 $\{\frac{1}{2} < |z| < 1\}$中。根据调和函数的平均值性质，对于 $|\zeta| < r$，有

$$\nabla v(\zeta) = \frac{1}{\pi R_i^2} \iint_{|z-\zeta|<R_i} \nabla v(z) dx dy, \quad i = 1, 2$$

因此

$$|\nabla v(\zeta)| \leq \frac{1}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \iint_{\{1/2<|z|<1\}} |\nabla v(z)| dx dy.$$

注意到 (6.1)，利用霍尔德不等式可得，$|\nabla v|$ 在圆盘 $|\zeta| < r$ 中一致有界，其上界为仅依赖于 Γ 的常数乘以 u 在$\mathcal{B}^s_{p,p}(\Omega_e)$中的范数。这个估计意味着

$$\iint_{|z|<r} |\nabla v(z)|^p d(z,\Gamma')^{(1-s)p-1} dx dy < \infty. \quad (6.2)$$

为了控制积分的其余部分，从而得到 v 的范数:

$$\iint_{\Omega_i' \setminus \{|z| \leq r\}} |\nabla v(z)|^p d(z,\Gamma')^{(1-s)p-1} dx dy, \quad (6.3)$$

我们首先注意到，映射 $w = 1/z$ 在区域 $\Omega_i' \setminus (|z| < r)$ 上是双 Lipschitz 的；然后，存在一个常数 C，它仅取决于 Γ，使得

$$\frac{1}{C|w|} d(w,\Gamma) \leq d(1/w,\Gamma') \leq \frac{C}{|w|} d(w,\Gamma).$$

细节留给读者。 □

陈述与声明。 作者声明不存在利益冲突，也没有与本研究相关的数据。

致谢。 本工作得到国家自然科学基金（项目编号：12271218和12571083）以及奥尔良大学的资助。作者还衷心感谢巴黎的庞加莱研究所在“巴黎研究”项目框架下提供的热情接待。特别感谢 Gérard Bourdaud 的帮助以及富有趣味的讨论。

参考文献

[1] Ahlfors, L.V.：《拟共形映射讲义》。Mathematical Studies，第10卷。Van Nostrand，普林斯顿（1966年）[2] Arcozzi, N., Rochberg, R.：拟对称映射下圆的容量不变性：一个简易证明。载于《调和分析进展》，Springer INdAM Ser. 3，Springer，米兰，第27–32页（2013年）[3] Astala, K.：Lipschitz类的 Calderón问题与拟圆的维数。Rev. Mat. Iberoam. 4，469–486（1988年）[4] Bergh, J., Löfström, J.：《插值空间：导论》。Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften，第223号。Springer-Verlag，柏林–纽约（1976年）[5] Bourdaud, G.：Besov 空间中的变量替换 II。Forum Math. 12，545–563（2000年）[6] Calderón, A.P.：Lipschitz曲线上的柯西积分及相关算子。美国国家科学院院刊74，1324–1327（1977年）[7] Calderón, A.P.：中间空间与插值。Studia Math.，Special Series I，31–34（1963年）[8] Chua, S-K.：加权 Sobolev 空间的延拓定理。Indiana Univ. Math. J. 41，1027–1076（2000年）[9] Coifman, R., Fefferman, C.：极大函数与奇异积分的加权范数不等式。Studia Math. 51(3)，241–250（1974年）[10] Coifman, R., McIntosh, A., Meyer, Y.：柯西积分在 L^2 Lipschitz曲线上定义了一个有界算子。Ann. of Math. 116(2)，361–387（1982年）[11] David, G.：复平面上某些曲线的奇异积分算子。Ann. Sci. École Norm. Sup. 17，157–189（1984年）[12] David, G.：Lipschitz图上柯西算子范数的一个下界。Trans. Amer. Math. Soc. 302(2)，741–750（1987年）[13] Ding, Z.：Lipschitz区域上 Sobolev 空间迹定理的一个证明。Proc. Amer. Math. Soc. 124(2)，591–600（1996年）[14] Douglas, J.：Plateau问题的解。Trans. Amer. Math. Soc. 33，263–321（1931年）[15] Duren, P.：H^p 空间理论。Academic Press。纽约和伦敦（1970年）[16] Garnett, J.：《有界解析函数》。Academic Press，纽约（1980年）[17] Gehring, F.W., Martio, O.：拟圆盘与 Hardy-Littlewood性质。Complex Variables Theory Appl. 2(1)，67–78（1983年）[18] Gol’dstein, V.M., Latfullin, T.G., Vodop’yanov, S.K.：无界平面区域上 L_2^1 类函数延拓的判据。Siberian Math. J.（英文译本）20(2)，298–301（1979年）[19] Gundy, R.F., Wheeden, R.L.：非切向极大函数、Lusin面积积分和 Walsh-Paley级数的加权积分不等式。Studia Math. 49，107–124（1973/74年）[20] Hinkkanen, A.：调和函数的连续模。Journal d’Analyse Math. 51，1–29（1988年）[21] Jerison, D.S., Kenig, C.E.：Hardy空间、 A_∞和弦弧区域上的奇异积分。Math. Scand. 50，221–247（1982年）

[22] Jones, P.W.：拟共形映射与 Sobolev 空间中函数的延拓性。Acta. Math. 147, 71-88（1981）[23] Jones, P., Zinsmeister, M.：关于 Lavrentiev 区域的共形变换。C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 295(10)，563-566（1982）[24] Jonsson, A., Wallin, H.： $\mathbb{R}^n$子集上的函数空间。Math. Rep. 2(1)（1984）[25] Lehto, O.：单叶函数与特希米勒空间。数学研究生教材109，Springer（1987）[26] Leoni, G.：Sobolev 空间入门。数学研究生教程，第18卷，第2版。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州（2017）[27] Liu, T.：弦弧曲线上的柯西积分及相关研究。博士学位论文。苏州大学（2024）[28] Liu, T., Shen, Y.：临界 Besov 空间的跳跃问题。Math. Z. 306(4), 59（2024）[29] Liu, T., Shen, Y.：拟圆上黎曼–希尔伯特问题的一种简要方法。Chin. Ann. Math. Ser.B 45(6)，971-978（2024）[30] Lehto, O., Virtanen, K.I.：平面上的拟共形映射。第2版。Springer-Verlag，纽约、海德堡、柏林（1973）[31] Matsuzaki, K.：用于韦伊–彼得松曲线分析的可积特希米勒空间。arXiv 2508.20341 [32] Maz'ya, V.：Sobolev 空间及其在椭圆型偏微分方程中的应用。数学科学基础丛书 342，Springer（2011）[33] Mironescu, P., Russ, E.：加权 Sobolev 空间的迹：新旧方法。Nonlinear Analysis 119，354-381（2011）[34] Muckenhoupt, B.：Hardy 极大函数的加权范数不等式。Trans. Amer. Math. Soc. 165，207-226（1972）[35] Murai, T.：Calderón 型奇异积分算子的有界性。VI。Nagoya Math. J. 102, 127-133（1986）[36] Martio, O., Vuorinen, M.：Whitney 立方体、 p容量与闵可夫斯基内容。Expo. Math. 5，17-40（1987）[37] Nag, S., Sullivan, D.：通过量子微积分与圆上的 $H^{1/2}$ 空间研究特希米勒理论和泛周期映射。Osaka J. Math. 32(1)，1-34（1995）[38] Plemelj, J.：具有给定单值群的黎曼函数族。Monatsh. Math. Phys. 19(1)，211-245（1908）[39] Pommerenke, Ch.：保角映射的边界行为。Springer（1992）[40] Schippers, E., Staubach, W.：拟圆中的调和反射与拟圆盘上黎曼问题的适定性。J. Math. Anal. Appl. 448(2)，864–884（2017）[41] Schippers, E., Staubach, W.：d-正则拟圆盘上黎曼–希尔伯特问题的适定性。Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 42，141-147（2017）[42] Schippers, E., Staubach, W.：黎曼曲面上拟圆的 Plemelj-Sokhotski 同构与 Schiffer 算子。Math. Ann. 378，1613-1653（2020）[43] Schippers, E., Staubach, W.：拟圆盘上的分析：通过传输问题与跳跃问题的统一方法。EMS Surv. Math. Sci. 9，31-97（2022）[44] Stegenga, D.A.：狄利克雷空间的乘子。Illinois J. Math. 24(1)，113-139（1980）

[45] Stein, E.M.：《奇异积分与函数的可微性》，普林斯顿数学丛书，第30卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1970年。[46] Triebel, H.：《函数空间理论。II。》数学专著，第84卷，Birkhäuser Verlag，巴塞尔（1992）[47] Väisälä, J.：多孔集与拟对称映射。美国数学会会刊，299(2)，525-533（1987）[48] Vodop'yanov, S.K.：齐次群的映射与函数空间嵌入。《西伯利亚数学杂志》30，25-41（1989）[49] Voigt, J.：抽象 Stein 插值。*Math. Nachr.* 157，197-199（1992）[50] Wei, H., Zinsmeister, M.：弦弧区域上的 Dirichlet 空间。*Math. Ann.*391(1)，1045–1064（2025）[51] Wei, H., Zinsmeister, M.：p-弦弧区域上的 Dirichlet 空间。*arXiv*2407.11577[52] Zhu, K.：《单位球中的全纯函数空间》。数学研究生教材226，Springer（2004）[53] Zhao, R., Zhu, K.：$\mathbb{C}^n$单位球中的 Bergman 空间理论。《法国数学学会回忆录》第115号（2008）[54] Zinsmeister, M.：赫尔德类拟圆盘中的 Dirichlet、Neumann 与 Calderón 问题（Dirichlet, Neumann and Calderón problems in quasidisks for Hölder classes）。*Rev. Mat. Iberoam.* 2(3)，319–332（1986）