由位点间非线性设计的孤子 Thouless 泵浦

Tao Jiang[1] 和 Li-Chen Zhao[1, 2, 3*]
[1] School of Physics, Northwest University, Xi'an, 710127, China
[2] NSFC-SPTP Peng Huanwu Center for Fundamental Theory, Xi'an 710127, China and
[3] Shaanxi Key Laboratory for Theoretical Physics Frontiers, Xi'an 710127, China
（日期：2026年1月6日）

我们研究了具有位点内非线性和位点间非线性的扩展对角 Aubry-Andr´e-Harper 模型中的孤子 Thouless 泵浦。我们表明，位点间非线性能够使孤子获得远超线性能带预测值的反常输运距离，并且可以精确设计量子化位移。我们发现，非线性不稳定性对孤子泵浦的扫描速率提出了下限，这挑战了人们普遍认为较慢的调制有利于实现拓扑输运的观点。孤子之间的非线性相互作用使多孤子泵浦通常不具备线性系统中 Thouless 泵浦所具有的鲁棒性。我们的研究为利用非线性设计拓扑泵浦提供了多种可能，并进一步推动了孤子泵浦的应用。

PACS 编号:

arXiv:2601.01355v1 [nlin.PS] 4 Jan 2026

I. 引言

孤子 Thouless 泵浦已在非线性系统中通过实验 [1, 2] 和理论 [3–9] 得到研究，这极大拓展了拓扑泵浦 [10–12]的适用范围。对于此前报道的大多数孤子泵浦 [1–9]而言，非线性主要将波包局域为孤子，但并未在线性能带之外引入任何额外拓扑。也就是说，量子化输运距离仍可由线性单带陈数（CN）或多带陈数的组合来描述。然而，非线性几何相位 [15, 16] 以及由非线性 [17–22], 诱导的一些奇异拓扑相关现象表明，非线性可能产生超越线性能带拓扑的拓扑泵浦。最近，某些非线性系统中确实报道了由非线性诱导的孤子输运 [23, 24]。鉴于真实物理系统中存在多种非线性，我们希望进一步寻找由奇异非线性诱导的拓扑泵浦，甚至尝试通过设置适当的非线性来设计孤子泵浦。

绝热性通常是实现拓扑输运 [10–12]的必要条件。一般认为，调制速度越慢，越有利于实现拓扑输运。然而，在孤子泵浦过程中可能会出现一些非线性不稳定性。即使系统受到绝热驱动，这些不稳定性也可能破坏孤子的拓扑输运 [3]。幸运的是，不稳定性的破坏作用需要经过一段时间的累积才会显现，而不稳定性的大小取决于孤子形态和许多物理参数 [25, 26]。因此，不稳定性与绝热性要求之间可能存在某种竞争。如何妥善解决这些问题，是孤子泵浦应用中最关键的因素之一。

我们考虑一个同时包含位点非线性（OSN）和格点间非线性（ISN）的对角 Aubry-Andr´e-Harper（AAH）模型 [27, 28] ，以研究孤子 Thouless 输运。当仅存在 OSN 时，量子化输运距离完全由线性能带的陈数决定，这与相关的既往研究 [1–9]非常吻合。值得注意的是，随着 ISN 强度增加，孤子在单个泵浦周期内可产生 2、3 甚至 4 个元胞的位移，远超相应线性带的陈数 $= +1$ 。更为显著的是，与此前报道的多重泵浦 [4]不同，具有额外输运位移的孤子在演化过程中并未占据多个线性能带。这些额外的量子化位移完全由 ISN 引起，并且可以通过改变 ISN 强度进行有效调控。我们进一步分析了输运过程中的孤子不稳定性，发现不稳定性对扫描速率设定了明确的下限。在必须保持绝热性的同时，采用高于该下限的较快驱动，可能使孤子抑制不稳定性的发展，并有助于完成拓扑泵浦。最后，我们研究了多孤子输运，发现孤子之间的非线性相互作用通常会使泵浦过程比线性系统中的 Thouless 泵浦更不稳定，这或可为调控泵浦动力学提供其他途径。

本文结构安排如下。在第II节中，我们首先介绍孤子输运的物理设置。其次，我们展示 ISN 不同取值下的各种孤子 Thouless 泵浦情形，并证明 ISN 能够有效调控孤子泵浦。第三，我们讨论非线性不稳定性对孤子输运的影响，并指出存在一个适宜的观测窗口：泵浦速率的下限由不稳定性决定，上限则由通常的绝热条件给出。

*电子邮箱：zhaolichen3@nwu.edu.cn

在第III节中，我们考察与不同能带分岔相关的孤子输运。我们表明，孤子之间的非线性相互作用会破坏其泵浦行为。我们在第IV节总结并讨论研究结果。

II. 多样化的孤子输运由位点间非线性诱导

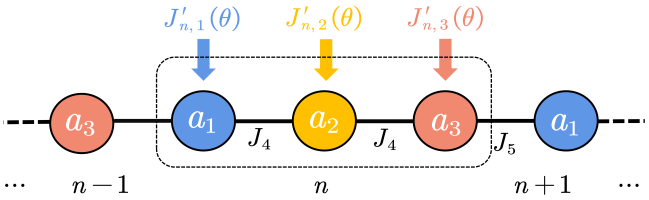


图1：(a) 对角扩展 AAH 模型示意图。虚线框标示一个元胞（索引为 n），其中包含三个位点（a_1、a_2、a_3），每个位点均受到调制的位点势 $J'_{n,i}(\theta) = \sin[\theta - (i-1)2\pi/3] + \sum_j \frac{g_{ij}}{2} |\psi_{n,i}|^2 |\psi_{n,j}|^2$ 而 $\psi_{n,i}$ 表示第 n 个元胞中位点 a_i 处的波函数，其中 $\theta = \omega t$。这里，J_4 和 J_5 表示线性跃迁强度。g_{ij} 表示非线性相互作用强度。

以往的大多数研究都聚焦于克尔型位点自非线性（$g_{i\neq j} = 0$），它仅取决于局域场强度，通常不会破坏线性陈数与孤子 Thouless 泵浦之间的对应关系。鉴于非线性系统中 ISN 的广泛存在 [29, 30]，以及位点间耦合在线性系统拓扑性质的决定过程中发挥的关键作用 [31–33],，我们预期 ISN 可能引发超出线性拓扑预测的孤子 Thouless 输运现象。因此，我们选取同时包含位点自非线性和位点间非线性的一维 AAH 模型（如图1所示），以研究孤子泵浦行为。系统动力学由离散非线性薛定谔方程描述 [29, 30, 34]:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_{n,i} = \sum_{mj} H^{\mathrm{lin}}_{ni,mj}(\theta)\,\psi_{m,j} + \sum_j g_{ij}\,|\psi_{n,j}|^2\,\psi_{n,i} \quad (1)$$

其中，$\psi_{n,i}$ 表示第 n 个元胞中位点 a_i 处的波函数。下标 n，m 表示一维链上的元胞，而 i，$j = 1, 2, 3$ 则指定每个元胞内的三个位点。非线性系数 g_{ij} 表示 $i = j$ 的 OSN 和 $i \neq j$ 的 ISN，其中 $g_{ij} = g_{ji}$。演化方程中的第一项对应系统的线性部分，其布洛赫哈密顿量表示可写为

$$H^{\mathrm{lin}}(k) = \begin{pmatrix} J_1 & J_4 & J_5 e^{-ik} \\ J_4 & J_2 & J_4 \\ J_5 e^{ik} & J_4 & J_3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

格点势为 $J_{i=1,2,3} = \sin[\theta - (i-1)2\pi/3]$，其中 $\theta(t) = \omega t$ 随时间变化，且 $T = 2\pi/\omega$ 表示驱动周期。最近邻耦合为 $J_4 = J_5 = 1$，分别描述晶胞内相邻位点之间以及相邻晶胞之间的跃迁。参数 k 表示准动量，用于表征周期系统的布洛赫态。若将 $\theta(t)$ 视为合成维度，则该系统在 $(k, \theta(t))$ 参数空间中形成三条二维线性能带。在我们的研究中，三条能带的陈数分别为 $+1$、-2 和 $+1$。存在非线性相互作用时，在 $\theta(t)$ 的每一瞬间都存在孤子解，这类解也称为带隙孤子[35–37]。

取 $g_{ij} > 0$时，非线性为散焦型。使用牛顿法可得到一族瞬时孤子解，该解从最低能带（陈数为 $+1$）向上分岔；同时令 θ动态变化（t）。满足绝热条件时，在每个完整周期内，数值演化得到的孤子始终与对应的瞬时孤子解高度吻合。由于保守量子系统中的概率守恒，这族孤子解通常要求将粒子数固定为与初态相同。孤子的粒子数定义为$N_B = \sum_{n,i} |\psi_{ni}|^2$，并在整个动力学演化过程中保持守恒。此外，我们发现，当存在孤子辐射或涉及多个孤子的情况时，更适合仅在孤子所在的局域区域内定义并固定粒子数。否则，瞬时孤子解将无法描述数值模拟得到的孤子的演化。

我们选择具有相同化学势 μ ($\mu = \frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{N_B}$) 的孤子，使其位于 $\theta(t=0)$，以确保具有不同非线性相互作用强度的初态孤子在线性能谱带隙中的位置相同。通过选择不同的 ISN g_{13}（除非另有说明，$g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{12} = 1$）和驱动频率$\omega$，采用 Runge-Kutta 方法 [38]对系统进行数值演化。ISN 的绝对大小并不重要，重要的只是其相对于位点自非线性（OSN）的强度。在实验中，可以使 ISN 与 OSN 相当或大于 OSN，例如，在光学晶格中的玻色-爱因斯坦凝聚体上利用 Feshbach 共振 [39]。经过一个周期后，系统回到初始位置；孤子经历一系列形变后，也恢复到初态。随后计算初态与末态孤子态之间的保真度，并据此判断是否发生了输运。如果保真度超过 96%，则认为孤子已成功完成输运。输运也可以通过孤子轮廓来表征，即通过与量子化输运距离对应的孤子峰位移来表征。相反，如果保真度低于 96%，则认为孤子未能完成输运。相应地，可以构建孤子峰的相图，其

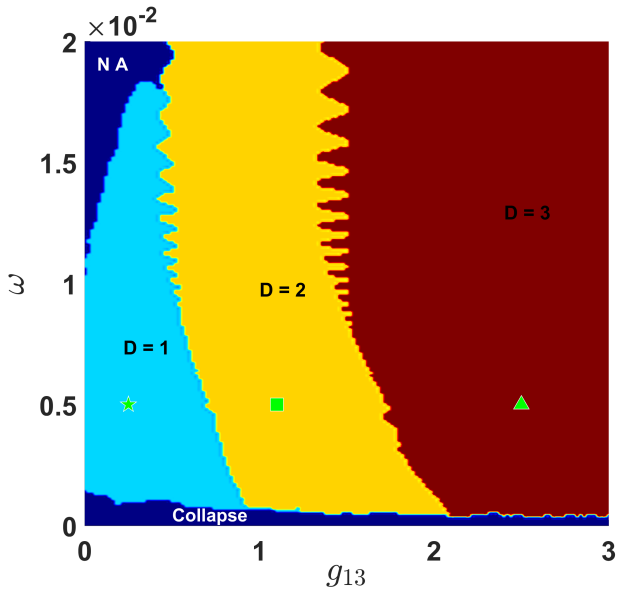


图 2：孤子在一个周期内从最低能带分岔而来时，其峰值位移（以晶胞为单位）的相图。从左到右，随着 g_{13} 增大，孤子每周期的位移呈现量子化增量。从上到下，随着 ω 减小，孤子无法在一个周期内完成输运，图中的黑色数字表示位移。在相图左上区域，孤子也会因非绝热（NA）效应而无法发生输运。参数： $n = 20$， $\mu = -1.1$。

从最低线性能带分岔而来的位移2。值得注意的是，在孤子输运过程中存在自交结构时[6]，仅凭保真度可能无法可靠地表征输运，因此分析中排除了这些区域。

在图 2中，浅蓝色、黄色和红色区域表示孤子在一个周期内成功完成输运的参数范围，其中 D 表示输运位移。有趣的是，随着g_{13} 的增加，孤子输运距离以量子化增量递增，从一个元胞推进到三个元胞，这与线性能带拓扑所预言的仅一个元胞形成鲜明对比。这清楚地表明，非线性确实将拓扑效应拓展到了线性能带拓扑之外。不同整数输运对应区域之间存在振荡边界，这可能表明相变的存在。相图中的两个深蓝色区域对应于孤子无法在单个周期内完成输运的参数范围。在左上区域，由于非绝热效应，孤子在相对较高的驱动频率下受到抑制 ω 。引人注目的是，在低驱动频率极限下，孤子同样无法完成输运，这似乎挑战了通常认为较慢的调制更有利于实现拓扑输运的观点。我们将发现，非线性不稳定性规定了扫描速率的下限，详见小节 B。

我们强调，异常的孤子输运距离并非源于多个布洛赫能带占据所对应的陈数组合 [4]。通过计算孤子态在各能带瞬时线性布洛赫态上的占据数，即可验证这一点。任意给定时刻θ，孤子波函数 $\psi^s_{n,\ i}(\theta)$ 在瞬时线性布洛赫态上的占据数t可由下式求得：

$$\rho_l(\theta) = \frac{1}{N}\sum_k \left| \sum_{n,i} \psi^{\mathrm{Bloch}}_{l,n,i}(k,\theta)^* \, \psi^s_{n,i}(\theta) \right|^2 \qquad (3)$$

$\rho_l(\theta)$ 表示时刻 $\theta(t)$ 第 l 条能带的占据数。$\psi^{\mathrm{Bloch}}_{l\,n\,i}$，，$(k,\theta)^*$ 表示由准动量 k 标记的第 l 条能带中线性布洛赫态的复共轭。因子 $1/N$ 确保归一化。图 2 中星形、矩形和三角形上的孤子，在一个周期内，最低能带上的占据数 $\rho_l(\theta)l = 1$ 满足$\rho_{1,\mathrm{star}}(\theta) > 0.979$，$\rho_{1,\mathrm{rectangle}}(\theta) > 0.982$，且$\rho_{1,\mathrm{triangle}}(\theta) > 0.987$。这表明，在一个驱动周期内，孤子态几乎完全局限于各自分岔出的线性能带中。也就是说，线性能带的拓扑保持不变，孤子仍只占据单一线性能带。然而，最低线性能带的陈数无法刻画涉及两个以上元胞的输运。因此，额外的泵浦效应纯粹源于非线性。

A. 由非线性调控的孤子泵浦

每周期孤子输运与 g_{13} 取值之间的密切关系，为通过非线性来设计孤子泵浦提供了可能途径。例如，图 $g_{13} = 0.25$、1.1、3 和 6.5 所示为孤子的演化3，它们每周期分别允许 $D = 1$、2、3 和 4 的输运。近期研究表明，非线性可使孤子输运距离达到线性陈数的两倍 [24]。研究发现，ISN 会抑制反常输运，这与本文报告的结果完全相反。在每个泵浦周期中，孤子都会显著展宽，如图 3 所示。我们的分析表明，当随时间变化的格点势达到某些对称点时（例如 $\theta = {}_{(6m+1)_6}{}^{\pi}$， $m = 1$，3、5，$\cdots$），就会发生这种情况。显著展宽出现之前，孤子的运动轨迹几乎完全相同（白圈标出）；展宽之后，它们则呈现截然不同的漂移。因此，展宽行为对拓扑泵浦的变化起着关键作用。图 3 的插图展示了展宽时刻附近的孤子轮廓。可以看到，孤子呈现多峰轮廓。展宽后的孤子使相邻子峰的振幅能够达到与

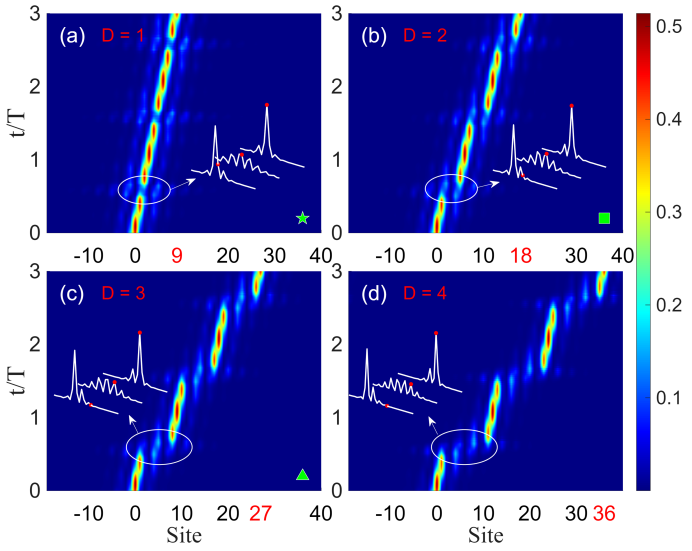


图3：多样化孤子在三个周期内的演化。红色刻度标示三个周期后的孤子峰位置。插图中，白色实线表示椭圆框架内的孤子密度分布，红点对应同一晶格位点。(a) 正常输运：每周期的孤子位移与分岔线性带的陈数完全一致，其中 $g_{13} = 0.25$。(b-d) 多样化输运：每周期的孤子位移分别对应 2、3 和 4 个元胞。右下角所示标记对应的参数与图2中所示相同。参数 g_{13} 分别为 1.1、3 和 6.5。共同参数： $n = 20$， $\mu = -1.1$，以及 $\omega = 0.005$。

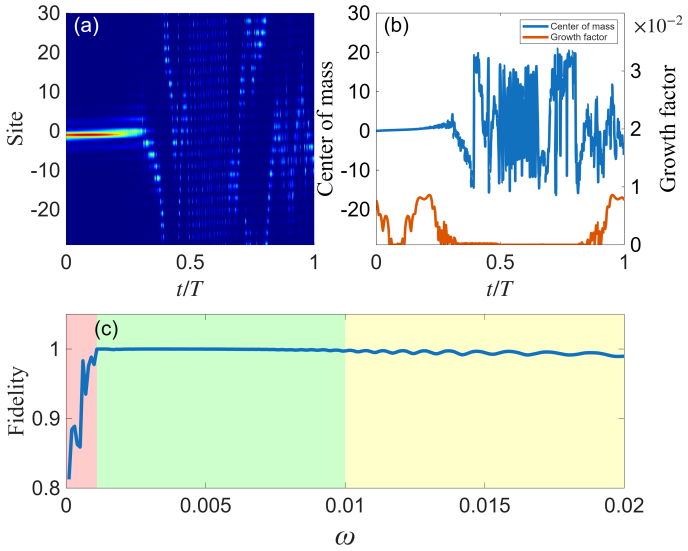


图4：(a) 弱不稳定性引起的孤子破坏。(b) 左：孤子崩解后的质心运动；右：一个周期内孤子的线性稳定性分析，显示各时刻的最大增长率，其中 $\omega = 0.0002$。(c) 一个周期内的孤子输运，并展示不同驱动频率下初态与末态之间的保真度。右侧浅黄色区域中的保真度涨落源于 NA，而左侧浅红色区域对应于不稳定性导致的孤子破坏。共同参数： $n = 20$、 $g_{13} = 1.1$ 和 $\mu = -1.1$。

主峰相当的水平。不同的 g_{13} 设置会使某些子峰迅速增长并成为新的主峰，而较大的 g_{13} 值往往会导致孤子产生更大的漂移。主峰和子峰局域在等价的晶格位点上，因此漂移也以晶胞为单位量子化。

尽管线性陈数无法预测孤子输运的这些多样形式，却可以在事后通过超胞框架加以描述 [1, 24]。诱发拓扑的非线性机制仍未明晰，因为超胞方法实际上将孤子视为非周期缺陷。另一种可能的观点认为，这种行为源于相邻位点上的 Wannier函数叠加所产生的额外孤子解 [24]。对于线性带理论之外的泵浦，目前仍缺乏统一的拓扑理论框架。上述孤子的多峰轮廓包含多个节点，这些节点继承自高阶布洛赫模 [40, 41]。这种显著的拓扑特性可能与波函数的节点结构有关 [42, 43]。

B. 驱动频率可以抑制孤子的不稳定性

由于存在散焦非线性相互作用，表现出反常输运的孤子总是从最低能带向上分岔，并始终位于有限带隙内，如图5(a)中的蓝线所示。通常，位于有限带隙中的孤子往往会出现不稳定性 [40, 44, 45]。因此，孤子输运需要达到最低驱动频率（见图2），低于该频率则无法完成一个完整的输运周期。例如，我们展示了具有 $\omega = 0.0002$ 的孤子在图4(a)中的演化。可以看到，孤子发生崩塌，泵浦似乎也随之中断。如图4(b)中的蓝色实线所示，孤子的质心（COM）量子化输运也不复存在。近期研究表明，即使孤子峰本身仍持续输运，非线性能带的自交叉也可能扰乱孤子的质心输运 [6]。在本研究中，非线性能带没有出现这种自交叉现象，如图5(a)中的彩色实线所示。

为量化其不稳定性，我们对单个驱动周期内一系列瞬时本征孤子解进行线性稳定性分析，并提取每个时刻的最大增长率。如图4(b) 中的橙色实线所示，孤子确实

在每个周期内都表现出弱不稳定性。此类不稳定性通常会破坏孤子的拓扑输运。幸运的是，不稳定性的破坏性影响需要经过一段时间的累积才会显现，其强度取决于随演化而变化的孤子形态。尤其是，每个驱动周期内都存在一些稳定区域，见图4(b) 中的橙色实线。这些特性使得通过提高驱动频率来抑制不稳定性成为可能。例如，如图 $\omega = 0.0053$(b) 所示，采用图4(a) 中相同的其他参数设置，可以实现多周期孤子输运。孤子不稳定性与绝热性之间存在竞争，两者共同决定孤子输运所需的条件。因此，泵浦条件仅限于一个中间驱动频率区间（图4(c) 中的绿色区域），其下限由孤子不稳定性（红色区域）决定，上限则由绝热性失效（黄色区域）决定。在红色区域，孤子会迅速崩塌，这一行为可通过完整周期初态与末态之间的保真度来表征，其值远低于 1。在绿色区域，保真度几乎为 1，这表明末态孤子完美地恢复初态形态，并且可以观察到多周期泵浦。在黄色区域，保真度缓慢偏离 1，非绝热效应开始影响泵浦过程。采用适当的驱动频率，弱不稳定的格点内孤子仍可用于实现拓扑泵浦；相比之下，格点间隙孤子通常表现出强不稳定性，并在孤子输运过程中迅速崩塌[3]。

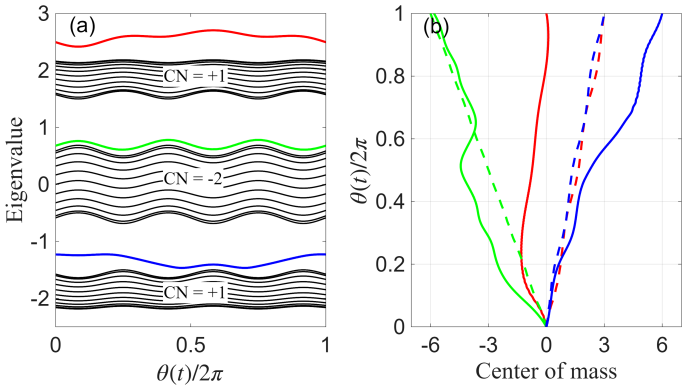


图 5： (a) 彩色曲线表示从不同线性能带分岔而来的带隙孤子，它们的粒子数均为 $N_B = 0.95$。黑色区域表示线性能带。(b) 彩色实线表示孤子的质心输运（颜色与 (a) 中相对应），驱动频率相同，为 $\omega = 0.005$。相同颜色的虚线表示相应 Wannier 态的质心输运。参数： $g_{ij} = 1, i, j = 1, 2, 3$

III. 从不同线性能带分岔而来的孤子能级的不同输运行为

A. 从不同线性能带分岔而来的孤子的Thouless泵浦

众所周知，从不同线性能带分岔出的孤子应具有不同的分岔方向、波形结构和稳定性 [26]。我们进一步检验 ISN 是否会以不同方式影响从不同线性能带分岔出的孤子的输运，同时考察超越线性能带拓扑的泵浦行为。在固定非线性系数$g_{i,\ j} = 1$ 和粒子数 $N_B = 0.95$的情况下，每个布洛赫能带均向上分岔出一族孤子解（见图5（a）中的彩色实线）。通过牛顿法从初态 $\psi_{try} = A\,\mathrm{sech}(\eta x)\psi_l^{\mathrm{Bloch}}(k,\ 0)$ 获得能级，其中 $\psi_l^{\mathrm{Bloch}}(k,\ 0)$ 是某一线性能带的布洛赫态。 $k = 0$ 或 π 用于选择每个线性能带下边缘或上边缘处的布洛赫态 [26, 40]。 $A\,\mathrm{sech}(\eta x)$表示决定粒子数的孤子包络，其中 A和 η 控制孤子的振幅和宽度。在固定孤子粒子数的情况下求解非线性本征值问题，分别选取三个不同线性能带的布洛赫态，我们得到三个本征值。由于本征态对应于孤子波函数，因此这些能级可合理地视为孤子能级。计算得到的孤子能级确实描述了孤子输运行为，因为相应的本征态与泵浦过程中孤子态的演化一致。我们计算了驱动频率为 $\omega = 0.005$时孤子的质心（COM）输运轨迹，如图5（b）中的实线所示。为观察其与线性能带拓扑理论的差异，我们在设定$g_{\alpha,\ \beta} = 0$ 并保持其他参数不变的情况下，计算了分岔能带对应的瓦尼尔态质心，如图5（b）中的虚线所示。值得注意的是，具有较低、中间和较高能级的孤子的输运位移分别呈现多重（超出线性能带陈数）、正常（与线性能带陈数相同）和俘获（无泵浦）行为。尽管中间能带的孤子经历了正常输运，但其质心轨迹与相应瓦尼尔态的轨迹存在显著差异。顺便指出，俘获是由纯非线性引起的，同样偏离了其所在能带的陈数。基于公式3的计算表明，在演化过程中，每个孤子始终主要局限于其分岔出的线性能带，没有其他能带参与其中。这种俘获与先前研究中涉及多能带的俘获现象 [4]有很大不同。

对于聚焦非线性 $g_{ij} < 0$，孤子的向上分岔将变为向下分岔。在这种情况下，从最低能带和

最高能带分岔出的孤子分别表现为俘获和多重泵浦，与上述散焦情形相比，二者正好相反。有趣的是，我们的模拟结果表明，当某一能带中的孤子发生多重泵浦时，从另一能带分岔出的孤子总会出现俘获。这提示，在我们的 ISN 模型中，孤子的泵浦行为可能受到某些限制。

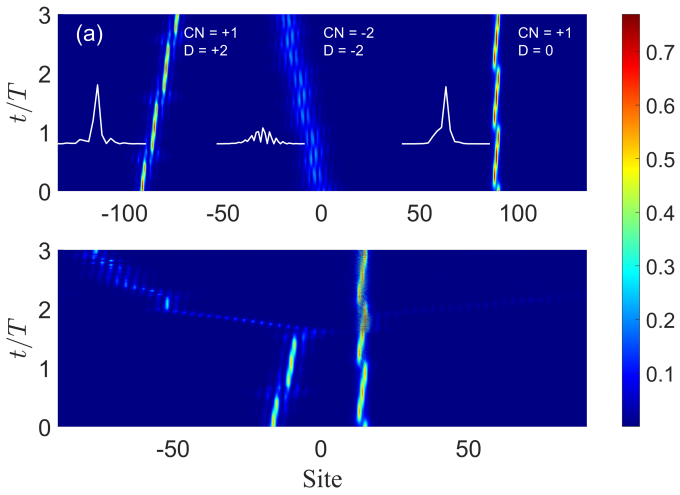


图 6：多孤子输运。(a) 从左至右：分别从下、中、上能带分岔出的孤子的输运（如图5所示）；这些孤子彼此相距较远。插图展示了 $t = 0$ 时的孤子轮廓。(b) 从下能带和上能带分岔出的孤子的输运；孤子之间的相互作用不可忽略。参数： $n = 90$, $\omega = 0.005$, $N_B = 0.95$, $g_{ij} = 1$, $i,\ j = 1,\ 2,\ 3$。

B. 多孤子的 Thouless 泵浦

可以构造出多个孤子，其中每个孤子都从线性能带分岔而来；即使存在孤子能级，线性能带仍可自由选择。这使我们能够研究多孤子输运情形。由多孤子的总粒子数通过非线性本征方程得到的系统总化学势 μ不再具有明确的物理意义，因为其数值已无法提供有关各个孤子的信息。我们提出，应根据各个孤子局域区域内的粒子数，通过非线性本征方程分别计算孤子能级。当孤子彼此充分分离时，在输运过程中可以将它们视为有效独立，如图 6(a)所示。只有中间孤子的泵浦行为与计算得到的陈数相对应。此外，孤子能级的计算应基于局域孤子波包的粒子数，而不是系统的总粒子数，尤其是在发生辐射时在孤子输运过程中 [6]。然而，当孤子之间存在明显重叠时，孤子间的非线性相互作用会改变它们的泵浦行为。作为示例，我们选取图6(a)中的左侧和右侧孤子，来展示非线性相互作用如何改变孤子泵浦。结果如图 6(b)所示。这表明，左侧孤子最初能够以量子化泵浦输运，但当它与另一个孤子相互作用时，该孤子会被彻底破坏。右侧孤子仍能保持良好的泵浦，仅伴有一些噪声和微弱的辐射。因此，与线性系统中的Thouless泵浦相比，孤子泵浦通常缺乏其所具有的鲁棒性特征。在线性系统中，粒子或波包的输运彼此独立；而在非线性系统中，孤子之间的碰撞会从根本上影响它们的泵浦，并可能为操控泵浦动力学提供替代途径。

IV. 结论与讨论

我们表明，ISN 可用于在对角 AAH 模型中设计孤子泵浦；在单个泵浦周期内，孤子的位移可达 2、3 甚至 4 个元胞，远超相应线性带的陈数$= +1$。孤子的反常额外输运完全由非线性引起；与涉及多个线性能带的泵浦过程不同，孤子态在演化过程中并不占据多个线性能带 [4]。我们发现，不稳定性对扫描速率施加了明确的下限。我们还进一步研究了多孤子泵浦。当孤子彼此相距较远时，在输运过程中可将它们视为有效独立的。孤子能级应分别计算，所得结果与相距较远的孤子的泵浦行为高度吻合。然而，当孤子之间明显重叠时，孤子之间的非线性相互作用会大幅改变其泵浦行为。

可以引入非厄米性和无序等复杂因素，研究它们与非线性对拓扑输运的协同作用 [46], ，从而加强理论与实验之间的联系。多孤子之间的非线性相互作用不仅会削弱输运的稳健性，还能为拓扑调控提供新的自由度。未来的研究可着重通过孤子碰撞与重叠实现拓扑相的可控切换，并开发基于多孤子相互作用的拓扑器件[47] ，例如拓扑开关。同时，探索多孤子系统中的拓扑保护机制，并设计具备抗干扰能力的多通道拓扑输运系统，也是颇具前景的研究方向。

致谢

本工作得到国家自然科学基金（合同编号：12375005，12235007、12247103）的资助。

[1]M. J¨urgensen、S. Mukherjee 和 M. C. Rechtsman，《量子化非线性托什泵浦》，《自然》596，63（2021）。[2] M. J¨urgensen、S. Mukherjee、C. J¨org 和 M. C. Rechtsman，《孤子的量子化分数托什泵浦》，《自然·物理》19，420（2023）。[3] M. J¨urgensen 和 M. C. Rechtsman，《陈数支配非线性托什泵浦中的孤子运动》，《物理评论快报》128，113901（2022）。[4] Q. Fu、P. Wang、Y. V. Kartashov、V. V. Konotop 和 F. Ye，《非线性托什泵浦：孤子与输运崩塌》，《物理评论快报》128，154101（2022）。[5] Q. Fu、P. Wang、Y. V. Kartashov、V. V. Konotop 和 F. Ye，《物质波的二维非线性托什泵浦》，《物理评论快报》129，183901（2022）。[6] T. Tuloup、R. W. Bomantara 和 J. Gong，《非线性托什泵浦中的量子化崩塌》，《新物理学杂志》25，083048（2023）。[7] N. Mostaan、F. Grusdt 和 N. Goldman，《非线性光子学与超冷原子混合物中孤子的量子化拓扑泵浦》，《自然通讯》13，5997（2022）。[8] X. Cao、C. Jia、Y. Hu 和 Z. Liang，《孤子穿越杂质的非线性托什泵浦》，《物理评论A辑》110，013305（2024）。[9] F. Wu、X. Zuo、Q. Zhu、T. Yuan、Y. Mao、C. Zeng、Y. Jiang、Y. Chen、J. Pan、W. Zheng、H. Dai，《孤子非线性托什泵浦中的拓扑不变量》，arXiv:2506.08502。[10] D. J. Thouless，《粒子输运的量子化》，《物理评论B》27，6083（1983）。[11] Q. Niu 和 D. J. Thouless，《存在基底无序和多体相互作用时的量子化绝热电荷输运》，《物理学杂志A辑：数学与一般》17，2453（1984）。[12] D. Xiao、M.-C. Chang 和 Q. Niu，《贝里相位对电子性质的影响》，《现代物理评论》82，1959（2010）。[13] D. J. Thouless、M. Kohmoto、M. P. Nightingale 和 M. den Nijs，《二维周期势中的量子化霍尔电导》，《物理评论快报》49，405（1982）。[14] M. Kohmoto，《拓扑不变量与霍尔电导的量子化》，《物理年鉴》160，343（1985）。[15] B. Wu、J. Liu 和 Q. Niu，《一般量子态绝热演化的几何相位》，《物理评论快报》94，140402（2005）。[16] J. Liu 和 L. B. Fu，《非线性系统中的贝里相位》，《物理评论A辑》81，052112（2010）。[17] Y. Lumer、Y. Plotnik、M. C. Rechtsman 和 M. Segev，《光子拓扑绝缘体中的自局域态》，《物理评论快报》111，243905（2013）。[18] D. Leykam 和 Y. D. Chong，《非线性光子拓扑绝缘体中的边缘孤子》，《物理评论快报》117，143901（2016）。[19] Y. Hadad、A. B. Khanikaev 和 A. Al`u，《自诱导拓扑相变及其支持的边缘态，由非-线性交错势，《物理评论B》93，155112（2016年）。[20] S. Mukherjee 和 M. C. Rechtsman，观察拓扑带隙中的 Floquet 孤子，《科学》368，856（2020年）。[21] L. J. Maczewsky、M. Heinrich、M. Kremer、S. K. Ivanov、M. Ehrhardt、F. Martinez、Y. V. Kartashov、V. V. Kono-top、L. Torner、D. Bauer 和 A. Szameit，非线性诱导的光子拓扑绝缘体，《科学》370，701（2020年）。[22] K. Sone、M. Ezawa、Y. Ashida、N. Yoshioka 和 T. Sagawa，以非线性陈数表征的非线性诱导拓扑相变，《自然·物理》20，1164（2024年）。[23] Y.-L. Tao、Y.-P Zhang 和 Y. Xu，非线性诱导的孤子分数化Thouless泵浦，《物理评论快报》135，097202（2025年）。[24] Y.-L. Tao、J.-H Wang 和 Y. Xu，非线性诱导的孤子Thouless泵浦，arXiv:2409.19515。[25] Y. S. Kivshar 和 G. P. Agrawal，《光孤子：从光纤到光子晶体》，学术出版社（圣迭戈，2003年）。[26] Y. V. Kartashov、B. A. Malomed 和 L. Torner，《非线性晶格中的孤子》，《现代物理评论》83，247（2011年）。[27] S. Aubry 和 G. Andr´e，非公度晶格中的解析性破缺与Anderson局域化，《以色列物理学会年刊》3，18（1980年）。[28] P. G. Harper，均匀磁场中导电电子的单带运动，《物理学会会刊A辑》68，874（1995年）。[29] F. K. Abdullaev、Y. V. Bludov、S. V. Dmitriev、P. G. Kevrekidis 和 V. V. Konotop，非线性晶格诱导的广义邻近相互作用模型，《物理评论E》77，016604（2008年）。[30] A. Fratalocchi 和 G. Assanto，具有任意非局域性的一维非线性晶格中的离散光局域化，《物理评论E》72，066608（2005年）。[31] J. K. Asb´oth、L. Oroszlany 和 A. Palyi，*A short course on topological insulators*，《物理学讲义》第919卷（施普林格国际出版，查姆，2016年）。[32] M. Z. Hasan 和 C. L. Kane，拓扑绝缘体，《现代物理评论》82，3045（2010年）。[33] X.-L. Qi 和 S.-C. Zhang，拓扑绝缘体与超导体，《现代物理评论》83，1057（2011年）。[34] P. G. Kevrekidis，《离散非线性薛定谔方程：数学分析、数值计算与物理视角》，第232卷（施普林格，柏林、海德堡，2009年）。¨C. M. de Sterke 和 J. E. Sipe，带隙孤子，《光学进展》33，203（1994年）。[35] V. Berger，非线性光子晶体，《物理评论快报》81，4136（1998年）。[36] F. Lederer、G. I. Stegeman、D. N. Christodoulides、G. Assanto、M. Segev 和 Y. Silberberg，光学中的离散孤子，《物理报告》463，1（2008年）。

[38] J. R. Dormand 和 P. J. Prince，一族嵌入式龙格-库塔公式，《计算与应用数学杂志》**6**，19（1980年）。[39] C. Chin、R. Grimm、P. Julienne 和 E. Tiesinga，超冷气体中的Feshbach共振，《现代物理评论》**82**，1225（2010年）。[40] D. E. Pelinovsky、A. A. Sukhorukov 和 Y. S. Kivshar，周期势中带隙孤子的分岔与稳定性，《物理评论E》**70**，036618（2004年）。[41] Y. Zhang 和 B. Wu，非线性周期系统中带隙孤子与布洛赫波的组成关系，《物理评论快报》**102**，093905（2009年）。[42] L. C. Zhao，关于狄拉克磁单极子理论与贝里几何相位的注记，arXiv:2409.02144。[43] P. A. M. Dirac，电磁场中的量子化奇点，《现代物理评论》**133**，60（1931年）。

[44] T. Mayteevarunyoo 和 B. Malomed，一维光子晶体中的孤子，J. Opt. Soc. Am. B **25**, 1854 2008(). [45] P. J. Y. Louis、E. A. Ostrovskaya、C. M. Savage 和 Y. S. Kivshar，光学晶格中的玻色-爱因斯坦凝聚体：带隙结构与孤子，《物理评论A辑》**67**, 013602 (2003). [46] E. J. Bergholtz、J. C. Budich 和 F. K. Kunst，非厄米系统的例外拓扑，《现代物理评论》**93**, 015005 (2021). [47] T. Ozawa、H. M. Price、A. Amo、N. Goldman、M. Hafezi、L. Lu、M. C. Rechtsman、D. Schuster、J. Simon、O. Zilberberg 和 I. Carusotto，拓扑光子学，《现代物理评论》**91**, 015006 (2019).