arXiv:2601.01349v1 [math.AP] 4 Jan 2026

Sobolev数据的 Glimm–Lax 构造的唯一极限与一维凸积分的障碍

JEFFREY CHENG、COOPER FAILE 与 SAM G. KRUPA

摘要。我们研究一个具有两个未知量的真正非线性一维双曲守恒律系统。Glimm与Lax的著名构造表明，对于具有小 L^∞ 范数的任意初始数据，在此情形下都存在关于时间全局定义的“Glimm–Lax”弱熵解 [《美国数学学会回忆录》（1970），第 101]期。Bressan、Marconi与Vaidya在 L^1稳定性理论方面的近期工作，为这些解给出了首个部分唯一性与稳定性结果 [《数学分析与力学档案》（2025年），第 249]卷。本文结合 L^2理论的最新进展，在这些结果的基础上展开研究。我们证明，对于属于 Sobolev空间 H^s 且满足 $s>0$ 的初始数据，其解在全体全变差以 $1/t$的速率衰减的 Glimm–Lax解中具有唯一性。作为次要结果，我们还运用这些技术证明，Chen、Vasseur与Yu关于连续解的最新非唯一性结果 [预印本（2024年）] 无法推广到C^α 解（当 $\alpha>1/2$时），即便再加上适当的分数阶 Sobolev 空间 $W^{s,\,p}$。另一个具有独立意义的辅助结果，是为稀疏波的扰动发展出一种加权相对熵收缩估计。

目录

1. 引言 2 1.1. Glimm–Lax类 2 1.2. 主要结果 3 1.3. 关于连续解的非唯一性 4 1.4. 关于非 BV 扰动的稳定性 5 1.5. L^2-稳定性理论的进展 5 1.6. 开放问题 6 1.7. 论文概要 6 1.8. 记号 6 2. 定理 1.1、推论 1.1、定理 1.2 和定理 1.3 的主要思想与证明 6 2.1. 正时间下由 Glimm-Lax 解生成的半群 6 2.2. Sobolev数据逼近的短时间弱BV稳定性 7 2.3. 定理 1.1 的证明 9 2.4. 推论 1.1 的证明 10 2.5. 定理 1.2 的证明 11 2.6. 定理 1.3 的证明 14 3. 系统结构与主要命题 16 4. 相对熵方法 19 4.1. 小激波的定量耗散估计 19 4.2. 稀疏波的加权相对熵收缩 20 4.3. 命题 4.2 的证明 23 5. 前沿跟踪算法 25

日期：2026年1月6日。2020 年数学学科分类。主要分类：35L65，次要分类：35B35、35L45、76N15。关键词与短语。前沿追踪、守恒律、相对熵、Glimm-Lax、Sobolev、凸积分。**致谢**。 作者感谢 Alexis Vasseur 和 Matthew Novack 在本研究期间展开的富有成效的讨论。作者使用了 Google Gemini 和 refine.ink 进行编辑。第一作者和第二作者部分获得美国国家科学基金会项目 DMS-1840314 和 DMS-2306852，以及美国国家科学基金会-英国工程与自然科学研究理事会联合项目 DMS-EPSRC-2219434 的资助。第三作者的研究由欧盟通过“守恒律大数据的定量稳定性与正则性”项目资助。然而，本文所表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究执行机构（REA）的观点。欧盟和资助机构均不对这些观点和意见承担责任。

5.1. 黎曼问题简介 25 5.2. 经典 ν-近似解 27 5.3. 平移的 ν-近似解 27 5.4. BV 范数的控制 27 5.5. 经典及平移 ν-近似解的加权 L^1-估计 28 6. 权函数 a 28 6.1. 波相互作用估计 28 6.2. 权函数的构造 a 29 7. 命题 3.1 的证明 31 7.1. 停止并重新启动时钟 32 7.2. 命题 3.1 的证明 32 附录 A. 一个满足 (GL) 但不满足假设 1 的双曲系统 35 附录B. 熵守恒 36 附录C. Sobolev数据的逼近 38 附录D. 引理 3.1 的证明 40 参考文献 41

1. 引言

本文考虑一维双曲 2×2 守恒律系统

$$\begin{cases} u_t + [f(u)]_x = 0 & (t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u^0(x) & x\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $u=(u_1,u_2)\in\mathcal{G}_0\subset\mathbb{R}^2$。假设状态空间 $\mathcal{G}_0$ 是凸的，且允许无界；我们用 $\mathcal{G}$ 表示其内部。关于正则性，我们取 $f=(f_1,f_2)\in C(\mathcal{G}_0)\cap C^4(\mathcal{G})$。固定一个状态 $d\in\mathcal{G}$。在此背景下，经典结果表明，若两个特征场均为线性退化或真正非线性，则存在一个围绕 d 的小 BV 解的 Lipschitz 连续半群 $\mathcal{S}$，称为“标准黎曼半群”；该半群可由前沿追踪近似、Glimm 格式或消失黏性的极限得到 [8], [5], [3], [30] （关于具有小 BV 初始数据的方程 (1.1) 的存在性理论，另见 [6], [26] ）。若存在一个严格凸函数 η 以及一个函数 q 满足

$$\nabla q = \nabla\eta f', \tag{1.2}$$

那么我们称系统 (1.1) 配备了一个熵/熵通量对 $(\eta,\ q)$。如果系统 (1.1) 的一个解还满足以下分布意义下的附加微分不等式，

$$[\eta(u)]_t + [q(u)]_x \le 0, \tag{1.3}$$

对于每个熵-熵通量对 $(\eta,\ q)$，我们称 u 是系统 (1.1) 的弱熵解。更具体地说，这样的 u 满足

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty [\phi_t(t,x)\eta(u(t,x)) + \phi_x(t,x)q(u(t,x))]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^\infty \phi(0,x)\eta(u^0(x))\,\mathrm{d}x \ge 0,$$

对于每个 $\phi\in C_0^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R})$，其中 $\phi\ge 0$，以及每个熵-熵通量对 $(\eta,\ q)$。成熟的L^1-稳定性理论表明，如果存在一个具有有限（但可能非常大）全变差的弱熵解，那么该解是唯一的，并且连续依赖于初始数据（例如参见 [12], [11], [9], [36], [37], [38]）。

1.1. **Glimm–Lax 类**。 然而，有一类 2×2 守恒律，其小L^∞非 BV 解理论已经得到发展。我们引入通量 f 上的以下条件：

> **(GL)** 存在 $r>0$ 使得： $B_r(d)\to\mathbb{R}^2$ 是 C^4，且 $f'(d)$ 严格双曲，两个特征场都是真正非线性的。

随后，Glimm 和 Lax 的一个著名结果表明，存在 $\epsilon_1 > 0$ 使得，若 $||u^0 - d||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \epsilon_1$，则 (1.1) 存在一个全局时间定义的弱熵解 [27] (参见 [4])。这些解立即进入有界变差$_{\text{loc}}$，并且保持 L^∞小。事实上，定义

$$TV(u;L) := \sup_{a\in\mathbb{R}} ||u||_{BV([a,a+L])}.$$

于是，Glimm–Lax解满足

$$||u(t,\cdot) - d||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_0\sqrt{||u^0 - d||_{L^\infty(\mathbb{R})}}, \tag{1.4}$$

$$TV(u;L) \leq C_0\left(\sqrt{||u^0 - d||_{L^\infty(\mathbb{R})}} + \frac{L}{t}\right), \tag{1.5}$$

其中 $C_0 > 0$ 是关于 f 和 d 的常数。注意，u^0 的全变差不受限制，因此可能为无穷大。我们称这些解属于 *Glimm–Lax* 类：

$$GL(\epsilon_1) := \left\{u \,\middle|\, u \text{ is a weak entropy solution to (1.1) verifying (1.4), (1.5), } ||u^0 - d||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \epsilon_1\right\}.$$

于是，一个重要问题如下：

问题 1： 对于验证 **(GL)** 的 2×2 守恒律系统，是否可能建立一种适定性理论，使其不仅包含有界变差解，还包含 $u \in GL$（ϵ_1）解?

特别地，在 $GL(\epsilon_1)$ 中建立解的唯一性和连续依赖性，自 Glimm 和 Lax 的原始论文以来一直是一个开放问题 [7]。近期的工作中，Bressan、Marconi 和 Vaidya 证明了，对于属于某一类 $\mathcal{D}_\alpha$ （见方程（1.6））的初始数据，在进一步满足代数 L^1 收敛估计（见命题 2.2）的解中，方程（1.1）的解具有唯一性。他们还证明了˜ ˜某个子类 $(\mathbf{P}\alpha) \subset \mathcal{D}_\alpha$ [14, 中的解具有无条件适定性2]。属于 $(\mathbf{P}\alpha)$ 的函数可能具有无穷大的全变差，但其全变差必须集中在有限个总长度较小的开区间上。本文旨在针对一大类初始数据解决问题 1。特别地，我们将能够证明任意分数阶 Sobolev 空间中的初始数据的适定性，其中包括在任意开区间上可能具有无穷大全变差的函数。

1.2. **主要结果**。 我们的主要结果如下：

定理 1.1. 假设系统 *(1.1)* 满足 *(GL)*。固定 $p \in [1,\infty]$ 和 $s > 0$。那么，存在$\epsilon_1 > 0$ 使得下述结论成立。设 $u^0 \in W^{s,p}$ *loc* $(\mathbb{R})$ 满足 $\left\|u^0 - d\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \epsilon_1$。那么，具有初始数据 u^0 的 $GL(\epsilon_1)$ 中，*(1.1)* 的解是唯一的。更具体地，固定 $C, R, T > 0$。那么，具有属于 $W^{s,p}$ *loc* $(\mathbb{R})$ 的初始数据的 $GL(\epsilon_1)$ 中的解族构成一个 *Hölder* 连续半群，即存在 $K > 0$ 使得下述估计成立：

$$||u_1(t) - u_2(t)||_{L^1((-R,R))} \leq K||u_1^0 - u_2^0||^\theta_{L^1((-R-ct,R+ct))}, \quad \forall\, t \in [0,T],$$

其中 u_1^0，u_2^0 是满足 $\left\|u_i^0\right\|_{W^{s,p}\text{的任意两个初始数据，}((-R-cT,\ R+cT))} + \left\|u_i^0\right\|_{L^\infty((-R-cT,\ R+cT))} \leq C$ 当 $i = 1,\ 2$ 且常数 $c > 0$ 是信息传播速度（见注 7.2）。此外，$\theta < 1$ 可通过选择 1 足够小而任意接近 $\epsilon_1 > 0$。

特别是，定理 1.1 表明，Glimm–Lax 构造 [27] 在 $GL(\epsilon_1)$ 中定义良好且具有唯一极限，只要初始数据属于 $H^s(\mathbb{R})$ 对于任意 $s > 0$，并且 ϵ_1 足够小。

定理 1.1最好结合近期关于 L^1-稳定性理论 [14], [1], 的研究来理解，这些研究定义了与下列类别相似的类。对于任意 $0 < \alpha < 1$，定义

$$\mathcal{D}_\alpha := \left\{u^0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \,\middle|\, \text{柯西问题（1.1）存在一个弱熵解}\right.$$

$$\left. u \in GL(\epsilon_1) \text{ such that } \sup_{t\in(0,T)} t^{-\alpha}\left\|u(t) - u^0\right\|_{L^1((a,b))} < \infty \text{ for all } (a,b) \subset \mathbb{R}\right\}, \tag{1.6}$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_\alpha := \left\{u^0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \,\middle|\, \text{柯西问题 (1.1) 存在一个弱熵解}\right.$$

$$\left. u \in GL(\epsilon_1) \text{ such that } \sup_{t\in(0,T)} t^{1-\alpha}\left\|u(t)\right\|_{\mathrm{BV}((a,b))} < \infty \text{ for all } (a,b) \subset \mathbb{R}\right\}. \tag{1.7}$$

(1.1) 初始数据属于 $\mathcal{D}_\alpha$ 的解之间的唯一性，这些解还满足衰减率

$$\sup_{t\in(0,T)} t^{-\alpha}\left\|u(t,\cdot)-u^0\right\|_{L^1((-R,R))}<\infty, \quad \text{for any } R>0, \tag{1.8}$$

Bressan、Marconi 和 Vaidya 最近的工作表明了 [14, 定理 1。1]从定理 1.1 的证明中得到的我们的方法的一个推论是，空间 $\mathcal{D}_\alpha$ 实际上包含分数阶 Sobolev 空间。在标量情形下，类似的结论已在 [1,命题 4。2], 中得到证明，但对于满足(GL)的系统的解而言，这种包含关系仍然是一个开放问题。

推论 1.1。 对于任意 $\alpha, s\in(0,\ 1)$，存在 $\epsilon_1>0$ 使得以下包含关系成立

$$\tilde{\mathcal{D}}_\alpha\subset\mathcal{D}_\alpha, \tag{1.9}$$

$$\mathcal{D}_\alpha\subset H^r_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};B_{\epsilon_1}(d)), \quad \forall\ r<\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}, \tag{1.10}$$

$$H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};B_{\epsilon_1}(d))\subset\mathcal{D}_\omega, \qquad \forall\ 0<\omega\le\frac{s}{2}. \tag{1.11}$$

下面给出一些说明：

- 包含关系（1.9）已为人所知，并已在 [14, 方程（1.11）]中得到证明。~
- [14, 定理 1。2] 表明存在一个子类（$\mathbf{P}_\alpha$） $\subset\mathcal{D}_\alpha$。推论 1.1中的方程（1.11）表明，唯一性区域 D_α 实际上是极其庞大的类，其中包含任意阶的分数阶 Sobolev 空间。特别地，它们包含全变差为无穷且处处高度振荡的初始数据。这类数据的一个例子是分数布朗运动的一条路径，它几乎必然属于 $W^{s,\infty}{}_{\mathrm{loc}}$，其中 s 取决于赫斯特指数。
- 通过结合（1.11）和 [14, 定理 1。1], 可以证明，（1.1）在解类中是适定的

$$\left\{u\in GL(\epsilon_1)\,\middle|\,u \text{ verifies } (1.8)\right\},$$

对于属于 $W^{s,p}$ loc 的初始数据。然而，利用定理 1.1，可以将其提升为：对于属于 $W^{s,p}$ loc 的初始数据，在完整的 Glimm–Lax 类 $GL(\epsilon_1)$ 中具有适定性。关键步骤是证明，每个具有属于 $u^0\in W^{s,p}$ loc 的初始数据的函数 $u\in GL(\epsilon_1)$ 都满足代数 L^1 收敛速率（1.8）。事实上，定理 1.1、（1.10）和（1.11）表明，属于 $GL(\epsilon_1)$且满足（1.8）的解，完全由具有 Sobolev 初始数据这一性质刻画。

1.3. **关于连续解的非唯一性**。作为我们方法的另一项应用，我们还给出一个定理，以补充近期关于 2×2 系统的连续解非唯一性的研究。对于一类满足(GL) 且进一步满足所谓“扭曲条件”的系统，Chen、Vasseur 和 Yu 构造了（1.1）的非唯一连续周期解 [18]。该构造给出了具有任意小 L^∞ 范数和低正则性的解，但目前尚不清楚它们是否满足熵不等式（1.3）。了解这一相同现象是否也能出现在满足熵不等式或具有更高正则性的解中，是很有意义的。我们的下一个定理说明了将这些结果推广到具有更高正则性时所面临的障碍。

定理 1.2. 设 $\alpha>\frac{1}{2}$。那么，存在 $\epsilon_1>0$ 使得以下结论成立。对于任意 $T>0$，假设$u\in L^\infty(0,T;\ C^\alpha(\mathbb{R};\ B_{\epsilon_1}(0)))$ 是方程 (1.1) 的一个周期弱解，其初始数据为 $u^0\in C^\alpha(\mathbb{R};\ B_{\epsilon_1}(0))$。那么，$u$ 与 $GL(\epsilon_1)$ 中具有初始数据 u^0 的唯一 *Glimm–Lax* 解重合。

注 1.1。 证明定理 1.2所用的相同技巧也可用于证明关于非周期解的类似定理（见命题 2.4）。我们选择用周期函数来表述定理 1.2 ，以便更清楚地将这一结果与 [18,定理 11]进行比较。

注 1.2。 这里我们指出，具有这一正则性水平的解自动满足熵不等式（1.3），其中熵 η 不一定是凸的（参见命题 2.3）。

定理 1.2 表明，只要在 C^α_{loc}（$\mathbb{R}$； B_{ϵ_1}（0））中对任意 $\alpha>\frac{1}{2}$ 存在一个周期解，它就必然与唯一的 Glimm–Lax 解重合。回顾一下，根据定理 1.1，Glimm–Lax 解是唯一的。因此， [18] 的非唯一性结果无法加强为在这种正则性下也显示出非唯一性。利用相同的技术，我们还可以证明关于周期解的类似定理

$u \in L^\infty(0,\ T;\ W^{s,\ p}{}_{\mathrm{loc}}\ (\mathbb{R};\ B_{\epsilon_1}(0))\ )$。我们能够考虑满足以下条件的对 s，{v16>：空间 $W^{s,\ p}$ 在 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时不嵌入 -C^α。

定理 1.3。固定 $p \in (1,\ \infty)$ 并设

$$s > \begin{cases} \frac{p}{2p-1} & p \geq 2, \\ \frac{2}{p+1} & p < 2. \end{cases} \tag{1.12}$$

那么，存在 $\epsilon_1 > 0$ 使得下述结论成立。设 $u \in L^\infty(0,\ T;\ W^{s,\ p}{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\ B_{\epsilon_1}(0)))$ 是 (1.1) 的弱解，初始数据为 $u^0 \in W^{s,\ p}{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\ B_{\epsilon_1}(0))$。那么，$u$ 是 $GL(\epsilon_1)$中具有初始数据 u^0的唯一 *Glimm–Lax* 解。

在多维情形下，关于等熵欧拉方程解的唯一性与非唯一性，已有若干结果；这里提及其中两项。已知，对于 $\alpha > \frac{1}{2}$，属于 $B^{\alpha,\ p}{}_\infty$且满足适当条件的 p，若其对称速度梯度还满足单侧 Lipschitz 界，则具有弱强唯一性 [25]。关于非唯一性，Giri 和 Kwon 构造了无穷多个三维等熵欧拉系统的弱熵解，这些解属于 C^α，且适用于 $0 < \alpha < \frac{1}{7}$。

1.4. **关于非 BV 扰动的稳定性**。存在一种非常优雅的经典 L^1 小 BV 解稳定性理论，其适用范围远比类别 **(GL)** [10], [13]广泛。在这些结果中，对小 BV 解的扰动仍必须是小 BV 的。关于非 BV 扰动稳定性的 L^2 研究计划由 Vasseur 提出 [34]，作为 Dafermos 和 DiPerna 弱强稳定性原理的扩展 [20], [22]。研究非 BV 扰动十分重要，因为在研究守恒律的渐近极限时，缺乏 BV 界。例如，Bianchini 和 Bressan 的一篇论文证明了小 BV 解在人工黏性的无黏极限下具有稳定性[3]。然而，从纳维–斯托克斯方程到欧拉方程的极限中的稳定性问题仍未解决，原因恰恰在于，对于物理黏性，似乎无法获得关于黏性参数一致的 BV 界。近期，Chen、Kang 和 Vasseur 证明了小 BV 解在从纳维–斯托克斯方程到欧拉方程的物理无黏极限下是稳定的 [16]。他们的结果通过绕开对关于黏性参数的一致 BV 界的需求而实现。我们能够获得定理 1.1，原因恰好相同。$GL(\epsilon_1)$ 中的解在时间趋于零的极限下不具有一致 BV 界。由此，从纳维–斯托克斯方程到欧拉方程的消失黏性极限，与沿 Glimm–Lax 解向后流动之间呈现出惊人的类比。

标量情形下的推论 1.1 有一个类似结果，[1, 命题 4。2]关键依赖于 Kružkov 理论中的 L^1 压缩性；该理论适用于不具备一致时间 BV 估计的解。在推论 1.1的证明中，我们能够用针对非 BV 解的 L^1-压缩性估计取代 L^2。这表明，L^2 理论是一种适用于系统的 Kružkov 型理论，其强度足以给出涉及非 BV 解的稳定性估计（关于这一类比的进一步讨论，请参见第 4 节）。

1.5. L^2-稳定性理论的进展。为证明定理 1.1 和定理 1.2，我们将采用一项近期在 [15] 中提出的定量“弱–BV”稳定性结果；该结果代表了 L^2-稳定性研究领域当前的最先进水平。我们先采用 [15] 式的 L^2-稳定性结果，获得短时间估计，再采用 [14] 中提出的 L^1-稳定性理论处理较晚时段。论证的主要思路见第 2 节。主要障碍在于，[15] 中的定理 1 仅适用于一类特殊的 2×2守恒律。具体而言，[15] 中的假设 1(d) 是一项关键假设；对于满足 (GL) 的完整通量类，即使局部而言，该假设也未必成立。（请注意，这与第 3 节中的假设 1(d) 相同。）满足 (GL) 但不满足此假设的通量示例见附录 A。本工作的主要贡献之一，是将 [15] 中的定理 1 推广至仅需满足条件 (GL) 的通量。关于这一点，我们的主要定理（它在定理 1.1 的证明中起着关键作用）如下：

定理 1.4。假设系统 (1.1) 满足 ***(GL)***。存在 $\epsilon_1, \delta_0 > 0$，使得下述结论成立。固定 $R, T > 0$。考虑满足 $\left\|v^0\right\|_{BV(\mathbb{R})} + \left\|v^0 - d\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \delta_0$ 的初始数据 v^0，并令 $\mathcal{S}_t v^0$ 为标准黎曼半群解。则存在常数 $K = K(d, f) > 0$，使得任何具有初始数据 u^0 的解 $u \in GL(\epsilon_1)$ 都满足稳定性估计，

$$||u(t,\cdot) - \mathcal{S}_t v^0||_{L^1((-R,R))} \leq K\sqrt{R+T}\left\|u^0 - v^0\right\|_{L^2((-R-ct,R+ct))},$$

其中常数 c >0 是信息传播速度（见注 7.2）。此外，通过插值可得

$$\left\|u(t,\cdot)-\mathcal{S}_t v^0\right\|_{L^2((-R,R))} \leq K\sqrt[4]{R+T}\sqrt{\|u^0-v^0\|_{L^2((-R-ct,R+ct))}}.$$

评注 1.3。我们的主要命题——命题3.1——比定理1.4稍具一般性。它与 [15]中的定理 1 相当。主要区别在于，命题 3.1 适用于比 [15]中的定理 1 更广泛的一类系统。使我们能够处理更广泛系统的主要进展，是针对稀疏波扰动发展出的相对熵收缩。

1.6. **开放问题** **等**。我们的工作提出了一些值得未来研究的重要问题。下面列出其中几个 .

开放问题 #1： 若初始数据 u^0不属于任何分数阶 Sobolev 空间，那么具有初始数据 u^0 的 $GL(\epsilon_1)$ 中的解 u 是否唯一?

开放问题 #2： 中的定理 1.1 表明，对于（1.1），在没有导数且不满足熵条件的情况下，连续解并不唯一。另一方面，定理 1.2 表明，对于（1.1），当至少具有半阶正则性时，连续解具有唯一性。对于具有介于两者之间的正则性和熵的连续解，究竟是唯一还是非唯一，仍是一个开放问题。

1.7. 文章概述。本文的结构如下。首先，在第 2 节中，我们假设定理 1.4，并给出定理 1.1、推论 1.1、定理 1.2 和定理 1.3 的证明。在第 3 节中，我们介绍使用 a-收缩法证明定理 1.4 所需的术语和结构。我们陈述命题 3.1，定理 1.4 是该命题的一个简单推论。本文其余部分将致力于证明命题 3.1。在第 4 节中，我们介绍 a-收缩法，并获得激波和稀疏波所需的L^2-估计。关于激波的相对熵估计将引用自[15] ，不再给出证明；而关于稀疏波的相对熵估计则是本文的新结果。在第 5 节中，我们介绍所采用的前沿追踪法（来自 [8], [15]）及其中的一些关键估计。在第 6 节中，我们构造用于衡量 L^2-稳定性的权函数。最后，在第 7 节中，我们证明命题 3.1。

1.8. **记号**。在全文中，我们将遵循以下约定。

- 我们将 g' 记作一个映射 g 的导数，其中该映射可以是向量值的、矩阵值的，或具有标量定义域；当 g 为标量值时，则记作 ∇g 。对于高阶导数，我们使用重复的撇号（例如 g''），或记作 $\nabla^k g$（例如，标量值函数 g 的连续导数记作 $\nabla^k g$ ，而不是 $(\nabla g)'''$）。
- 常数 K 表示一个普适常数，该常数可以在不同的行之间变化。它可以依赖于参数 R 和 T（这些参数决定时空信息锥）、通量 f以及我们进行局部化所围绕的点 d 。

2. 主要思想 以及定理 1.1、推论 1.1、定理 1.2和定理 1.的证明 3

2.1. **正时间下由 Glimm-Lax 解生成的半群**。对于 $\tau>0$，考虑正向不变域

$$\mathcal{D}^{(\tau)}=\{u(s,\cdot)\,|\,s\geq\tau,\ u\in GL(\epsilon_1)\}.$$

回顾一下，已证明对于任意满足 $u^0{}_{(\mathbb{R})}\leq\epsilon_1$ [4], [27]的初始数据，至少存在一个解 $u\in GL(\epsilon_1)$。在 [14], 中，证明了下述标准黎曼半群在 $\mathcal{D}^{(\tau)}$ 上定义良好，并具有以下性质。

命题 2.1 ([14, 包含在定理 1 的证明中。1])。对于任意 $\beta>0$，存在 $\epsilon_1>0$ 使得以下结论成立：

存在一个函数 $\mathcal{S}$： $\mathbb{R}^+\times\mathcal{D}$ $^{(\tau)}\to\mathcal{D}^{(\tau)}$ 满足以下性质。

(1) 给定 $u(s,\cdot)\in\mathcal{D}^{(\tau)}$, $\mathcal{S}_t u(s,\cdot)$ ，其在时间 t 、初始数据为 $u(s,\cdot)$ 时，是前沿追踪近似的唯一极限。

(2) 对任意 $u(s,\cdot)\in\mathcal{D}^{(\tau)}$ 以及任意 $t\geq 0$, $\mathcal{S}_t(u(s,\cdot))=u(s+t,\cdot)$。

(3) 对任意 $\bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{D}^{(\tau)}$，我们都有 *Lipschitz*估计

$$\|\mathcal{S}_t\bar{u} - \mathcal{S}_t\bar{v}\|_{L^1((-R,R))} \le L(\tau)\,\|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^1((-R-ct,R+ct))}, \quad \textit{for} \quad t \ge 0, \tag{2.1}$$

其中 $L(\tau) \le C\tau^{-\beta}$对于某个 $C > 0$，且常数 $c > 0$是信息传播速度（见注*5.2*）。

特别地，（2）表明，对于任意 $\tau > 0$ 和 $u \in GL(\epsilon_1)$，$u(\tau, \cdot)$ 在$D^{(\tau)}$ 中存在唯一延拓，其由前沿追踪近似的极限给出。因此，若发生非唯一性，就必定是在 $t = 0$瞬间发生。

利用命题2.1，再假设一个额外的先验衰减估计，便可推出 Glimm–Lax 解的唯一性。例如，若 u，$v \in GL(\epsilon_1)$ 的初始数据为 u^0，则可以估计

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^1} \le L(\tau)\,\|u(\tau) - v(\tau)\|_{L^1} \le L(\tau)\left(\|u(\tau) - u^0\|_{L^1} + \|v(\tau) - u^0\|_{L^1}\right), \qquad \text{for } t \ge \tau.$$

由此可知，若 $u(\tau) \to u^0$和 $v(\tau) \to v^0$在 L^1中收敛得足够快，足以压过 $L(\tau)$ 的爆发，则可建立唯一性结果。沿着这一思路，Bressan、Marconi 和 Vaidya 证明了以下条件唯一性与稳定性结果。

命题 2.2 ([14, 定理 1。1])。 假设系统 (1.1) 满足 ***(GL)***。固定 $0 < \alpha < 1$ 和M，R，$T > 0$。令 $c > 0$ 为信息传播速度（见注释 *7.2*）。那么，存在 $\epsilon_1 > 0$使得以下结论成立。设 $u \in GL(\epsilon_1)$ 的初始数据为 u^0，且满足额外的快速收敛率

$$\sup_{t\in(0,T)} t^{-\alpha}\left\|u(t,\cdot) - u^0\right\|_{L^1((-R-c(T-t),R+c(T-t)))} \le M. \tag{2.2}$$

那么，u 是 $GL(\epsilon_1)$中具有初始数据 u^0 并满足 (2.2)的唯一解。此外，$GL(\epsilon_1)$ 中满足 (2.2) 的解族也构成一个 *Hölder* 连续半群，即存在 $K > 0$ 使得以下估计成立：

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^1((-R,R))} \le K\left\|u_1^0 - u_2^0\right\|^{\theta}_{L^1((-R-ct,R+ct))} \qquad t \in [0,T],$$

其中 u_1，$u_2 \in GL(\epsilon_1)$ 满足 (2.2)。这里，$\theta < 1$ 可以通过选取足够小的 $\epsilon_1 > 0$，任意接近 *1*。

我们注意到，上述条件（2.2）实际上弱于 [14, 定理 11], 中的假设，但其证明仍然成立。

2.2. **Sobolev数据逼近的短时间弱BV稳定性**。 在定理1.1和定理1.2的证明中，有必要证明具有BV初值的解在短时间内的稳定性估计，其中该初值是 H^s_{loc}（$\mathbb{R}$；B_{ϵ_1}（d））中某个函数的光滑化。本节将阐述这一过程。

首先，我们固定一个满足以下条件的磨光子 $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$:

$$\gamma \ge 0, \quad \operatorname{supp}(\gamma) \subset [-1,1], \quad \int_{\mathbb{R}} \gamma(x)\,\mathrm{d}x = 1, \quad \text{and} \quad \gamma(x) = \gamma(-x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

固定一个 $t_0 \ge 0$。令 $v \in H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; B_{\epsilon_1}(d))$，其中 $s > 0$。我们定义近似函数 $\{v_\delta\}_{\delta>0}$ b y

$$v_\delta := v * \gamma_\delta, \tag{2.4}$$

其中 $\gamma_\delta(x) := \frac{1}{\delta}\gamma(\frac{x}{\delta})$。我们注意到，对于任意区间（$-R$，$R$），存在一个 $K > 0$，使得这些近似函数满足以下界：

$$TV(v_\delta; L) \le K\,\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\,\frac{L}{\delta}, \quad \forall\, L > 0, \tag{2.5}$$

$$\|v - v_\delta\|_{L^2((-R,R))} \le K\,\|v\|_{H^s((-R-\delta,R+\delta))}\,\delta^s. \tag{2.6}$$

我们在引理 C.1中给出证明。

令 δ，$R > 0$ 为固定值。回顾一下，存在一个常数 $\delta_0 > 0$，使得若 $\|u^0\|_{\mathrm{BV}} \le \delta_0$ 且$\|u^0 - d\|_{L^\infty} \le \delta_0$，则从 u^0 出发的前沿追踪近似序列定义良好，且具有唯一极限 [8]（详细的前沿追踪概述见第 5 节）。定义

$$L := \frac{\delta\delta_0}{2K\,\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}. \tag{2.7}$$

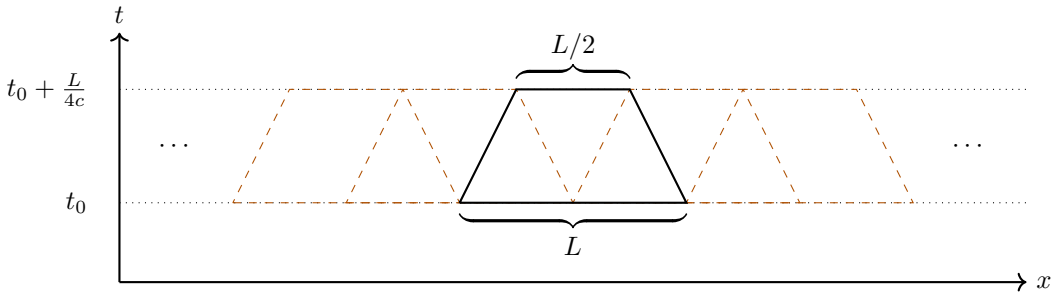


图 1. 通过对每个梯形上的小有界变差前沿追踪近似取极限，可在短时间内定义一个弱熵解。

于是，(2. 5) 意味着 $TV(v_\delta;\ L) \le \delta_0$。我们为 Δ_n 定义一族梯形 $n \in \mathbb{Z}$，其中：

$$\Delta_n := \left\{ (\tau, x) \,\middle|\, \tau \in \left[t_0, t_0 + \frac{L}{4c}\right],\ x \in \left[\frac{L}{2}n + c(\tau - t_0), \frac{L}{2}n + L - c(\tau - t_0)\right] \right\},$$

其中，常数 $c > 0$ 是定理 1.4 中的信息传播速度（见图 1）。根据构造，在每个梯形底边处，v_δ的全变差小于 δ_0，因此可在梯形 Δ_n 内对每个 n定义前沿追踪近似 $\mathcal{S}_t v_\delta$的极限。此外，由定理 1.4，我们有如下估计

$$\|u(t,\cdot) - \mathcal{S}_t v_\delta\|_{L^1((\frac{L}{2}n + c(t-t_0), \frac{L}{2}n + L - c(t-t_0)))} \le K\sqrt{L}\, \|u(t_0,\cdot) - v_\delta\|_{L^2((\frac{L}{2}n, \frac{L}{2}n + L))} \quad \text{for } t \in \left[t_0, t_0 + \frac{L}{4c}\right], \tag{2.8}$$

对任意 $u \in GL(\epsilon_1)$。注意，由于每个前沿追踪近似在梯形 Δ_n 与 Δ_{n+1} 的重叠部分上均有定义（参见注5.2），我们实际上可以在整个时间条带 $\{(t,x) | t \in [t_0, t_0 + \frac{L}{4c}]$上定义 $\mathcal{S}_t v_\delta$。换言之，$\mathcal{S}_t v_\delta$ 是该初值问题的一个弱熵解

$$\begin{cases} v_t + [f(v)]_x = 0 & (t,x) \in \left[t_0, t_0 + \frac{L}{4c}\right] \times \mathbb{R}, \\ v(t_0, x) = v_\delta(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.9}$$

最后，我们可以对2.8中的估计求和，并在 n中应用柯西-施瓦茨不等式，得到

$$\begin{aligned} \|u(t,\cdot) - \mathcal{S}_t v_\delta\|_{L^1((-R + c(t-t_0), R - c(t-t_0)))} &\le K\sqrt{L} \sum_{n=-2R/L}^{2R/L} \|u(t_0,\cdot) - v_\delta\|_{L^2((\frac{L}{2}n, \frac{L}{2}n + L))} \\ &\le 4K\sqrt{L}\sqrt{\frac{R}{L}}\, \|u(t_0) - v_\delta\|_{L^2((-R,R))} \\ &= 4K\sqrt{R}\, \|u(t_0) - v_\delta\|_{L^2((-R,R))}, \quad \text{for } t \in \left[t_0, t_0 + \frac{L}{4c}\right], \end{aligned}$$

对任意 $R > 0$均成立。我们指出，如有需要，还可以将 L 略微减小，使得 $2R/L$ 为整数。我们用下面的引理总结本节内容。

引理 *2.1*。固定 $R > 0$、$s > 0$ 和 $t_0 \ge 0$。则存在一个常数 $\epsilon_1 > 0$，使得以下结论成立。对于任意 $v \in H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; B_{\epsilon_1}(d))$，令 $\{v_\delta\}_{\delta>0}$ 为通过光滑化（*2.4*）得到的 v 的一列近似函数。则存在一个初值问题（*2.9*）的弱熵解 $\mathcal{S}_t v_\delta$，其中 L 由（*2.7*）定义，该解由前沿追踪近似的极限得到。此外，对于任意 $u \in GL(\epsilon_1)$，我们有估计

$$||u(t,\cdot) - \mathcal{S}_t v_\delta||_{L^1((-R + c(t-t_0), R - c(t-t_0)))} \le K\sqrt{R}\, \|u(t_0,\cdot) - v_\delta\|_{L^2((-R,R))}, \quad \text{for } t \in \left[t_0, t_0 + \frac{L}{4c}\right].$$

现在我们可以开始证明定理 1.1。

2.3. 定理 1.1 的证明。在不失一般性的情况下，我们只处理 $u^0 \in H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 为 W^s 的情形；如有需要，当 s^* 较小时，$^p\mathrm{loc}\,(\mathbb{R})$ 嵌入 $H^{s^*}\,\mathrm{loc}(\mathbb{R})$（见 [35, 推论 2.30]）。固定 $R, T > 0$。将区间$I := [-R - cT, R + cT]$ 记为信息锥的底，其中常数 $c > 0$ 是信息传播速度（见注 7.2）。此外，令 $I_\delta := [-R - cT - \delta, R + cT + \delta]$ 为一个稍大的集合。引入该集合是为了容纳取决于 I 之外的 u 的光滑化 u_δ。令 $u^0 \in H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$，并令 $u_\delta = u^0 * \gamma_\delta$。不失一般性，假设 $s < 1$。令 $u \in GL(\epsilon_1)$ 为 Glimm–Lax 类中具有初始数据 u^0 的任意解。我们的目标是证明 u 验证 (2.2)，并应用命题 2.2。固定 $0 < t < T$，并令 $\delta > 0$ 为待确定的常数。由三角不等式可得

$$\begin{aligned}\left\|u(t,\cdot) - u^0(\cdot)\right\|_{L^1((-R-c(T-t),R+c(T-t)))} \le{}& \|u(t,\cdot) - \mathcal{S}_t u_\delta\|_{L^1((-R-c(T-t),R+c(T-t)))} \\ &+ \|\mathcal{S}_t u_\delta - u_\delta\|_{L^1((-R-c(T-t),R+c(T-t)))} \\ &+ \left\|u_\delta - u^0\right\|_{L^1((-R-c(T-t),R+c(T-t)))}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

根据引理 2.1，我们有

$$\|u(t,\cdot) - \mathcal{S}_t u_\delta\|_{L^1((-R-c(T-t),R+c(T-t)))} \le K||u^0 \tfrac{}{2} u_\delta||_{L^2(I)} \le K\left\|u^0\right\|_{H^s(I_\delta)} \delta^s, \text{ for } t \in \left[0, \frac{L}{4c}\right].$$

取 $\delta = t^{1-\frac{s}{2}}$，可知 $t < \frac{L}{4c}$ 当其满足 $t \le \left(\frac{\delta_0}{8c\|u^0\|_{L^\infty}(\mathbb{R})}\right)^s$ 时，根据 L (2.7) 的定义。也就是说，当 t 充分小时，我们有

$$\|u(t,\cdot) - \mathcal{S}_t u_\delta\|_{L^1(-R-c(T-t),R+c(T-t)))} \le K\left\|u^0 - u_\delta\right\|_{L^2(I)} \le K\left\|u^0\right\|_{H^s(I_\delta)} t^{\frac{s}{2}},$$
$$\text{for } t \in \left[0, \left(\frac{\delta_0}{8c\left\|u^0\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}\right)^{\frac{2}{s}}\right],$$

其中 $\delta^s = t^{s(1-\frac{s}{2})} < t^{\frac{s}{2}}$对足够小的 t可由 $s < 1$推出。接下来，我们估计 (2.10) 右端的第二项和第三项。回顾如下估计：对任意有界变差函数 v 以及任意区间 $(a, b) \subset \mathbb{R}$:

$$\limsup_{\epsilon \to 0+} \frac{\|\mathcal{S}_{t+\epsilon} v - \mathcal{S}_t v\|_{L^1((a,b))}}{\epsilon} \le K\ ||\mathcal{S}_t v||_{BV((a,b))}, \tag{2.11}$$

$$||\mathcal{S}_t v||_{BV((a,b))} \le K\ ||v||_{BV((a-ct,a+ct))}, \tag{2.12}$$

其中 (2.12) 对所有 $t < \frac{L}{4c}$ 均成立。方程 (2.11) 可见 [21, 定理 4.3。1] 而 (2.12) 则基于标准的前沿追踪考量，在每个 Δ_n 上成立。由方程 (2.11) 和 (2.12) 以及 u_δ (2.5) 的全变差，我们得到估计

$$\begin{aligned}\|\mathcal{S}_t u_\delta - u_\delta\|_{L^1((-R-c(T-t),R+c(T-t)))} &\le K\int_0^t \|u_\delta\|_{BV((-R-cT,R+cT))}\,\mathrm{d}s \\ &\le K\left\|u^0\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{2(R+cT)}{\delta} t \le K\left\|u^0\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} t^{\frac{s}{2}},\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由以下选择得到： $\delta = t^{1-\frac{s}{2}}$。这一选择以及（2.6）也立即给出了最后一项的界

$$\left\|u_\delta - u^0\right\|_{L^1((-R-c(T-t),R+c(T-t)))} \le K\left\|u^0\right\|_{H^s(I_\delta)} \delta^s \le K\left\|u^0\right\|_{H^s(I_\delta)} t^{\frac{s}{2}}. \tag{2.13}$$

这足以证明

$$\left\|u(t,\cdot) - u^0(\cdot)\right\|_{L^1((-R-c(T-t),R+c(T-t)))} \le K\left(\left\|u^0\right\|_{H^s(I_\delta)} + \left\|u^0\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right) t^{\frac{s}{2}},$$
$$\text{for } t \in \left[0, \left(\frac{\delta_0}{8c\left\|u^0\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}\right)^{\frac{2}{s}}\right]. \tag{2.14}$$

此外，对于 $t > \left(\frac{\delta_0}{8c\|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}\right)^{\frac{2}{s}}$，我们有

$$\left\|u(t,\cdot) - u^0(\cdot)\right\|_{L^1((-R-c(T-t),R+c(T-t)))} \le C_0\sqrt{\epsilon_1}(2R + 2cT) \le K\left\|u^0\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} t^{\frac{s}{2}}, \tag{2.15}$$

这可由（1.4）推出。这证明了 $u^0 \in \mathcal{D}^\alpha$ 对于 $\alpha = \frac{s}{2}$，且每个解 $u \in GL(\epsilon_1)$ 具有初始数据 u^0 时，都具有代数 L^1 时间反向收敛性（2.2）。特别地，我们可以将命题 M 2.2 中的相关常数选得 大于 界（2.13）和（2.15）中出现的常数。取 ϵ_1 充分小，使得可以应用命题 2.2，定理1.1即得。

注 2.1。 我们指出，前述证明与标量情形中的一个证明类似；该证明表明，初始数据属于 H^s 的解具有如下收敛速率（1.8） [1, 命题 4。2]他们的计算使用了 Kružkov 理论，该理论在 L^1 上为解提供了半群 $t = 0$, 从而控制不等式（2.10）右侧的第一项。在系统层面上，这种方法并不可用，而且即便借助精细估计命题 2.1，目前也不知道如何利用 L^1 理论来界定该项。定理 1.4 给出了一个中间估计；由于它是弱 BV 型估计，因此足以满足需要。

注 2.2。我们还指出，定理 1.1 也可以通过经典方法得到。事实上，将定理 1.1 的证明中使用引理 2.1 的步骤替换为经典的弱解-强解 L^2-稳定性估计（见 [21, 定理 5.2.1]），即可估计项$|u(t,\cdot) - \mathcal{S}_t u_\delta||_{L^1}$。之所以可行，是因为只需在长度为 $\sim \delta$ 的时间尺度上要求一个 L^2 型估计，而解 $\mathcal{S}_t u_\delta$ 在长度为 $\sim \delta$的时间尺度上将是 Lipschitz 连续的。然而，这需要仔细追踪解的爆破时间，而我们通过引理 2.1 得到的、更稳健的估计在爆破后仍然成立。这一点可从定理 1.3 的证明中看出：我们对大于 $\sim \delta$的时间尺度使用引理 2.1。因此，我们在一个长于近似解保持 Lipschitz 连续的时间尺度上使用这一 L^2 型估计。这表明，与经典的弱解-强解理论相比，采用弱 BV 稳定性理论更具灵活性。

˜2.4. **推论 1.1 的证明**。 首先，我们证明包含关系 $\mathcal{D}_\alpha \subset \mathcal{D}_\alpha$ 如下： [14, p. 3]。任取$u^0 \in \tilde{D}_\alpha$。根据定义，存在一个弱解 u，其初始数据为 u^0，满足

$$\sup_{t\in(0,T)} t^{1-\alpha} \|u(t,\cdot)\|_{\mathrm{BV}((a,b))} < \infty,$$

任意 $(a,b) \subset \mathbb{R}$。为证明 L^1 当 $t \downarrow 0$ 时的收敛速率（如定义（1.6）中所述），我们回顾（2.11）。˜利用 2.11 ）并结合 D_α 的全变差衰减对时间进行积分，可得

$$\left\|u(t,\cdot) - u^0\right\|_{L^1((a,b))} \le t^\alpha \sup_{t\in(0,T)} \left(t^{1-\alpha} \|u(t)\|_{\mathrm{BV}((a,b))}\right),$$

从而得到 $u^0 \in \mathcal{D}_\alpha$.

接下来，我们证明对于 $r < \frac{\alpha}{(1+\alpha)}$，有 $\mathcal{D}_\alpha \subset H^r_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$。令 $u^0 \in \mathcal{D}_\alpha$，并令 u 为一个初始数据为 u^0 且满足以下条件的弱熵解

$$\sup_{t\in(0,T)} t^{-\alpha} \left\|u(t,\cdot) - u^0\right\|_{L^1((a,b))} < \infty, \tag{2.16}$$

对于所有的 $(a,b) \subset \mathbb{R}$。对于任意 $h \in \mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}\left\|u^0(\cdot) - u^0(\cdot - h)\right\|_{L^2(I_h)} &\le \left\|u^0(\cdot) - u(t,\cdot)\right\|_{L^2(I_h)} + \|u(t,\cdot) - u(t,\cdot - h)\|_{L^2(I_h)} \\ &\quad + \left\|u(t,\cdot - h) - u^0(\cdot - h)\right\|_{L^2(I_h)} =: J_1 + J_2 + J_3,\end{aligned} \tag{2.17}$$

对于任意 $t > 0$，其中 $I_h := (a,\ b) \cap (a+h,\ b+h)$。我们首先注意到

$$J_1 + J_3 \le K t^{\alpha/2} \sup_{t\in(0,T)} \left[t^{-\alpha} \left\|u^0(\cdot) - u(t,\cdot)\right\|_{L^1((a,b))}\right]^{1/2}, \tag{2.18}$$

其中（2.16）意味着（2.18）中的上述上确界是有限的。接下来，根据Fubini定理，我们有

$$\begin{aligned} J_2 &\le K \|u\|^{1/2}_{L^\infty([0,t]\times\mathbb{R})} \|u(t,\cdot) - u(t,\cdot - h)\|^{1/2}_{L^1(I_h)} \\ &\le K \|u\|^{1/2}_{L^\infty([0,t]\times\mathbb{R})} \left[|h| \|u(t,\cdot)\|_{\mathrm{BV}((a,b))}\right]^{1/2} \\ &\le K \|u\|^{1/2}_{L^\infty([0,t]\times\mathbb{R})} \left[\frac{|h|(b-a)}{t} + \sqrt{\epsilon_1}|h|\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

取 $t = |h|^{1-\frac{\alpha}{1+\alpha}}$ 在（2.18）和（2.19）中，并将这些界代入（2.17），最终得到

$$\left\|u^0(\cdot) - u^0(\cdot - h)\right\|_{L^2(I_h)} \le K|h|^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}},$$

其中 K 取决于上确界（2.16）以及区间的长度（a, b）。为完成证明，我们利用上述界证明 H^r 半范数 u^0 有限，

$$\begin{aligned}|u^0|^2_{H^r((a,b))} &= \int_a^b \int_{x-b}^{x-a} \frac{|u^0(x)-u^0(x-h)|^2}{|h|^{1+2r}}\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-(b-a)}^{b-a} \frac{\left\|u^0(\cdot)-u^0(\cdot-h)\right\|^2_{L^2((a,b)\cap(a+h,b+h))}}{|h|^{1+2r}}\,\mathrm{d}h \\ &\le K\int_0^{b-a} \frac{|h|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{|h|^{1+2r}}\,\mathrm{d}h < \infty,\end{aligned}$$

给定 $r < \frac{\alpha}{2(1+\alpha)}$。

为考察 $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; B_{\epsilon_1}(d)) \subset \mathcal{D}_\omega$，对于 $\omega \le \frac{s}{2}$，注意到若 ϵ_1 足够小，则根据 Glimm–Lax 的经典结果，任意数据 $u^0 \in H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; B_{\epsilon_1}(d))$ 都存在一个解 $u \in GL(\epsilon_1)$。该解 u 满足

$$\sup_{t\in(0,T)} t^{-s/2}\left\|u(t,\cdot)-u^0\right\|_{L^1((a,b))} < \infty,$$

对所有 $(a,b) \subset \mathbb{R}$，这可由定理 1.1 的证明得出，其中 ϵ_1 足够小。此外，由于解 u 由 Glimm–Lax 构造给出，因此满足（1.5），从而得到 $u^0 \in \mathcal{D}_\omega$。

2.5. **定理 1.2 的证明**。现在，我们证明定理1.2。定理 1.2 可直接由命题 2.3 和命题 2.4 得出。首先，我们给出一个众所周知的判据，用以确定方程（1.1）的周期解是否还满足熵不等式（1.3）。在下面的定理中，我们将平坦一维环面记作 $\mathbb{T}^1$。

命题 2.3。存在一个 $\epsilon_1 > 0$，使得下述结论成立。固定 $T > 0$ 以及任意凸熵$\eta \in C^2(B_{\epsilon_1}(0))$。若 $u \in L^3(0,T; B^{\alpha}_{3,\infty}(\mathbb{T}^1; B_{\epsilon_1}(0)))$ 是方程的一个解

$$u_t + [f(u)]_x = 0 \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^1, \tag{2.20}$$

则该解局部满足熵守恒，

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u) = 0 \quad in \quad \mathcal{D}'([0,T]\times\mathbb{T}^1). \tag{2.21}$$

上述命题广为人知，其结论实质上可由 Constantin、E、Titi[19] 中的论述推出。我们指出，非常一般的守恒律系统（即使在多维情形下）的熵守恒已在 [2], [29] 中得到研究。为方便读者，我们在第 1 维系统（2.20）的 B 节中给出该命题的证明。

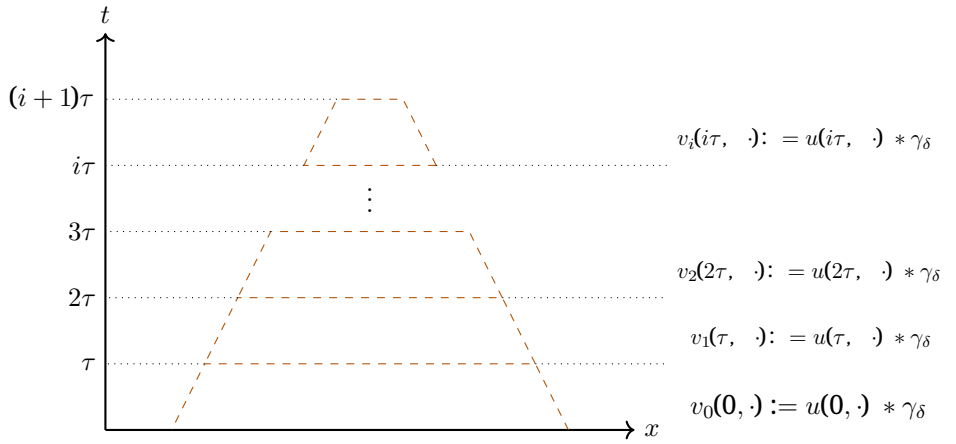
下一个命题比定理 1.2 更为一般，它证明了非周期解的唯一性。

命题 2.4。设 $\alpha > \frac{1}{2}$。那么，存在 $\epsilon_1 > 0$，使得下述结论成立。对于任意 $T > 0$，假设 $u \in L^\infty(0,T; C^\alpha_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; B_{\epsilon_1}(0)))$ 是 (1.1) 的一个弱解，并且对于至少一个严格凸熵 $\eta \in C^3(B_{\epsilon_1(0)}; \mathbb{R})$ 满足 (1.3)，其初始数据为 $u^0 \in C^\alpha_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; B_{\epsilon_1}(0))$。那么，$u$ 与 $GL(\epsilon_1)$ 中初始数据为 u^0 的唯一解一致。

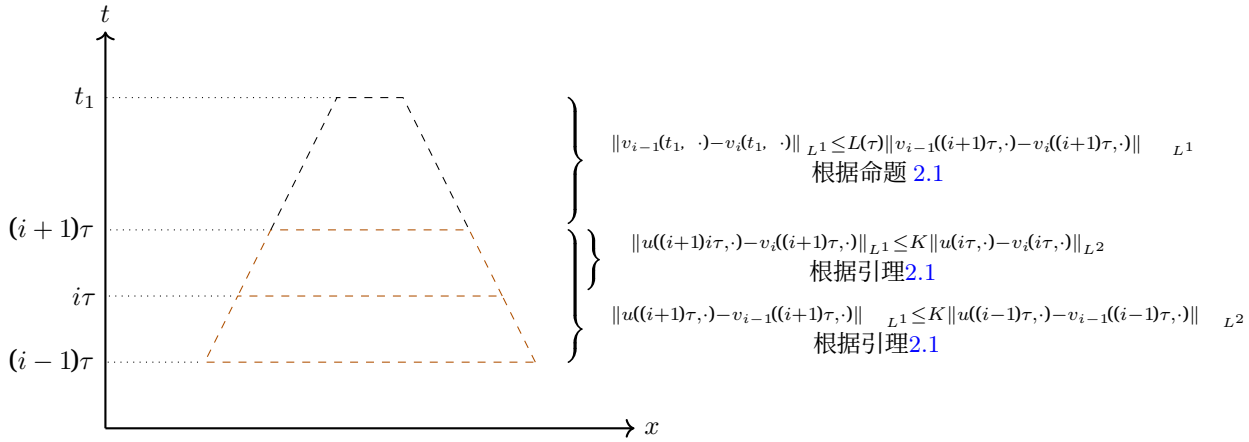
命题 *2.4* 的证明。令 $u \in L^\infty(0,T;\ C^\alpha(\mathbb{R};\ B_{\epsilon_1}(0)))$ 验证关于严格凸1.3的式子
熵 η。主要思路是在一系列时间点上对 u 进行采样，这些时间点之间均匀间隔一个时间步长 $\tau > 0$。

在每个时间步，我们都会构造一个新的近似解 v_i，其初始数据逼近 u 在采样时刻的值。随后，我们利用命题3.1 证明引理 2.1[1] 的一个小幅修改版本，由此可推得，在近似之后的一小段时间内，v_i 与 u 彼此接近。过了这段短暂时间后，我们不再利用命题 v_i 与 u 进行比较，而是改用命题 3.1，并利用命题 2.1给出的极精细估计来比较各个采样值。由此可以推得，任何具有一定正则性的解，都必须与由相同初始数据产生的 Glimm–Lax 解重合；根据定理 1.1，该解是唯一的。

[1]我们指出，命题 3.1 只是定理 1.4 的一个更一般的版本。命题 3.1 只要求解具有足够的正则性，从而能够在 Lipschitz 路径 $h(t)$ (参见定义 3.1）。在此情形下，由于所考虑的所有解都是连续的，因此能够保证这种正则性。因此，每当使用定理 2.1 时，通过应用命题 C^α 在空间中为弱解 3.1 均可得出引理 1.4 成立。



(a) 近似函数 v_i 的定义。



(b) 在终止时刻 t_1 估计 $\|v_{i-1} - v_i\|_{L^1}$。

图 2。在图 2a 中，我们用梯形覆盖信息锥。在每个梯形的底边上，我们定义近似函数 v_i，其初始数据近似于 $u(i\tau, \cdot)$，并且也是系统 (1.1) 的一个解。图 2b 展示了我们估计范数$\|v_{i-1}(t_1, \cdot) - v_i(t_1, \cdot)\|_{L^1}$的策略。对于短时间（长度为 τ 或 2τ），我们使用引理 2.1 来估计 $\|u - v_i\|_{L^1}$ 和 $\|u - v_{i-1}\|_{L^1}$。从时刻 $(i+1)\tau$ 到 t_1，我们应用命题 2.1 中的 L^1-Lipschitz 界。与简单地反复应用引理 2.1 相比，这样得到的估计好得多。

固定一个区间 $(-R, R) \subset \mathbb{R}$。为采样 u，我们先固定一个满足条件的磨光子 $\gamma \in C_c^\infty(\mathbb{R})$，使其满足（2.3）。对于$\delta > 0$，我们记 $\gamma_\delta(x)$为：$= \frac{1}{\delta}\gamma(\frac{x}{\delta})$。注意，若 $v \in C^\alpha_{\text{loc}}(\mathbb{R}; B_{\epsilon_1}(d))$，则其磨光满足以下估计

$$\|v * \gamma_\delta\|_{\text{BV}((-a,b))} \leq \|v\|_{C^\alpha((-R-\delta,R+\delta))} \frac{b-a}{\delta^{1-\alpha}}, \quad \forall\ (a,b) \subset (-R,R), \tag{2.22}$$

$$\|v - v * \gamma_\delta\|_{L^2((-R,R))} \leq 2R\,\|v\|_{C^\alpha((-R-\delta,R+\delta))}\,\delta^\alpha, \tag{2.23}$$

（参见引理 C.1 的 $p = \infty$ 情形）。因此，根据 Glimm 和 Lax 的构造 [27] 及定理 1.1，若 ϵ_1 足够小，则存在一个以 $u(0, \cdot)$ 为初始数据的唯一 Glimm–Lax 解 $u_{GL} \in GL(\epsilon_1)$。为证明 u 与 u_{GL} 重合，我们考虑以 $u(0, \cdot) * \gamma_\delta$ 为初始数据的方程 (1.1) 的唯一解 v_0，其中 $\delta > 0$。任取 $t_1 \in (0, T]$。于是由三角不等式可得

$$\begin{aligned}\|u(t_1, \cdot) - u_{GL}(t_1, \cdot)\|_{L^1((-R+ct_1, R-ct_1))} \leq\ & \|u(t_1, \cdot) - v_0(t_1, \cdot)\|_{L^1((-R+ct_1, R-ct_1))} \\ & + \|u_{GL}(t_1, \cdot) - v_0(t_1, \cdot)\|_{L^1((-R+ct_1, R-ct_1))}.\end{aligned} \tag{2.24}$$

我们将通过对2.24）右侧的两项分别进行估计来继续证明；当 $\delta \downarrow 0$ 时，若 $\alpha > 1/2$ 和 ϵ_1 足够小，这些估计量将趋于零。

我们从包含 u 的项开始。首先，我们固定一个 $\tau > 0$，稍后再确定。对每个 $i = 0, \dots,$ n其中 n 是满足 $n\tau < t_1$ 的最大整数，我们将 v_i 定义为初值问题的唯一 Glimm–Lax 解（见图 2a）

$$\begin{cases} (v_i)_t + [f(v_i)]_x = 0 & (t,x) \in [i\tau, \infty) \times \mathbb{R}, \\ v_i(i\tau, x) = [u(i\tau, \cdot) * \gamma_\delta](x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

注意，根据引理 2.1，$v_i(t, \cdot)$ 与 $\mathcal{S}_{t-i\tau}[u(i\tau, \cdot) * \gamma_\delta]$ 重合。因此，我们可以对引理 2.1 作两项关键修改后加以应用。首先，将引理 2.1 中的 $u \in GL(\epsilon_1)$ 替换为 $u \in L^\infty(0,T; C^\alpha(\mathbb{R}; B_{\epsilon_1}(0)))$（见第 11 页脚注 1）。其次，在引理 2.1 的证明中使用估计 (2.22) 而非 (2.5)，这样便可将梯形底边的长度设为

$$L = \frac{\delta^{1-\alpha}\delta_0}{\|u\|_{L^\infty(0,T;C^\alpha((-R-\delta,R+\delta)))}}.$$

这使得估计式（2.8）可以在一个长于 $\sim \delta$ 的时间区间上成立，这对接下来的估计至关重要。由此得到界

$$\|u(t,\cdot) - v_i(t,\cdot)\|_{L^1((-R+ct,R-ct))} \le K \|u(i\tau,\cdot) - v_i(i\tau,\cdot)\|_{L^2((-R+ci\tau,R-ci\tau))} \quad \text{for } t \in \left[i\tau, i\tau + \frac{\delta^{1-\alpha}\delta_0}{8c\|u\|_{L^\infty(0,T;C^\alpha((-R-\delta,R+\delta)))}} \right]. \tag{2.25}$$

我们希望在每个时刻 $r \in [0, t_1]$，都能将野解 u 与至少一个近似解 v_i 进行比较。这可以通过选择如下的时间步长来实现：

$$\tau = \frac{\delta^{1-\alpha}\delta_0}{16\Gamma c} = K \frac{\delta^{1-\alpha}}{\|u\|_{L^\infty(0,T;C^\alpha((-R-\delta,R+\delta)))}}. \tag{2.26}$$

我们注意到，这还给出了所取样本数量的一个上界：

$$n \le \frac{t_1}{\tau} \le K \|u\|_{L^\infty(0,T;C^\alpha((-R-\delta,R+\delta)))} \delta^{\alpha-1}, \tag{2.27}$$

对于某个 $K > 0$。

接下来注意，（2.24）中的第一项可利用三角不等式展开，得到

$$\begin{aligned} \|u(t_1,\cdot) - v_0(t_1,\cdot)\|_{L^1((-R+ct_1,R-ct_1))} \le{}& \|u(t_1,\cdot) - v_n(t_1,\cdot)\|_{L^1((-R+ct_1,R-ct_1))} \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \|v_i(t_1,\cdot) - v_{i-1}(t_1,\cdot)\|_{L^1((-R+ct_1,R-ct_1))}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

利用（2.25），可以控制（2.28）的第一项，得到

$$\begin{aligned} \|u(t_1,\cdot) - v_n(t_1,\cdot)\|_{L^1((-R+ct_1,R-ct_1))} &\le K \|u(n\tau,\cdot) - v_n(n\tau,\cdot)\|_{L^2((-R+cn\tau,R-cn\tau))} \\ &\le K \|u(n\tau,\cdot)\|_{C^\alpha((-R-\delta,R+\delta))} \delta^\alpha, \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由 v_i 的定义及（2.23）得出。对于求和，我们注意到在时刻（$i+1$）τ有 v_i（（$i+1$）τ，·）v_{i-1}（（$i+1$）τ，·）$\in D^{(\tau)}$。因此可以应用命题2.1，从而得到

$$\|v_i(t_1,\cdot) - v_{i-1}(t_1,\cdot)\|_{L^1((-R+ct_1,R-ct_1))} \le L(\tau) \|v_i((i+1)\tau,\cdot) - v_{i-1}((i+1)\tau,\cdot)\|_{L^1((-R+c(i+1)\tau,R-c(i+1)\tau))}.$$

回到它们定义时的时刻，我们只需使用三角不等式、界 (2.25) 和 (2.23)，即可得到（见图 2b）

$$\begin{aligned} &\|v_i((i+1)\tau,\cdot) - v_{i-1}((i+1)\tau,\cdot)\|_{L^1((-R+c(i+1)\tau,R-c(i+1)\tau))} \\ &\quad\le \|v_i((i+1)\tau,\cdot) - u((i+1)\tau,\cdot)\|_{L^1((-R+c(i+1)\tau,R-c(i+1)\tau))} \\ &\qquad + \|v_{i-1}((i+1)\tau,\cdot) - u((i+1)\tau,\cdot)\|_{L^1((-R+c(i+1)\tau,R-c(i+1)\tau))} \\ &\quad\le K \|v_i(i\tau,\cdot) - u(i\tau,\cdot)\|_{L^2((-R+ci\tau,R-ci\tau))} \\ &\qquad + K \|v_{i-1}((i-1)\tau,\cdot) - u((i-1)\tau,\cdot)\|_{L^2((-R+c(i-1)\tau,R-c(i-1)\tau))} \end{aligned}$$

$$\leq K\left(\|u(i\tau,\cdot)\|_{C^\alpha((-R-\delta,R+\delta))}+\|u((i-1)\tau,\cdot)\|_{C^\alpha((-R-\delta,R+\delta))}\right)\delta^\alpha. \quad (2.29)$$

代入 将这些考量代入 (2.28)，并回想界 (2.23)、(2.27)，我们得到

$$\begin{aligned}\|u(t_1,\cdot)-v_0(t_1,\cdot)\|_{L^1((-R+ct_1,R-ct_1))}&\\ \leq CK\|u(n\tau,\cdot)\|_{C^\alpha((-R-\delta,R+\delta))}\delta^\alpha+\sum_{i=1}^{n}2K\|u(i\tau,\cdot)\|_{C^\alpha((-R-\delta,R+\delta))}L(\tau)\delta^\alpha&\\ \leq K\delta^\alpha\|u\|_{L^\infty(0,T;C^\alpha((-R-\delta,R+\delta)))}(1+L(\tau)n).& \quad (2.30)\end{aligned}$$

最后，我们回顾一下，根据命题 2.1 对于 $\beta>0$ 待定，存在 $\epsilon_1>0$ 使得 L^1Lipschitz 常数满足 $L(\tau)\leq C\tau^{-\beta}$。将其连同（2.26）和（2.27）代入（2.30），我们得到

$$\begin{aligned}\|u(t_1,\cdot)-v_0(t_1,\cdot)\|_{L^1((-R+ct_1,R-ct_1))}&\\ \leq K\left(\|u\|_{L^\infty(0,T;C^\alpha((-R-\delta,R+\delta)))}\delta^\alpha+\|u\|^{2+\beta}_{L^\infty(0,T;C^\alpha((-R-\delta,R+\delta)))}\delta^{\beta(\alpha-1)}\delta^{2\alpha-1}\right).& \quad (2.31)\end{aligned}$$

对于（2.24）右侧的第二项，我们注意到 $v_0(\tau,\cdot)\ u_{GL}(\tau,\cdot)\in\mathcal{D}^{(\tau)}$，从而得到

$$\|u_{GL}(t_1,\cdot)-v_0(t_1,\cdot)\|_{L^1((-R+ct_1,R-ct_1))}\leq L(\tau)\|u_{GL}(\tau,\cdot)-v_0(\tau,\cdot)\|_{L^1((-R+c\tau,R-c\tau))}.$$

然后利用（2.25）和（2.23）可得

$$\|u_{GL}(t_1,\cdot)-v_0(t_1,\cdot)\|_{L^1((-R,R))}\leq L(\tau)K\|u\|_{L^\infty(0,T;C^\alpha((-R-\delta,R+\delta)))}\delta^\alpha. \quad (2.32)$$

将（2.31）和（2.32）代入（2.24），我们推得

$$\begin{aligned}\|u(t_1,\cdot)-u_{GL}(t_1,\cdot)\|_{L^1((-R+ct_1,R-ct_1))}\leq K\Big(&\|u\|_{L^\infty(0,T;C^\alpha((-R-\delta,R+\delta)))}\delta^\alpha\\ &+\|u\|^{1+\beta}_{L^\infty(0,T;C^\alpha((-R-\delta,R+\delta)))}\delta^{\alpha-\beta(1-\alpha)}\\ &+\|u\|^{2+\beta}_{L^\infty(0,T;C^\alpha((-R-\delta,R+\delta)))}\delta^{2\alpha-1-\beta(1-\alpha)}\Big),\end{aligned} \quad (2.33)$$

对任意 $\delta>0$。现在我们选取常数 $\beta>0$，使其满足

$$\beta(1-\alpha)<2\alpha-1,$$

其存在是因为 $1>\alpha>1/2$。现在，令 $\delta\downarrow 0$，我们得到 (2.33) 右侧收敛于零，从而证明这些解相等。□

最后，定理 1.2 可由命题 2.3 和命题 2.4轻易得出。为方便起见，我们在此给出证明。

定理 1.2 的证明。设 $u\in L^\infty(0,T;C^\alpha_{\mathrm{loc}}(\mathbb{T}^1;B_{\epsilon_1}(0)))$ 是方程 (1.1) 的一个周期弱解。由命题 2.3，u 对任意满足 (1.2) 的 C^2 熵均验证 (1.3)。我们注意到，如有必要，将 ϵ_1 取得更小，则存在一个 C^3 严格凸熵 $\eta_0\in C^3(B_{\epsilon_1}(0))$（见引理 3.1）。因此，由命题 2.4，$u$ 与具有初始数据 $u^0\in C^\alpha_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 的唯一 Glimm-Lax 解相同。□

2.6. **定理 1.3 的证明。** 现在，我们证明定理 1.3。注意，定理 1.3 的结论包含一些空间 $W^{s,\,p}$ 对于任意 $\alpha>1/2$都不能嵌入 C^α。证明过程几乎与上面的证明完全相同，因此从略。唯一的区别是，我们使用推论2.1 代替命题 2.3 和命题 2.5 代替命题 2.4。下面我们将只关注证明推论2.1和命题 2.5所需的修改。

首先，注意到

推论 2.1。 存在一个 $\epsilon_1>0$ 使得以下结论成立。固定 $p>1$ 和 s 满足 (1.12) 以及凸熵 $\eta\in C^2(B_{\epsilon_1}(0))$。若 $u\in L^\infty(0,T;\ W^{s,p}(\mathbb{T}^1;\ B_{\epsilon_1}(0)))$ 是系统 (2.20) 的一个解，则该解局部守恒熵，即 (2.21)成立。

证明。 根据命题 2.3，只需证明对于某个$\alpha>1/3$，$W^{s,p}(\mathbb{T}^1;\ B_{\epsilon_1}(d))$ 嵌入到 $B^\alpha_{3,\infty}(\mathbb{T}^1;\ B_{\epsilon_1}(d))$ 中。为此，首先注意到索伯列夫嵌入

$$W^{s,p}(\mathbb{T}^1;B_{\epsilon_1}(d))\hookrightarrow\begin{cases}W^{s+\frac{1}{p}-\frac{1}{3},3}(\mathbb{T}^1;B_{\epsilon_1}(d)) & p\geq 3\\ W^{\frac{sp}{3},3}(\mathbb{T}^1;B_{\epsilon_1}(d)) & p<3.\end{cases} \quad (2.34)$$

事实上，当 $p \geq 3$ 时，我们只需注意到 $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$ 具有有限测度。这给出了 $L^p(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1) \subset L^3(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1)$ 包含关系，

$$
\begin{aligned}
|u|_{W^{s+\frac{1}{p}-\frac{1}{3},3}(\mathbb{T}^1)} &= \left(\iint_{\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1} \frac{|u(x)-u(y)|^3}{|x-y|^{1+3s+\frac{3}{p}-1}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \right)^{1/3} \\
&\leq K \left(\iint_{\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{1+sp}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} = K|u|_{W^{s,p}(\mathbb{T}^1)}.
\end{aligned}
$$

当 $p < 3$ 时，我们只需利用这样一个事实：$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^1)}$ 有界，

$$
\begin{aligned}
|u|_{W^{\frac{ps}{3},3}(\mathbb{T}^1)} &= \left(\iint_{\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1} \frac{|u(x)-u(y)|^3}{|x-y|^{1+ps}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \right)^{1/3} \\
&\leq K \|u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^1)}^{1-\frac{p}{3}} \left(\iint_{\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \right)^{1/3} \\
&= K \|u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^1)}^{1-\frac{p}{3}} |u|_{W^{s,p}(\mathbb{T}^1)}^{\frac{p}{3}}.
\end{aligned}
$$

根据这一嵌入，我们分为以下几种情况：

情形 1，$p \in (1,2)$：在这种情况下，$s > \frac{2}{p+1}$，因此由 (2.34) 得到 $W^{s,p}(\mathbb{T}^1) \hookrightarrow W^{\alpha,3}(\mathbb{T}^1)$，其中 $\alpha = \frac{2p}{p+1}$。于是可以验证，对所有 $p \in (1,2)$，$\alpha > 1/3$。情形 2，$p \in [2,3)$：在此范围内，$s > \frac{p}{2p-1}$，因此由 (2.34) 得到 $W^{s,p}(\mathbb{T}^1) \hookrightarrow W^{\alpha,3}(\mathbb{T}^1)$，其中 $\alpha = \frac{p^2}{2p-1}$。同样容易验证，对所有 $p \in [2,3)$，$\alpha > 1/3$。情形 3，$p \in [3,6)$：这里注意到 $s > \frac{p}{2p-1}$，因此由 (2.34) 得到 $W^{s,p}(\mathbb{T}^1) \hookrightarrow W^{\alpha,3}(\mathbb{T}^1)$，其中 $\alpha = \frac{p}{2p-1} + \frac{1}{p} - \frac{1}{3}$。可以验证，在此情形下，$\alpha > \frac{1}{3}$ 当且仅当 $p \in (4-\sqrt{13}, 4+\sqrt{13})$，而后者包含此情形。

情形 4，$p \in [6,\infty)$： 在此情形下，我们注意到 $s > \frac{p}{2p-1} > \frac{1}{2}$ 因此 $sp > \frac{5}{2}$，从而可以应用 Morrey嵌入，

$$
W^{s,p}(\mathbb{T}^1) \hookrightarrow C^{s-\frac{1}{p}}(\mathbb{T}^1).
$$

这给出 $W^{s,p}(\mathbb{T}^1) \hookrightarrow C^\alpha(\mathbb{T}^1)$，其中 $\alpha = s - \frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$。因此，在所有情形下 $W^{s,p}(\mathbb{T}^1) \hookrightarrow W^{\alpha,3}(\mathbb{T}^1)$ 对某个 $\alpha > \frac{1}{3}$ 成立。回顾众所周知的嵌入 $W^{\alpha,3}(\mathbb{T}^1) = B^\alpha_{3,3}(\mathbb{T}^1) \hookrightarrow B^\alpha_{3,\infty}(\mathbb{T}^1)$，由命题 2.3可得所需结果。□

另请注意，根据推论 2.1 的证明，s，p 在定理 1.3 中提及的总能给出嵌入 $W^{s,p} \hookrightarrow C^\alpha$，对于合适的 $\alpha > 0$。特别地，u 所考虑的具有迹，并可用作命题 3.1 中的弱解（因此也可用作引理 2.1中的弱解）。

下一个命题是索博列夫框架下命题 2.4 的对应版本。要得到这一结果，可以使用引理 C.1 中关于 $1 < p < \infty$ 的估计，并对引理 2.1作适当修改，以考虑磨光数据的全变差界 u_δ 不再是区间长度参数 L的线性函数这一情况。

命题 *2.5*。设 s, p 与定理 *1.3* 中的条件相同。那么，存在 $\epsilon_1 > 0$ 使得以下结论成立。对于任意 $T > 0$，设 $u \in L^\infty(0,T; W^{s,p}\,\mathrm{loc}\,(\mathbb{R}; B_{\epsilon_1}(0)))$ 是方程 *(1.1)* 的一个弱解，并且对至少一个具有初始数据 $u^0 \in W^{s,p}\,\mathrm{loc}\,(\mathbb{R}; B_{\epsilon_1}(0))$ 的严格凸熵 $\eta \in C^3(B_{\epsilon_1}(0))$ 满足 *(1.3)*。那么，u 与 $GL(\epsilon_1)$ 中具有初始数据 u^0 的唯一解重合。

证明。 固定一个 $p \in (1,\infty)$ 并且不失一般性地，取 $s < 1$。我们首先将近似函数固定为光滑化 $u_\delta = u * \gamma_\delta$，其中 γ_δ 满足（2.3）。在这种情况下，引理 2.1 的一个修改版本仍然成立，但对于区间 $(a,b) \subset (-R,R)$，由于引理 C.1 中依赖于 p的全变差界，需要采用更大的基准长度 $L = b - a$，

$$
\|u_\delta\|_{\mathrm{BV}((a,b))} \leq K \|u\|_{W^{s,p}((-R-\delta,R+\delta))} \frac{|b-a|^{1/q}}{\delta^{1-s}}, \quad \forall\ (a,b) \subset (-R,R).
$$

具体来说，回顾引理2.1 的证明中，我们选取了 L使其满足

$$
\|u_\delta\|_{\mathrm{BV}((a,b))} < \delta_0 \quad \forall (a,b) \subset (-R,R) \text{ with } b-a < L.
$$

根据引理C.2的全变差估计（C.1），我们可以对任意

$$L < K \|u\|^{-q}_{L^\infty(0,T;W^{s,p}((-R-\delta,R+\delta)))} \delta_0^q \delta^{q(1-s)},$$

其中 q 是 p的 Hölder 共轭指数。注意，主要区别在于，全变差估计不再关于 L呈线性。基于同样的考量，我们将（2.26）和（2.27）修改为

$$\tau = \frac{L}{16c} = K \frac{\delta_0^q \delta^{q(1-s)}}{16c \|u\|^q_{L^\infty(0,T;W^{s,p}((-R-\delta,R+\delta)))}} \quad \text{and} \quad n \leq \frac{t_1}{\tau} \leq K \|u\|^q_{L^\infty(0,T;W^{s,p}((-R-\delta,R+\delta)))} \delta^{q(s-1)}. \tag{2.35}$$

现在，与定理 1.2的证明完全相同，我们可以得到如下界

$$\begin{aligned} \|u(t_1) - v_0(t_1)\|_{L^1} &\leq \|u(t_1) - v_n(t_1)\|_{L^1} + \sum_{i=1}^{n} \|v_{i-1}(t_1) - v_i(t_1)\|_{L^1} \\ &\leq K \sup_{0\leq i\leq n} \|u(\tau i) - u(\tau i) * \gamma_\delta\|_{L^2} (1 + L(\tau)n). \end{aligned} \tag{2.36}$$

现在，回顾（C.3）、（2.35）、命题 2.1和引理 2.1，我们发现，对任意 $\beta > 0$，存在 $\epsilon_1 > 0$，使得相应的界为

$$\sup_{0\leq i\leq n} \|u(\tau i) - u(\tau i) * \gamma_\delta\|_{L^2} (1 + L(\tau)n) \leq K \|u\|^{\min(1,p/2)+q+\beta q}_{L^\infty(0,T;W^{s,p}((-R-\delta,R+\delta)))} \delta^{\min(s,sp/2)+q(s-1)+\beta q(s-1)}.$$

首先，考虑 $p \geq 2$ 的情形。然后，当 s 满足 $s > \frac{q}{q+1}$时，存在一个 $\beta > 0$ 使得

$$\beta q(1-s) < (q+1)s - q.$$

在这种情况下，

$$\|u(t_1) - v_0(t_1)\|_{L^1} \leq K \|u\|_{L^\infty(0,T;W^{s,p}((-R-\delta,R+\delta)))} \delta^s L(\tau)n \to 0$$

如 $\delta \downarrow 0$。最后，回顾 q 是 p 的 Hölder 共轭指数，我们看到关于 s 的条件为

$$s > \frac{q}{q+1} = \frac{p}{2p-1}.$$

对于 $p < 2$，该要求变为 $s > q/(q + p/2)$，在这种情况下，存在 $\beta > 0$ 使得

$$\beta q(1-s) < (q + p/2)s - q.$$

这给出

$$\|u(t_1) - v_0(t_1)\|_{L^1} \leq K \|u\|^{p/2}_{L^\infty(0,T;W^{s,p}((-R-\delta,R+\delta)))} \delta^{sp/2} L(\tau)n \to 0$$

如 $\delta \downarrow 0$。关于 s 的这一条件恰好是

$$s > \frac{q}{q + \frac{p}{2}} = \frac{2}{p+1}.$$

最后，我们注意到，证明

$$\|u_{GL}(t_1) - v_0(t_1)\|_{L^1} \to 0,$$

与定理 1.2的证明中的论证完全相同。这就证明了命题 2.5 （因而也证明了定理1.3）。□

为了完成这一研究计划，只需证明定理 1.4。本文余下部分将致力于此。实际上，我们将证明命题 3.1，由此定理 1.4 便可作为一个简单的推论得出。

3. Structure of the system and the main proposition

我们首先向读者介绍 [15] 中所用的框架。回顾一下，我们考虑一个状态空间 $\mathcal{G}_0$，它可能无界，且其内部为 $\mathcal{G}$。取一个有界集合 $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{G}_0$，并将其内部记为 $\mathcal{V}$。于是，我们得到 [15], [17], [28] 中所用的以下假设。

假设 1. 系统 (1.1) 若满足以下条件，则相对于 $\mathcal{V}_0$ 验证假设 1。
(a) 对任意 $u \in \mathcal{V}$，矩阵 $f'(u)$ 均可对角化，其特征值为 $\lambda_1(u) < \lambda_2(u)$。我们将与 $i = 1,2$ 对应的特征值 $\lambda_i(u)$ 的一个单位特征向量记为 $r_i(u)$。(b) 对任意 $u \in \mathcal{V}$，我们有 $\nabla\lambda_i(u) \cdot r_i(u) > 0$，其中 $i = 1,2$。

(c) 存在一个严格凸函数 $\eta \in C(\mathcal{V}_0) \cap C^3(\mathcal{V})$ 和一个函数 $q \in C(\mathcal{V}_0) \cap C^3(\mathcal{V})$ 满足

$$\nabla q = \nabla \eta f' \quad \text{on} \quad \mathcal{V}.$$

(d) 对任意状态 $b \in \mathcal{V}$，以及对应于 $\lambda_i(b)$ $i = 1, 2$ 的 $f'(b)$ 的任意左特征向量 ℓ_i，函数$u \mapsto \ell_i \cdot f(u)$ 在 $\mathcal{V}$ 上或者是凸函数，或者是凹函数。

(e) 存在 $L > 0$，使得对于任意 $u \in \mathcal{V}$ 和 $i = 1,2$，$|\lambda_i(u)| \leq L$。

(f) 对于 $u_L \in \mathcal{V}$，我们将经过 u_L 的 1-激波曲线（定义域为 $s \in [0, s_{u_L})$ 记为 $s \mapsto S^1_{u_L}(s)$。s_{u_L} 的定义见引理 D.1（注意，可能有 $s_{u_L} = +\infty$）。我们选择参数化方式，使得 $s = |u_L - S^1_{u_L}(s)|$。此外，我们定义 $\sigma^1_{u_L}(s)$ 为与状态对 (u_L, u_R) 相关联的 Rankine-Hugoniot 速度。因此，$(u_L, S^1_{u_L}(s)\ \sigma^1_{u_L}(s))$ 是左侧状态为 u_L、强度为 s 的 1-激波。类似地，我们将 2-激波曲线记为 $s \mapsto S^2_{u_R}(s)$，并将 Rankine-Hugoniot 速度记为 $\sigma^2_{u_R}$，使得 $(S^2_{u_R}(s)\ u_R, \sigma^2_{u_R}(s))$ 是右侧状态为 u_R、强度为 s 的 2-激波。我们假设，对于每个 $u_L \in \mathcal{V}$ 和 $u_R \in \mathcal{V}$，这些曲线均在 $\mathcal{V}$ 上全局定义。

(g) 若 (u_L, u_R) 是速度为 σ 的熵激波，则 $\sigma > \lambda_1(u_R)$。

(h)（对于 1-激波）若 (u_L, u_R) 与 $u_L \in \mathcal{V}$ 构成速度为 σ 的熵激波，并满足

$$\sigma \leq \lambda_1(u_L),$$

则 u_R 属于 $S^1_{u_L}$ 的像。也就是说，存在 $s_{u_R} \in [0, s_{u_L})$，使得 $S^1_{u_L}(s_{u_R}) = u_R$（因此 $\sigma = \sigma^1_{u_L}(s_{u_R})$）。

（i）若 (u_L, u_R) 是速度为 σ 的熵激波，则 $\sigma < \lambda_2(u_L)$。(j)（对于 2-激波）若 (u_L, u_R) 与 $u_R \in \mathcal{V}$ 构成速度为 σ 的熵激波，并满足，

$$\sigma \geq \lambda_2(u_R),$$

则 u_L 属于 $S^2_{u_R}$ 的像。也就是说，存在 $s_{u_L} \in [0, s_{u_R})$，使得 $S^2_{u_R}(s_{u_L}) = u_L$（因此 $\sigma = \sigma^2_{u_R}(s_{u_L})$）。

(k) 对于 $u_L \in \mathcal{V}$，以及所有满足 $s \geq 0$、$\frac{d}{ds}\eta(u_L|S^1_{u_L}(s))$ 的 > 0（激波随 s 而“增强”）。类似地，对于 $u_R \in \mathcal{V}$，以及所有满足 $s > 0$、$\frac{d}{ds}\eta(u_R|S^2_{u_R}(s))$ 的 > 0。此外，对于每个 u_L，$u_R \in \mathcal{V}$以及 $s > 0$、$\frac{d}{ds}\sigma^1_{u_L}(s) < 0$和 $\frac{d}{ds}\sigma^2_{u_R}(s) > 0$。

注意，这些假设是集合 $\mathcal{V}_0$上的全局条件。要在 [15]中获得关于大尺度 L^∞ 扰动的稳定性定理，恰恰需要这类全局条件。在本文中，我们将限制在空间 $\mathcal{S}^{d,\ \epsilon}_{\text{弱解}}$ 由状态 L^∞ 的小 $d \in \mathcal{G}$扰动组成。因此，我们无需作出这些先验假设中的任何一项。特别是，我们不需要假设假设 1 (d)，因为对于满足 (**GL**) 的系统，即使在局部情形下，该假设通常也不成立（见第A节）。在以往的工作中，假设 1 (d)是获得稀疏波的相对熵稳定性所必需的。在本文中，我们提出一种获得稀疏波稳定性的新方法，完全绕开了对假设 1 (d)的需求（见命题 4.2）。

在精确定义 $\mathcal{S}^{d,\ \epsilon}_{\text{弱解}}$之前，我们先介绍一些术语。首先，假设在 C^3 的某个邻域内存在严格凸熵 η。我们指出，我们将能够证明这种熵的存在性 η_d（参见引理 3.1）。其次，我们要求解满足强迹性质：

定义 3.1。设 $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$。我们称 u 满足强迹性质，若对于任意 Lipschitz 曲线 $t \mapsto h(t)$，都存在两个有界函数 u_-、$u_+ \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$，使得对于任意 $T > 0$，

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \sup_{y \in (0, \frac{1}{n})} |u(t, h(t) + y) - u_+(t)|\, \mathrm{d}t$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \sup_{y \in (-\frac{1}{n}, 0)} |u(t, h(t) + y) - u_-(t)|\, \mathrm{d}t = 0.$$

有了这一点，我们可以定义严格凸熵 η 下的非 BV 扰动空间

$$\mathcal{S}^{d,\epsilon}_{\text{weak}} := \left\{ u \in L^\infty(([0,T) \times \mathbb{R}); B_\epsilon(d)) \,\middle|\, \text{weak solution to (1.1) and (1.3) (with respect to } \eta) \right.$$

verifying Definition 3.1$\Big\}$.

请注意，该空间在 L^∞ 中具有小性条件，但包含全变差可能很大甚至为无穷大的解。我们的主要命题如下：

命题 3.1. 假设系统 (1.1) 满足 ***(GL)***。存在 $\epsilon > 0$ 使得以下结论成立。固定 $R, T > 0$。设 $\delta_0 > 0$ 充分小，使得 [8] 中的定理 *1* 适用，该定理表明存在一个由前沿追踪近似的极限构成的小变差半群。设 $u \in \mathcal{S}^{d,\epsilon}$ 弱解的初始数据为u^0。考虑满足 $||v^0||_{BV} + ||v^0 - d||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \delta_0$ 的初始数据 v^0，并令 $\mathcal{S}_t v^0$ 为标准黎曼半群解。则我们有如下稳定性估计

$$||u(t,\cdot) - \mathcal{S}_t v^0||_{L^1((-R,R))} \leq K\sqrt{R+T}\left\|u^0 - v^0\right\|_{L^2((-R-ct,R+ct))}, \tag{3.1}$$

对于某个 $K = K(d,f) > 0$，其中常数 $c > 0$ 表示信息传播速度（参见注 *7.2* 7.2）。此外，通过插值可得

$$||u(t,\cdot) - \mathcal{S}_t v^0||_{L^2((-R,R))} \leq K\sqrt[4]{R+T}\sqrt{||u^0 - v^0||_{L^2((-R-ct,R+ct))}}. \tag{3.2}$$

我们将证明存在一个熵 η_d 使得 $\mathcal{S}^{d,\epsilon}$ 弱解可以定义。特别地，对于此 η_d, $\mathcal{S}^{d,\epsilon}$ 弱解将包含 Glimm–Lax 解 $GL(\epsilon_1)$ 对于 ϵ_1 充分小的情形，因为它们满足 L^∞ 估计式（1.4），并且符合定义 3.1 （因为它们在正时间时属于有界变差类），且对于任意凸熵都是熵解。因此，定理 1.4 可由命题 3.1直接推出。

我们指出，命题 3.1 有一个简单的推论：在较弱的类 $\mathcal{S}^{d,C_0\sqrt{\epsilon_1}}$ 弱解中的解之间，Glimm–Lax 类 $GL(\epsilon_1)$ 中的有界变差解具有唯一性。

推论 3.1。 存在 $\epsilon_1 > 0$，使得下述结论成立。设 $v \in GL(\epsilon_1)$ 为方程 (1.1)在初始数据 $v^0 \in$ 有界变差$_{\text{loc}}(\mathbb{R}; B_{\epsilon_1}(d))$下的解。那么， v 是在类 $\mathcal{S}^{d,C_0\sqrt{\epsilon_1}}$ 弱解 中具有初始数据 v^0的唯一解。

证明。我们令 $\epsilon_1 > 0$ 足够小，使得 $C_0\sqrt{\epsilon_1} < \min(\epsilon, \delta_0/2)$，其中 ϵ 和 δ_0 是命题 3.1 中的常数。对于任意 $R > 0$，我们固定区间 $I = (-R, R)$。由于 v^0 在 I 上具有有限有界变差范数，且不存在大于 δ_0 的间断点，因此存在一个 $L > 0$，使得对于任意 $(a,b) \subset (-R,R)$ 且满足 $b - a < L$，都有 $\|v(0,\cdot)\|_{BV((a,b))} < \delta_0$。利用这一点，我们可以将 I 分解为若干长度至多为 L 的重叠区间，并且根据与引理 2.1 相同的推理，对于某个 $T_1 \sim L$，我们得到估计

$$\|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{L^2((-R+ct,R-ct))} \leq 2K\sqrt{\|u(0,\cdot) - v^0\|_{L^2(I)}},$$

对所有 $t < T_1$ 和 u 在 $\mathcal{S}^{d,\epsilon}$ 弱解。接下来，由（1.5）我们得到 的全变差分布的一个界v（T_1，$\cdot$），从而有 v（T_1，$\cdot$）$\in BV_{\text{loc}}$（$\mathbb{R}$），且不存在大于 δ_0 的间断点。由此我们可以在初始时刻重复上述论证，从而对某个 $t \in [T_1, T_2]$，得到时间 $T_2 > T_1$上的 Hölder-1/4 估计。通过归纳，我们得到稳定性估计

$$\|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{L^2((-R+ct,R-ct))} \leq 2K\left\|u(0,\cdot) - v^0\right\|_{L^2(I)}^{1/2^{m(v_0,t)}},$$

其中 $m(v_0,\ t)$ 是为使 m 满足 $t \in [T_{m-1}, T_m]$ 给定初始数据 v_0而进行的迭代次数。我们指出，由于估计式（1.5）使全变差随时间推移而扩散并覆盖信息锥，因此存在某个有限的 m $T_m > R/c$ 。由于 $R > 0$ 是任意选取的，这就证明了 v 在强迹解中的唯一性。□

本文其余部分将致力于证明命题3.1。我们采用的策略是用$\mathcal{S}_t v^0$ 来逼近平移的前沿追踪近似，并在第5节构造这些近似。它们与传统前沿追踪近似的不同之处在于，我们的近似激波以由弱解 u确定的速度传播，而非 Rankine–Hugoniot 速度。在第4 节，我们证明弱解与黎曼问题的（平移）解之间满足带权 L^2-收缩性。在第2 节，我们将这一结果与传统前沿追踪过程结合，得到界（3.1）的一种近似形式。该证明涉及在第6 节精细构造一个权函数，以处理具有许多间断点的前沿追踪解。最后令前沿追踪参数趋于零，从而得到命题3.1 。

我们的第一个关键引理表明，存在一个邻域 W，它包含状态 d，使得系统 (1.1) 相对于 W 满足假设 1（但不包括假设 1 (d)）。

引理 3.1。 设 (1.1) 满足 ***(GL)***。固定一个状态 $d \in \mathcal{G}$。那么，存在一个邻域 W，其中包含 d，使得 (1.1) 满足相对于 W的所有假设 ***1***（但不包括 *(d)*）。 W

注记3.1。 我们指出，引理 3.1是尖锐的，因为存在满足 **(GL)**但不满足相对于给定状态的任何邻域的假设 **1(d)** 的系统。示例见第 A 节。

引理 3.1 的证明将在附录 D中给出。该引理使我们能够运用 a-收缩方法，该方法由 [28], [15] 提出，从而得到 L^2-稳定性，适用于 d 附近小激波的小扰动（见命题 4.1）。

4. Method of relative entropy

我们采用 Dafermos [20] 和 DiPerna [22]引入的相对熵方法。回顾一下，我们假设在 d的一个邻域 W 内存在严格凸熵 C^3 。对于任意 $a,\ b \in W \times W$，我们定义相应的伪距离，

$$\eta(a|b) = \eta(a) - \eta(b) - \nabla\eta(b)(a-b). \tag{4.1}$$

量 $\eta(a|b)$ 称为 a 相对于 b的相对熵，它等价于二者差值的平方。我们还定义 $a,\ b \in W \times W$的相对熵通量，

$$q(a;b) = q(a) - q(b) - \nabla\eta(b)(f(a) - f(b)), \tag{4.2}$$

以及 a 的相对通量， $b \in W \times W$，

$$f(a|b) = f(a) - f(b) - f'(b)(f(a) - f(b)). \tag{4.3}$$

若 u 是（1.1）和（1.3）的弱解，则 u 对所有$b \in W$，均满足以下一族熵不等式

$$(\eta(u|b))_t + (q(u;b))_x \le 0. \tag{4.4}$$

由此可见，单个熵不等式（1.3）实际上会导出无穷多个熵不等式（4.4）。正是这一事实使得 L^2理论能够保证对非 BV 扰动的稳定性，并表明 L^2理论可视为适用于系统的 Kružkov 型理论。

4.1. 小激波的定量耗散估计。 研究间断解时，需要对相对熵进行复杂的修正，即结合空间加权相对熵与平移（a-收缩）。该方法由 Kang-Vasseur [31] 提出。给定一个固定的熵激波（$u_L,\ u_R,\ \sigma$）和解 $u \in L^\infty($ $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R};\ W)$，考虑伪距离

$$E_t(u;a_1,a_2,h) := a_1 \int_{-\infty}^{h(t)} \eta(u(t,x)|u_L)\,\mathrm{d}x + a_2 \int_{h(t)}^{\infty} \eta(u(t,x)|u_R)\,\mathrm{d}x, \tag{4.5}$$

其中， $a_1,\ a_2$ 是待确定的常数权函数，而 $h(t)$ 是一个 Lipschitz平移函数。由以下引理可知，若 E_t 单调递减，则我们可以用 L^2控制 u 与平移后的激波 $(u_L,\ u_R,\ h)$ 之间的距离。

引理 4.1. 存在一个常数 K，使得对于所有 $(u,v) \in W \times W$，都有

$$\frac{1}{K}|u-v|^2 \le \eta(u|v) \le K|u-v|^2.$$

为控制 E_t，我们计算具有强迹性质（即满足定义 3.1）的解 u 的时间导数。先将 (4.4) 在 $\{(s,x)$ $\mid s \in [0,t]$ 和 $x < h(t))\}$ 上关于 $b = u_L$ 积分一次，再在 $\{(s,x) \mid s \in [0,t]$ 和 $x > h(t))\}$ 上关于 $b = u_R$ 再积分一次，将两次结果相加并利用强迹性质，得到以下估计，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_t \le \quad & a_2\left[q(u(h(t)+,t);u_R) - \dot{h}(t)\ \eta(u(h(t)+,t)|u_R)\right] \\ & -a_1\left[q(u(h(t)-,t);u_L) - \dot{h}(t)\ \eta(u(h(t)-,t)|u_L)\right]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

下面的引理给出了权函数 a_1、a_2 以及一个位移 h ，使得（4.6）右侧为负，从而证明了 E_t 在减小。

命题 *4.1*（带定量耗散估计的小激波位移函数的存在性）。考虑一个通量为 f 且满足条件 *(GL)* 的严格双曲系统 *(1.1)*。固定 $d \in \mathcal{G}_0$，并令 $W^\wedge$ 为引理 *3.1* 中构造的 d 邻域。则存在 $\lambda C_1 K \epsilon > 0$，使得以下结论成立：考虑任意满足下述条件的 *1*-激波或 *2*-激波（u_L、u_R、σ_{LR}）：

$$|u_L - d| + |u_R - d| \leq \epsilon.$$

令 s_0 为曲线 $S^1_{u_L}$ 上 u_L 与 u_R 之间的弧长，若 a_1, a_2 满足

$$1 + \frac{C_1 s_0}{2} \leq \frac{a_1}{a_2} \leq 1 + 2C_1 s_0 \qquad \text{if } (u_L, u_R) \text{ is a 1-shock}$$
$$1 - 2C_1 s_0 \leq \frac{a_1}{a_2} \leq 1 - \frac{C_1 s_0}{2} \qquad \text{if } (u_L, u_R) \text{ is a 2-shock},$$

则对于任意 $u \in \mathcal{S}^{d,\epsilon}$ 弱解、$T > 0$、$T_{start} \in [0, T]$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}$，存在一个利普希茨映射 h：$[T_{start}, T] \to \mathbb{R}$，使得 $h(T_{start}) = x_0$，并且耗散泛函满足以下界

$$\begin{aligned} a_2 \left[q(u(h(t)+,t); u_R) - \dot{h}(t)\ \eta(u(h(t)+,t)|u_R) \right] \\ - a_1 \left[q(u(h(t)-,t); u_L) - \dot{h}(t)\ \eta(u(h(t)-,t)|u_L) \right] \leq -a_2 K s_0 (\dot{h}(t) - \sigma_{LR})^2, \end{aligned} \tag{4.7}$$

几乎处处 所有 $t \in [T_{start}, T]$。此外，若 (u_L, u_R) 是一个 *1*-激波，则几乎处处 $t \in [T_{start}, T]$

$$-\frac{\hat{\lambda}}{2} \leq \dot{h}(t) \leq \sup_{v \in B_{2\epsilon}} \lambda_1(v).$$

类似地，若 (u_L, u_R) 是一个 *2*-激波，则几乎处处 $t \in [T_{start}, T]$

$$\inf_{v \in B_{2\epsilon}} \lambda_2(v) \leq \dot{h}(t) \leq \frac{\hat{\lambda}}{2}.$$

证明。证明直接由引理 3.1 和 [15, 命题 3。1]（取 $\mathcal{V}_0 = W$ 其命题 3.1 中的条件），其中我们注意到，假设 1 恰好是 [15, 假设 1]，，并且假设 1(d)（假设 1 (d)）并未用于其中命题 3.1 的证明。□

4.2. **稀疏波的加权相对熵收缩**。本节将证明稀疏波的一个新型加权相对熵收缩（引理 4.2）。对于无黏守恒律而言，这是相对熵方法针对非 Lipschitz 连续解的首个结果（参见 [39]）。在准确陈述该结果之前，我们先回顾稀疏波的一些基本事实（沿用 [23]）。

回顾一下，对于 $u \in W$ 和 $i = 1, 2$，存在一条曲线 $R^i_u : \mathbb{R} \to \mathcal{G}_0$，满足常微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds} R^i_u(s) = r_i(R^i_u(s)), \quad s \in \mathbb{R}, \\ R^i_u(0) = u. \end{cases} \tag{4.8}$$

我们将 R^i_u 称为 i^{th} 处的稀疏曲线 u。给定两个状态 u_L，u_R，满足 $u_R = R^i_{u_L}(s_0)$，其中某个 $s_0 > 0$，连接 u_L 与 u_R 的稀疏波可按以下方式构造。首先，定义

$$f_i(s) := \int_0^s \lambda_i(R^i_{u_L}(t))\, \mathrm{d}t, \quad \forall\ s \in \mathbb{R}.$$

接着，考虑如下标量守恒律的黎曼问题

$$\begin{aligned} y_t + [f_i(y)]_x &= 0, \\ y(0, x) &= \begin{cases} 0 & x < 0, \\ s_0 & x > 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{4.9}$$

这里我们回顾 $R^i_{u_L}(0) = u_L$ 和 $R^i_{u_L}(s_0) = u_R$。标量问题（4.9）具有唯一的熵解

$$y(t, x) = \begin{cases} 0 & \frac{x}{t} < f_i'(0), \\ [f_i']^{-1}(\frac{x}{t}) & f_i'(0) < \frac{x}{t} < f_i'(s_0), \\ s_0 & \frac{x}{t} > f_i'(s_0). \end{cases}$$

因此，（1.1）的稀疏波为

$$\overline{u}(t,x) = R^i_{u_L}(y(t,x)). \tag{4.10}$$

为避免混淆，我们可以将 u 和 y 视为仅依赖一个变量的函数，因为它们沿直线 $\frac{x}{t} \equiv c$具有自相似性。

稍后在前沿追踪格式中要用到的主要命题如下：

命题 4.2. 设严格双曲系统 (1.1) 满足 ***(GL)***。设 $d \in \mathcal{G}$，并设 W 是 d 在引理 *3.1*中构造的邻域。那么，存在 K，C_2，$\epsilon > 0$，使得下述结论成立。考虑任意两个满足$(u_L,\ u_R)$ 条件的状态

$$|u_L - d| + |u_R - d| \le \epsilon,$$

其中 $u_R = R^i_{u_L}(s_0)$ 对某些 $s_0 > 0$ 和 $i = 1,2$ 成立（因此 u_L, u_R 由一条 1-或-2-稀疏波 u连接）。记

$$\overline{\sigma} = |v_L - v_R| + \sup_{t,x} |u_L - \overline{u}(y(t,x))|,$$

其中 $v_L = \lambda_i(u_L)$ $v_R = \lambda_i(u_R)$，且 y满足标量问题 (4.9)。那么，若 a_1，a_2满足

$$1 + \frac{C_2 s_0}{2} \le \frac{a_1}{a_2} \le 1 + 2C_2 s_0, \qquad \text{if } u_R = R^1_{u_L}(s_0), \tag{4.11}$$

$$1 - 2C_2 s_0 \le \frac{a_1}{a_2} \le 1 - \frac{C_2 s_0}{2}, \qquad \text{if } u_R = R^2_{u_L}(s_0), \tag{4.12}$$

那么，对于任意 $u \in \mathcal{S}^d,\ _{\epsilon\text{ 弱解}}$ $v \in I[v_L, v_R]$（其中 $I[v_L, v_R] := [\min(v_L, v_R), \max(v_L, v_R)]$），以及 $t > 0$，我们有

$$\int_0^t \Big\{ a_2 \left(q(u(\tau, \tau v+); u_R) - v\eta(u(\tau, v\tau+)|u_R)\right) \\ - a_1 \left(q(u(\tau, \tau v-); u_L) - v\eta(u(\tau, v\tau-)|u_L)\right) \Big\} \mathrm{d}\tau \le a_2 \left(K\overline{\sigma}^2 t + K\overline{\sigma}|\mu_u|(\mathcal{C}_{v_L, v_R})\right),$$

其中 μ_u 是局部有限的非正熵耗散测度 $[\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u)]$，且

$$\mathcal{C}_{v_L, v_R} := \{(\tau, x) \,|\, 0 \le \tau \le t, v_L \tau \le x \le v_R \tau\}, \tag{4.13}$$

是稀疏波扇。

注 4.1。请注意，在命题 4.2 和命题 4.1（见 [15, 第8节）中，我们可以任意增大 C_1，C_2。特别地，我们可以假设 $C_1 = C_2$。

注 4.2。熵耗散 μ_u 是局部有限测度这一事实，可由里斯–马尔可夫表示定理推出。

我们将在第 4.2 节证明命题 4.3。在此之前，我们需要一个重要引理，以便为真实的稀疏波得到精确的加权相对熵收缩。策略如下。受量（4.5）的启发，我们定义

$$D_t := \int_{-\infty}^{\infty} a(t,x)\eta(u(t,x)|\overline{u}(t,x))\,\mathrm{d}x, \tag{4.14}$$

其中 u 满足（1.1）和（1.3），而 $u(t,-x)$ 是稀疏波。在这种情形下，我们没有平移 h，并且权函数 $a(t,x)$ 将不再是分段常数（参见（4.5））。我们的目标仍然是估计 $\frac{d}{dt} D_t$。

引理 4.2。 考虑一个满足（1.1）的严格双曲系统，并满足 ***(GL)***。设 $d \in \mathcal{G}$ 和 W 是 d 在引理 *3.1*中构造的邻域。那么，对于任意充分大的 C_2，存在 $\epsilon > 0$ 使得以下结论成立。设 $(u_L,\ u_R)$ 是两个状态，满足 $u_R = R^i_{u_L}(s_0)$，其中 $s_0 > 0$ 满足

$$\sup_{s \in [0, s_0]} |R^i_{u_L}(s) - d| \le \epsilon.$$

对于满足条件的任意常数 C

$$C \in [C_2/4, 4C_2], \tag{4.15}$$

我们固定一个形式如下的权函数

$$a(t,x) := \exp\left[(-1)^i \; C \; y(t,x)\right], \tag{4.16}$$

其中 y 满足 (4.9)。那么，对于任意 $u \in \mathcal{S}^{d,\,\epsilon}$ 弱解，我们有

$$\partial_t \left[a(y(t,x))\eta(u(t,x)|\overline{u}(t,x))\right] + \partial_x \left[a(y(t,x))q(u(t,x);\overline{u}(t,x))\right] \leq a(y)\mu_u, \tag{4.17}$$

在分布的意义下，即在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ 中，其中 μ_u 是局部有限的非正熵耗散测度 $[\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u)]$。

证明。 注意，经过变量变换 $x \mapsto -x$ 后，系统（1.1）变换为通量为 $-f$的另一个守恒律，将 2-稀疏波映射为 1-稀疏波。该反射还会将 $a(t,x)$ 这一 2-稀疏波的权函数转换为相应的 1-稀疏波权函数。因此，不失一般性，只需考虑1-稀疏波。

我们回顾一下 7，方程 (4.7)] 表明，任意满足 (1.3) 的弱解都满足分布性 1
不等式

$$\partial_t \eta(u|\overline{u}) + \partial_x q(u;\overline{u}) + \partial_x\{\nabla\eta(\overline{u})\} f(u|\overline{u}) \leq \mu_u, \tag{4.18}$$

其中 $\overline{u}(t,x)$ 是连接状态 1 的稀疏波 u_L, u_R ，如（4.10）中所定义（（4.18）的不尖锐形式是不等式的经典结果，见 [21, 方程（5.2.10）]）。将（4.18）两边乘以正函数 $a(t,x)$ 得到

$$\partial_t[a\eta(u|\overline{u})] + \partial_x[aq(u;\overline{u})] + a\partial_x\{\nabla\eta(\overline{u})\} f(u|\overline{u}) - \partial_x(a)q(u;\overline{u}) - \partial_t(a)\eta(u|\overline{u}) \leq a\mu_u, \tag{4.19}$$

该式在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ 中以分布意义成立。注意，对任意固定状态 $u \in W$，

$$\begin{aligned} &a\partial_x\{\nabla\eta(\overline{u}))\} f(u|\overline{u}) - \partial_x(a)q(u;\overline{u}) - \partial_t(a)\eta(u|\overline{u}) \\ &\qquad = \frac{a}{t}\left([f_1']^{-1}\right)'(x/t)\left[Cq(u;\overline{u}) - C\frac{x}{t}\eta(u|\overline{u}) + r_1(\overline{u})^t\nabla^2\eta(\overline{u})f(u|\overline{u})\right]\mathbb{1}_{\mathcal{C}_{v_L,v_R}}(t,x), \end{aligned} \tag{4.20}$$

其中 $\mathcal{C}_{v_L,v_R}$ 是（4.13）中定义的扇区，我们的权函数 a 如（4.16）所示，其中 $C > 0$ 待定。现在注意到，根据构造，u 满足 $x/t = \lambda_1(u(t,x))$，对所有 $(t,x) \in \mathcal{C}_{v_L,v_R}$ 均成立。利用关系（1.2），在 u 中围绕 $u = \overline{u}$ 对 $q(u;\overline{u})$ $\eta(u|\overline{u})$, & $f(u|\overline{u})$ 进行泰勒展开，

$$\begin{aligned} &Cq(u;\overline{u}) - C\lambda_1(\overline{u})\eta(u|\overline{u}) + r_1(\overline{u})^t\nabla^2\eta(\overline{u})f(u|\overline{u}) \\ &\qquad \geq \frac{C}{2}\nabla^2\eta(\overline{u})[f'(\overline{u}) - \lambda_1(\overline{u})I](u-\overline{u})\cdot(u-\overline{u}) + \frac{1}{2}r_1(\overline{u})^t\nabla^2\eta(\overline{u})f''(\overline{u})(u-\overline{u},u-\overline{u}) - KC|u-\overline{u}|^3, \end{aligned}$$

其中常数 K 仅取决于 f 以及集合 W 引理3.1 中的 $f''(u)(v,v)$ 是 f的二阶弗雷歇导数。记

$$u - \overline{u} = \sum_{i=1}^{2} a_i r_i(\overline{u}),$$

由双曲性以及 $\nabla^2\eta f' = f'\nabla^2\eta$ 这一事实可知，存在一个与 $u \in W$ 无关的常数 $K_1 > 0$，使得

$$\begin{aligned} &Cq(u;\overline{u}) - C\lambda_1(\overline{u})\eta(u|\overline{u}) + r_1(\overline{u})^t\nabla^2\eta(\overline{u}))f(u|\overline{u}) \\ &\qquad \geq CK_1a_2^2 + \sum_{1\leq i,j\leq 2}\frac{a_ia_j}{2}r_1(\overline{u})^t\nabla^2\eta(\overline{u})f''(\overline{u})(r_i(\overline{u}),r_j(\overline{u})) - KC|u-\overline{u}|^3. \end{aligned} \tag{4.21}$$

对于第二个求和，我们注意到 $i = j = 1$ 项的系数严格为正。事实上，沿着方向 r_1 对方程 $f'\,r_1 = \lambda_1 r_1$ 求导，并解出 $f''(r_1,\ r_1)$，可得

$$f''(r_1,r_1) = (\nabla\lambda_1\cdot r_1)r_1 + (\lambda_1 I - f')(r_1'r_1).$$

将上述关系代入 $\bar{u}$ ，并乘以与 ℓ_1 平行的左特征向量 $r_1(\bar{u})^t\nabla^2\eta(\bar{u})$，可得

$$r_1(\overline{u})^t\nabla^2\eta(\overline{u})f''(r_1(\overline{u}),r_1(\overline{u})) = (r_1(\overline{u})^t\nabla^2\eta(\overline{u})r_1(\overline{u}))(\nabla\lambda_1(\overline{u})\cdot r_1(\overline{u})) > 0,$$

其中符号由 η 的严格凸性和真正非线性决定。事实上，由于我们限于$u \in W$，该量在 $u \in W$上具有一致的正下界，而其余各项则由带有 η （带有$u \in W$）的杨不等式得到下界，如下所示：

由带有 ϵ （带有 $\epsilon=\alpha$）的杨不等式可得下界，如下所示：

$$\frac{1}{2}\sum_{\substack{1\le i,j\le 2\\ ij>1}} a_i a_j r_1(\overline{u})^t\nabla^2\eta(\overline{u})f''(r_i(\overline{u}),r_j(\overline{u}))\ge K_2\left[-\alpha a_1^2-\frac{1}{\alpha}a_2^2-a_2^2\right],$$

其中 $K_2>0$ 取决于 f 和 W。将其代入（4.21），并利用我们根据（ C 4.15）对 所得到的界，可得

$$\begin{aligned}
&Cq(u;\overline{u})-C\lambda_1(\overline{u})\eta(u|\overline{u})+r_1(\overline{u})^t\nabla^2\eta(\overline{u}))f(u|\overline{u})\\
&\quad\ge\left(\frac{C_2}{4}K_1-K_2\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\right)a_2^2+\left((r_1(\overline{u})^t\nabla^2\eta(\overline{u})r_1(\overline{u})\frac{\nabla\lambda_1(\overline{u})\cdot r_1(\overline{u})}{2}-K_2\alpha\right)a_1^2-4KC_2|u-\overline{u}|^3\\
&\quad\ge K_3|u-\overline{u}|^2-4KC_2|u-\overline{u}|^3,
\end{aligned}\tag{4.22}$$

其中常数 $K_3>0$，最后一行是通过选取 $\alpha>0$ 充分小且 C_2 充分大得到的。由（4.22）可知，若 $|u-u|\le K_3/$（$8KC_2$），则 可得

$$Cq(u;\overline{u})-C\lambda_1(\overline{u})\eta(u|\overline{u})+r_1(\overline{u})^t\nabla^2\eta(\overline{u}))f(u|\overline{u})\ge\frac{1}{2}K_3|u-\overline{u}|^2.\tag{4.23}$$

此时，我们选取

$$\epsilon=K_3/(16KC_2),\tag{4.24}$$

作为引理 4.2陈述中 ϵ 的取值。由三角不等式可知， $|u-u|\le|u-d|+|u-d|<2\epsilon$对所有由解在 u中达到的状态 $\mathcal{S}^{d,\ \epsilon}$ 弱解 以及 u 由稀疏波达到，因此验证了下界（4.23）。

此外，该项

$$([f_1']^{-1})'=\frac{1}{\nabla\lambda_1(\overline{u})\cdot r_1(\overline{u})},$$

在 W 中为正，这是由于真正非线性。将这些代入（4.20）和不等式（4.19），最终可得

$$\partial_t[a\eta(u|\overline{u})]+\partial_x[aq(u;\overline{u})]\le a\mu_u\tag{4.25}$$

在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R})$ 中以分布意义成立，当 $\sup_{s\in[0,s_0]}\left|R^1_{u_L}(s)-d\right|<\epsilon$ 且 $u\in\mathcal{S}^{d,\ \epsilon}$ 弱解。 □

注 4.3。注意，对于$n\times n$ 系统中极端族的稀疏波， $n>2$同样的计算也成立。还要注意，对 D_t 在（4.14）中求导并使用不等式（4.17），可得小扰动中的稀疏波满足加权相对熵收缩，而这些扰动甚至可能不满足强迹性质（定义 3.1）（小扰动的量化条件见（4.24）。

继续之前， 我们注意到，相对熵和相对熵通量关于其第二个熵变量是 Lipschitz 连续的 y.

引理 4.3 ([17, 引理 7。2])。 **</style}存在一个常数，使得对于所有** $(a,b_1,b_2)\in W^3$，我们都有以下 *Lipschitz* 界

$$\begin{aligned}
|q(a;b_1)-q(a;b_2)|&\le K|b_1-b_2|,\\
|\eta(a|b_1)-\eta(a|b_2)|&\le K|b_1-b_2|.
\end{aligned}$$

4.3. **命题 4.2 的证明**。 现在，我们通过证明命题 4.2，来控制前沿追踪方法中稀疏波近似所导致的误差。

证明。 首先，取 C_2 充分大，并取 ϵ 充分小，使得引理 4.2 成立。对于 a， $b\in\mathbb{R}$，定义双参数扇族：

$$\mathcal{C}_{a,b}:=\{(x,\tau)\,|\,0\le\tau\le t, a\tau\le x\le b\tau\}.$$

使用函数检验分布不等式（4.17）

$$\psi(\tau,x)=\omega(\tau)\chi(\tau,x),\tag{4.26}$$

其中

$$\omega(\tau)=\begin{cases}0 & \tau\le\frac{\delta}{2},\\ 2\delta^{-1}(\tau-\frac{\delta}{2}) & \frac{\delta}{2}\le\tau\le\delta,\\ 1 & \delta\le\tau<t-\delta,\\ \delta^{-1}(t-\tau) & t-\delta\le\tau\le t,\\ 0 & \tau\ge t,\end{cases}$$

and

$$\chi(\tau,x)=\begin{cases}1 & v_L\tau+\delta\le x\le v_R\tau-\delta,\\ \delta^{-1}(v_R\tau-x) & v_R\tau-\delta\le x\le v_R\tau,\\ \delta^{-1}(x-v_L\tau) & v_L\tau\le x\le v_L\tau+\delta,\\ 0 & \text{otherwise},\end{cases}$$

取极限 $\delta\downarrow 0$ 并利用强迹性质，我们得到

$$\begin{aligned}0\le&-\int_{v_Lt}^{v_Rt}a(y(t,x))\eta(u(t,x)|\overline{u}(t,x))\,\mathrm{d}x+\int_{\mathcal{C}_{v_L,v_R}}a(y)\,\mathrm{d}\mu_u(t,x)\\&+\int_0^t a(y(v_R))\left[-q(u(\tau,v_R\tau-);u_R)+v_R\eta(u(\tau,v_R\tau-)|u_R)\right]\mathrm{d}\tau\\&-\int_0^t a(y(v_L))\left[-q(u(\tau,v_L\tau+);u_L)+v_L\eta(u(\tau,v_L\tau+)|u_L)\right]\mathrm{d}\tau,\end{aligned}\tag{4.27}$$

其中 a 定义见 (4.16)。此外，根据相对熵 (4.1)、熵通量 (4.2) 的定义，以及 u弱解 (1.1)，我们得到以下等式

$$\partial_t\left[\eta(u(t,x)|u_i)-\eta(u(t,x))\right]+\partial_x\left[q(u(t,x);u_i)-q(u(t,x))\right]=0,\quad i=L,R.\tag{4.28}$$

用与 (4.26) 类似的测试函数（针对扇区$\mathcal{C}_{v_L,v}$作相应调整）对 (4.28) 的 $i=L$ 情形进行测试，并将结果乘以 a(y(v_L))，我们得到

$$\begin{aligned}-\int_0^t a(y(v_L))[-q(u(\tau,v_L\tau+);u_L)+&v_L\eta(u(\tau,v_L\tau+)|u_L)]\,\mathrm{d}\tau\\&=\int_{v_Lt}^{vt}a(y(v_L))\eta(u(t,x)|u_L)\,\mathrm{d}x-\int_{\mathcal{C}_{v_L,v}}a(y(v_L))\,\mathrm{d}\mu_u\\&\quad-\int_0^t a(y(v_L))[v\eta(u\tau,v\tau-|u_L)-q(u(\tau,v\tau-;u_L))]\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{4.29}$$

同样地，用与 (4.26) 类似的测试函数（针对扇区 $\mathcal{C}_{v,v_R}$作相应调整）对 (4.28) 的 $i=R$ 情形进行测试，并将结果乘以 a(y(v_R))，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^t a(y(v_R))[-q(u(\tau,v_R\tau-);u_R)+&v_R\eta(u(\tau,v_R\tau-)|u_R)]\,\mathrm{d}\tau\\&=\int_{vt}^{v_Rt}a(y(v_R))\eta(u(t,x)|u_R)\,\mathrm{d}x-\int_{\mathcal{C}_{v,v_R}}a(y(v_R))\,\mathrm{d}\mu_u\\&\quad-\int_0^t a(y(v_R)[q(u(\tau,v\tau+);u_R)-v\eta(u(\tau,v\tau+)|u_R)]\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{4.30}$$

将 (4.29) 和 (4.30) 代入 (4.27) 得到

$$\begin{aligned}&\int_0^t a(y(v_R))\left(q(u(\tau,\tau v+);u_R)-v\eta(u(\tau,v\tau+)|u_R)\right)-a(y(v_L))\left(q(u(\tau,\tau v-);u_L)-v\eta(u(\tau,v\tau-)|u_L)\right)\mathrm{d}\tau\\&\le\int_{v_Lt}^{vt}a(y(v_L))\eta(u(t,x)|u_L)\,\mathrm{d}x+\int_{vt}^{v_Rt}a(y(v_R))\eta(u(t,x)|u_R)\,\mathrm{d}x-\int_{v_Lt}^{v_Rt}a(y(t,x))\eta(u(t,x)|\overline{u}(t,x))\,\mathrm{d}x\\&+\int_{\mathcal{C}_{v_L,v_R}}a(y)\,\mathrm{d}\mu_u-\int_{\mathcal{C}_{v_L,v}}a(y(v_L))\,\mathrm{d}\mu_u-\int_{\mathcal{C}_{v,v_R}}a(y(v_R))\,\mathrm{d}\mu_u.\end{aligned}\tag{4.31}$$

接下来需要估计 (4.31) 右端。我们将其分为两部分。对于右端的前三项，我们估计

$$\begin{aligned}(\text{first three terms on RHS of (4.31)}) \le & \int_{v_L t}^{vt} [a(y(v_L)) - a(y(t,x))]\eta(u(t,x)|\overline{u}(t,x))\,\mathrm{d}x \\ & + \int_{vt}^{v_R t} [a(y(v_R)) - a(y(t,x))]\eta(u(t,x)|\overline{u}(t,x))\,\mathrm{d}x \\ & + \int_{v_L t}^{vt} a(y(v_L))[\eta(u(t,x)|u_L) - \eta(u(t,x)|\overline{u}(t,x))]\,\mathrm{d}x \\ & + \int_{vt}^{v_R t} a(y(v_R))[\eta(u(t,x)|u_R) - \eta(u(t,x)|\overline{u}(t,x))]\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

利用 u 和 u的有界性、我们的相对量引理 4.3，以及引理 a中 4.2的定义，我们得到

$$(\text{first three terms on RHS of (4.31)}) \le K t \overline{\sigma}^2, \tag{4.32}$$

其中我们回顾命题 σ 中 4.2的定义。

对于（4.31）右侧的后三项，同样利用 a的定义，我们计算得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{C}_{v_L,v_R}} a(y)\,\mathrm{d}\mu_u - \int_{\mathcal{C}_{v_L,v}} a(y(v_L))\,\mathrm{d}\mu_u - \int_{\mathcal{C}_{v,v_R}} a(y(v_R))\,\mathrm{d}\mu_u \\ &\quad = \int_{\mathcal{C}_{v_L,v}} [a(y(t,x)) - a(y(v_L))]\,\mathrm{d}\mu_u + \int_{\mathcal{C}_{v,v_R}} [a(y(t,x)) - a(y(v_R))]\,\mathrm{d}\mu_u \\ &\quad \le K\overline{\sigma}|\mu_u|(\mathcal{C}_{v_L,v_R}).\end{aligned} \tag{4.33}$$

将（4.32）和（4.33）代入（4.31）可得

$$\begin{aligned}&\int_0^t a(y(v_R))\left(q(u(\tau,\tau v+);u_R) - v\eta(u(\tau,v\tau+)|u_R)\right) - a(y(v_L))\left(q(u(\tau,\tau v-);u_L) - v\eta(u(\tau,v\tau-)|u_L)\right)\mathrm{d}\tau \\ &\qquad \le K t\overline{\sigma}^2 + K\overline{\sigma}|\mu_u|(\mathcal{C}_{v_L,v_R}).\end{aligned}$$

最后，将两边除以 a（y（v_R）），注意到 $^{a\,(y\,(v_L))}$ ~~$a\,(y\,(v_R))$~~ $= e^{Cs_0}$ （对于 1-稀疏波），并注意到引理 4.2 对任意 $C \in [\frac{C_2}{4}, 4C_2]$均成立，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_0^t \left\{\left(q(u(\tau,\tau v+);u_R) - v\eta(u(\tau,v\tau+)|u_R)\right) - \frac{a_1}{a_2}\left(q(u(\tau,\tau v-);u_L) - v\eta(u(\tau,v\tau-)|u_L)\right)\right\}\mathrm{d}\tau \\ &\qquad \le K t\overline{\sigma}^2 + K\overline{\sigma}|\mu_u|(\mathcal{C}_{v_L,v_R}),\end{aligned}$$

对于任意 a_1，a_2 满足 $e^{\frac{C_2}{4}s_0} \le \frac{a_1}{a_2} \le e^{4C_2 s_0}$。最后，利用 $e^x \approx 1 + x$ 当 x 充分小时，我们通过取4.2得到命题 ϵ 充分小。□

5. 前沿跟踪算法

本节将阐述我们用于半群解的前沿跟踪算法。我们严格采用 [8] 中介绍并在 [15] 中针对 a-收缩方法加以调整的方案。为便于阅读，本文其余部分将沿用上述文章中的记号。本节的所有结果均不加证明地陈述。关于这些结果的证明，请参见文献 [8] 和 [15] 。

5.1. **黎曼问题简介。** 对于（1.1），令 A（u） $= f'$（u） 为 f 在x处的雅可比矩阵。定义平均矩阵

$$A(u,u') = \int_0^1 f'(\theta u + (1-\theta)u')\,\mathrm{d}\theta.$$

令 $\lambda_i(u,u')$ $r_i(u,u')$，并令 $\ell_i(u,u')$ 为 $A(u,u')$ 的 i^{th} 特征值及其对应的右、左特征向量，且满足归一化条件

$$\ell_i \cdot r_j = \delta_{ij},$$

其中 δ_{ij} 为克罗内克δ。特别地，对于 $u = u'$， $\lambda_i(u)$ $r_i(u)$ 和 $\ell_i(u)$ 是 $A(u) = A(u,u)$ 的 i^{th} 特征值及其对应的右/左特征向量。

设 $v = (v_1, v_2)$ 分别为第一族和第二族的黎曼不变量。则，稀疏曲线的形式为

$$\phi_1^+(v,\sigma) = (v_1 + \sigma, v_2), \quad \phi_2^+(v,\sigma) = (v_1, v_2 + \sigma). \tag{5.1}$$

关于激波曲线，我们有如下表示

引理 5.1 （[8, 第 10]页）。 i-激波曲线经过点 $v = (v_1, v_2)$，并可关于黎曼坐标参数化为

$$\phi_1^-(v,\sigma) = (v_1 + \sigma, v_2 + \hat{\phi}_2(v,\sigma)\sigma^3), \quad \phi_2^-(v,\sigma) = (v_1 + \hat{\phi}_1(v,\sigma)\sigma^3, v_2 + \sigma), \tag{5.2}$$

ˆ ˆ对于某些光滑函数 ϕ_2、 ϕ_1。

我们强调，我们使用与 [8] 相同的前沿跟踪算法。这意味着在本节中，我们将带有 $\sigma > 0$ 的跳跃称为稀疏波，将带有 $\sigma < 0$ 的跳跃称为激波（这不同于前几节所使用的记号）。现在定义黎曼问题的 ν-近似解。设 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 C^∞，使得

$$\begin{cases} \varphi(s) = 1, & s \le -2, \\ \varphi'(s) \in [-2, 0], & s \in [-2, -1], \\ \varphi(s) = 0, & s \ge -1. \end{cases} \tag{5.3}$$

那么，对于 $\nu >$ 固定的 0，定义以下插值，它们位于 i-激波曲线与 i-稀疏曲线之间 :

$$\Phi_i^\nu(v,\sigma) = \varphi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\right)\phi_i^-(v,\sigma) + \left(1 - \varphi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\right)\right)\phi_i^+(v,\sigma). \tag{5.4}$$

注意，当 $\sigma \ge -\sqrt{\nu}$, $\Phi_i^\nu(v, \sigma)$ 时，它恰好与稀疏曲线 ϕ_i^+ 重合；而当 $\sigma \le -2\sqrt{\nu}$ 时，它恰好与激波曲线重合。

给定 u^r， u^l，其对应的黎曼坐标为 $v^r = (v_1^r, v_2^r)$ 和 $v^l = (v_1^l, v_2^l)$，我们可以求得黎曼问题的一个ν-近似解，其初始数据为:

$$u(0,x) = \begin{cases} u_l & x < 0, \\ u_r & x > 0, \end{cases}$$

通过求出唯一的中间状态 v^m 以及一对 (σ_1, σ_2)，使得

$$v^m = \Phi_1^\nu(v^l, \sigma_1), \quad v^r = \Phi_2^\nu(v^m, \sigma_2).$$

那么，我们近似 按以下方式构造这两种波。这里只给出 1-波的近似 s. 2-波完全 相同。

假设 $\sigma_1 > 0$。然后，取 $h, k \in \mathbb{N}$，使得 $h\nu \le v_1^l < (h+1)\nu$ 且 $k\nu \le v_1^m < (k+1)\nu$。接下来，引入状态 $\omega_1^j = (j\nu, v_2^l)$ 和 $\hat{\omega}_1^j = ((j + \frac{1}{2})\nu, v_2^l)$，其中 $j = h, ..., k$。然后，按以下方式构造 ν-近似稀疏波:

$$u^\nu(t,x) := \begin{cases} v^l, & \frac{x}{t} < \lambda_1(\hat{\omega}_1^h), \\ \omega_1^j, & \lambda_1(\hat{\omega}_1^{j-1}) < \frac{x}{t} < \lambda_1(\hat{\omega}_1^j), \\ v^m, & \lambda_1(\hat{\omega}_1^k) < \frac{x}{t}. \end{cases} \tag{5.5}$$

若 $\sigma_1 < 0$，则状态 v^l 和 v^m 由一个以插值速度传播的单一激波连接

$$u^\nu(t,x) = \begin{cases} v^l, & \frac{x}{t} < \lambda_1^\phi(v^l, \sigma_1), \\ v^m, & \frac{x}{t} > \lambda_1^\phi(v^l, \sigma_1), \end{cases}$$

其中插值速度为

$$\lambda_1^\varphi(v^l, \sigma_1) = \varphi\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{\nu}}\right)\lambda_1^s(v^l, \sigma_1) + \left(1 - \varphi\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{\nu}}\right)\right)\lambda_1^r\left(v^l, \sigma_1\right), \tag{5.6}$$

with

$$\lambda_1^s(v^l, \sigma_1) = \lambda_1(v^l, \phi_1^-(v^l, \sigma_1)),$$

$$\lambda_1^r(v^l,\sigma_1)=\sum_j\left(\frac{\mathrm{meas}([j\nu,(j+1)\nu]\cap[v_1^m,v_1^l])}{|\sigma_1|}\right)\lambda_1(\hat\omega_1^j).$$

5.2. 经典的 ν-近似解。现在，设 $\hat{}u(0,x)\in\mathcal{S}^0_{BV,\epsilon}$ 为分段常数初始数据。我们如下构造 ν-近似解 u^ν：在时刻 $t=0$，使用第 5.1 节中的算法，求解由 $\hat{}u(0,x)$ 的跳跃所定义的所有黎曼问题。令新的分段常数解演化，直到首次相互作用发生。然后，使用该算法求解相互作用位置处的黎曼问题。通过归纳地重复这一过程，当 ϵ 充分小时，分段常数函数 u^ν可以定义到任意有限时刻 T，因为在 $[0,T]$ 中至多存在有限次相互作用，只要 $\hat{}u(0,x)\in\mathcal{D}$，其中 $\mathcal{D}$ 在第 5.4 节中定义。

5.3. **平移后的 ν-近似解**。沿用 [17], 中提出的思路，我们还考虑一种平移后的ν-近似前沿追踪解 ψ，其中仍使用 (5.4) 求解黎曼问题。对于稀疏波，我们仍像之前一样使用 (5.5) 中相同的近似波速。然而，对于激波，我们使用命题 4.1给出的平移波速。具体来说，例如，如果 (u^l,u^m) 由一个 1-激波连接（其中，物理变量中的 u^m 对应于黎曼变量中的 v^m），那么状态 v^l,v^m 由单个激波连接

$$u^\nu(t,x)=\begin{cases}v^l, & x<h(t),\\ v^m, & x>h(t),\end{cases}\tag{5.7}$$

其中 h 由应用命题 4.1 并取 $u^l=u_L$ 和 $u^m=u_R$（当 $\sigma<-2\sqrt{\nu}$时）得到。当 $\sigma>-2\sqrt{\nu}$时，状态 (v^l,v^m) 不一定是激波，因此我们改为选取命题 4.1 中与附近的物理激波 $(v^l,\phi_i^-(v^l,\sigma))$相对应的平移。注意到，供后续使用，

$$\begin{aligned}|\Phi_i^\nu(v^l,\sigma)-\phi_i^-(v^l,\sigma)|&\le K|\sigma|^3,\\ |\lambda_i^\varphi(v^l,\sigma)-\lambda_i^s(v^l,\sigma)|&\le K\nu,\end{aligned}\tag{5.8}$$

其中 λ_i^φ 是插值得到的激波速度（5.6），而 λ_i^s 是 Rankine-Hugoniot 速度。第一个估计由（5.4）以及关于激波曲线的经典渐近估计得出（见引理 D.1）。第二个估计可见 [8, 第 7]节。

正如 [15, 第 16], 页所述，运用 [8] 中针对经典 ν-近似解所发展的类似论证，我们可以证明，平移后的 ν-近似解 ψ 在任意有限时刻 T 之前都有定义，因为对于 $\mathcal{D}$ 中的任意初始数据，$[0,T]$ 中只会发生有限次相互作用。

注 5.1。需要注意的一个关键性质是，命题 4.1 中针对激波所构造的平移，保证黎曼问题的解中产生的波不会在未来时刻相遇，即使激波以平移后的速度传播；只要 ϵ_1 足够小，使得所有激波都满足命题 4.1。

5.4. **BV 范数的控制**。对于经典近似解和移位的 ν-近似解，我们采用以下记号表示全变差和 Glimm 势。在任意时刻 t，我们用 $\sigma_{i,\alpha}$（强度为$|\sigma_{i,\alpha}|$）表示波（及其强度），其中对应于 $\sigma_{i,\alpha}$ 的波位于 $x=x_\alpha$，属于第 i^{th} 族。这里稍微滥用了记号：在形成稀疏波扇的相互作用时刻，可能有多个波对应于 $\sigma_{i,\alpha}$，但它们随后会立即分裂。

对于由经典算法或移位的 ν-近似算法生成的任意分段常数函数 u，我们记：

$$V(u):=\sum_\alpha\sum_i|\sigma_{i,\alpha}|,\quad Q(u):=\sum_{\sigma_{i,\alpha},\sigma_{j,\beta}\in\mathcal{A}}|\sigma_{i,\alpha}\sigma_{j,\beta}|,\quad U(u):=V(u)+\kappa Q(u),\tag{5.9}$$

其中 $\mathcal{A}$ 是相向波对的集合，而 $\kappa>0$ 是待定常数。回忆一下，$\sigma_{i,\alpha}$ 与 $\sigma_{j,\beta}$ 相向，当且仅当 $x_\alpha<x_\beta$ 且 $j<i$，或者 $j=i$ 且 $\min(\sigma_{i\alpha},\sigma_{j,\beta})<0$。

经典的和经过平移的 ν-近似解在任意有限时刻 T之前都定义良好；如果初始数据属于域 $\mathcal{D}$（见命题 4]），那么在 $[0,T]$ 中只会发生有限次相互作用，该域定义如下

$$\mathcal{D}:=\{u-d\in L^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)\,|\,u\text{ piecewise constant},\,0<U(u)<\epsilon\},\tag{5.10}$$

当 ϵ 足够小时且 κ 足够大时。此外， $U(u^\nu(t,\cdot))$ 随 t 衰减，并且存在一个常数K ，使得对任意 t:

$$\frac{1}{K}||u^\nu(t,\cdot)||_{BV(\mathbb{R})} \leq U(u^\nu(t,\cdot)) \leq K||u^\nu||_{BV(\mathbb{R})}. \tag{5.11}$$

对平移后的 ν-近似解也有同样的结论，依据 [15, 方程 (4.22)]

$$||\psi(t,\cdot)||_{BV(\mathbb{R})} \leq K||\psi(0,\cdot)||_{BV(\mathbb{R})}. \tag{5.12}$$

注 5.2. 存在一个 δ_0 充分小的值，使得以下结论成立。设 $u^0 \in L^1(\mathbb{R})$ 满足 $||u^0 - d||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \delta_0$ 和 $||u^0||_{BV(\mathbb{R})} \leq \delta_0$。设 u_ν 是一列以初始数据$u_\nu(0,\cdot) \to u^0$ 为 L^2 的 ν-近似解，其中 $\nu \to 0$。那么，利用 (5.11)，我们可以取极限 $\nu \to 0$ ，得到方程 (1.1) 的一个弱熵解 u ，其初始数据为 u^0。由于每个 u^ν 都具有有限传播速度这一性质，极限情形下该性质仍然成立。也就是说， $u(t,x)$ 的值仅由区间$[x-ct, x+ct]$上的初始值 u^0 决定，其中常数 c 是信息传播速度（参见注 7.2）。

5.5. **经典及平移 L^1近似解的加权 ν估计**。 本节引用 [8] 和 [15] 中的结果，讨论如何控制由各种ν近似前沿追踪格式生成的两个解之间的距离。第一个结果控制两个经典 ν近似解之间的距离。

引理 5.2 ([8, 命题 8])**.** 对于任意 $\mathcal{S}$（即经典 ν近似半群），存在一个加权距离 d_ν ，它与 L^1距离等价，且等价常数关于 ν一致，即

$$\frac{1}{K}||u-\overline{u}||_{L^1(\mathbb{R})} \leq d_\nu(u,\overline{u}) \leq K||u-\overline{u}||_{L^1(\mathbb{R})},$$

对某个 $K>0$成立。此外， d_ν 关于半群 $\mathcal{S}$是收缩的，即 .

$$d_\nu(\mathcal{S}_t u_0, \mathcal{S}_t \overline{u}_0) \leq d_\nu(u_0, \overline{u}_0),$$

对于任意 $t \geq 0$ 和初始数据 $u_0, \overline{u_0} \in \mathcal{D}$。

第二个结果控制经典与平移 ν近似解之间的距离 n.

引理 5.3 ([15, 引理 4.4])**.** 设 u 为经典 ν近似前沿追踪解，按第 5.2节所述方法构造；再设 ψ 为 ν近似平移前沿追踪解，按第 5.3节所述方法构造，其激波以人工速度 $h_\alpha(t)$移动。那么，在分布的意义下

$$\frac{d}{dt}d_\nu(u(t,\cdot),\psi(t,\cdot)) \leq K\sum_{\alpha=1}^{n}|\sigma_\alpha||\dot{h}_\alpha(t) - \dot{h}_{true,\alpha}(t)|, \tag{5.13}$$

对某个常数 $K>0$，其中 α 中的求和遍历 ψ 在时刻 t的所有激波。量 h_α 是对于 $\psi(t,x)$ 的人工速度，由命题 4.1给出；而 $h_{true,\ \alpha}$ 是 ψ中的这个间断若为经典前沿追踪解时的速度（由 (5.6)给出）。

6. 权函数 a

本节中，我们构造权函数 $a(t,x)$，以通过命题 L^2获得 -稳定性；参见命题 4.1 和命题 4.2。我们以与 [15]类似的方式定义权函数。不过，由于我们需要同时对激波和稀疏波赋予权重，而非仅对激波赋予权重，因此权函数略有调整。在此前所有关于 a-收缩的研究中，由于假设 1 (d)成立，稀疏波无需赋予权重。我们继续采用第 5节引入的记号。最后，对于任意函数 $f(t)$，记

$$\Delta f(t) := f(t+) - f(t-).$$

6.1. **波相互作用估计**。 首先，我们回顾 [8] 中的基本相互作用估计。此后，给定一个平移后的 ν-近似解 ψ (定义见第 5.3 节)，我们定义 $U(t)\colon = U(\psi(t,\cdot))$ 以及 $Q(t)\colon = Q(\psi(t,\cdot))$。

引理 6.1 ([8，引理 5])。 对于任意时刻 t ，强度为 $|\sigma_i|$ 和 $|\sigma_j|$ 的波发生相互作用，我们有 e

$$\Delta U(t) \leq -\frac{\kappa}{2}|\sigma_i||\sigma_j|.$$

此外，当在 (t,x) 处，来自第二族、强度为σ_i''的入射波与来自第一族、强度为 σ_i'的入射波发生相互作用时，我们将第一族的出射波强度记为 σ_1 ，第二个波的强度记为 σ_2 ，并且有以下估计成立：

$$\left|\sigma_2 - \sum \sigma_i''\right| + \left|\sigma_1 - \sum \sigma_i'\right| \leq K_0|\Delta Q|,$$

其中某个常数 K_0 与 κ无关。最后，以下性质成立：

(1) 在任意 *family, if th*有两个或更多入射稀疏波 f作用波，*t* h它们不能 *be ad* 相邻。*(2)* 若某一族中的所有入射波都是激波，则该族的出射波仍是激波。

我们注意到，引理 6.1在 [8] 中仅对经典 ν-近似解进行了证明，但正如 [15, 第 24] 页所述，它对平移后的解也成立。从引理6.1 (见 [8, 引理5]。

引理 6.2。 对于任意初始数据 $u^0 \in \mathcal{D}$，任意 $\kappa > 0$ 充分大的值以及任意 $\epsilon > 0$ 充分小的值，泛函 $U(t)$ 和 $Q(t)$ 均随时间递减。

6.2. **权函数的构造** a。 这里，我们给出与平移后的 $a(t,x)$ -近似前沿追踪解相关联的权函数 ν的定义。注意，对于1-激波，所需的权函数与 1-稀疏波所需的权函数完全相同，因为根据注 $C_1 = C_2$ **4.1**，我们可以取 **(** 对于 2- 波也是如此 **)**。据此，我们设

$$\frac{a_r}{a_l} = e^{-\frac{3C_1}{4}|\sigma|} \text{ for 1-waves, and } \frac{a_r}{a_l} = e^{\frac{3C_1}{4}|\sigma|} \text{ for 2-waves,}$$

其中 a_r 和 a_l 分别是 a 在该波右侧和左侧的取值，而 $C_1 = C_2$ 是命题 4.1 和命题 4.2中的常数。因此，当波强度足够小时

$$e^{\frac{3C_1}{4}|\sigma|} \approx 1 + \frac{3C_1}{4}|\sigma|,$$

因此，关于 a_r、 a_l （此处起 a_1、 a_2的作用）的条件在命题 4.1 和命题 4.2中均得到满足。我们将权函数 a 定义如下。首先，将测度 $\mu(t,\cdot)$ 定义为 x中的狄拉克测度之和：

$$\mu(t,x) = -\sum_{i:1-\text{wave}} |\sigma_i|\delta_{x_i(t)} + \sum_{i:2-\text{wave}} |\sigma_i|\delta_{x_i(t)}.$$

然后，定义权函数：

$$a(t,x) = \exp\left(\frac{3C_1}{4}\left(V(t) + \frac{3\kappa}{2}Q(t) + \int_{-\infty}^{x} \mu(t,y)\,\mathrm{d}y\right)\right), \tag{6.1}$$

其中 κ 足够大，具体取值稍后确定。

注 6.1。 请注意，我们的权函数与 $a(t,\ x)$ 在 [15, 方程 (5.13)], 中的权函数几乎完全相同，不同之处在于，我们对所有波赋予权重，而不仅仅是激波。

现在，我们陈述并证明函数 a 的一些重要性质。

命题 6.1. 对于固定的平移 ν-近似解 ψ，权函数 a 定义于 (6.1) ，满足以下性质：

(1) 对于每个没有波相互作用的时刻，以及每个 x ，若一个1-波 σ_α 位于 $x = x_\alpha(t)$中的 ψ，

$$1 - 2C_1|\sigma_\alpha| \leq \frac{a(t,x_\alpha(t)+)}{a(t,x_\alpha(t)-)} \leq 1 - \frac{C_1}{2}|\sigma_\alpha|. \tag{6.2}$$

(2) 对于每个没有波相互作用的时刻，以及每个满足以下条件的 x ： 一条 2 波 σ_α 位于 $x = x_\alpha(t)$ 内

$$1 + \frac{C_2}{2}|\sigma_\alpha| \leq \frac{a(t,x_\alpha(t)+)}{a(t,x_\alpha(t)-)} \leq 1 + 2C_2|\sigma_\alpha|. \tag{6.3}$$

(3) 对于每个 发生波相互作用的时刻 t，以及几乎处处的 x，权函数随时间衰减 e,

$$a(t+,x) \le a(t-,x), \tag{6.4}$$

当 κ 足够大时。这一点除了相互作用发生的有限多个点外均成立。

(4) 最后，我们有

$$\|1/a\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R})} + \|a\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R})} \le K, \tag{6.5}$$

对于某个常数 $K > 0$。

证明。性质（6.2）和（6.3）由定义（6.1）对于初始数据 $\psi(0, \cdot) \in \mathcal{D}$ 在 ϵ足够小时显然成立，因为此时任意激波 $|\sigma|$ 在 $\psi(t, \cdot)$ 的大小均被 ϵ 和 $e^{\frac{3C_1}{4}|\sigma|} \approx 1 + \frac{3C_1}{4}|\sigma|$ 所界定，且σ|足够小。—

现在，我们证明（6.4）。显然，在(t,x)平面上，任何两个跳跃之间的区域都满足（6.4）。接下来只需考虑发生波相互作用的时刻。假设在时刻 t只有一个相互作用点(t,x_0)。若有多个相互作用点，只需将以下证明分别应用于每个相互作用点即可。

回忆一下，我们可以将函数 $f = f_+ - f_-$ 分解为……，其中 $f_\pm = \frac{|f|\pm f}{2}$。如果 1-波 $\sum \sigma_i'$ 和 2-波$\sum \sigma_i''$ 在 (t, x_0) 处相互作用，那么

$$\begin{aligned}\mu(t+) - \mu(t-) &= \delta_{x_0}\left(|\sigma_2| - |\sigma_1| - \sum|\sigma_i''| + \sum|\sigma_i'|\right)\\ &\le \delta_{x_0}\left(\left||\sigma_2| - \sum|\sigma_i''|\right| + \left||\sigma_1| - \sum|\sigma_i'|\right|\right).\end{aligned} \tag{6.6}$$

我们将利用引理 6.1来证明

$$(6.6) \le \left((\Delta V)_- + \frac{\kappa}{2}|\Delta Q|\right)\delta_{x_0}, \tag{6.7}$$

当 κ 充分大时。注意，当（6.7）成立时，由（6.1）、（6.6）以及 $V(t) + \kappa Q(t)$ 和 $Q(t)$均随时间衰减这一事实，结合引理6.2，可得

$$\frac{a(t+,x)}{a(t-,x)} \le 1 \implies a(t+,x) - a(t-,x) \le 0,$$

对于任意 $x \in \mathbb{R}$，除了相互作用点 (t, x_0)。

接下来证明（6.7）。首先，通过分类讨论可得以下估计：

$$\left||\sigma_2| - \sum|\sigma_i''|\right| \le \sum|\sigma_i''| - |\sigma_2| + 2K_0|\Delta Q|. \tag{6.8}$$

情形 1： 如果所有入射2-波类型相同，那么由引理6.1可知，出射2-波与所有入射波类型相同。如果所有2-波都是激波，那么由引理 6.1

$$\begin{aligned}\left|(\sigma_2)_+ - \sum(\sigma_i'')_+\right| &= 0,\\ \left|(\sigma_2)_- - \sum(\sigma_i'')_-\right| &\le K_0|\Delta Q|.\end{aligned}$$

如果入射 2-波仅为一个离散稀疏波，则我们改为得到

$$\begin{aligned}\left|(\sigma_2)_+ - \sum(\sigma_i'')_+\right| &\le K_0|\Delta Q|,\\ \left|(\sigma_2)_- - \sum(\sigma_i'')_-\right| &= 0.\end{aligned}$$

So

$$\left||\sigma_2| - \sum|\sigma_i''|\right| \le \left|(\sigma_2)_+ - \sum(\sigma_i'')_+\right| + \left|(\sigma_2)_- - \sum(\sigma_i'')_-\right| \le K_0|\Delta Q|,$$

由此可得（6.8）。

情形 2： 否则，必定既有入射 2-稀疏波，也有 2-激波。首先，假设 $\sigma_2 \ge 0$。那么，根据引理 6.1

$$\begin{aligned}K_0|\Delta Q| \ge \left|\sigma_2 - \sum\sigma_i''\right| &= \left|\sigma_2 - \sum(\sigma_i'')_+ + \sum(\sigma_i'')_-\right|\\ &\ge \sigma_2 - \sum(\sigma_i'')_+ + \sum(\sigma_i'')_-,\end{aligned}$$

so

$$\sigma_2 - \sum(\sigma_i'')_+ \le K_0|\Delta Q| - \sum(\sigma_i'')_- \le K_0|\Delta Q|. \tag{6.9}$$

现在，若 $\sigma_2 - \sum(\sigma_i'')_+ \ge 0$，则（6.9）给出

$$\left|(\sigma_2)_+ - \sum(\sigma_i'')_+\right| \le K_0|\Delta Q|, \tag{6.10}$$

而如果 $\sigma_2 - \sum(\sigma_i'')_+ \le 0$,

$$\left|(\sigma_2)_+ - \sum(\sigma_i'')_+\right| = \sum(\sigma_i'')_+ - |\sigma_2|. \tag{6.11}$$

结合起来，(6.10) 和 (6.11) 得到

$$\left|(\sigma_2)_+ - \sum(\sigma_i'')_+\right| \le 2K_0|\Delta Q| + \sum(\sigma_i'')_+ - |\sigma_2|.$$

结合 $|(\sigma_2)_- - \sum(\sigma_i'')_-| = \sum(\sigma_i'')_-$，我们得到

$$\begin{aligned}\left||\sigma_2| - \sum|\sigma_i''|\right| &\le \left|(\sigma_2)_+ - \sum(\sigma_i'')_+\right| + \left|(\sigma_2)_- - \sum(\sigma_i'')_-\right| \\ &\le \sum|\sigma_i''| - |\sigma_2| + 2K_0|\Delta Q|,\end{aligned}$$

从而证明了 (6.8)。

现在，假设 $\sigma_2 \le 0$。那么，引理 6.1 给出

$$\begin{aligned}K_0|\Delta Q| \ge \left|\sigma_2 - \sum\sigma_i''\right| &= \left|\sigma_2 - \sum(\sigma_i'')_+ + \sum(\sigma_i'')_-\right| \\ &\ge -\sigma_2 + \sum(\sigma_i'')_+ - \sum(\sigma_i'')_-,\end{aligned}$$

so

$$-\sigma_2 - \sum(\sigma_i'')_- \le K_0|\Delta Q| - \sum(\sigma_i'')_+ \le K_0|\Delta Q|,$$

并与上述情况类似:

$$\begin{aligned}\left|(\sigma_2)_- - \sum(\sigma_i'')_-\right| &\le 2K_0|\Delta Q| + \sum(\sigma_i'')_- + \sigma_2 \\ &= \sum(\sigma_i'')_- - |\sigma_2| + 2K_0|\Delta Q|.\end{aligned}$$

结合 $|(\sigma_2)_+ - \sum(\sigma_i'')_+| = \sum(\sigma_i'')_+$，可得

$$\begin{aligned}\left||\sigma_2| - \sum|\sigma_i''|\right| &\le \left|(\sigma_2)_+ - \sum(\sigma_i'')_+\right| + \left|(\sigma_2)_- - \sum(\sigma_i'')_-\right| \\ &\le \sum|\sigma_i''| - |\sigma_2| + 2K_0|\Delta Q|.\end{aligned}$$

这表明在所有情况下，(6.8) 均成立。估计式

$$\left||\sigma_1| - \sum|\sigma_i'|\right| \le \sum|\sigma_i'| - |\sigma_1| + 2K_0|\Delta Q|, \tag{6.12}$$

由完全类似的考量可得。最后，取 $\kappa > 8K_0$，由 (6.7) 可知，这由 (6.12)、(6.8) 以及定义 (5.9) 得出。

最后，根据引理 V 和 Q 的时间衰减，可得 U 和 Q 的一致有界性，立即得到 (6.2)，从而推出 (6.5)。□

7. 命题 3.1的证明

本节中，我们证明命题 3.1，沿用 [15] ，并作了一些小改动，以处理稀疏波的加权。首先，我们讨论证明中将会用到的一些重要技术细节。

7.1. **停止并重新启动时钟。** 将相对熵方法与针对弱解 $u \in \mathcal{S}^{d,\epsilon}_{\text{弱解}}$ 的前沿追踪方案结合时，每当两道波相撞，我们都需要“停止并重新启动时钟”。由于解 $u \in \mathcal{S}^{d,\epsilon}_{\text{弱解}}$ 属于低正则性类，这就需要使用近似极限（见 [24, 第 55-57]页）。以下估计将在第7.2.1节的望远镜求和中使用。

引理 7.1. 设 $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ 满足 (1.1)、(1.3) 且初始数据为 u^0。此外，假设 u 满足强迹性质（定义 3.1）。那么，对所有 $v \in W$ 以及所有 c， $d \in \mathbb{R}$ 满足 $c < d$，近似左极限和右极限：

$$\operatorname{ap}\lim_{t\to t_0^{\pm}} \int_c^d \eta(u(t,x)|v)\,\mathrm{d}x,$$

对所有 $t_0 \in (0,T)$ 均存在，且满足：

$$\operatorname{ap}\lim_{t\to t_0^{-}} \int_c^d \eta(u(t,x)|v)\,\mathrm{d}x \geq \operatorname{ap}\lim_{t\to t_0^{+}} \int_c^d \eta(u(t,x)|v)\,\mathrm{d}x.$$

此外，在 $t_0 = 0$ 处近似右极限存在，且满足：

$$\int_c^d \eta(u^0(x)|v)\,\mathrm{d}x \geq \operatorname{ap}\lim_{t\to t_0^{+}} \int_c^d \eta(u(t,x)|v)\,\mathrm{d}x.$$

证明见 [32, 引理 2.5] 。

下一个引理将刻画信息锥的边界。

引理 7.2 ([21, 方程 (5.2.5)，第 123])。 存在一个常数 $c > 0$ 使得：

$$|q(a;b)| \leq c\eta(a|b), \text{ for any } (a,b) \in W \times W.$$

证明。 对于任意 $q(b;\ b) = \partial_1 q(b;\ b) = 0$，因此由引理 4.1 和 $\nabla^2 q \in C^0(W)$，存在一个常数 c 使得，

$$|q(a;b)| \leq K|a-b|^2 \leq c\eta(a|b).$$

□

7.2. **命题 3.1 的证明。** 最后，我们给出命题 3.1 的证明。取 R， $T > 0$，并令$\tau \in [0,T]$。

7.2.1. 步骤 1：耗散计算。考虑初始数据 v^0，使得对于 δ_0， $||v^0||_{BV} \leq \delta_0$,$||v^0 - d||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \epsilon$，且 $\epsilon > 0$ 足够小，从而满足引理 3.1、命题 4.1、命题 4.2 及 (5.10)。令 $u \in \mathcal{S}^{d,\epsilon}$ 为一个固定的野解。考虑一列前沿追踪近似 v_ν （定义见第 5.2 节），其初始数据满足 $v_\nu(0,\cdot) \to v^0$ 在 L^2 中，当 $\nu \to 0$时。

注 7.1. 注意， [8, 命题 4]——存在一个 ν-近似解——对初始数据为 $v_\nu(0,\cdot) \in \mathcal{D}$ 的分段常数函数成立。特别地，第 5 节的结果要求 $v_\nu(0,\cdot) - d \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$。请注意，这对 $v^0 \in \mathcal{S}^{0,\epsilon}_{BV}$ 的 L^2-近似并非先验保证。不过，由于命题 3.1 中的 L^2-范数是在有限区间 $[-R-cT, R+cT]$ 上计算的，我们只需使用截断初始数据

$$\tilde{v}^0 = \begin{cases} d & x \leq -\tilde{R}, \\ v^0(x) & x \in [-\tilde{R},\tilde{R}], \\ d & x \geq \tilde{R}, \end{cases}$$

对于某个 $\tilde{R}$ 充分大的值。我们选取 δ^0 和 ϵ 充分小，使得 $||\tilde{v}^0||_{BV(\mathbb{R})}$ 对 [8,命题 4] 适用。这不会影响命题 3.1 中的估计（3.2）和（3.1 ，因为有限传播速度。

对于固定的 ν，考虑平移后的 ν-近似前沿追踪解 ψ，其中 $\psi(0,x) = v_\nu(0,x)$ （定义见第5.3节）。对于该 ψ，考虑在（ $a(t,x)$ 中定义的相关权函数6.1）。考虑两个相邻的

相互作用时刻 $t_j < t_{j+1}$ 在平移后的前沿追踪解 ψ 中。将 (t_j, t_{j+1}) h_1，……，h_N 中不连续的曲线称为，对于某个 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$h_1(t) < \cdots < h_N(t),$$

对所有 $t \in (t_j,\ t_{j+1})$。现在我们来定义 $t \geq 0$ 的信息锥：

$$\begin{aligned} h_0(t) &:= -R + c(t-\tau), \\ h_{N+1}(t) &:= R - c(t-\tau). \end{aligned} \tag{7.1}$$

注 7.2。回忆一下，c由引理 7.2定义。我们还将 c 酌情增大，使其大于命题 h 中任意平移函数的速度大小 4.1 或（5.6）、（5.5）中的经典波速度。我们指出，ψ 中的波与信息锥（其边界为 h_0、h_{N+1}）之间不存在相互作用。

现在，对于 $t \in [t_j, t_{j+1}]$，注意在锥的这段区域上

$$Q^i_{t_j,t} = \{(r,x) \,|\, t_j < r < t, h_i(r) < x < h_{i+1}(r)\},$$

两个函数 $\psi(r,\ x)$ 和 $a(r,\ x)$ 均为常数。因此，在$Q^i_{t_j \text{上} t}$ 对（1.3）积分，并使用强迹性质（定义 3.1），可得

$$\begin{aligned} &\operatorname{ap}\lim_{s\to t-} \int_{h_i(t)}^{h_{i+1}(t)} a(t-,x)\eta(u(s,x)|\psi(t,x))\,\mathrm{d}x \\ &\qquad \leq \operatorname{ap}\lim_{s\to t_j^+} \int_{h_i(t_j)}^{h_{i+1}(t_j)} a(t_j+,x)\eta(u(s,x)|\psi(t_j,x))\,\mathrm{d}x + \int_{t_j}^{t} (F_i^+(r) - F_{i+1}^-(r))\,\mathrm{d}r, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} F_i^+(r) &= a(r,h_i(r)+)\left(q(u(r,h_i(r)+);\psi(r,h_i(r)+)) - \dot{h}_i(r)\eta(u(r,h_i(r)+)|\psi(r,h_i(r)+))\right), \\ F_i^-(r) &= a(r,h_i(r)-)\left(q(u(r,h_i(r)-);\psi(r,h_i(r)-)) - \dot{h}_i(r)\eta(u(r,h_i(r)-)|\psi(r,h_i(r)-))\right). \end{aligned}$$

对 i 求和，并将对应于 i 的项合并为一项求和，将对应于 $i+1$ 的项合并为另一项求和，我们得到

$$\begin{aligned} &\operatorname{ap}\lim_{s\to t-} \int_{-R+c(t-\tau)}^{R-c(t-\tau)} a(t-,x)\eta(u(s,x)|\psi(t,x))\,\mathrm{d}x \\ &\qquad \leq \operatorname{ap}\lim_{s\to t_j^+} \int_{-R+c(t_j-\tau)}^{R-c(t_j-\tau)} a(t_j+,x)\eta(u(s,x)|\psi(t_j,x))\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{N}\int_{t_j}^{t} (F_i^+(r) - F_i^-(r))\,\mathrm{d}r, \end{aligned}$$

其中我们用到了 $F_0^+ \leq 0$和 $F_{N+1}^- \geq 0$，这是由引理 7.2、c 的定义以及 $\dot{h}_0 = c = -\dot{h}_{N+1}$ 得到的。我们将右侧的求和分为两部分：第一部分收集激波，另一部分收集稀疏波。由命题4.1 和命题6.1 可知，对于任意一个 i 激波前沿：

$$\begin{aligned} F_i^+(r) - F_i^-(r) \leq &-\frac{1}{K}|\psi(r,h_i(r)+) - \psi(r,h_i(r)-)| \\ &\times \left(\lambda^{\varphi}_{\alpha_i}(\psi(r,h_i(r)+),\psi(r,h_i(r)-)) - \dot{h}_i(r)\right)^2 \\ &+ K\nu|\psi(r,h_i(r)+) - \psi(r,h_i(r)-)|, \end{aligned} \tag{7.2}$$

其中 $\lambda^{\varphi}_{\alpha_i}$ 是激波的 ν-近似速度（5.6），而 $\alpha_i = 1,\ 2$ 是 i^{th} 前沿所属的波族。注意，界（7.2）中的最后一项用于计入 $\sigma > -2\sqrt{\nu}$ 的小激波误差：这些误差可由方程（ ν-近似曲线和速度的界（5.8）推导得出。

记 $\mathcal{R}(r)$ 为 i 在时刻 r对应稀疏波的集合。于是，由命题 4.2和命题 6.1，可得

$$\sum_{i\in\mathcal{R}(r)} \int_{t_j}^{t} (F_i^+(r) - F_i^-(r))\,\mathrm{d}r \leq K\nu(t-t_j) + K\nu|\mu_u|(Q_{t_j,t}), \tag{7.3}$$

其中 $Q_{t_j,\ t} := \cup_i Q^i_{t_j,\ t}$ 对于 $t \in [t_j, t_{j+1}]$。汇总两族波，并记 $\mathcal{S}(r)$ 为对应激波的集合：

$$\begin{aligned}\operatorname{ap}\lim_{s\to t-}\int_{-R+c(t-\tau)}^{R-c(t-\tau)} a(t-,x)\eta(u(s,x)|\psi(t,x))\,\mathrm{d}x \le \operatorname{ap}\lim_{s\to t_j^+}\int_{-R+c(t_j-\tau)}^{R-c(t_j-\tau)} a(t_j+,x)\eta(u(s,x)|\psi(t_j,x))\,\mathrm{d}x\\ -\frac{1}{K}\left(\int_{t_j}^{t}\sum_{i\in\mathcal{S}(r)}|\psi(r,h_i(r)+)-\psi(r,h_i(r)-)|\right.\\ \left.\times(\lambda^{\varphi}_{\alpha_i}(\psi(r,h_i(r)+),\psi(r,h_i(r)-))-\dot{h}_i(r))^2\,\mathrm{d}r\right)\\ +K\nu(t-t_j)+K\nu|\mu_u|(Q_{t_j,t}).\end{aligned}$$

最后，令 $0<t_1<\ldots<t_J$为 τ之前发生波相互作用的时刻。另记 $t_0=0$和 $t_{J+1}=\tau$。由 η的凸性、引理7.1以及（6.4），可得：

$$\begin{aligned}&\int_{-R}^{R} a(\tau,x)\eta(u(\tau,x)|\psi(\tau,x))\,\mathrm{d}x-\int_{-R-c\tau}^{R+c\tau} a(0,x)\eta(u(0,x)|\psi(0,x))\,\mathrm{d}x\\ &\quad\le \operatorname{ap}\lim_{s\to\tau^+}\int_{-R}^{R} a(\tau,x)\eta(u(s,x)|\psi(\tau,x))\,\mathrm{d}x-\int_{-R-c\tau}^{R+c\tau} a(0,x)\eta(u(0,x)|\psi(0,x))\,\mathrm{d}x\\ &\quad\le\sum_{j=1}^{J+1}\left(\operatorname{ap}\lim_{s\to t_j+}\int_{-R+c(t_j-\tau)}^{R-c(t_j-\tau)} a(t_j-,x)\eta(u(s,x)|\psi(t_j,x))\,\mathrm{d}x\right.\\ &\qquad\left.-\operatorname{ap}\lim_{s\to t_{j-1}+}\int_{-R+c(t_{j-1}-\tau)}^{R-c(t_{j-1}-\tau)} a(t_{j-1}-,x)\eta(u(s,x)|\psi(t_{j-1},x))\,\mathrm{d}x\right)\\ &\quad\le\sum_{j=1}^{J+1}\left(\operatorname{ap}\lim_{s\to t_j-}\int_{-R+c(t_j-\tau)}^{R-c(t_j-\tau)} a(t_j-,x)\eta(u(s,x)|\psi(t_j,x))\,\mathrm{d}x\right.\\ &\qquad\left.-\operatorname{ap}\lim_{s\to t_{j-1}+}\int_{-R+c(t_{j-1}-\tau)}^{R-c(t_{j-1}-\tau)} a(t_{j-1}-,x)\eta(u(s,x)|\psi(t_{j-1},x))\,\mathrm{d}x\right)\\ &\quad\le-\frac{1}{K}\left(\int_0^{\tau}\sum_{i\in\mathcal{S}(r)}|\psi(r,h_i(r)+)-\psi(r,h_i(r)-)|\right.\\ &\qquad\left.\times(\lambda^{\varphi}_{\alpha_i}(\psi(r,h_i(r)+),\psi(r,h_i(r)-))-\dot{h}_i(r))^2\,\mathrm{d}r\right)\\ &\qquad+K\nu+K\nu|\mu_u|(Q),\end{aligned}$$

其中 $Q:=\cup_{j=0}^{J-1}Q_{t_j,\ t_{j+1}}$ 是完整的信息锥，其边界由（7.1）给出。由此可得：

$$\int_{-R}^{R} a(\tau,x)\eta(u(\tau,x)|\psi(\tau,x))\,\mathrm{d}x\le\int_{-R-c\tau}^{R+c\tau} a(0,x)\eta(u(0,x)|\psi(0,x))\,\mathrm{d}x+K\nu+K\nu|\mu_u|(Q),\tag{7.4}$$

and

$$\begin{aligned}&\frac{1}{K}\left(\int_0^{\tau}\sum_{i\in\mathcal{S}(r)}|\psi(r,h_i(r)+)-\psi(r,h_i(r)-)|\times(\lambda^{\varphi}_{\alpha_i}(\psi(r,h_i(r)+),\psi(r,h_i(r)-))-\dot{h}_i(r))^2\,\mathrm{d}r\right)\\ &\qquad\le\int_{-R-c\tau}^{R+c\tau} a(0,x)\eta(u(0,x)|\psi(0,x))\,\mathrm{d}x+K\nu+K\nu|\mu_u|(Q),\end{aligned}\tag{7.5}$$

其中 $\lambda^{\varphi}_{\alpha_i}$ 是激波的 ν-近似速度（5.6），且 $\alpha_i=1,\ 2$ 是 i^{th} 前沿所属的波族。

7.2.2. 步骤 *2*：平移量的计算。 在下一步中，我们控制 L^1-距离，即 ψ与 v_ν之间的距离，其中后者是具有初始数据 ν $u_\nu(0,\ \cdot)=\psi(0,\ \cdot)$的经典 5.2 和 5.3，由引理 可得

$$\begin{aligned}||v_\nu(\tau,\cdot)-\psi(\tau,\cdot)||_{L^1((-R,R))} &\le K d_\nu(u_\nu(\tau,\cdot),\psi(\tau,\cdot))\\ &\le K\int_0^\tau \sum_{i:\text{shock in }\psi\text{ at time }r} |\psi(r,h_i(r)-)-\psi(r,h_i(r)+)|\big|\dot h_i-\lambda^{\varphi}_{\alpha_i}\big|\,\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

其中 $\lambda^{\varphi}_{\alpha_i}$ 是 ν-近似激波速度（5.6）。应用柯西-施瓦茨不等式，利用 ψ（$t,\ \cdot$）（5.12），并利用（7.5），得到

$$\begin{aligned}&||v_\nu(\tau,\cdot)-\psi(\tau,\cdot)||_{L^1((-R,R))}\\ &\le K\Big[\int_0^\tau \sum_{i:\text{shock in }\psi\text{ at time }r} |\psi(r,h_i(r)-)-\psi(r,h_i(r)+)|\,\mathrm{d}r\Big]^{\frac12}\\ &\quad\times\Big[\int_0^\tau \sum_{i:\text{shock in }\psi\text{ at time }r} |\psi(r,h_i(r)-)-\psi(r,h_i(r)+)|\big|\dot h_i-\lambda^{\varphi}_{\alpha_i}(\psi(r,h_i(r)+),\psi(r,h_i(r)-))\big|^2\,\mathrm{d}r\Big]^{\frac12} \qquad (7.6)\\ &\le K\tau^{1/2}\Big[\int_{-R-c\tau}^{R+c\tau} a(0,x)\eta(u(0,x)|\psi(0,x))\,\mathrm{d}x+K\nu+K\nu|\mu_u|(Q)\Big]^{\frac12}.\end{aligned}$$

7.2.3. 步骤 *3*：综合以上结果。 由三角不等式可得

$$||u(\tau,\ \cdot)-v_\nu(\tau,\ \cdot)||_{L^1((-R,\ R))}\le||u(\tau,\ \cdot)-\psi(\tau,\ \cdot)||_{L^1((-R,\ R))}+||\psi(\tau,\ \cdot)-v_\nu(\tau,\ \cdot)||_{L^1((-R,\ R))}.$$

由 Hölder 不等式可得：

$$||u(\tau,\cdot)-v_\nu(\tau,\cdot)||_{L^1((-R,R))}\le\sqrt{2R}||u(\tau,\cdot)-\psi(\tau,\cdot)||_{L^2((-R,R))}+||\psi(\tau,\cdot)-v_\nu(\tau,\cdot)||_{L^1((-R,R))}.$$

那么，由引理4.1、（7.4）和（7.6），我们得到

$$||u(\tau,\cdot)-v_\nu(\tau,\cdot)||_{L^1((-R,R))}\le K\left(\sqrt{2R}+\sqrt{\tau}\right)\Big[||u(0,\cdot)-u_\nu(0,\cdot)||^2_{L^2((-R-ct,R+ct))}+K\nu+K\nu|\mu_u|(Q)\Big]^{\frac12},$$

其中我们还用到了 $u_\nu(0,\cdot)=\psi(0,\cdot)$。

我们回顾一下， μ_u 是局部有限的，而 Q 是紧的，从而得到 $|\mu_u|(Q)<\infty$。最后，取极限$\nu\to0$，我们得到方程 (1.1) 的一个解 v，满足 $v(0,\cdot)=v^0(\cdot)$，且 $v_\nu(t,\cdot)\to v(t,\cdot)$ 在 L^1 中对所有 t成立。此外，我们还得到估计式 (3.1)。利用插值不等式 $||f||_{L^2}\le\sqrt{||f||_{L^1}||f||_{L^\infty}}$ 可得 (3.2)。命题 3.1 的证明至此完成。

附录 A. 一个满足(GL) 但不满足假设 1 的双曲系统

本节给出一个满足(GL)但不满足相对于原点任意邻域的假设 1(d) 的双曲系统示例。我们采用标准约定

$$\nabla\lambda_i(u)\cdot r_i(u)>0,\qquad u\in\mathcal{V}, \tag{A.1}$$

$$\ell_i(u)\cdot r_j(u)=\delta_{ij},\quad i,j=1,2. \tag{A.2}$$

首先，我们证明一个引理（沿用 [17]），它给出了一个有用的判据，用于判断某个系统是否相对于集合 $\mathcal{V}$ 满足假设 1(d)。

引理 A.1. 设 (1.1) 满足 ***(GL)***，并且还相对于 $\mathcal{V}\subset\mathcal{G}$ 满足假设 *1(d)*。那么，对于任意 $b\in\mathcal{V}$,

$$\ell_i(b)f''(b)(r_j(b),r_j(b))\ge0,\qquad for\ i\ne j\in\{1,2\}.$$

证明。 设 $b\in\mathcal{V}$。令 $\ell_i(b)$ 为该 i^{th} 族在 b 处的左特征向量。于是，根据假设 1(d)，$u\mapsto\ell_i(b)f(u)$ 在 $\mathcal{V}$ 上是凸函数或凹函数。现在，令 $r_i(u)$ 为该 i^{th} 族的右特征向量（不一定取于 b 处）。接下来，我们计算：

$$\ell_i(b)[f'(u)-f'(b)]r_i(u)=\ell_i(b)\lambda_i(u)r_i(u)-\lambda_i(b)\ell_i(b)r_i(u)=\ell_i(b)\cdot r_i(u)[\lambda_i(u)-\lambda_i(b)].$$

在 $u=b+\epsilon r_i(b)$ 处求值，除以 ϵ，并取极限 $\epsilon\to0$，得到

$$\ell_i(b)f''(b)(r_i(b),r_i(b))=(\nabla\lambda_i(b)\cdot r_i(b))(\ell_i(b)\cdot r_i(b))>0, \tag{A.3}$$

由 (A.1) 和 (A.2). 根据假设 1 第 (d) 项，这意味着函数 $u \mapsto \ell_i(b) \cdot f(u)$ 对所有 $b \in \mathcal{V}$ 都是凸的，即矩阵：

$$\ell_i(b) f''(b),$$

对所有 $b \in \mathcal{V}$ 都是半正定的。最后在 $r_j(b)$ 处求值：

$$\ell_i(b) f''(b)(r_j(b), r_j(b)) \geq 0, \quad i \neq j, \ b \in \mathcal{V}. \tag{A.4}$$

如所需。 □

注记 A.1. 在 [41], Smoller–Johnson 构造了全局 L^∞ 解，适用于某些满足 *Smoller–Johnson* 条件 的特殊系统，并且这些系统还具有其他一些特殊性质。我们注意到，(A.4) 正是相对于 $\mathcal{V}$而言的非严格形式的 Smoller–Johnson 条件。他们还指出，Smoller–Johnson 条件蕴含了 Glimm–Lax 的经典假设：在他们构造小i波时，两个弱 j波的相互作用总会产生一个 L^∞ 稀疏波解 [27]。

现在，我们使用引理 A.1 证明以下系统满足 (**GL**)，但不满足假设 1(d)。考虑通量为1.1 的系统 (

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} (u-1)^2 + 3uv - v^2 \\ (v+1)^2 + 3uv - u^2 \end{pmatrix}. \tag{A.5}$$

在原点处，我们得到

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

因此，在零点的某个邻域内，通量是严格双曲的，且 $\lambda_1(0) = -2$, $\lambda_2(0) = 2$，并且 $r_i(0) = \ell_i(0)^t = e_i$ 对 $i = 1, 2$ 成立，其中 e_i 是标准坐标向量。计算二阶导数可得

$$\ell_1(0) f''(0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

注意到

$$(\ell_1(0) r_1(0))(\nabla \lambda_1(0) r_1(0)) = \ell_1(0) f''(0)(r_1(0), r_1(0)) = 2 > 0,$$

由于 d 的连续性，对充分接近原点的所有 r_1, ℓ_1, f''以及 $\nabla \lambda_1$，该结论均成立。这表明，根据（A.3），该系统在原点的某个邻域内的第一族是真正非线性的（通过相同的计算可知，第二族也具有同样的性质）。

最后，我们注意到 $\ell_1(0) f''(0)(r_2(0)\ r_2(0)) = -2 < 0$。这表明通量（A.5）不满足假设 1 (d) （相对于原点的任意邻域），否则将与引理 A.1矛盾。

Appendix B. Entropy conservation

在本节中，我们证明命题2.3。虽然我们的证明是在1维情形下书写的，但同样的论证也适用于 $\mathbb{T}^d$。

首先，我们回顾一下：如果 $u \in B^\alpha_{p,\ \infty}(\mathbb{T}^1)$

$$\|u\|_{B^\alpha_{p,\infty}(\mathbb{T}^1)} := \|u\|_{L^p(\mathbb{T}^1)} + \sup_{y \in \mathbb{T}^1} \frac{\|u(\cdot) - u(\cdot - y)\|_{L^p(\mathbb{T}^1)}}{|y|^\alpha} < \infty.$$

由此定义，我们得到关于 u 及其磨光 u_δ 的以下界估计$= u * \gamma_\delta$:

$$\|\partial_x u_\delta\|_{L^p(\mathbb{T}^1)} \leq K \|u\|_{B^\alpha_{p,\infty}(\mathbb{T}^1)} \delta^{\alpha-1}, \tag{B.1}$$

$$\|u - u_\delta\|_{L^p(\mathbb{T}^1)} \leq K \|u\|_{B^\alpha_{p,\infty}(\mathbb{T}^1)} \delta^{\alpha}, \tag{B.2}$$

$$\|u(\cdot) - u(\cdot - y)\|_{L^p(\mathbb{T}^1)} \leq K \|u\|_{B^\alpha_{p,\infty}(\mathbb{T}^1)} |y|^{\alpha}. \tag{B.3}$$

我们采用的策略与 [19]的策略完全类似。我们将对系统（1.1）进行平滑化，从而推出熵守恒（存在误差项），并利用上述界估计推出在极限处熵守恒成立。

步骤 1：负时间延拓。 首先，我们注意到，给定一个解 $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^1)$，我们可以通过将其赋值为来将其延拓到负时间

$$u(t,x) := u(0,x) \quad \forall t < 0.$$

经过这次延拓后， u在分布意义下满足方程

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \begin{cases} 0 & t \geq 0, \\ \partial_x f(u(0,\cdot)) & t < 0. \end{cases} \tag{B.4}$$

步骤 2：时空磨光。接下来，我们令 γ 为一个光滑磨光子；也就是说， $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}), \int \gamma\, dx = 1$, $\operatorname{supp}(\gamma) \subset [-1,1]$, 且 $\gamma \geq 0$。随后将该磨光子

$$\gamma_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon}\gamma\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

对于任意固定的 t_0， $x_0 \in \mathbb{R}$ 我们定义测试函数

$$\Phi(t,x) = \gamma_\epsilon(t_0 - t)\gamma_\delta(x_0 - x).$$

用 B.4 测试 Φ ，得到在 $(t_0,\ x_0)$ 处取值的下列方程:

$$\partial_t u_{\epsilon,\delta} + \partial_x f(u_{\epsilon,\delta}) = \partial_x[f(u_{\epsilon,\delta}) - f(u)_{\epsilon,\delta}] + \int_{-\infty}^{0} \partial_x f(u_0)_\delta \gamma_\epsilon(s-t)\ \mathrm{d}s \tag{B.5}$$

其中 $u_{\epsilon,\ \delta} := u *_t \gamma_\epsilon *_x \gamma_\delta$。我们指出，在上述公式及后续公式中，$v_{\epsilon,\ \delta}$ 表示经过时空光滑化的函数，其中时间参数为 ϵ ，空间参数为 δ 。

将 (B.5) 乘以 $\nabla\eta(u_{\epsilon,\ \delta})$，利用 $u_{\epsilon,\ \delta}$ 的光滑性可推出

$$\partial_t \eta(u_{\epsilon,\delta}) + \partial_x q(u_{\epsilon,\delta}) = \nabla\eta(u_{\epsilon,\delta})\partial_x[f(u_{\epsilon,\delta}) - f(u)_{\epsilon,\delta}] + \nabla\eta(u_{\epsilon,\delta}) \int_{-\infty}^{0} \partial_x f(u_0)_\delta \gamma_\epsilon(s-t)\ \mathrm{d}s. \tag{B.6}$$

现在，我们用如下形式的测试函数乘以 (B.6)： $\phi\chi_\epsilon$，其中 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{T}^1)$ 且

$$\chi_\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \gamma_\epsilon(s+\epsilon)\, ds.$$

对时间和空间积分后，我们得到

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{T}^1} \chi_\epsilon \partial_t\phi\eta(u_{\epsilon,\delta}) + \chi_\epsilon\partial_x\phi q(u_{\epsilon,\delta})\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{T}^1} \chi_\epsilon\phi\nabla\eta(u_{\epsilon,\delta})\partial_x[f(u_{\epsilon,\delta}) - f(u)_{\epsilon,\delta}]\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{T}^1} \partial_t\chi_\epsilon\phi\eta(u_{\epsilon,\delta})\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{T}^1} \chi_\epsilon\phi\nabla\eta(u_{\epsilon,\delta}) \int_{-\infty}^{0} \partial_x f(u_0)_\delta\gamma_\epsilon(s-t)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{B.7}$$

步骤 3：光滑化参数的极限。我们首先注意到

$$-\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{T}^1} \partial_t\chi_\epsilon\phi\eta(u_{\epsilon,\delta})\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t = -\int_{-2\epsilon}^{\epsilon}\int_{\mathbb{T}^1} \gamma_\epsilon(t)\phi\eta(u_{\epsilon,\delta}(0,x))\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \to -\int_{\mathbb{T}^1} \phi(0,x)\eta(u_{\epsilon,\delta}(0,x))\ \mathrm{d}x$$

并注意到，由于估计B.7) 的最后一项趋于零

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{T}^1} \chi_\epsilon\phi\nabla\eta(u_{\epsilon,\delta}) \int_{-\infty}^{0} \partial_x f(u_0)_\delta\gamma_\epsilon(s-t)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \\ &\qquad \leq \|\phi\nabla\eta(u_{\epsilon,\delta})\partial_x f(u_0)_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{T}^1)} \int_{-\epsilon}^{T}\int_{-\infty}^{0} \gamma_\epsilon(s-t)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t \lesssim \epsilon, \end{aligned}$$

其中 T 是 所能支持的最长时间 ϕ 。因此，将 $\epsilon \to 0$ 代入（B.7），我们得到

$$\begin{aligned} \int_0^\infty\int_{\mathbb{T}^1} \partial_t\phi\eta(u_\delta) + \partial_x\phi q(u_\delta)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t &= \int_0^\infty\int_{\mathbb{T}^1} \phi\nabla\eta(u_\delta)\partial_x[f(u_\delta) - f(u)_\delta]\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \\ &\quad - \int_{\mathbb{T}^1} \phi(0,\cdot)\eta(u_\delta(0,\cdot))\ \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{B.8}$$

取 $\delta \to 0$ （B.8）的极限可得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_{\mathbb{T}^1} \partial_t \phi \eta(u) + \partial_x \phi q(u) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \lim_{\delta \to 0} \int_0^\infty \int_{\mathbb{T}^1} \phi \nabla \eta(u_\delta) \partial_x [f(u_\delta) - f(u)_\delta] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ - \int_{\mathbb{T}^1} \phi(0, \cdot) \eta(u(0, \cdot)) \, \mathrm{d}x\end{aligned} \tag{B.9}$$

为实现熵等式（2.21），我们必须证明对易子项收敛到零。为此，我们回顾以下引理：

引理 B.1 ([29, 引理 3。1])。令 $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{T}^1; B_{\epsilon_1}(d))$ 和 $f \in C^2(B_{\epsilon_1}(d))$。则存在一个常数$K$，使得

$$\|f(u)_\delta - f(u_\delta)\|_{L^q(\mathbb{T}^1)} \leq K \left(\|u_\delta - u\|^2_{L^{2q}(\mathbb{T}^1)} + \sup_{y \in \mathrm{supp}(\gamma_\delta)} \|u(\cdot) - u(\cdot - y)\|^2_{L^{2q}(\mathbb{T}^1)} \right).$$

利用估计式（B.1）、（B.2）和（B.3）应用引理 B.1，可知若 $u \in L^3(0, T; B^\alpha_{3, \infty}(\mathbb{R}))$，则对于$\alpha > 1/3$有

$$\int_0^T \|\partial_x u_\delta(t, \cdot)\|_{L^3(\mathbb{T}^1)} \|f(u_\delta(t, \cdot)) - f(u(t, \cdot))_\delta\|_{L^{3/2}(\mathbb{T}^1)} \, \mathrm{d}t \leq C \|u\|^3_{L^3(0,T;B^\alpha_{3,\infty}(\mathbb{T}^1))} \delta^{3\alpha - 1} \to 0,$$

从而证明 u 局部守恒熵。

Appendix C. Approximations of Sobolev data

本节中，我们构造一列逼近 $\{u_\delta\}_{\delta > 0}$，用于逼近数据 $u \in W^{s, p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$，适用于$s > 0$ 和 $p \geq 1$。我们给出 u_δ 变化的估计以及其收敛到 u的速率。具体而言，我们固定一个磨光子 $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$，使其满足（2.3）。定义 $\gamma_\delta(x) := \frac{1}{\delta} \gamma(\frac{x}{\delta})$，我们考虑序列

$$u_\delta = u * \gamma_\delta,$$

对于任意 $u \in W^{s, p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; B_{\epsilon_1}(d))$。

引理 C.1。设 $\epsilon_1 > 0$。对于任意 $u \in L^\infty(\mathbb{R}; B_{\epsilon_1}(d))$，有

$$TV(u_\delta; L) \leq K \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{L}{\delta}, \quad \forall \, L > 0. \tag{C.1}$$

此外，若 $u \in W^{s, p}(\mathbb{R}; B_{\epsilon_1}(d))$ 对于 $s > 0$ 且 $p \in (1, \infty]$，那么对于任意固定区间 $(-R, R)$，存在一个常数 $K > 0$，使得

$$\|u_\delta\|_{BV((a,b))} \leq K \|u\|_{W^{s,p}((-R-\delta, R+\delta))} \frac{|b - a|^{1/q}}{\delta^{1-s}}, \quad \forall \, (a, b) \subset (-R, R), \tag{C.2}$$

$$\|u - u_\delta\|_{L^2((-R,R))} \leq K \begin{cases} \|u\|_{W^{s,p}((-R-\delta, R+\delta))} \, \delta^s & p \geq 2, \\ \|u\|^{p/2}_{W^{s,p}((-R-\delta, R+\delta))} \, \delta^{sp/2} & p < 2, \end{cases} \tag{C.3}$$

其中 $q \geq 1$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。

证明。由界（C.1）可得

$$TV(u_\epsilon; L) = \sup_{a \in \mathbb{R}} \int_a^{a+L} |u'_\delta(x)| \, \mathrm{d}x = \sup_{a \in \mathbb{R}} \int_a^{a+L} \left| \int_{\mathbb{R}} u(y) \frac{1}{\delta^2} \gamma' \left(\frac{x - y}{\delta} \right) \mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \leq K \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{L}{\delta}.$$

为了推出（C.2），我们计算 $1 < p < \infty$，

$$\begin{aligned}\|u_\delta\|_{BV((a,b))} &= \int_a^b |u'_\delta(x)| \, \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \left| \int_{-\delta}^{\delta} u(x - y) \frac{1}{\delta^2} \gamma' \left(\frac{y}{\delta} \right) \mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \\ &\leq \int_a^b \int_0^\delta |u(x - y) - u(x + y)| \frac{1}{\delta^2} \left| \gamma' \left(\frac{y}{\delta} \right) \right| \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由于 γ 是偶函数。由 Hölder 不等式,

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\delta^2}\left(\int_a^b\int_0^\delta |u(x-y)-u(x+y)|^p \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_a^b\int_0^\delta \left|\gamma'\left(\frac{y}{\delta}\right)\right|^q \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}\\
&\leq K\frac{\delta^{1/p+s}}{\delta^2}\left(\int_a^b\int_0^\delta \frac{|u(x-y)-u(x+y)|^p}{(2y)^{1+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}(|b-a|\delta)^{1/q}\\
&\leq K\|u\|_{W^{s,p}((-R-\delta,R+\delta))}\frac{|b-a|^{1/q}}{\delta^{1-s}}.
\end{aligned}$$

When $p=\infty$，我们注意到 $W^{s,\infty}((-R-\delta,\ R+\delta)) = C^s((-R-\delta,\ R+\delta))$，类似地我们有

$$\begin{aligned}
\|u_\delta\|_{BV((a,b))} &= \int_a^b |u_\delta'(x)|\,\mathrm{d}x\\
&= \int_a^b \left|\int_{-\delta}^\delta u(x-y)\frac{1}{\delta^2}\gamma'\left(\frac{y}{\delta}\right)\,\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x\\
&\leq \int_a^b\int_0^\delta |u(x-y)-u(x+y)|\frac{1}{\delta^2}\left|\gamma'\left(\frac{y}{\delta}\right)\right|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&\leq \|u\|_{C^s((-R-\delta,R+\delta))}\,\delta^s\int_a^b\int_0^\delta \frac{1}{\delta^2}\left|\gamma'\left(\frac{y}{\delta}\right)\right|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&\leq K\|u\|_{C^s((-R-\delta,R+\delta))}\frac{|b-a|}{\delta^{1-s}}.
\end{aligned}$$

接下来，对于 $p<\infty$ 我们计算

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^R |u-u_\delta|^p\,\mathrm{d}x &= \int_{-R}^R \left|\int_{-\delta}^\delta (u(x)-u(x-y)\gamma_\delta(y))\,\mathrm{d}y\right|^p\,\mathrm{d}x\\
&\leq \int_{-R}^R \left(\int_{-\delta}^\delta |u(x)-u(x-y)|^p\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_{-\delta}^\delta \gamma_\delta(y)^q\,\mathrm{d}y\right)^{p/q}\mathrm{d}x\\
&\leq K\frac{1}{\delta}\int_{-R}^R\int_{-\delta}^\delta \delta^{1+ps}\frac{|u(x)-u(x-y)|^p}{|y|^{1+ps}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&\leq K\delta^{ps}\|u\|^p_{W^{s,p}((-R-\delta,R+\delta))},
\end{aligned}\tag{C.4}$$

其中 q 是 p的 Hölder 共轭指数。对于 $p=\infty$，证明类似,

$$\begin{aligned}
\|u-u_\delta\|_{L^\infty((-R,R)} &= \sup_{x\in(-R,R)}\left|\int_{-\delta}^\delta (u(x)-u(x-y)\gamma_\delta(y))\,\mathrm{d}y\right|\\
&\leq \sup_{x\in(-R,R)}\|u(x)-u(x-\cdot)\|_{L^\infty(x-\delta,x+\delta)}\int_{-\delta}^\delta \gamma_\delta(y)\,\mathrm{d}y\\
&\leq \|u\|_{W^{s,\infty}((-R-\delta,R+\delta))}\,\delta^s.
\end{aligned}\tag{C.5}$$

根据 L^p 嵌套关系，（C.4）和（C.5）可得

$$\|u-u_\delta\|_{L^2((-R,R))} \leq K\|u\|_{W^{s,p}((-R-\delta,R+\delta))}\,\delta^s,\tag{C.6}$$

当 $p\geq 2$时，对于 $p<2$ 我们将界（C.4）与 L^∞ 范数进行插值，范数对象为 u,

$$\begin{aligned}
\|u-u_\delta\|_{L^2((-R,R))} &\leq \left(\|u-u_\delta\|^{\frac{p}{2}}_{L^p((-R,R))}\|u-u_\delta\|^{1-\frac{p}{2}}_{L^\infty((-R,R))}\right)\\
&\leq K\|u\|^{\frac{p}{2}}_{W^{s,p}((-R-\delta,R+\delta))}\|u\|^{1-\frac{p}{2}}_{L^\infty((-R,R))}\,\delta^{sp/2}.
\end{aligned}\tag{C.7}$$

□

附录 D. 引理 3.1 的证明

在本节中，我们证明引理3.1。本节的大部分内容沿用 [34, 第 6 节。3]。我们只证明 1-激波的性质；2-激波的假设可类似地证明。以下关于激波曲线和稀疏曲线的引理说明，只需满足最低限度的真正非线性假设，就足以在局部验证假设 1 中的大部分条件。

引理 D.1 (摘自 [21, 第 263–265 页，定理 8.2.1、定理 8.3.1、定理 8.4。2])。 对于任意给定的状态$v \in \mathcal{G}$，存在 v 的一个开邻域 U，使得对于每个 $i = 1, 2$，都存在函数 $s_u\colon U \to \mathbb{R}$、$\sigma_u^i(s)\colon U \times [0, s_u) \to \mathbb{R}$和 $S_u^i(s) : U \times [0, s_u) \to \mathcal{G}_0$，满足 *Rankine-Hugoniot* 条件，即对于任意 $u \in U$ 和任意 $0 \le s < s_u$，

$$f(S_u^i(s)) - f(u) = \sigma_u^i(s)\left(S_u^i(s) - u\right). \tag{D.1}$$

此外，满足 *Lax* 可容许性判据，即对于 $u \in U$ 和 $0 < s < s_u$，

$$\lambda^i(S_u^i(s)) < \sigma_u^i(s) < \lambda^i(u). \tag{D.2}$$

此外， $u \mapsto s_u$ 是 *Lipschitz* 连续的，$(u, s) \mapsto \sigma_u^i(s)$ 是 C^3，且$(u, s) \mapsto S_u^i(s)$ 是 C^3。最后， $\sigma_u^i(s)$ 满足渐近展开，

$$\sigma_u^i(s) = \frac{1}{2}\left(\lambda^i(u) + \lambda^i(S_u^i(s))\right) + \mathcal{O}(s^2), \tag{D.3}$$

并且类似地， S_u^i（s）满足渐近展开

$$S_u^i(s) = u - r_i(u)s + \frac{s^2}{2} r_i'(u) r_i(u) + \mathcal{O}(s^3). \tag{D.4}$$

现在，我们开始证明引理 3.1。首先，根据假设 （a）、 （b），假设 1 **(GL)**得以满足。固定一个状态 $d \in \mathcal{G}$ 后，我们可以按照 [40, 第 9 节3]中概述的步骤，构造一个具有任意对角 Hessian 的熵。这相当于求解 Goursat 问题，该问题会产生一个熵，使其在从 d出发的黎曼不变量上与任意指定的数据一致。选取指定数据为 C^4，便得到一个熵 η_d ，它是满足 C^3的 Goursat 问题的解。因此，由于 $\nabla^2\eta_d$（d）是正定的，我们可以将 W 限制为 d 的一个邻域，在该邻域内 η_d 是严格凸的。这表明，熵 η_d满足假设 1 （c）。

假设 1 （e）可直接由连续性和紧致性推出，取 $W \subset B_1$（d）。假设 1 （f）可直接由引理D.1以及一个简单的连续性论证推出。

关于假设 1 (k)，我们计算得

$$\frac{d}{ds}\eta_d(u_L | S_{u_L}^1(s)) = ((S_{u_L}^1)'(s))^t \nabla^2\eta_d(S_{u_L}^1(s))(S_{u_L}^1(s) - u_L).$$

当 s 足够小时，我们有如下展开式

$$((S_{u_L}^1)'(s))^t \nabla^2\eta_d(S_{u_L}^1(s))(S_{u_L}^1(s) - u_L) = r_1(u_L)^t \nabla^2\eta_d(S_{u_L}^1(s)) r_1(u_L) s + \mathcal{O}(s^2),$$

由引理 D.1 得出。当 s 足够小时，这严格为正，因为 $\nabla^2\eta_d(S_{u_L}^1(s))$ 是正定的。因此，取$W \subset B_\epsilon(d)$ 使得 $\epsilon > 0$ 足够小，我们便得到假设 1 (k)。由引理 $\frac{d}{ds}\sigma_{u_L}^1(s) < 0$ 立即可得D.1 和假设 (b)。

关于假设 1 (g)，众所周知，取值于 W 的弱激波关于熵 η_d 满足熵条件，当且仅当它们满足 Lax 熵条件或 Liu 熵条件 [33]。因此，若 (u_L, u_R) 是一个 1-激波，则由 Lax 熵条件立即可得 (g)。所以，只需验证假设 1 (g) 对 2-激波成立。设 (u_L, u_R) 是一个 2-激波，且其两个状态都在 W 中。那么，引理 D.1 给出

$$\sigma(u_L, u_R) = \lambda_2(u_i) + \mathcal{O}(|u_L - u_R|), \text{ for } i = L, R.$$

由严格双曲性，并在需要时将 W 取小，我们看到 $\sigma(u_L, u_R) > \max(\lambda_1(u_L)\ \lambda_1(u_R))$，从而满足假设 1(g)。假设 1(i) 同样由对称性可知，其证明与假设 1(g) 完全相同。最后，关于假设 1(h)，如果(u_L, u_R) 是一个速度为 σ 并满足以下条件的熵激波：

$$\sigma \le \lambda_1(u_L),$$

那么，按照上述相同的论证，它必定是一个 1–激波。因此，由隐函数定理，存在某个 $s_R > 0$ 使得 $u_R = S_{u_L}^1($ s_R)。

参考文献

[1] Fabio Ancona、Alberto Bressan、Elio Marconi 和 Luca Talamini。《标量守恒律的中间区域》。《微分方程杂志》，422：215–250，2025年。[2] C. Bardos、P. Gwiazda、A. Świerczewska-Gwiazda、E. S. Titi 和 E. Wiedemann。《有界区域中熵守恒及其他伴随守恒律的 Onsager 猜想》。《Proc. A.》，475(2230)：20190289，18页，2019年。[3] Stefano Bianchini 和 Alberto Bressan。《非线性双曲系统的消失黏性解》。《数学年刊》（第二辑），161(1)：223–342，2005年。[4] Stefano Bianchini、Rinaldo M. Colombo 和 Francesca Monti。 2×2 具有 L^{∞} 数据的守恒律系统。《微分方程杂志》，249(12)：3466–3488，2010年。[5] Alberto Bressan。《 Glimm 格式的唯一极限》。《数学分析与力学档案》，130(3)：205–230，1995 年。[6] Alberto Bressan。《双曲型守恒律方程组》，牛津数学及其应用讲座系列第20卷。牛津大学出版社，牛津，2000年。一维柯西问题。[7] Alberto Bressan。《一维双曲守恒律：过去与未来》。《双曲微分方程杂志》，21(3)：523–561，2024年。[8] Alberto Bressan 和 Rinaldo M. Colombo。由 2×2 守恒律生成的半群。《数学分析与力学档案》，133(1)：1–75，1995年。 [9] Alberto Bressan 和 Rinaldo M. Colombo。大数据下 2×2 守恒律的唯一解。《印第安纳大学数学杂志》，44(3)：677–725，1995年。[10] Alberto Bressan、Graziano Crasta 和 Benedetto Piccoli。 $n\times n$ 守恒律系统柯西问题的适定性。《美国数学学会回忆录》，146(694)：viii$+$134，2000年。[11] Alberto Bressan 和 Camillo De Lellis。《关于双曲守恒律解唯一性的一点说明》。《数学分析与力学档案》，247(6)：第106号论文，12页，2023年。[12] Alberto Bressan 和 Graziano Guerra。《具有严格凸熵的双曲守恒律的唯一解》。《微分方程杂志》，387：432–447，2024年。[13] Alberto Bressan、Tai-Ping Liu 和 Tong Yang。 L^1 守恒律的稳定性估计。《数学分析与力学档案》，149(1)：1–22，1999年。[14] Alberto Bressan、Elio Marconi 和 Ganesh Vaidya。L^{∞} 解的唯一性区域： 2×2 双曲守恒律。《数学分析与力学档案》，249(6)，2025年12月。[15] Geng Chen、Cooper Faile 和 Sam G. Krupa。在 L^2 弱 BV 框架下，守恒律的解具有 Hölder 稳定性。arXiv 预印本，2025年。[16] Geng Chen、Moon-Jin Kang 和 Alexis F. Vasseur。从 Navier–Stokes 方程到正压 Euler 方程的有界变差解。arXiv 预印本，2024年1月。[17] Geng Chen、Sam G. Krupa 和 Alexis F. Vasseur。守恒律的唯一性与弱BV稳定性。《数学分析与力学档案》，246(1)：299–332，2022年。[18] Ming Chen、Alexis F. Vasseur 和 Cheng Yu。一维双曲系统连续解的非唯一性。arXiv 预印本，2024年7月。[19] Peter Constantin、E Weinan 和 Edriss S Titi。《欧拉方程解能量守恒的 Onsager 猜想》。《数学物理通讯》，165(1)：207–209，1994年。[20] Constantine M. Dafermos。《热力学第二定律与稳定性》。《数学分析与力学档案》，70(2)：167–179，1979年。[21] Constantine M. Dafermos。《连续介质物理中的双曲守恒律》，数学科学基础原理丛书第325卷 f。施普林格出版社，柏林，第四版，2016年。[22] Ronald J. DiPerna。《双曲守恒律解的唯一性》。《印第安纳大学数学杂志》，28(1)：137–188，1979年。[23] Lawrence C. Evans。《偏微分方程》，数学研究生教材第19卷。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，1998年。[24] Lawrence C. Evans 和 Ronald F. Gariepy。《测度论与函数的精细性质》。数学教科书。CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，修订版，2015年。[25] Eduard Feireisl、Shyam Sundar Ghoshal 和 Animesh Jana。《等熵 Euler 系统耗散解的唯一性》。《偏微分方程通讯》，44(12)：1285–1298，2019年。[26] James Glimm。《非线性双曲方程组的整体解》。《纯粹与应用数学通讯》，18：697–715，1965年。[27] James Glimm 和 Peter D. Lax。《非线性双曲守恒律系统解的衰减》，美国数学学会回忆录第101号。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，1970年。[28] William M. Golding、Sam G. Krupa 和 Alexis F. Vasseur。小极端激波的尖锐 α-收缩估计。《双曲微分方程杂志》，20(3)：541–602，2023年。[29] Piotr Gwiazda、Martin Michálek 和 Agnieszka Świerczewska-Gwiazda。《关于守恒律弱解及能量/熵守恒的简注》。《数学分析与力学档案》，229(3)：1223–1238，2018年。[30] Helge Holden 和 Nils Henrik Risebro。《双曲守恒律的前沿追踪》，应用数学科学第152卷。施普林格出版社，海德堡，第二版，2015年。[31] Moon-Jin Kang 和 Alexis F Vasseur。《守恒律系统熵不连续解的收缩判据》。《数学分析与力学档案》，222(1)：343–391，2016年。[32] Sam G. Krupa 和 Alexis F. Vasseur。《关于满足单一熵条件的守恒律解的唯一性》。《双曲微分方程杂志》，16(1)：157–191，2019年。

[33] Peter D. Lax. 守恒律方程组与激波的数学理论，载于第 11 卷《数学科学会议委员会应用数学区域会议丛书》。工业与应用数学学会，费城，PA，1973年。[34] Nicholas Leger 和 Alexis Vasseur. 相对熵以及含有非 BV 扰动的守恒律系统中激波和接触间断的稳定性。《数学分析与力学档案》，201(1):271–302，2011年。[35] Giovanni Leoni. 分数阶 *Sobolev* 空间入门，第 229 卷《数学研究生教材》。美国数学会，普罗维登斯，RI， [2023] ©2023年。[36] Marta Lewicka. 非相互作用的大振幅激波波形的稳定性条件。《SIAM 数学分析杂志》，32 1116，2001年 5 1094( ): – 。[37] Marta Lewicka. 大 BV 数据下双曲型守恒律方程组的适定性。《数学分析与力学档案》，173(3):415–445，2004年。[38] Marta Lewicka 和 Konstantina Trivisa. 关于 L^1 含有两个大振幅激波解附近守恒律系统的适定性。《微分方程杂志》，179(1):133–177，2002年。[39] Jiayun Meng. 一般 $n \times n$ 多维黏性系统中复合弱平面波的时间渐近稳定性。*arXiv* 预印本，2025年。[40] Denis Serre.守恒律系统 *2*：几何结构、振荡与初边值问题，第 2 卷。剑桥大学出版社，1999年。[41] Joel. A. Smoller 和 Jeffrey. L. Johnson. 一类扩展双曲型守恒律方程组的整体解。《数学分析与力学档案》，32:169–189，1969年。



Co-funded by
the European Union

(Jeffrey Cheng) 数学系，德克萨斯大学奥斯汀分校，2515 Speedway，奥斯汀，TX 78712，美国电子邮箱：jeffrey.cheng@utexas.edu (Cooper Faile) 数学系，德克萨斯大学奥斯汀分校，2515 Speedway，奥斯汀，TX 78712，美国电子邮箱：jcfaile@utexas.edu (SamG. Krupa) 数学与应用数学系，巴黎高等师范学院，PSL大学，法国国家科学研究中心，45 rue d’Ulm - F 75230 巴黎 cedex 05，法国电子邮箱：sam.krupa@ens.fr