arXiv:2601.01359v1 [math.AT] 4 Jan 2026

极限中 Vietoris–Rips 复形的影

Kazuhiro Kawamura、Sushovan Majhi 和 Atish Mitra

摘要。度量空间 (X,d) 在尺度 β 下的 Vietoris–Rips 复形记作 $\mathcal{R}_\beta(X)$，它是一种抽象单纯复形，其中每个 k-单形对应于 X 中直径为 β 的 $(k+1)$ 个点。对于任意顶点集 $\mathcal{K}^{(0)}$ 为欧几里得子集的抽象单纯复形 $\mathcal{K}$，其影记作 $\mathcal{S}(\mathcal{K})$，是 $\mathcal{K}$ 中各单形的凸包之并。本文聚焦于顶点取自 $\mathbb{R}^N$ 的 Vietoris–Rips 复形 $\mathcal{K}=\mathcal{R}_\beta(X)$ 的影的同伦性质，以及典范投影映射 $p\colon \mathcal{R}_\beta(X)\to\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(X))$。研究 p 的几何／拓扑行为是一个自然却并非易解的问题。映射 p 可能存在许多“奇点”，而这些奇点仅在低维情形 $N\le 3$ 得到了部分解决。这一障碍自然促使我们研究这些复形的系统 $\{\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))\mid \beta>0, S\subset X\}$。为应对影投影映射中的奇点所带来的挑战，我们运用形状理论中的逆系统技术研究影复形的系统，并证明极限映射具有良好的同伦论性质。具体而言，借助形状理论中的思想与框架，我们证明在“$\beta\to 0$ 和 $S\to X$”的极限下，当 X 是 ANR（绝对邻域收缩）且具有满足某些正则性条件的度量时，极限映射“$\lim p$”在同伦／同调群方面表现良好。由此得到关于这些复形系统同伦性质的极限定理：当邻近尺度参数趋于零，且样本集趋近于底空间（例如子流形或欧几里得图）时，结论成立。本文最后讨论了这些结果在一维子流形有限重构问题中的潜在应用。

1. 引言

定义 1.1（Vietoris–Rips 复形）。给定一个度量空间 (X,d_X) 和一个正的邻近尺度 β，X 在尺度 β 下的 *Vietoris–Rips* 复形记为 $\mathcal{R}_\beta(X)$，定义为一个抽象单纯复形：对于 $\sigma\subset\mathcal{A}$ 的每个有限子集，只要其基数为 $(m+1)$ 且直径小于 β，就有一个 m–单形。更具体地说，

$$\mathcal{R}_\beta(X)=\{\sigma\mid \sigma \text{ is a finite subset of } A, \operatorname{diam}_{d_X}(\sigma)<\beta\}.$$

上述定义中的严格不等式对本文至关重要。为简便起见，赋予 $\mathcal{R}_\beta(X)$ 怀特海德拓扑 [30] 后的几何实现也用相同的符号表示。

这一概念最初由 L. Vietoris 于 1927 [31] 提出，随后 E. Rips 对其进行了广泛研究，尤其是在双曲群的背景下。尽管它诞生于 20 世纪初，但直到近十年，这些复形才日益受到关注，尤其是在应用拓扑学和拓扑数据分析（TDA）领域。与传统的替代方案（如 Čech 复形和 α-复形 [16, 14]）相比，Vietoris–Rips 复形计算简便，因此更适合应用。

筑波大学数学系，日本 乔治·华盛顿大学数据科学项目，美国 蒙大拿理工大学数学系，美国电子邮件地址：kawamura@math.tsukuba.ac.jp, s.majhi@gwu.edu, amitra@mtech.edu。2020数学学科分类。18A30（主要），51F99、55N31（次要）。关键词和短语。Vietoris–Rips 复形、几何复形、阴影复形、正向极限、逆向极限。

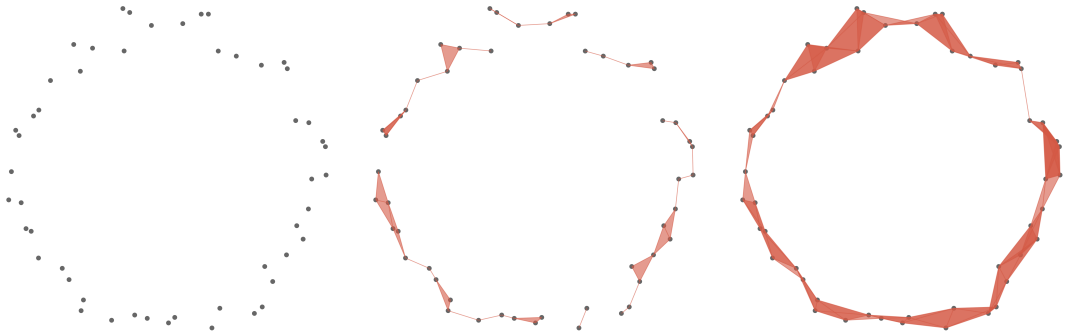


图 1. 随着尺度 β 增大（从左到右），点云上的 Vietoris–Rips复形。当 β 增大时，复形的拓扑变得越来越连通，直到最终变为可缩。

然而，这种组合灵活性是以理论上的代价为平衡的：度量空间（即使是有限度量空间）的 Vietoris–Rips 复形的拓扑通常仍缺乏深入理解。尽管如此，针对近似黎曼流形 [19, 24, 27], 度量图 [26, 21], 以及具有有界亚历山德罗夫曲率的一般测地空间 [23]，Vietoris–Rips 复形的研究已取得了值得关注的进展。

Hausmann 的开创性工作确立了：对于充分小的尺度 β [19]，任何闭黎曼流形 M 都与其 Vietoris–Rips 复形 $\mathcal{R}_\beta(M)$ 同伦等价。这一基本结果自然引出了有限重构问题：确定在什么条件下，M 仍与有限稠密样本的 Vietoris–Rips 复形同伦等价。Latschev 于 [24] 通过将重构情境扩展到在 Gromov–Hausdorff 意义下接近 M 的度量空间，解决了这一问题 [7]。Latschev定理指出：对于闭黎曼流形 M，存在一个常数 $\epsilon_0(M) > 0$，使得对于任意尺度 $0 < \beta \leq \epsilon_0(M)$，存在一个$\delta(\beta) > 0$，其中任意度量空间 S 只要满足 $d_{GH}(S, M) < \delta(\beta)$，便可得到一个 *Vietoris–Rips* 复形 $\mathcal{R}_\beta(S)$，它与 M 同伦等价。尽管这一结果强调，采样阈值 ϵ_0 严格取决于 M 的内蕴几何，但它仍纯属定性且仅断言存在性。最近，[27] 的作者为流形给出了 Latschev 结果的定量且实用的对应版本，随后又将其推广到具有曲率界的更一般度量空间 [23]。

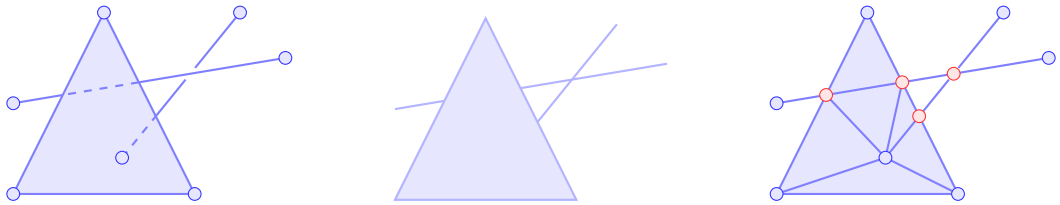


图2. [左] 一个具有平面顶点的抽象单纯复形 $\mathcal{K}$ 已绘出。 [中] 影 $\mathcal{S}(\mathcal{K}) \subset \mathbb{R}^2$ 已显示为平面的一个子集。 [右] 显示了影的一个三角剖分。新的阴影顶点以红色标出。

1.1. 复形之影与我们的研究动机。 我们对 Vietoris–Rips 复形及其影的理论研究，源于一项实际挑战：如何从有限且邻近的点云“样本”中，重构紧致欧几里得“形状”的拓扑与几何。在实际应用中，此类点云通常位于某个更简单的底层形状 $X \subset \mathbb{R}^N$ 上或其附近；如果样本$S \subset \mathbb{R}^N$ 直接位于形状上，则称其为无噪声 样本，否则称其为有噪声 样本。相对

新兴的 形状学习领域致力于推断未知形状的拓扑和几何性质 X，这些性质来自有限点云 S，该点云是在 Hausdorff 邻近性（定义 1.2）范围内对 X进行采样得到的。

定义 1.2（Hausdorff 距离）。设 (X, d) 为一个度量空间。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为紧致且非空的子集。它们之间的*Hausdorff*距离 记为 $d_H(A, B)$，定义如下：

$$d_H^X(A, B) := \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a, b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(a, b)\right\}.$$

对于 $X \subset \mathbb{R}^N$ 一个 d $A, B, \mathcal{X}$均配备欧几里得度量时，我们简记为 $d_H(A, B)$.

过去十年来，形状重建问题在理论和应用领域都受到了广泛关注；例如参见 [4, 12, 28, 10, 11, 9, 20, 15, 27]。为了重建未知形状 X，通常会对样本 S 进行“插值”，以计算出一个副本$\widehat{}$或“重建结果” X，使其在某种适当意义下等价于 X（例如同伦等价、同胚等）。形状重建的发展可分为两大目标： 拓扑 和 几何。拓扑重建只关注估计底层形状 X的拓扑特征（例如同调/同伦群），方法是计算$\widehat{}$一个抽象拓扑对象 X，该对象仅在拓扑意义上忠实于（与之同伦等价） X。$\widehat{}$为了生成 X，拓扑数据分析领域通常使用 Vietoris–Rips 复形 $\mathcal{R}_\beta(S)$，它基于样本 S 并取适当的尺度 β。利用 Vietoris–Rips复形获得同伦等价重建结果的例子包括 [26, 27, 23, 20, 5]。

拓扑忠实重建主要用于估计隐藏形状 X 的同调特征，例如其贝蒂数和欧拉示性数。然而，更具雄心的几何重建范式旨在计算 $\mathbb{R}^N$ 的一个子集——一个几何嵌入——使其同时满足：(a) 拓扑忠实（同胚或同伦等价），且 (b) 几何上接近（按 Hausdorff距离衡量） X。虽然抽象Vietoris–Rips复形有助于构造同伦等价的重建，但它们本身并不能在宿主欧几里得空间中提供嵌入。对于欧氏形状的几何重建，自然的做法是考察这些复形的影（定义如下）。在近期关于欧氏图重建的研究 [22]中，作者提出了一种可证明的算法：利用 Hausdorff-close 样本的 Vietoris–Rips复形的影，作为底层图的几何嵌入。

定义 1.3（影）。设 $\mathcal{K}$ 是一个顶点位于 $\mathbb{R}^N$ 中的抽象单纯复形，即 $\mathcal{K}^{(0)} \subset \mathbb{R}^N$。影子投影映射 $p\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}^N$ 将顶点 $v \in \mathcal{K}^{(0)}$ 映至对应的点 $\mathbb{R}^N$，然后线性扩展至几何实现中的所有点（滥用记法，仍记为） $\mathcal{K}$。我们将 $\mathcal{K}$ 在投影映射 p 下的像定义为其影，即

$$\mathcal{S}(\mathcal{K}) := \bigcup_{\sigma=[v_0,v_1,\dots,v_k]\in\mathcal{K}} \mathrm{Conv}(\sigma),$$

其中，$\mathrm{Conv}(\cdot)$ 表示 $\mathbb{R}^N$中一个子集的凸包。

由于该影是 $\mathbb{R}^N$ 的一个多面体子集，因此可以用至多 N 维的单纯复形来实现，但它可能不具有规范的三角剖分。图 2 展示了这样一种三角剖分。

在欧几里得样本的 Vietoris–Rips 复形这一特定背景下，研究典范投影映射 S的几何／拓扑行为是一个自然却看似简单实则颇具挑战的问题。映射 $p\colon \mathcal{R}_\beta(S) \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))$ 往往具有复杂的“奇点”，目前只有在低维 p 情形下才得到解决 $\mathbb{R}^N$， $N \le 3$ [8, 2]。这一障碍自然促使我们将关注点转向

复形的系统：

$$\{\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S)) \mid \beta > 0, S \text{ finite subset of } X\}.$$

本文研究该系统的同伦性质。结果表明，在极限“$\beta \to 0$和 $S \to X$”中，“极限映射 $\lim p$”在同伦群/同调群方面表现良好。

形状理论（[6], [13] 和 [29]），一种针对非ANR空间的同伦理论，为我们提供了一个便利的框架。尽管我们研究的空间大多是 ANR空间，但 [29] 中提出的逆系统方法为研究这些空间提供了一种便捷的语言。事实上，我们可以用 pro-HTOP范畴（[29]）来表述我们的结果。这种形式体系比我们的表述更为精细，但为避免技术性细节，我们仍采用目前的表述形式。

1.2. **问题设置**。在欧几里得形状重建的背景下，未知的底空间 $M \subset \mathbb{R}^N$ 通常建模为黎曼子流形或嵌入图，而样本则建模为有限子集 $S \subset \mathbb{R}^N$。

为便于建立更一般的重构框架，我们将 M 视为 $\mathbb{R}^N$ 中一个紧致连通的度量空间，其诱导度量 d_M 来自欧几里得长度结构。我们假设度量空间 (M, d_M) 是一个长度空间，也就是说，对于 M中任意一对点 p、q，都存在一个称为测地线的等距映射 $c\colon [0, d_M(p,q)] \to M$，使得$c(0) = p$, $c(d_M(p,q)) = q$. 此外，我们假设 M 满足下文所述的条件 **(M1)–(M3)**。全文中，$\|\bullet\|$ 表示 $\mathbb{R}^N$上的标准欧几里得范数。

假设。 设 (M, d_M) 是 $\mathbb{R}^N$ 的一个紧致度量空间，它具有一个 M 的邻域 $N(M)$ 和一个收缩 $\pi\colon N(M) \to M$。对于 $r > 0$，令 $N_r(M) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \inf_{p\in M} \|x - p\| \le r\}$。我们假设

(M1) 存在一个 $\rho(M) > 0$，使得空间 X 到 M 的任意两个映射 f、$g\colon X \to M$，若对每个 $x \in X$ 都满足 $d_M(f(x), g(x)) < \rho(M)$，则它们同伦：$f \simeq g$。

(M2) 存在 $\delta > 0$ 和 $\xi \in (1, \infty)$，使得对每个满足 $\|p - q\| < \delta$ 的 p、$q \in M$，都有

$$\|p - q\| \le d_M(p, q) \le \xi \|p - q\|.$$

(M3) 对于 每个满足 $N_r(M) \subset N(M)$ 的 $r > 0$，都存在一个满足 $\lim_{r\to 0} \varepsilon_r = 0$ 的 $\varepsilon_r > 0$，使得

$$\|\pi(x) - x\| < \varepsilon_r$$

对每个 $x \in N_r(M)$。

如 [27, 第 4] 节和 [26, 第 4], 节所示，带有诱导度量的闭欧几里得子流形，以及带有 ε-路径度量（ε较小）的有限边紧欧几里得嵌入图，都满足上述条件。

我们分别将 $(S, \|\bullet\|)$、(M, d_M) 和 $(M, \|\bullet\|)$ 的 Vietoris–Rips 复形记为 $\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(S)$、$\mathcal{R}_\beta(M)$ 和 $\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(M)$，并提出以下最自然的问题：

(a) **[Hausmann型]** 对于任意充分小的 $\beta > 0$，$\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M))$ 或 $\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(M))$ 是否同伦等价于 M? (b) **[Latschev 型]** 对于任意充分小的 $\beta > 0$，以及任意与 M 的 Hausdorff 距离充分接近的样本集 S，$\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(S))$ 是否同伦等价于 M？ (c) **[影子投影]** 对于任意充分小的 $\beta > 0$，以及任意与 M的 Hausdorff距离充分接近的样本集 S，映射 $p\colon \mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(S) \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(S))$ 是否为同伦等价?

我们并不知道上述问题在完全一般的情形下的答案，但我们证明，针对 S 和 β 取适当的正向极限和逆向极限时，上述结论成立。

1.3. **概要**。第 2 节介绍群的正向系统和逆向系统性质的相关定义。第 3 节证明一般（抽象）度量空间的 Vietoris–Rips 复形的一些非常自然的极限性质，例如定理3.3。第 4 节和第 5 节分别考察无噪声和有噪声样本的 Vietoris–Rips 复形的影的极限 $M \subset \mathbb{R}^N$ （见 1.2）。第 4 节的主要极限定理分别是关于 Vietoris–Rips 影和典范投影映射的定理 4.2 和定理 4.11。第 5 节分别给出相应的含噪类比结果，即定理5.5 和定理 5.9。最后，第 6 节通过定理 6.1 展示了 Vietoris–Rips 影在闭曲线几何重建方面的潜力。我们主要关注同伦群，但所有结果对同调群也同样成立。

1.4. **记号**。 本文中始终采用以下记号。

$\mathcal{R}_\beta(X)$ 表示度量空间 (X, d_X) 的 Vietoris–Rips 复形，并令 $\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(S)$ 为 $S \subset \mathbb{R}^N$ 在欧几里得度量下的 Vietoris–Rips 复形。为简便起见，赋予怀特海德拓扑的几何实现仍用相同符号表示。对于满足 $\mathcal{K}^{(0)} \subset \mathbb{R}^N$的单纯复形 $\mathcal{K}$， $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ 表示该复形 $\mathcal{K}$ 的影，影子投影记为 $p\colon \mathcal{K} \to \mathcal{S}(\mathcal{K})$。

对于 M的子集 A， $\operatorname{diam}_M(A)$ 表示相对于度量 d_M而言的 A 的直径。对于 $\mathbb{R}^N$的子集 B， $\operatorname{diam}_{\mathbb{R}^N}(B)$ 表示 B的欧几里得直径。对于 $B \subset M$， $\operatorname{Conv}(B)$ 和 $\operatorname{Conv}_M(B)$ 分别表示 B的欧几里得凸包和测地凸包。对于空间 X 与 Y之间的连续映射 $f\colon X \to Y$， 为简便起见，同伦群之间的诱导同态也记为 $f : \pi_m(X) \to \pi_m(Y)$ 。

2. 群的正向与逆向系统预备知识

本节介绍群的正向与逆向系统及其极限的重要记号、定义和性质。

定义 2.1 （群的正向系统）。 设 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ 是由偏序集 $\mathcal{I}$ 索引的一族群，并且对任意 $\alpha \preceq \beta$、 $f_{\alpha,\beta}\colon G_\alpha \to G_\beta$ 是一个同态，使得：

(i) $f_{\alpha,\alpha}$ 是恒等同态；(ii) 对任意 $\alpha \preceq \beta \preceq \gamma$、 $f_{\alpha,\gamma} = f_{\beta,\gamma} \circ f_{\alpha,\beta}$；(iii) 对每个 α、 $\beta \in \mathcal{I}$，存在 $\gamma \in \mathcal{I}$，使得 α、 $\beta \preceq \gamma$。

则称 $\{G_\alpha, f_{\alpha,\beta}\}$ 为由群和同态构成的一个正向系统 。

正向极限记作 $\varinjlim G_\alpha$，它是由不交并 $\sqcup G_\alpha / \sim$ 上的等价类 $[\cdot]$ 构成的集合，其中等价关系 $\sim$ 由下式生成：

$$x_\alpha \sim y_\beta \ (x_\alpha \in G_\alpha, y_\beta \in G_\beta) \Leftrightarrow f_{\alpha,\gamma}(x_\alpha) = f_{\beta,\gamma}(y_\beta) \text{ for some } \gamma \succeq \alpha, \beta.$$

群运算定义为

$$[x_\alpha] \cdot [y_\beta] = [f_{\alpha,\gamma}(x_\alpha) \cdot f_{\beta,\gamma}(y_\beta)]$$

根据上面的 (3)，该定义是良定义的。每个 G_α 都具有典范同态 $f_\alpha\colon G_\alpha \to \varinjlim G_\alpha$。系统 $\{f_\alpha\colon G_\alpha \to \varinjlim G_\alpha\}$ 在群范畴中构成余极限。

作为一个相关示例，可以考虑 $\mathbb{S}$ 为所有非空有限子集组成的 S 度量空间 (X, d_X)，并按集合包含关系构成偏序集。对于固定尺度 $\beta > 0$，注意到 Vietoris–Rips复形之间存在自然的包含映射 $\iota^{S,T}_\beta\colon \mathcal{R}_\beta(S) \to \mathcal{R}_\beta(T)$ 对任意 $S \subseteq T$均成立 $m \geq 0$，因此，对于任意 $\left\{\pi_m(\mathcal{R}_\beta(S)),\ \text{Vietoris–Rips复形 } \iota^{S,T}_\beta \text{的同伦群族}\right\}$ 将构成一个正向系统。该系统的正向极限将在备注3.2 和3.4中讨论。

直极限群具有如下刻画。设 $\{G_\alpha, f_{\alpha,\beta}\}$ 是一个群的正向系统，并假设给定一个同态系统 $\{h_\alpha\colon G_\alpha \to H\}$ 到群 H，使得$h_\alpha = h_\beta \circ f_{\alpha,\beta}$ 对每个 $\alpha \preceq \beta$均成立。则诱导同态

$$\varinjlim_\alpha h_\alpha\colon \varinjlim G_\alpha \to H$$

是同构，当且仅当

(1) 对每个 $x \in H$，都存在 α 和 $x_\alpha \in G_\alpha$，使得 $h_\alpha(x_\alpha) = x$；(2) 若 $x_\alpha \in G_\alpha$ 满足 $h_\alpha(x_\alpha) = 1$，则存在 β，使得 $\alpha \preceq \beta$，并且 $f_{\alpha,\beta}(x_\alpha) = 1$。

定义 2.2（群的逆系统）。设 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ 是由偏序集 $\mathcal{I}$ 索引的一族群，并且对于任意 $\alpha \preceq \beta$、$f_{\alpha,\beta}\colon G_\beta \to G_\alpha$ 是一个同态，使得

(1) $f_{\alpha,\alpha}$ 是恒等同态；(2) 每当 $\alpha \preceq \beta \preceq \gamma$、$f_{\alpha,\gamma} = f_{\alpha,\beta} \circ f_{\beta,\gamma}$；(3) 对每个 α、$\beta \in \mathcal{I}$，都存在 $\gamma \in \mathcal{I}$，使得 α、$\beta \preceq \gamma$。

那么，$\{G_\alpha, f_{\alpha,\beta}\}$ 称为群与同态的逆系统，而逆向极限$\varprojlim G_\alpha$ 是如下子集

$$\left\{(x_\alpha) \in \prod G_\alpha \mid f_{\alpha,\beta}(x_\beta) = x_\alpha, \text{ whenever } \alpha \preceq \beta\right\}.$$

配备逐分量群运算。对于每个 α，投影 $f_\alpha\colon \varprojlim_\alpha G_\alpha \to G_\alpha$ 均有定义。系统 $\{f_\alpha\colon \varprojlim_\alpha G_\alpha \to G_\alpha\}$ 构成群范畴中的极限。

设$\{G_\alpha, f_{\alpha,\beta}\}$是一个群的逆系统，并假设给定从群 H 到该系统的同态系统$\{h_\alpha\colon H \to G_\alpha\}$，使得 $h_\alpha = f_{\alpha,\beta} \circ h_\beta$ 对每个 $\alpha \preceq \beta$均成立。设 $f_\alpha\colon \varprojlim G_\alpha \to G_\alpha$ 为投影。则有诱导同态:

$$\varprojlim_\alpha h_\alpha\colon H \to \varprojlim G_\alpha$$

它满足 $h_\alpha = f_\alpha \circ \varprojlim_\alpha h_\alpha$ 对每个 α均成立。显式地，$\varprojlim_\alpha h_\alpha$ 定义为

$$\left(\varprojlim_\alpha h_\alpha\right)(x) = (h_\alpha(x))_\alpha,\ x \in H.$$

3. VIETORIS–RIPS 极限定理

本节将介绍 Vietoris–Rips 复形的极限定理。在本节中，(X, d_X) 表示任意度量空间。我们重点讨论 Vietoris-Rips 复形，但这些结果也适用于相关的单纯复形构造，例如 ˇCech 复形和 α- 复形 [14]。

m维球面和 $(m+1)$维球分别记作 S^m 和 D^{m+1}。

命题 3.1. 设 X 为非空集合，且 $\{\mathcal{K}(S) \mid S = \mathcal{K}(S)^{(0)}, S \subset X, \text{有限}\}$ 为一族单纯复形，并满足：若 $S \subset T$，则存在包含映射 $\iota^{S,T}\colon \mathcal{K}(S) \to \mathcal{K}(T)$。那么自然包含映射 $\iota^S\colon \mathcal{K}(S) \to \mathcal{K}(X)$ 诱导出一个同构

$$\varinjlim_S \iota^S\colon \varinjlim_S \pi_m(\mathcal{K}(S)) \to \pi_m(\mathcal{K}(X))$$

对每个 $m \geq 0$都成立。

注 3.2. 对于度量空间 (X, d_X) 和尺度 $\beta > 0$，作为推论，可以取 $\mathcal{K}(S) = \mathcal{R}_\beta(S)$ 来证明，对每个 $m \geq 0$，$\varinjlim_S \pi_m(\mathcal{R}_\beta(S)) \cong \pi_m(\mathcal{R}_\beta(X))$。

证明. 我们的证明是对 CW复形 上一个标准结论的直接改写。复形 $(\mathcal{K}(X)$ 具有怀特海德拓扑，也就是说，相对于单形（赋予标准拓扑）的弱拓扑：子集 F 是闭集，当且仅当对每个单形 σ， $F\cap\sigma$ 在 σ 中是闭集。我们首先证明以下断言。

断言： $\mathcal{K}(X)$ 中的每个紧集 F 都包含在 $\mathcal{K}(X)$的某个有限子复形中。

断言的证明：我们先证明以下集合：

$$\mathcal{F} \coloneqq \{\sigma \mid \operatorname{Int}\sigma \cap F \neq \emptyset\}$$

是有限的。这里，$\operatorname{Int}\sigma$ 表示 σ的单形内部（而非整个空间中的拓扑内部）。我们用反证法证明。

假设结论不成立。于是，存在无限多个单形 σ_i 以及点 $x_i \in \operatorname{Int}\sigma_i \cap F$。令 $I \coloneqq \{x_i\}$。对于 $\mathcal{K}(X)$ 中的每个 σ，都有$\operatorname{Int}\ \sigma_i \cap \sigma \neq \emptyset \Rightarrow \sigma_i \subset \sigma$，即 σ_i 是 σ的一个面。因此，满足 $\sigma_i \subset \sigma$的 i只有有限多个。这意味着 $I \cap \sigma$ 是一个有限集，特别地，它是 σ的一个闭子集。这表示 I 是F 的一个闭子集（根据拓扑的定义），因而是紧的。同样的证明表明， I 的每个子集都是闭的。换言之，I 是一个离散空间，因此根据 F的紧致性，它不可能是无限集，矛盾。断言得证。

上述论断蕴含以下包含关系：

$$F \subset \bigcup_{\sigma\in\mathcal{F}} \operatorname{Int}\sigma \subset \bigcup_{\sigma\in\mathcal{F}} \sigma.$$

令 S 为 $\sigma \in \mathcal{F}$ 的所有顶点构成的集合。则 $F \subset \mathcal{K}(S)$。

利用上述结果，我们可以证明正向极限的特征性质的几何版本，如定义2.1之后所述。

(i) 对于每个映射 $f\colon S^m \to \mathcal{K}(X)$，存在 X 的一个有限子集 S，使得 $\operatorname{Im}(f) \subset \mathcal{K}(S)$。(ii) 如果一个映射 $g\colon S^m \to \mathcal{K}(S)$（其中 S 是 X 的有限子集）有延拓 $\bar{g}\colon D^{m+1} \to \mathcal{K}(X)$，那么存在一个有限子集 $S' \supset S$，使得 $\operatorname{Im}(\bar{g}) \subset \mathcal{K}(S')$。

这两 条是正向极限的特征性质，结论由此得证。 □

下一个定理在以下意义上对上述内容略作推广：它不再考虑所有有限子集，而是通过逐次添加点得到相同的正向极限。

定理 3.3. 假设对于每个可分空间 Z，都有一个与之对应的单纯复形 $\mathcal{K}(Z)$，它满足以下条件：

(1) $Z = \mathcal{K}(Z)^{(0)}$. *(2)* 若 $Z_1 \subset Z_2 \subset Z$，则包含映射为 $\iota^{Z_1,\,Z_2}\colon \mathcal{K}(Z_1) \to \mathcal{K}(Z_2)$，并且 $\mathcal{K}(Z_1) = \{\sigma \in \mathcal{K}(Z_2) \mid \sigma^{(0)} \subset Z_1\}$。*(3)* 对于 $\mathcal{K}(Z)$ 的每个单形 $\sigma = [z_0, \ldots, z_n]$，其顶点为 $z_0, \ldots, z_n$，存在 Z 中 $\{z_0, \ldots, z_n\}$ 的一个开邻域 U，使得对于每个有限集 $\tau = \{w_1, \ldots, w_m\} \subset U$，$\sigma \cup \tau$ 中的点张成 $\mathcal{K}(Z)$ 的一个单形。

设 $D \coloneqq \{p_k \mid k = 1, 2, \ldots\}$ 是可分空间 X 的可数稠密子集，并令 $S_k \coloneqq \{p_i \mid i = 1, \ldots, k\}$。那么包含映射系统 $\{\iota^{S_k,X}\colon \mathcal{K}(S_k) \to \mathcal{K}(X) \mid k = 1, 2, \ldots\}$ 诱导出一个同构：

$$\varinjlim_k \iota^{S_k,X}\colon \varinjlim_k \pi_m(\mathcal{K}(S_k)) \to \pi_m(\mathcal{K}(X)). \tag{1}$$

备注 3.4。 对于度量空间 (X, d_X) 和尺度 $\beta > 0$，作为推论，可以取 $\mathcal{K}(S_k) = \mathcal{R}_\beta(S_k)$来证明，对于每个 $m \geq 0$，$\varinjlim_k \pi_m(\mathcal{R}_\beta(S_k)) \cong \pi_m(\mathcal{R}_\beta(X))$ $m \geq 0$ 中每个单形的直径 $\mathcal{R}_\beta(S_k)$ 为 严格 小于 β。因此，上述条件 (3) 确实得到满足。关于 Vietoris-Rips复形 定义中“$<$”与“$\leq$”之间区别的更多内容，请参见 [3]。

注3.5。 本文将 $\mathcal{R}_\beta^{\mathfrak{M}}(X)$ 的度量加厚记为 (X, d_X)，其尺度参数为 β，该概念由 [1]引入。存在一个自然连续双射 $j\colon \mathcal{R}_\beta(X) \to \mathcal{R}_\beta^{\mathfrak{M}}(X)$，它在所有维数上诱导同伦群的同构 [17, 定理 1]。对于 S 的每个有限子集 X，$\mathcal{R}_\beta^{\mathfrak{M}}(S)$ 与 $\mathcal{R}_\beta(S)$同胚，这是由于 $\mathcal{R}_\beta(S)$的紧致性。结合这两点，我们看到，$\varinjlim \pi_m(\mathcal{R}_\beta^{\mathfrak{M}}(S)) \cong \pi_m(\mathcal{R}_\beta^{\mathfrak{M}}(X))$ 对于度量加厚同样成立。

我们从一个引理开始。

引理3.6。 设 D，X，$\mathcal{K}(\bullet)$，以及 S_k 如定理 3.3中所定义。设 S 是 X的一个有限子集。设 (P, Q) 是一对[1] 紧多面体，且设 $F\colon P \to \mathcal{K}(S)$ 是满足以下条件的连续映射：

(1) 存在一个 Q的三角剖分 T_Q、一个整数 k 和 $S_k \subset S$，使得 $f \coloneqq F|_Q\colon T_Q \to \mathcal{K}(S_k)$ 是单纯映射。

那么，存在一个整数 $\ell > k$、一个 P 的三角剖分 T_P，其中包含作为子复形的 T_Q，以及一个单纯映射 $G\colon T_P \to \mathcal{K}(S_\ell)$，使得 $G \simeq F$相对于 $Q\colon P \to \mathcal{K}(S \cup S_\ell)$。

证明。 由于 D 是稠密的，利用定理3.3 的假设（3）以及 S的有限性，我们注意到：对于每个点 $x \in S$，都可以选取一个点 $p_x \in D$ 使得对于任意 $x_0, \ldots, x_n \in S$

$$[x_0, \ldots, x_n] \in \mathcal{K}(S) \Rightarrow [x_0, \ldots, x_n, p_{x_0}, \ldots, p_{x_n}] \in \mathcal{K}(S \cup \{p_{x_0}, \ldots, p_{x_n}\}). \tag{2}$$

我们取一个充分大的 $\ell > k$，使得

$$\{p_x \mid x \in S\} \subset S_\ell.$$

根据相对单纯逼近定理（参见 [18, 定理 2C 后的段落。1], 我们可以找到一个 T_P 的三角剖分 P，其中包含 T_Q 作为子复形，并且存在一个单纯映射 $\Phi\colon T_P \to \mathcal{K}(S)$，使得

$$\Phi \simeq F \text{ rel.} T_Q.$$

特别地，$\Phi|_{T_Q} = f$。对于每个顶点 $v \in T_P$，我们定义 $G(v)$为

$$G(v) = p_{\Phi(v)}, \tag{3}$$

其中

$$\text{if } v \in T_Q, \text{ then we choose } G(v) = f(v) \in S_k \subset S_\ell.$$

如果 $\sigma = [v_0, \ldots, v_n]$ 是 T_P的一个单形，则 $[\Phi(v_0), \ldots, \Phi(v_n)] \in \mathcal{K}(S)$。由（2），我们得到 n

$$[\Phi(v_0), \ldots, \Phi(v_n), p_{\Phi(v_0)}, \ldots, p_{\Phi(v_n)}] \in \mathcal{K}(S \cup S_\ell).$$

特别地，G在顶点 $T_P^{(0)}$ 上由（3）定义的映射诱导出一个单纯映射 $G\colon T_P \to \mathcal{K}(S_\ell)$。此外，上述论证表明，顶点集 $\{\Phi(v_0), \ldots, \Phi(v_n), p_{\Phi(v_0)}, \ldots, p_{\Phi(v_n)}\}$张成了 $\mathcal{K}(S \cup S_\ell)$的一个单形。因此，$\Phi$ 和 G 是到 $\mathcal{K}(S \cup S_\ell)$ 和 $\Phi|_{T_Q} = f|_{T_Q}$的相邻单纯映射。因此

$$G \simeq \Phi \simeq F \text{ rel. } Q.$$

这就证明了该引理。 □

现在我们给出定理 3.3 的证明。

定理 3.3 的证明。为证明（1），任取一个映射 $F\colon S^m \to \mathcal{K}(X)$。沿用命题 3.1 的证明，可取一个有限子集 S，它属于 X，使得 $\mathrm{Im}(F) \subset \mathcal{K}(S)$。将引理 3.6 应用于多胞体 $(P, Q) = (S^m, \emptyset)$，我们得到一个整数 ℓ 以及 $G\colon S^m \to \mathcal{K}(S_\ell)$，使得 $G \simeq F\colon S^m \to \mathcal{K}(S \cup S_\ell) \to \mathcal{K}(X)$。

现在假设给定了一个映射 $f\colon S^m \to \mathcal{K}(S_k)$，使得 $f \simeq 0\colon S^m \to \mathcal{K}(X)$，即 f 在 $\mathcal{K}(X)$中是零伦的。取一个单纯逼近，我们一开始即可假设 S^m具有一个三角剖分，记为 T_{S^m}，且 $f\colon T_{S^m} \to \mathcal{K}(S_k)$ 是一个单纯映射。

[1]在此，Q 是相对于 P的三角剖分而言的 P 的子复形

由于映射 f 有一个延拓 $F\colon D^{m+1} \to \mathcal{K}(X)$，按照命题 3.1的证明，我们可以找到 S 的一个有限子集 X，使得 $S \supset S_k$ 且 $\mathrm{Im}(F) \subset \mathcal{K}(S)$。

应用引理 3.6 于一对 $(P, Q) = (D^{m+1}, S^m)$ 和 (F, f)，我们得到一个整数 ℓ 以及一个映射 $G\colon D^{m+1} \to \mathcal{K}(S_\ell)$，它是 f的延拓。因此，f 作为映射 $S^m \to \mathcal{K}(S_\ell)$ 在$\mathcal{K}(S \cup S_\ell)$中是零伦，因此在 $\mathcal{K}(X)$中也是如此。这就证明了（1）。□

4. 无噪声样本的影极限定理

我们用 $\mathbb{S}$ 表示由 M 的所有有限子集按包含映射排序所得的有向集。对于 S、$T \in \mathbb{S}$ 和 $\beta > 0$，令

$$\iota_\beta^{S,T}\colon \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S)) \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(T))$$

表示包含映射。为简化记号，诱导的同伦群同态也记作 $\iota^{S}{}_{,\beta}{}^{T}\colon \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))) \to \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(T)))$。

对 $S \in \mathbb{S}$，取 $\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))$ 的 m-同伦群，并取由包含映射诱导的同态，我们得到一个正向系统

$$\left\{\pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))), \iota_\beta^{S,T}\colon \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))) \to \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(T))) \mid S, T \in \mathbb{S}, S \subset T\right\}$$

使得正向极限

$$\pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S}))) \coloneqq \varinjlim_{S\in\mathbb{S}} \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S)))$$

借助典范同态 $\iota^{S}{}_{,\beta}{}^{\mathbb{S}}\colon \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))) \to \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S}))$ 可以自然地定义。

注 4.1. (1) 若并集

$$\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S})) \coloneqq \cup_{S\in\mathbb{S}}\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))$$

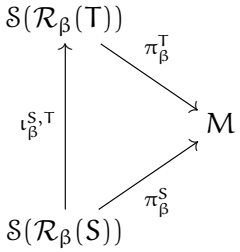
赋予关于集合 $\{\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S)) \mid S \in \mathbb{S}\}$ 的弱拓扑，则$\pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S})))$ 与群 $\pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S})))$同构，这也说明了上述记号的合理性。(2) 我们也可以取同调群，从而得到相应的同调群。

固定 β_0 使得 $\mathcal{S}(\mathcal{R}_{\beta_0}(M)) \subset N(M)$，其中 $N(M)$ 是 M 的邻域，定义见 1.2 (M1)，并假设在本节中始终有 $0 < \beta < \beta_0$。当 $\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M)) \subset N(M)$时，$\pi\colon N(M) \to M$ 在 $\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M))$ 上的限制记为 π_β。

对于 $S \in \mathbb{S}$，令

$$\pi_\beta^S\colon \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S)) \to M$$

为 $\pi\colon N(M) \to M$的限制。对于满足 $S \subset T$的 S、$T \in \mathbb{S}$，我们得到以下交换图：



由此得到相应的 m-同伦群交换图，并可得极限同态

$$\pi_\beta^{\mathbb{S}}\colon \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S}))) \to \pi_m(M).$$

对于 $0 < \gamma < \beta$ 、 S_1、 $S_2 \in \mathbb{S}$ ，其中 $S_1 \subset S_2$，我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathcal{R}_\gamma(S_1)) & \xrightarrow{\iota_\gamma^{S_1,S_2}} & \mathcal{S}(\mathcal{R}_\gamma(S_2)) \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_{\beta,\gamma}^{S_1}} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{\beta,\gamma}^{S_s}} \\ \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S_1)) & \xrightarrow[\iota_\beta^{S_1,S_2}]{} & \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S_2)) \end{array}$$

其中所有箭头均表示相应的包含映射。由上可知，对于 $0 < \gamma < \beta$，包含映射 $\iota_{\beta,\gamma}^{\mathbb{S}}: \mathcal{S}(\mathcal{R}_\gamma(S)) \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))$ 的正向极限诱导出同态

$$\iota_{\beta,\gamma}^{\mathbb{S}}: \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\gamma(\mathbb{S}))) \to \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S}))),$$

使下图成为交换图：

$$\begin{array}{ccc} \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\gamma(\mathbb{S}))) & & \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_{\beta,\gamma}^{\mathbb{S}}} & \searrow^{\pi_\gamma^{\mathbb{S}}} & \\ & & \pi_m(M) \\ & \nearrow_{\pi_\beta^{\mathbb{S}}} & \\ \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S}))) & & \end{array}$$

我们得到一个逆系统：

$$\left\{\pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S}))), \iota_{\beta,\gamma}^{\mathbb{S}}: \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\gamma(\mathbb{S}))) \to \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S}))) \mid 0 < \gamma < \beta < \beta_0\right\}$$

以及逆极限群

$$\varprojlim_\beta \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S})))$$

带有典范同态 $\iota_{\beta,\infty}^{\mathbb{S}}: \varprojlim \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S}))) \to \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S})))$.

此外，我们得到一个同态：

$$\pi_\infty^{\mathbb{S}}: \varprojlim_\beta \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S}))) \to \pi_m(M), \tag{4}$$

定义如下

$$\pi_\infty^{\mathbb{S}} = \pi_\beta^{\mathbb{S}} \circ \iota_{\beta,\infty}^{\mathbb{S}},$$

其中我们注意到，若 $\gamma < \beta < \beta_0$，则

$$\pi_\beta^{\mathbb{S}} \circ \iota_{\beta,\infty}^{\mathbb{S}} = \pi_\beta^{\mathbb{S}} \circ \iota_{\beta,\gamma}^{\mathbb{S}} \circ \iota_\gamma^{\mathbb{S}} = \pi_\gamma^{\mathbb{S}} \circ \iota_{\gamma,\infty}^{\mathbb{S}}.$$

因此，上述定义（4）不依赖于 β。

关于 Vietoris–Rips影的第一个极限定理陈述如下：

定理 4.2. 同态 $\pi_\infty^{\mathbb{S}}: \varprojlim \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S}))) \to \pi_m(M)$ 对每个 $m \geq 0$ 都是一个同构。

注 4.3。 同调也同样成立。

在给出第 4.2 节定理的证明之前，我们先按照 Hausmann 定理 [19, 定理 3。5]的思路，陈述其关于 Vietoris–Rips 复形的一个特例。

4.1. **影的 Hausmann 型极限定理。** 以下命题本质上可视为定理4.2 的一个推论，但我们在定理 4.2 之前给出其证明，因为它很好地展示了本文论证的思路。

鉴于上述讨论，我们得到一个逆系统

$$\{\pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M))), \iota_{\beta,\gamma}\colon \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\gamma(M))) \to \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M))) \mid 0 < \gamma < \beta < \beta_0\}$$

以及逆极限群

$$\varprojlim_\beta \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M)))$$

以及典范同态 $\iota_{\beta,\infty}\colon \varprojlim \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M))) \to \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M)))$。对于一个 $\beta > 0$，令 $\jmath_\beta\colon M \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M))$ 为包含映射。对于每个 β，$\gamma > 0$ 满足 $\gamma < \beta$，我们有 $j_\beta = \iota_{\beta,\gamma} \circ j_\gamma$。因此，包含映射 $\jmath_\beta\colon \pi_m(M) \to \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M))$ 诱导出同态

$$\varprojlim_\beta \jmath_\beta\colon \pi_m(M) \to \varprojlim_\beta \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M)).$$

与（4）类似，我们定义同态

$$\pi_\infty\colon \varprojlim_\beta \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M))) \to \pi_m(M) \tag{5}$$

由 $\pi_\infty = \pi_\beta \circ \iota_{\beta,\infty}$ 给出。在下面的命题中，通过证明 $\varprojlim_\beta \jmath_\beta$ 是其逆映射，得出 π_∞ 是同构。

命题4.4。该同态

$$\pi_\infty\colon \varprojlim_\beta \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M))) \to \pi_m(M)$$

是一个同构。

证明。设 δ，ξ，ε_γ 为1.2 （M2）–（M3）中定义的参数。首先，我们证明以下陈述：对于每一对正数 β, γ 满足 $\gamma < \beta < \beta_0$ 和 $\xi(\gamma+\varepsilon_\gamma) < \delta$的参数，有

$$\pi_\beta \circ \jmath_\beta = \mathrm{id}_M, \text{ and } \jmath_{\xi(\gamma+\varepsilon_\gamma)} \circ \pi_\gamma \simeq \iota_{\xi(\gamma+\varepsilon_\gamma),\gamma}. \tag{6}$$

第一个等式显然成立。为证明第二个同伦关系，取一个点 $x \in \mathcal{S}(\mathcal{R}_\gamma(M))$，并找到 M 中的有限个点 p_1、……、p_k，使得

$$x \in \mathrm{Conv}(\{p_1, \ldots, p_k\}) \text{ and } \mathrm{diam}_M(\{p_1, \ldots, p_k\}) < \gamma.$$

我们看到

$$\|p_i - p_j\| \le d_M(p_i, p_j) < \gamma,$$
$$\mathrm{diam}_{\mathbb{R}^N} \mathrm{Conv}(\{p_1, \ldots, p_k\}) = \max_{i,j} \|p_i - p_j\| < \gamma.$$

注意到 $x \in N_\gamma(M)$。由（M3），我们有

$$\|\pi_\gamma(x) - x\| < \varepsilon_\gamma$$

因此

$$\|\pi_\gamma(x) - p_i\| \le \|\pi_\gamma(x) - x\| + \|x - p_i\| < \varepsilon_\gamma + \gamma$$

对每个 $i = 1, \ldots, k$。上述最后一项小于 δ，这是根据 γ的选取。由1.2 (M2) 可知 $d_M(\pi_\gamma(x), p_i) \le \xi\|\pi_\gamma(x) - p_i\| < \xi(\gamma + \varepsilon_\gamma)$。这意味着

$$\mathrm{diam}_M(\{\pi_\gamma(x), p_1, \ldots, p_k\}) < \xi(\gamma + \varepsilon_\gamma)$$

且点 $\{\pi_\gamma(x), p_1, \ldots, p_k\}$张成一个 $\mathcal{R}_{\xi(\gamma+\varepsilon_\gamma)}(M)$ 的单形。我们将映射 $H\colon \mathcal{S}(\mathcal{R}_\gamma(M)) \times [0,1] \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_{\xi(\gamma+\varepsilon_\gamma)}(M))$ 定义为

$$H(x,t) = tx + (1-t)\pi_\gamma(x) = t\,\iota_{\xi(\gamma+\varepsilon_\gamma),\gamma}(x) + (1-t)\,\jmath_{\xi(\gamma+\varepsilon_\gamma)}(\pi_\gamma(x)),\ (x,t) \in \mathcal{S}(\mathcal{R}_\gamma(M)) \times [0,1].$$

由上可知，$H(x,t)$ 确实是 $\mathcal{S}(\mathcal{R}_{\xi(\gamma+\varepsilon_\gamma)}(M))$ 的一个点，且 H 是$\iota_{\xi(\gamma+\varepsilon_\gamma)与\gamma}$ 之间的良定义同伦 $\jmath_{\xi(\gamma+\varepsilon_\gamma)} \circ \pi_\gamma$。这证明了（6）。

对于每个 $\beta \in (0, \beta_0)$，我们取 $\gamma < \beta$ 使得 $\xi(\gamma + \varepsilon_\gamma) < \beta$。现在将（6）作用到同伦群上，得到等式

$$\begin{aligned} &\pi_\beta \circ \jmath_\beta = \mathrm{id}_{\pi_m(M)}, \\ &\jmath_\beta \circ \pi_\gamma = \iota_{\beta,\gamma} \colon \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\gamma(M))) \to \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M))). \end{aligned} \tag{7}$$

由上可得

$$\pi_\infty \circ \left(\varprojlim_\beta j_\beta \right) = \mathrm{id}_{\pi_m(M)}, \quad \left(\varprojlim_\beta \jmath_\beta \right) \circ \pi_\infty = \mathrm{id}_{\varprojlim_\beta \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M)))}$$

如下。

对每个 $\omega \in \pi_m(M)$，由式（5）及式（7）的第一个等号可得

$$\begin{aligned} \pi_\infty \circ \left(\varprojlim_\beta \jmath_\beta \right)(\omega) &= (\pi_\beta \circ \iota_{\beta,\infty}) \circ \left((\jmath_\alpha(\omega))_{\alpha<\beta_0} \right) \\ &= \pi_\beta(\jmath_\beta(\omega)) = \omega. \end{aligned}$$

接下来，令 $\boldsymbol{\omega} = (\omega)_\alpha \in \varprojlim_\beta \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M)))$。对于任意 $\beta < \beta_0$，取 γ 使得$\xi(\gamma + \varepsilon_\gamma) < \beta$。由式（7）的第二个等号可知

$$\begin{aligned} \jmath_\beta(\pi_\beta(\omega_\beta)) &= \jmath_\beta(\pi_\beta(\iota_{\beta,\gamma}(\omega_\gamma))) \\ &= \jmath_\beta \pi_\gamma(\omega_\gamma) = \iota_{\beta,\gamma}(\omega_\gamma) = \omega_\beta. \end{aligned}$$

由上文及式（7）的第一个等号可得

$$\begin{aligned} \left(\varprojlim_\beta \jmath_\beta \right) \circ \pi_\infty(\boldsymbol{\omega}) &= \left(\varprojlim_\beta \jmath_\beta \right)(\pi_\beta(\iota_{\beta,\infty}(\boldsymbol{\omega}))) \\ &= \varprojlim_\beta \jmath_\beta(\pi_\beta(\omega_\beta)) \\ &= (\jmath_\beta \pi_\beta(\omega_\beta)) = (\omega_\beta) = \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

注 4.5. 根据 [29], 中发展的形状理论，上述证明表明逆系统 $\{\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M)), i_{\beta,\gamma} \mid o < \gamma < \beta < \beta_0\}$ 与 $\{M\}$ 在 pro-HTOP 范畴中同构。

注 4.6. 命题 4.4 对更一般的单纯复形类也成立。要得到结论，我们只需满足与（7）对应的条件。因此，若一个由有向集 $\{S_\beta(M) \mid \beta \in \Lambda\}$索引的单纯复形 $S_\beta(M)$ 系统 Λ 满足

（i）对于每个 $\beta \in \Lambda$，我们都有一个将 M 包含映射到 $S_\beta(M)$中的 $\jmath_\beta \colon M \to S_\beta(M)$，且（ii）对于 β、$\gamma \in \Lambda$，若满足 $\gamma \geq \beta$，则有包含映射 $\iota_{\beta,\ \gamma} \colon S_\gamma(M) \to S_\beta(M)$，且（iii）对于每个 β，都存在一个 $\gamma > \beta$ 和一个映射 $\pi_\gamma \colon S_\gamma(M) \to M$，使得 $\pi_\gamma \circ \jmath_\gamma \simeq \mathrm{id}$、$\jmath_\beta \circ \pi_\gamma \simeq i$

d，则我们有一个同构 $\pi_m(M) \cong \varprojlim_\beta \pi_\beta(M)$。

4.2. **Shadow的Latchev型极限定理。** 我们开始证明定理4.2。对于一个 $S \in \mathbb{S}$ 且在 M 中 $\beta/2$-稠密的有限子集，命题 4.4 证明中的包含映射被替换为映射 $\jmath_\beta \colon M \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M))$ $f_\beta^S \colon M \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))$，定义如下。

对于一个点 $s \in S$，令 $D_S(s)$ 为由 M 定义的闭子集

$$D_S(s) = \left\{ p \in M \mid d_M(p, s) = \min_{t \in S} d_M(t, p) \right\}.$$

我们取一个连续函数 $\lambda_s^S \colon M \to [0, 1]$，使得

$$\lambda_s^S(s) = 1, \ \lambda_s^S|_{M \setminus D_S(s)} \equiv 0. \tag{8}$$

此外，令

$$\Lambda_S(p) = \sum_{s \in B_{\beta/2}(p) \cap S} \lambda_s^S(p),$$

并注意到，由于 S在 M中是 $\beta/2$-稠密的，对每个 $p \in M$ 都有 $\Lambda_S(p) > 0$。对于 $\beta > 0$，我们定义映射 $f_\beta^S \colon M \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))$ 如下。

$$f_\beta^S(p) = \frac{1}{\Lambda_S(p)} \sum_{x \in B_{\beta/2}(p) \cap S} \lambda_x^S(p) \cdot x. \tag{9}$$

We 可见 $f_\beta^S(p) \in \mathrm{Conv}(B_{\beta/2}(p) \cap S)$，因此 f_β^S 确实是到 $\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))$的映射。

我们首先证明两个技术引理。

引理4.7。对于 S，S_1，$S_2 \in \mathbb{S}$和 $0 < \beta$，$\beta_1 < \beta_2$，其中 $S_1 \subset S_2$和 $\beta_2 < \beta_1$，令 $\iota^{S_1,}{}_{\beta}{}^{S_2} \colon \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S_1)) \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S_2))$ 和 $\iota^S_{\beta_1,\ \beta_2} \colon \mathcal{S}(\mathcal{R}_{\beta_2}(S)) \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_{\beta_1}(S))$ 为包含映射。我们有如下结论：

(1) $\iota^{S_1,\ S_2}_{\beta} \circ f^{S_1}_{\beta} \simeq f^{S_2}_{\beta}$.

(2) $\iota^S_{\beta_1,\beta_2} \circ f^S_{\beta_2} \simeq f^S_{\beta_1}$.

证明。**(1).** 对于 $\beta > 0$ 和 S_1，取满足 $S_1 \subset S_2$的 $S_2 \in \mathbb{S}$，并取 M中的一点 p。根据 $f_\beta^{S_1}$和$f_\beta^{S_2}$的定义，我们有

$$f_\beta^{S_1}(p) \in \mathrm{Conv}(S_1 \cap B_{\beta/2}(p)), \text{ and } f_\beta^{S_2}(p) \in \mathrm{Conv}(S_2 \cap B_{\beta/2}(p)).$$

根据假设，$\mathrm{Conv}(S_2 \cap B_{\beta/2}(p)) \supset \mathrm{Conv}(S_1 \cap B_{\beta/2}(p))$，因此我们看到，对于每个 $t \in [0,1]$，

$$(1-t)\, \iota_\beta^{S_1,S_2}(f_\beta^{S_1}(p)) + t\, f_\beta^{S_2}(p) \in \mathrm{Conv}(S_2 \cap B_{\beta/2}(p)) \subset \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S_2)).$$

由此，定义映射 $M \times [0,1] \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S_2))$ 为

$$t \mapsto (1-t)\iota_\beta^{S_1,S_2} \circ f_\beta^{S_1} + t f_\beta^{S_2}$$

这给出了 $\iota^{S_1,}{}_{\beta}{}^{S_2} \circ f_\beta^{S_1}$与 $f_\beta^{S_2}$之间所需的同伦。这就证明了 **(1)**。**(2)** 的证明与上述类似。

□

引理 4.8。令 β 为满足以下条件的正数

$$2\beta + \epsilon_\beta < \delta,\ \xi(2\beta + \varepsilon_\beta) < \rho(M),$$

并通过以下方式定义 ν_β

$$\nu_\beta = ((1/2) + \xi)\beta + \xi\varepsilon_\beta.$$

那么，对于 M中每个 $\beta/2$-稠密的 $S \in \mathbb{S}$，我们都有如下结论：

(1) $\pi_\beta \circ f_\beta^S \simeq \mathrm{id}_M$.

(2) $\iota^S_{\nu_\beta,\beta} \circ f^S_\beta \circ \pi_\beta \simeq \iota^S_{\nu_\beta,\beta} \colon \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S)) \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_{\nu_\beta}(S))$.

证明。取假设中的 β 和 $S \in \mathbb{S}$。

(1) 对于 M中的一个点 p，我们有 $f_\beta^S(p) \in$ 凸包$(S \cap B_{\beta/2}(p))$。此外，我们还可看到

$$\mathrm{diam}_{\mathbb{R}^N}(S \cap B_{\beta/2}(p)) \le \mathrm{diam}_M(S \cap B_{\beta/2}(p)) < \beta.$$

由上述可知 $f_\beta^S(p) \in N_\beta(M)$。因此，根据 1.2 **(M3)**，我们有

$$\|\pi_\beta(f_\beta^S(p)) - f_\beta^S(p)\| < \varepsilon_\beta. \tag{10}$$

此外，对于每个点 $x \in B_{\beta/2}(p) \cap S$，我们有

$$\|x - p\| \le d_M(x,p) < \beta/2.$$

由于 $f_\beta^S(p) \in$ 凸包$(S \cap B_{\beta/2}(p))$，由上文可知

$$\|f_\beta^S(p) - p\| < \beta/2.$$

这两者意味着

$$\begin{aligned} \|p - \pi_\beta(f_\beta^S(p))\| &\leq \|p - f_\beta^S(p)\| + \|f_\beta^S(p) - \pi_\beta(f_\beta^S(p))\| \\ &< (\beta/2) + \varepsilon_\beta. \end{aligned}$$

最后一项小于 δ 根据 β的选取。因此，由 1.2 (M2) 可得

$$d_M(p, \pi_\beta(f_\beta^S(p))) < \xi((\beta/2) + \varepsilon_\beta) < \rho(M).$$

由于 p 是 M中的任意点，我们可得 $\pi_\beta \circ f_\beta^S$ 与 $\rho(M)$-接近于 id_M。由 1.2 (M1) 可得 $\pi_\beta \circ f_\beta^S \simeq id_M$。

(2). 对于一点 $x \in \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))$，存在 M 中的点 p_1、……、p_k，使得

$$x \in \mathrm{Conv}(\{p_1, \ldots, p_k\}),\ \mathrm{diam}_M(\{p_1, \ldots, p_k\}) < \beta.$$

我们注意到 $x \in N_\beta(M)$ 以及直径$_{\mathbb{R}^N}(\{p_1, \ldots, p_k\}) < \beta$。对于每个 $i = 1$、……、k，根据1.2 (M3)，

$$\begin{aligned} \|\pi_\beta(x) - p_i\| &\leq \|\pi_\beta(x) - x\| + \|x - p_i\| \\ &\leq \varepsilon_\beta + \beta. \end{aligned}$$

最后一项小于 δ，并且根据 1.2 (M2)，可知

$$d_M(\pi_\beta(x), p_i) < \xi(\beta + \varepsilon_\beta),\ i = 1, \ldots, k.$$

From 由上述内容可知，对于每个 $y \in S \cap B_{\beta/2}(\pi_\beta(x))$ 以及每个 $i = 1, \ldots k$,

$$\begin{aligned} d_M(y, p_i) &\leq d_M(y, \pi_\beta(x)) + d_M(\pi_\beta(x), p_i) \\ &< (\beta/2) + \xi(\beta + \varepsilon_\beta) = ((1/2) + \xi)\beta + \xi\varepsilon_\beta = \nu_\beta, \end{aligned}$$

这意味着

$$\mathrm{diam}_M(\{p_1, \ldots, p_k\} \cup (S \cap B_{\beta/2}(p))) < \nu_\beta,$$

因此，对于每个 $t \in [0, 1]$,

$$(1-t)x + t f_\beta^S(\pi_\beta(x)) \in \mathrm{Conv}(\{p_1, \ldots, p_k\} \cup (S \cap B_{\beta/2}(\pi_\beta(x)))) \subset \mathcal{S}(\mathcal{R}_{\nu_\beta}(S)).$$

由 $(x, t) \mapsto (1-t)x + t f_\beta^S(\pi_\beta(x))$ 定义的映射 $\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S)) \times [0, 1] \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_{\nu_\beta}(S))$ 给出了映射 $\iota_{\nu_\beta,\beta}^S$ 与映射 $\iota_{\nu_\beta,\beta}^S \circ f_\beta^S \circ \pi_\beta$ 之间的同伦。这证明了 (2)。

□

最后，我们通过证明定理 4.2 来结束本节。

定理的证明4.2。 我们应用引理 4.8，得到如下同伦群的交换图：

$$\begin{array}{ccc} \pi_m(M) & \xrightarrow{f_\beta^S} & \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))) \\ & \searrow^{\mathrm{id}} & \downarrow{\scriptstyle \pi_\beta^S} \\ & & \pi_m(M) \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc} \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))) & \xrightarrow{\pi^S_\beta} & \pi_m(M) \\ & \searrow^{\mathrm{id}} & \downarrow{\scriptstyle \iota^S_{\nu_\beta,\beta}\circ f^S_\beta} \\ & & \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_{\nu_\beta}(S))) \end{array}$$

对于每个充分小且满足该引理假设的 $\beta < \beta_0$。现在我们取正向极限$\varinjlim_{S\in\mathbb{S}}$，得到相应的交换图：

$$\begin{array}{ccc} \pi_m(M) & \xrightarrow{f^{\mathbb{S}}_\beta} & \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S})) \\ & \searrow^{\mathrm{id}} & \downarrow{\scriptstyle \pi^{\mathbb{S}}_\beta} \\ & & \pi_m(M) \end{array} \tag{11}$$

and

$$\begin{array}{ccc} \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S})) & \xrightarrow{\pi^{\mathbb{S}}_\beta} & \pi_m(M) \\ & \searrow^{\mathrm{id}} & \downarrow{\scriptstyle \iota^{\mathbb{S}}_{\nu_\beta,\beta}\circ f^{\mathbb{S}}_\beta} \\ & & \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_{\nu_\beta}(\mathbb{S}))) \end{array} \tag{12}$$

然后，我们取逆向极限 $\varprojlim_\beta$，得到

$$\begin{array}{ccc} \pi_m(M) & \xrightarrow{\varprojlim_\beta f^{\mathbb{S}}_\beta} & \varprojlim_\beta \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S}))) \\ & \searrow^{\mathrm{id}} & \downarrow{\scriptstyle \pi^{\mathbb{S}}_\infty} \\ & & \pi_m(M) \end{array} \tag{13}$$

and

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_\beta \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S}))) & \xrightarrow{\pi^{\mathbb{S}}_\infty} & \pi_m(M) \\ & \searrow^{\mathrm{id}} & \downarrow{\scriptstyle \varprojlim_\beta f^{\mathbb{S}}_\beta} \\ & & \varprojlim_\beta \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S}))) \end{array} \tag{14}$$

这里我们验证 (13) 和 (14) 的交换性如下：对于每个 $\omega \in \pi_m(M)$,
由 (11)

$$\begin{aligned} \pi^{\mathbb{S}}_\infty(\varprojlim_\beta f^{\mathbb{S}}_\beta(\omega)) &= (\pi^{\mathbb{S}}_\beta \circ \iota_{\beta,\infty})\left(\varprojlim_\beta f^{\mathbb{S}}_\beta(\omega)\right) \\ &= \pi^{\mathbb{S}}_\beta(f^{\mathbb{S}}_\beta(\omega)) = \omega. \end{aligned}$$

这验证了（13）中的交换性。对于（14），任取 $\beta < \beta_0$ 并选取 $\gamma < \beta$使得$\nu_\gamma = \beta$。将（12）中的交换性应用于 γ，可得

$$\iota^{\mathbb{S}}_{\beta,\gamma} \circ f^{\mathbb{S}}_\gamma \circ \pi^{\mathbb{S}}_\gamma = \iota^{\mathbb{S}}_{\beta,\gamma}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\iota^{\mathbb{S}}_{\beta,\infty}\circ\varprojlim_{\beta} f^{\mathbb{S}}_{\beta}\circ\pi^{\mathbb{S}}_{\infty} &= \iota^{\mathbb{S}}_{\beta,\gamma}\circ(\iota^{\mathbb{S}}_{\gamma,\infty}\circ\varprojlim_{\beta} f^{\mathbb{S}}_{\beta})\circ\pi^{\mathbb{S}}_{\infty}\\ &= \iota^{\mathbb{S}}_{\beta,\gamma}\circ f^{\mathbb{S}}_{\gamma}\circ\pi^{\mathbb{S}}_{\infty}\\ &= (\iota^{\mathbb{S}}_{\beta,\gamma}\circ f^{\mathbb{S}}_{\gamma}\circ\pi^{\mathbb{S}}_{\gamma})\circ\iota^{\mathbb{S}}_{\gamma,\infty}\\ &= \iota^{\mathbb{S}}_{\beta,\gamma}\circ\iota^{\mathbb{S}}_{\gamma,\infty}=\iota^{\mathbb{S}}_{\beta,\infty}.\end{aligned}$$

由于上述结论对任意 $\beta>0$均成立，我们看到（14）是交换的。

这表明 $\pi^{\mathbb{S}}_{\infty}$ 是一个同构，其逆映射由 $\varprojlim_{\beta} f^{\mathbb{S}}_{\beta}$给出。证明完毕。□

4.3. **影投影映射的极限定理**。我们利用上述结果来研究 Vietoris–Rips复形的影投影映射 $p^{\mathbb{S}}_{\beta}\colon \mathcal{R}_\beta(S)\to\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))$ 在$\mathcal{R}_\beta(S)$ 样本 $S\subset M$尺度 $\beta>0$下的同伦性质。首先回顾 Hausmann构造 [19]。

我们始终在 M 上固定一个全序，并令 $\sigma=[p_0,\dots,p_n]$ 为 $\mathcal{R}_\beta(M)$的一个单形，即 $\{p_0,\dots,p_n\}\subset M$ 且直径$_M(\{p_0,\dots,p_n\})<\beta$。我们假设这些顶点枚举为$p_0<\cdots<p_n$。

Hausmann 映射 $T\colon \mathcal{R}_\beta(M)\to M$ 按维数 $n\ge 0$归纳定义。首先令 $T(p)=p$。假设 T 已定义在 $(n-1)$-骨架 $\mathcal{R}_\beta(M)^{(n-1)}$ 上，其中 $\mathcal{R}_\beta(M)$，并令$_n\sigma=[p_0,\dots,p_n]$ 为一个 n-单形。对于 $\mathcal{R}_\beta(M)$ 中的点 $x=\sum\lambda_i p_i$（其中 $\lambda_i\ge 0$、$\sum_i\lambda_i=1$、$T(x)_{i=0}$

定义为

$$T(x)=\begin{cases}p_n, \text{ if } \lambda_n=1,\\ T\left(\frac{1}{1-\lambda_n}\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i p_i\right), \text{ if } \lambda_n<1.\end{cases}\tag{15}$$

当度量 d_M 满足以下条件（[19, 第179页，条目 b)-c)]）时，任意单形 $\sigma=[p_0,\dots,p_n]$ 的映像 $T(\sigma)$ 的直径可由下一个引理估计，其中 $\mathcal{R}_\beta(M)$。

（i）设 M 中的 p、q、r为点，使得 $\max\{d_M(p,q),d_M(q,r),d_M(r,p)\}<\rho(M)$，并设 s 为连接 p 和 q的一条测地线上的点。则有

$$d_M(r,s)\le\max\{d_M(r,p),d_M(r,q)\}$$

(ii) 若 c_1,c_2 a 是两条测地线，且 $c_1(0)=c_2(0)$，并且若 $s_1,s_2\in[0,\rho(M)]$，则有

$$d_M(c_1(ts_1),c_2(ts_2))\le d_M(c_1(s_1),c_2(s_2)).$$

引理4.9。假设 M 满足上述条件 *(i)* 和 *(ii)*，并令 β 为一个满足 $2\beta<\rho(M)$的正数。那么，我们有如下结论：

(1) 对于每个满足 $d_M(q,p_i)<\beta$, $i=0,\dots,n$ 的点 $q\in M$，以及每个点 $r\in T(\sigma)$，有 $d_M(r,q)<\beta$.(2) 对于每个点 $q\in T(\sigma)$，有 $d_M(q,p_i)<\beta$, $i=0,\dots,n$。

证明。两种证明都对 n 使用归纳法。

(1) 对于 $n=1$ 这一情形，证明很直接。假设该结论对 $(n-1)$ 成立，并取一个 n-单形 $[p_0,\dots,p_n]$ 以及满足假设条件的点 q,r。不妨设 $r\ne p_n$。根据构造（15），存在一点 $r'\in T([p_0,\dots,p_{n-1}])$，使得 r 位于 $c_{p_nr'}$ 与 p_n 之间的唯一测地线 r' 上。由归纳假设可得 $d_M(q,r')<\beta$。应用上述条件 (i)，可得

$$d_M(r,q)\le\max\{d_M(q,p_n),d_M(q,r')\}<\beta.$$

(2) $n=1$ 的情形是条件 (i) 的直接推论。假设结论对$(n-1)$成立，取一个 n-单形 $\sigma=[p_0,\dots,p_n]$。对于每个点 $q\in T(\sigma)\setminus\{p_n\}$，都存在一个点

$q' \in T([p_0, \ldots, p_{n-1}])$，使得 q 位于连接 p_n 和 q'的唯一测地线 $c_{p_n q'}$ 上。由 (1) 可得 $d_M(q', p_n) < \beta$。此外，根据归纳假设，对于每个 $i = 0$，都有 $d_M(p_i, q') < \beta$，……，$n-1$。因此，对于 $i = 0$，……，$(n-1)$，我们得到

$$d_M(q, p_i) \leq \max\{d_M(p_i, p_n), d_M(p_i, q')\} < \beta.$$

这证明了 (2)。 □

上述观察促成了以下假设：

假设 (H) 。存在 $\beta_0 > 0$ 以及一个同伦等价

$$T\colon \mathcal{R}_{\beta_0}(M) \to M$$

使得对于每个 $\beta \in (0, \beta_0)$ 以及每个 $\sigma = [p_0, \ldots, p_n] \in \mathcal{R}_\beta(M)$，我们有 e

$$T(\sigma) \subset \bigcap_{i=0}^{n} B_{d_M}(p_i, \beta).$$

对于 $\beta < \beta_0$，令 $T_\beta := T|_{\mathcal{R}_\beta(M)}$，并将其称为一个 *Hausmann* 映射。我们首先将 Vietoris-Rips 影投影映射 $p_\beta^S\colon \mathcal{R}_\beta(S) \to S(\mathcal{R}_\beta(S))$ 与 Hausmann 映射 $T_\beta\colon \mathcal{R}_\beta(M) \to M$进行比较。

命题 4.10. 假设 $\beta > 0$满足

$$\beta + \varepsilon_\beta < \delta \text{ and } \beta + \xi(\beta + \varepsilon_\beta) < \rho(M).$$

对于 M的闭子集 F，令 $\iota_\beta^F\colon \mathcal{R}_\beta(F) \to \mathcal{R}_\beta(M)$ 和 $\pi_\beta^F\colon S(\mathcal{R}_\beta(F)) \to M$ 分别为包含映射和投影。则有

$$\pi_\beta^F \circ p_\beta^F \simeq T_\beta \circ \iota_\beta^F,$$

也就是说，以下图表在同伦意义下交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_\beta(F) & \xrightarrow{p_\beta^F} & S(\mathcal{R}_\beta(F)) \\ {\scriptstyle \iota_\beta^F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_\beta^F} \\ \mathcal{R}_\beta(M) & \xrightarrow[T_\beta]{} & M \end{array} \tag{16}$$

证明。 回顾一下，复形 $\mathcal{R}_\beta(F)$ 赋有怀特海德拓扑，即相对于所有单形构成的集合的弱拓扑。由命题3.1 证明中的断言可知， $\mathcal{R}_\beta(M)$ 的每个紧子集都包含在某个有限子复形中。因此，只需对每个有限子集 F进行上述证明，该子集取自 M。

为简便起见，令 $T = T_\beta$。取一点 $x \in \mathcal{R}_\beta(F)$，并选取一个单形 $\sigma = [p_0, \ldots, p_n]$，它属于 $\mathcal{R}_\beta(F)$: $_n\{p_0, \ldots, p_n\} \subset F$， $d_M(p_i, p_j) < \beta$， i， $j = 0$，……，n，使得 $x = \sum \lambda_i p_i$。我们有 $T(\iota_\beta^F(x)) \in T(\sigma)_{i=0}$，并由引理4.9 (2)，

$$d_M(T(\iota_\beta^F(x)), p_i) < \beta,\ i = 0, \ldots, n. \tag{17}$$

另一方面， $p_\beta^F(x) \in$凸包$(\{p_0, \ldots, p_n\})$ 和

$$\mathrm{diam}_{\mathbb{R}^N}(\mathrm{Conv}(\{p_0, \ldots, p_n\}) \leq \mathrm{diam}_M(\mathrm{Conv}(\{p_0, \ldots, p_n) < \beta,$$

这意味着 $p_\beta^S(x) \in N_\beta(M)$。由1.2 (M3)

$$\|\pi_\beta^F(p_\beta^F(x)) - p_\beta^F(x)\| < \varepsilon_\beta.$$

由此，我们得到

$$\|\pi_\beta^F(p_\beta^F(x)) - p_i\| \leq \|\pi_\beta^F(p_\beta^F(x)) - p_\beta^F(x)\| + \|p_\beta^F(x) - p_i\| < \varepsilon_\beta + \beta.$$

由1.2（M2）可知

$$d_M(\pi_\beta^F(x), p_i) < \xi(\beta + \varepsilon_\beta),\ i = 0, \dots, n. \tag{18}$$

由（17）和（18），可得

$$d_M(T(\iota_\beta^F(x)), \pi_\beta^F(p_\beta^F(x))) < \beta + \xi(\beta + \varepsilon_\beta) < \rho(M).$$

因此，映射 $T \circ \iota_\beta^F$ 和 $\pi_\beta^F \circ p_\beta^F$ 是 $\rho(M)$-近的，故它们同伦。证明至此完成。□

对于有限集 $S \in \mathbb{S}$，Vietoris-Rips影子投影 $p_\beta^S \colon \mathcal{R}_\beta(S) \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))$ 在 m-同伦群上诱导同态：

$$p_\beta^S \colon \pi_m(\mathcal{R}_\beta(S)) \to \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))),$$

它在正向极限上诱导同态：

$$p_\beta^{\mathbb{S}} \colon \pi_m(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S})) \to \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S}))).$$

取逆 关于 β取极限，得到下述定理中的同态 .

定理 4.11. 逆极限同态

$$\varprojlim_\beta p_\beta^{\mathbb{S}} \colon \varprojlim_\beta \pi_m(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S})) \to \varprojlim_\beta \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S})))$$

对每个 $m \geq 0$都是同构。

证明. 我们先在图式（$\longrightarrow_S$ 16）中取正向极限 lim，得到一个交换图式：

$$\begin{array}{ccc} \pi_m(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S})) & \xrightarrow{p_\beta^{\mathbb{S}}} & \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S}))) \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_\beta^{\mathbb{S}}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_\beta^{\mathbb{S}}} \\ \pi_m(\mathcal{R}_\beta(M)) & \xrightarrow[T]{} & \pi_m(M) \end{array} \tag{19}$$

回想一下，复形 $\mathcal{R}_\beta(M)$ 赋予了怀特海德拓扑，我们看到同态

$$\iota_\beta^{\mathbb{S}} \colon \pi_m(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S})) \to \pi_m(\mathcal{R}_\beta(M))$$

是同构；参见注 3.2。此外， T 根据 [19]是同构。因此我们看到同态 $\pi_\beta^{\mathbb{S}} \circ p_\beta^{\mathbb{S}}$ 是同构。取逆向极限可知

$$\pi_\infty^{\mathbb{S}} \circ \varprojlim_\beta p_\beta^{\mathbb{S}} \text{ is an isomorphism.}$$

由定理 4.2， $\pi_\infty^{\mathbb{S}}$ 是一个同构，因此 $\varprojlim_\beta p_\beta^{\mathbb{S}}$也是同构。这就证明了该定理。 □

5. 含噪样本的极限定理

到目前为止，我们只考虑了直接位于 M 上的有限样本集 S。本节研究从 $\mathbb{R}^N$ 的紧子集 M 的邻域 $N_\tau(M)$ 中抽取样本的情形。

从形状重建的 [25] 角度来看，自然要考察欧几里得Vietoris-Rips复形 $\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(S)$ 及其影 $\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(S))$，其中样本集 $S \subset N_\tau(M)$ 配备了欧几里得度量。另一方面，在重建背景下引入了样本集上的另一种度量，即 ε-路径度量，以获得同伦等价 S， [15, 26, 23]对于任意足够小的 $\mathcal{R}_\beta(S) \simeq M$，以及任意在Hausdorff距离下足够接近 β 的样本集 S M

距离——当 M 是一个欧几里得嵌入图 [26] 或一个CAT(κ)空间，且 $\mathbb{R}^N$ [23]时。对于足够小的 β，$\tau > 0$，ε-路径度量 d^ε 相对于欧几里得距离具有有界的局部畸变。下面的设定比度量 d^ε的设定稍微更一般。

假设 (N)。我们假设，满足条件 (M1-M3) 的邻域 $N(M)$ 上存在一个度量 d_0，使得

(N) 存在 $\delta_0 > 0$ 和 κ_1、$\kappa_2 > 1$，使得对于 $N(M)$ 中任意一对点 p、q，若 $\max\{\|p-q\|, d_0(p,q)\} < \delta_0$，则有

$$\kappa_1^{-1} d_0(p,q) \le \|p-q\| \le \kappa_2 d_0(p,q).$$

对于 $\tau > 0$ 上满足 $N_\tau(M) \subset N(M)$、d_τ 的度量 d_0 在 $N(M)$ 上的限制记为。

注5.1。注意，对于 ε-路径度量 d^ε，有

$$\|p-q\| < \varepsilon \Rightarrow d^\varepsilon(p,q) = \|p-q\|.$$

这意味着

$$\beta < \varepsilon \Rightarrow \mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(N_\tau(M)) = \mathcal{R}_\beta^{d_\tau}(N_\tau(M)).$$

在下文中，集合 $\{(\beta,\tau) \mid \beta,\tau > 0\}$ 按照以下序关系视为一个有向集

$$(\beta_1,\tau_1) \ge (\beta_2,\tau_2) \Leftrightarrow \beta_1 \le \beta_2 \text{ and } \tau_1 \le \tau_2.$$

一个自然的问题是，我们关于含噪样本的极限结果是否取决于 $N_\tau(M)$ 上度量的选择。下一个命题回答了这个问题。对于满足 $\kappa_1\kappa_2\beta < \delta_0$ 的 $\beta > 0$、S_1、$S_2 \in \mathbb{S}_\tau$，由假设 (N) 可得以下包含映射：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta^{d_\tau}(S_1)) & \xrightarrow{j_\beta^{S_1}} & \mathcal{S}(\mathcal{R}_{\kappa_2\beta}^{\mathbb{R}^N}(S_1)) & \xrightarrow{k_\beta^{S_1}} & \mathcal{S}(\mathcal{R}_{\kappa_1\kappa_2\beta}^{d_\tau}(S_1)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta^{d_\tau}(S_2)) & \xrightarrow[j_\beta^{S_2}]{} & \mathcal{S}(\mathcal{R}_{\kappa_2\beta}^{\mathbb{R}^N}(S_2)) & \xrightarrow[k_\beta^{S_2}]{} & \mathcal{S}(\mathcal{R}_{\kappa_1\kappa_2\beta}^{d_\tau}(S_2)).
\end{array}$$

其中，竖直箭头也表示适当的包含映射。对于满足 $0 < \kappa_1\kappa_2\gamma < \beta$ 的 β、γ，我们取相应同伦群的正向极限，得到：

$$k_{\kappa_2\gamma}^{\mathbb{S}_\tau} \circ j_\gamma^{\mathbb{S}_\tau} = \iota_{\beta,\gamma}^{d_\tau}$$

and

$$j_\beta^{\mathbb{S}_\tau} \circ k_\gamma^{\mathbb{S}_\tau} = \iota_{\beta,\gamma}^{\mathbb{R}^N}.$$

其中 $\iota_{\beta,\gamma}^{d_\tau} : \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\gamma^{d_\tau}(\mathbb{S}_\tau)) \to \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta^{d_\tau}(\mathbb{S}_\tau)))$ 和 $\iota_{\beta,\gamma}^{\mathbb{R}^N} : \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\gamma^{d_\tau}(\mathbb{S}_\tau)) \to \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(\mathbb{S}_\tau)))$ 是由包含映射诱导的同态。

Vietoris-Rips复形也有同样的结论。由此，我们得出以下命题。

命题5.2。逆极限同态

$$\begin{aligned}
&\varprojlim_{(\beta,\tau)} j_\beta^{\mathbb{S}_\tau} : \varprojlim_{(\beta,\tau)} \pi_m(\mathcal{R}_\beta^{d_\tau}(\mathbb{S}_\tau)) \to \varprojlim_{(\beta,\tau)} \pi_m(\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(\mathbb{S}_\tau)), \\
&\varprojlim_{(\beta,\tau)} j_\beta^{\mathbb{S}_\tau} : \varprojlim_{(\beta,\tau)} \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta^{d_\tau}(\mathbb{S}_\tau))) \to \varprojlim_{(\beta,\tau)} \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(\mathbb{S}_\tau)))
\end{aligned}$$

是同构。

注5.3。 上述结果使我们可以考虑 $\mathcal{R}_\beta(S)$ 及其在以下任一度量下的影d^τ 和 $\|\cdot - \cdot\|$，只要我们只关注极限结果。文献[26] 指出，对于度量图的一个固定有限样本 S 邻域 $\mathcal{G}$，$\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(S)$ 可能与 $\mathcal{G}$不同伦等价。这种微妙差异在极限中消失。

5.1. **噪声下影的 Hausmann 型极限定理**。 命题4.4 有如下对应的类比。

命题5.4。 令 $\mathcal{R}_\beta(N_\tau(M)) = \mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(N_\tau(M))$ 或 $\mathcal{R}_\beta^{d_\tau}(N_\tau(M))$. 令 $\pi_{(\beta,\tau)}\colon \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(N_\tau(M)) \to M$ 为投影 $\pi\colon N_\tau(M) \to M$ 在 $\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(N_\tau(M)))$上的限制。则逆极限同态

$$\varprojlim_{(\beta,\tau)} \pi_{(\beta,\tau)}\colon \pi_m(\mathcal{S}\mathcal{R}_\beta(N_\tau(M))) \to \pi_m(M)$$

是一个同构。

证明。 我们的证明是对命题 4.4的证明作直接修改。我们在后文中假设$\mathcal{R}_\beta(N_\tau(M)) = \mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(N_\tau(M))$。对于 β，$\tau > 0$如上所述，令 $\jmath_{(\beta,\tau)}\colon M \to N_\tau(M) \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(N_\tau(M)))$ 为包含映射。我们证明以下命题：对于每个 $(\beta,\tau) > 0$,

$$\pi_{(\beta,\tau)} \circ \jmath_{(\beta,\tau)} = \mathrm{id}_M,\ \jmath_{(\beta,\tau)} \circ \pi_{(\beta,\tau)} \simeq \iota_{(\beta,\tau),(\beta+\varepsilon_{\beta+\tau},\tau)}. \tag{20}$$

上述内容推出了命题4.4中的结论。

第一个等式显然成立。对于第二个同伦，我们取一个点$x \in \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(N_\tau(M)))$，并找出有限多个点 q_1、……、q_k，它们属于 $N_\tau(M)$，使得

$$x \in \mathrm{Conv}(\{q_1,\dots,q_k\}) \text{ and } \mathrm{diam}_{\mathbb{R}^N}(\{q_1,\dots,q_k\}) < \beta.$$

我们选取点 p_1、……、p_k，它们属于 M，使得 $\|q_i - p_i\| \le \tau$对 $i = 1$、……、k成立。由于 $x \in N_{\beta+\tau}(M)$，根据1.2（M3），我们有

$$\|\pi_{(\beta,\tau)}(x) - x\| < \varepsilon_{\beta+\tau}$$

因此

$$\|\pi_{(\beta,\tau)}(x) - q_i\| \le \|\pi_{(\beta,\tau)}(x) - x\| + \|x - q_i\| < \varepsilon_{\beta+\tau} + \beta$$

对每个 $i = 1$、……、k都成立。因此

$$\mathrm{diam}_{\mathbb{R}^N}(\{\pi_{(\beta,\tau)}(x), q_1,\dots,q_k\}) < \varepsilon_{\beta+\tau} + \beta.$$

由以下方式定义的线性同伦 $H\colon \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(N_\tau(M))) \times [0,1] \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_{\beta+\varepsilon_\tau}(N_\tau(M))$

$$H(x,t) = t \cdot \iota_{(\beta,\tau),(\beta+\varepsilon_{\beta+\tau},\tau)}(x) + (1-t)\cdot \jmath_{(\beta,\tau)}(\pi_{(\beta,\tau)}(x)),\ (x,t) \in \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M)) \times [0,1]$$

得出所需的结论。 □

5.2. **噪声下影的 Latchev 型极限定理**。 为了得到定理4.2的一个类似结果，令 $\mathbb{S}_\tau$ 为 $N_\tau(M)$的所有有限子集组成的集合。对于 S_1，$S_2 \in \mathbb{S}_\tau$ 满足 $S_1 \subset S_2$时，包含映射

$$\iota_\beta^{S_1,S_2}\colon \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S_1)) \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S_2))$$

诱导出一个 m-同伦群的同态

$$\iota_\beta^{S_1,S_2}\colon \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S_1))) \to \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S_2)))$$

因此，正向极限

$$\pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S}_\tau))) \coloneqq \varinjlim_{S\in\mathbb{S}_\tau} \{\pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))), \iota_\beta^{S_1,S_2} \mid S_1,S_2 \in \mathbb{S}_\tau, S_1 \subset S_2\}$$

已定义。对于每个 $\beta > 0$ 和 $S \in \mathbb{S}_\tau$，令 $\pi_\beta^S\colon \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S)) \to M$ 为投影$\pi\colon N(M) \to M$的限制。由于对于每一对满足 $S_1 \subset S_2$、$\{\pi_\beta^S \mid S \in \mathbb{S}_\tau\}$的 $\mathbb{S}_\tau$ 中的 S_1、S_2，$\pi_\beta^{S_1} = \pi_\beta^{S_2} \circ \iota^{S_1,S_2}_\beta$诱导出一个同态

$$\pi_\beta^{\mathbb{S}_\tau}\colon \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S}_\tau))) \to \pi_m(M).$$

定理5.5。 令 $\mathcal{R}_\beta = \mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}$ 或 $\mathcal{R}_\beta^{d_\tau}$。逆极限同态

$$\varprojlim_{(\beta,\tau)} \pi_\beta^{\mathbb{S}_\tau} \colon \varprojlim_{(\beta,\tau)} \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(\mathbb{S}_\tau))) \to \pi_m(M).$$

对每个 m 都是一个同构。

再一次，我们的证明是对定理 4.2 的证明所作的修改。为简单起见，我们给出假设 $\mathcal{R}_\beta = \mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}$ 成立时的证明。另一种情况可由此及命题 5.2 得出。

首先，我们引入一个映射 $f^S_{(\beta,\tau)} \colon M \to \mathcal{R}_\beta(S)$，用于 $\beta > 0$ 和 $S \in \mathbb{S}_\tau$，它在 $N_\tau(M)$ 中是 $\beta/2$-稠密的。对于点 $q \in N_\tau(M)$ 和 $\varepsilon > 0$，令

$$B^\tau_\varepsilon(q) = \{r \in N_\tau(M) \mid \|r - q\| < \varepsilon\}.$$

对于点 $q \in S$，令 $D^\tau_S(q) = \{r \in N_\tau(M) \mid d_{N_\tau}(r,q) = \min_{x\in S} d_{N_\tau}(x,r)\}$，并选取一个连续函数 $\lambda^S_q \colon N_\tau(M) \to [0,1]$，使得

$$\lambda^S_q(q) = 1,\ \lambda^S_q | N_\tau(M) \setminus D_S(q) \equiv 0. \tag{21}$$

我们定义

$$\Lambda^\tau_S(q) = \sum_{x \in B^\tau_{\beta/2}(q)\cap S} \lambda^S_x(q),$$

并对每个 $q \in N_\tau(M)$观察 $\Lambda^\tau_S(q) > 0$。

对于 $\beta > 0$，我们定义映射 $f^S_{(\beta,\tau)} \colon M \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))$ 如下。

$$f^S_{(\beta,\tau)}(p) = \frac{1}{\Lambda^\tau_S(p)} \sum_{x \in B^\tau_{\beta/2}(p)\cap S} \lambda^S_p(x) \cdot x \tag{22}$$

根据定义，我们有：

$$f^S_{(\beta,\tau)}(p) \in \mathrm{Conv}(B^\tau_{\beta/2}(p) \cap S).$$

以下引理的证明与引理4.7的证明相同。

引理5.6。 对于 S，S_1，$S_2 \in \mathbb{S}_\tau$和 $0 < \beta$，$\beta_1 < \beta_2$，其中 $S_1 \subset S_2$和 $\beta_2 < \beta_1$，令 $\iota^{S_1,}_{\beta}{}^{S_2} \colon \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S_1)) \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S_2))$ 和$\iota^S_{\beta_1,\ \beta_2} \colon \mathcal{S}(\mathcal{R}_{\beta_2}(S)) \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_{\beta_1}(S))$ 为包含映射。我们有如下结论。

(1) $\iota^{S_1,}_{\beta}{}^{S_2} \circ f^{S_1}_{(\beta,\tau)} \simeq f^{S_2}_{(\beta,\tau)}$.

(2) $\iota^S_{\beta_1,\ \beta_2} \circ f^S_{(\beta_2,\tau)} \simeq f^S_{(\beta_1,\tau)}$.

对于 $\beta > 0$ 和 $S \in \mathbb{S}_\tau$，$\pi^S_\beta \colon \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S)) \to M$ 是投影 $\pi \colon N(M) \to M$ 在空间 $\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))$ 上的限制。

引理 5.7。 假设 β 和 τ 满足：

$$\beta + \varepsilon_\beta + \varepsilon_{\beta+\tau} < \delta,\ \xi(\beta + \varepsilon_\beta) < \rho(M).$$

对于 $N_\tau(M)$ 的每个 $\beta/2$-稠密有限子集 S，有如下结论。

(1) $\pi^S_\beta \circ f^S_{(\beta,\tau)} \simeq \mathrm{id}_M$.

(2) *Let* $\mu_{(\beta,\tau)} = (3\beta/2) + 2\varepsilon_\tau + \varepsilon_{\beta+\tau}$. *Then we have* $\iota^S_{\mu_{(\beta,\tau)},\beta} \circ f^S_{(\beta,\tau)} \circ \pi^S_\beta \simeq \iota^S_{\mu_{(\beta,\tau)},\beta} \colon \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S)) \to \mathcal{S}(\mathcal{R}_{\mu_{(\beta,\tau)}}(S))$.

证明。 取假设中的 β、τ 和 $S \in \mathbb{S}_\tau$。

（1）对于 M 的点 p，我们有 $f^S_{(\beta,\tau)}(p) \in$ 凸包$(S \cap B^\tau_{\beta/2}(p))$ 和直径$_{\mathbb{R}^N}(S \cap B^\tau_{\beta/2}(p)) < \beta$。

对于点 $x \in S \cap B^\tau_{\beta/2}(p)$，我们观察到

$$\begin{aligned} \|f^S_{\beta,\tau}(p) - p\| &\le \|f^S_{\beta,\tau}(p) - x\| + \|x - p\| \\ &\le (\beta/2) + (\beta/2) = \beta. \end{aligned}$$

因此$f^S_{\beta,\ \tau}(p) \in N_\beta(M)$，我们看到

$$\|\pi^S_\beta(f^S_{(\beta,\tau)}(p)) - f^S_{(\beta,\tau)}(p)\| \le \varepsilon_\beta$$

由 1.2(M3)。这两者推出

$$\|p - \pi^S_\beta(f^S_{(\beta,\tau)}(p))\| \le \|p - f^S_{(\beta,\tau)}(p)\| + \|f^S_{(\beta\tau)}(p) - \pi^S_\beta(f^S_{(\beta,\tau)}(p))\| \le \beta + \varepsilon_\beta < \delta.$$

因此，对每个 $p \in M$，我们得到 $d_M(p, \pi^S_\beta(f^S_\beta(p))) < \xi(\beta + \varepsilon_\beta) < \rho(M)$。因此，$\pi^S_\beta \circ f^S_\beta$ 与 id_M 的距离小于 $\rho(M)$。因此，这些映射是同伦的。

(2). 对于一个点 $x \in \delta(\mathcal{R}_\beta(S))$，存在 $N_\tau(M)$ 中的点 q_1，...，q_k，使得

$$x \in \mathrm{Conv}(\{q_1, \dots, q_k\}),\ \mathrm{diam}_{\mathbb{R}^N}(\{q_1, \dots, q_k\}) < \beta.$$

我们注意到 $x \in N_{\beta+\tau}(M)$。对于每个 $i = 1$，...，k，令 $p_i = \pi^S_\beta(q_i) \in M$。由于 $q_i \in N_\tau(M)$，由 1.2(M3) 可得

$$\|p_i - q_i\| \le \varepsilon_\tau.$$

Then

$$\begin{aligned} \|\pi^S_\beta(x) - p_i\| &\le \|\pi^S_\beta(x) - x\| + \|x - q_i\| + \|q_i - p_i\| \\ &\le \varepsilon_{\beta+\tau} + \beta + \varepsilon_\tau. \end{aligned}$$

最后一项小于 δ，因此由 1.2 (M2)，我们得到

$$d_M(\pi^S_\beta(x), p_i) < \xi(\beta + \varepsilon_{\beta+\tau} + \varepsilon_\tau),\ i = 1, \dots, k.$$

现在，对于点 $y \in S \cap B^\tau_{\beta/2}(\pi^S_\beta(x))$，我们看到

$$\begin{aligned} \|y - q_i\| &\le \|y - \pi^S_\beta(x)\| + \|\pi^S_\beta(x) - p_i\| + \|p_i - q_i\| \\ &< (\beta/2) + (\beta + \varepsilon_\tau + \varepsilon_{\beta+\tau}) + \varepsilon_\tau = (3\beta/2) + 2\varepsilon_\tau + \varepsilon_{\beta+\tau} \\ &= \mu_{(\beta,\tau)}. \end{aligned}$$

由上述内容可知

$$\mathrm{diam}_{\mathbb{R}^N}(\{q_1, \dots, q_k\} \cup (S \cap B^\tau_{\beta/2}(\pi_{(\beta,\tau)}(x))) < \mu_{(\beta,\tau)},$$

并且结论 (2) 可按引理 4.8 (2) 的方法得出。 □

有了这些 引理，定理 5.5 便可完全按照定理 4. 的证明方法证明。 2. □

注 5.8。 我们可以利用引理 5.7，如下获取关于 M的同伦群的信息：固定一对 (β, τ) 满足引理 5.7 假设的 $\beta/2$-稠密有限子集 S，其属于 $N_\tau(M)$,

(i) 由于 $f^S_{(\beta,\tau)}$ 根据引理5.7的(1)诱导出同伦群上的单同态，因此同伦群 $\pi_m(M)$ 同构于 $\pi_m(\delta(\mathcal{R}_\beta(S)))$ 的一个子群。特别地，$\pi_m(\delta(\mathcal{R}_\beta(S))) = 1$ 意味着 $\pi_m(M) = 1$。如果 $\pi_m(\delta(\mathcal{R}_\beta(S)))$ 是阿贝尔的，那么 $\pi_m(M)$也是阿贝尔的，且秩$(\pi_m(M)) \le$ 等于秩$(\pi_m(\delta(\mathcal{R}_\beta(S)))$。

(ii) 根据引理5.7的(2)，我们有

$$\mathrm{Ker}(\pi^S_\beta) \subset \mathrm{Ker}(\iota^S_{\mu(\beta,\tau),\beta})$$

因此，如果我们找到一个 $\pi_m(\delta(\mathcal{R}_\beta(S)))$ 中的非平凡元素 ω，它在 $\pi_m(\delta(\mathcal{R}_{\mu_{(\beta,\tau)}}(S)))$中仍然存在，那么 $\pi^S_\beta(\omega)$ 就是 $\pi_m(M)$中的非平凡元素。

由于我们对 β、τ 和 S 有“定量”估计，如引理 5.7所示，因此上述观察可视为对 M 的同伦群的一种部分定量估计。

5.3. **噪声下影子投影的极限定理**。 以下假设的提出，受到度量图 [26]以及具有有界曲率的度量空间 [23]的 Hausmann 型定理的启发。对于这些空间，度量 d_τ 被选为 ϵ-路径度量 d^ϵ，其中 ε充分小。对于光滑子流形， d_τ 选用欧几里得距离。

假设 (G) 对于任意充分小的 $\beta,\tau>0$，存在相应的 $\eta_{\beta,\tau}>0$，使得 $\lim_{(\beta,\tau)\to(0,0)}\eta_{\beta,\tau}=0$ 由投影 $\pi_{(\beta,\tau)}\colon N_\tau(M)\to M$诱导的单纯映射 $\psi_{\beta,\tau}\colon \mathcal{R}^{d_\tau}(N_\tau(M))\to\mathcal{R}_{\eta_{\beta,\tau}}(M)$ 是同伦等价。

在上述假设下，我们研究样本集 S 在 M邻域中的 Vietoris-Rips 投影 $p_\beta^S\colon \mathcal{R}_\beta(S)\to\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))$。定理陈述如下：

定理 5.9. 在假设 *(G)*、*(H)* 和 *(N)* 下，由直接极限同态系统 $\{p_\beta^{\mathbb{S}_\tau}\colon \pi_m(\mathcal{R}_\beta^{d_\tau}(\mathbb{S}_\tau))\to\pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta^{d_\tau}(\mathbb{S}_\tau)))\mid \beta,\tau>0\}$诱导的逆极限同态：

$$\left(\varprojlim_{(\beta,\tau)} p^{\mathbb{S}_\tau}_{(\beta,\tau)}\right)\colon \varprojlim_{(\beta,\tau)}\pi_m(\mathcal{R}_\beta^{d_\tau}(\mathbb{S}_\tau))\to\varprojlim_{(\beta,\tau)}\pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta^{d_\tau}(\mathbb{S}_\tau)))$$

是一个同构。

在给出本节末尾定理的证明之前，我们先做一些准备。

对于充分小的 $\delta_0>\beta$、$\tau>0$，令 $\eta_{\beta,\tau}$ 为假设 (G) 中的正数。对于一个有限集 $S\in\mathbb{S}_\tau$，我们考虑以下图示：

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(S) & \xrightarrow{p_\beta^S} & \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(S)) \\
\downarrow{\scriptstyle k^S_{\beta,\tau}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{S}(k^S_{\beta,\tau})} \\
\mathcal{R}^{d_\tau}_{\kappa_1\beta}(S) & \xrightarrow{p_\beta^S} & \mathcal{S}(\mathcal{R}^{d_\tau}_{\kappa_1\beta}(S)) \\
\downarrow{\scriptstyle \psi^S_{\kappa_1\beta}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi^S_\beta} \\
\mathcal{R}_{\eta_{\kappa_1\beta,\tau}}(M) & \xrightarrow[T_{\eta_{\kappa_1\beta}}]{} & M
\end{array}\tag{23}$$

其中， $\psi^S_{\kappa_1\beta}$ 是假设 (G) 中给出的单纯映射， $T_{\eta_{\kappa_1\beta}}$ 表示 (H) 中给出的 Hausmann 映射。此外， $k^S_{\beta,\tau}$ 和 $\mathcal{S}(k^S_{\beta,\tau})$ 表示包含映射（见假设 (N)）。

引理 5.10。 假设 $S\in\mathbb{S}_\tau$ 或 $S=N_\tau(M)$，并假设 β,τ 满足

$$\beta<\delta_0,\ 2(\beta+\varepsilon_\tau)<\delta,\ 2\xi(\beta+\varepsilon_\tau)+\eta_{\beta,\tau}<\rho(M).$$

那么我们有

$$T_\beta\circ\psi^S_\beta\circ k^S_\beta\simeq\pi^S_\beta\circ p^S_\beta\circ\mathcal{S}(k^S_{\beta,\tau}).$$

证明。 取 $\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(S)$ 的任意一个单形 $\sigma=[x_0,\dots,x_k]$，其中 $\{x_0,\dots,x_k\}\subset S$，且 $\operatorname{diam}_{\mathbb{R}^N}\{x_0,\dots,x_k\}<\beta$。根据假设 (N)，有 $\operatorname{diam}_{d_\tau}(\{x_0,\dots,x_k\})<\kappa_1\beta$，且 $\operatorname{diam}_{d_M}(\{\pi^S_\beta(x_0),\dots,\pi^S_\beta(x_k)\})<\kappa_1\beta$。应用假设 (H)，可得

$$d_M(T_{\eta_{\kappa_1\beta}}(\psi^S_{\kappa_1\beta}(x)),\pi^S_\beta(x_i))<\eta_{\kappa_1\beta}.$$

另一方面，我们有 $p_\beta^S(x) \in$ 凸包$(\{x_0,\dots,x_k\})$，且 $\operatorname{diam}_{\mathbb{R}^N}(\text{凸包}(\{x_0,\dots,x_k\})) < \beta$。于是

$$\begin{aligned}\|\pi_\beta^S(p_\beta^S(x)) - \pi_\beta^S(x_j)\| &\le \|\pi_\beta^S(x_j) - p_\beta^S(x)\| + \|p_\beta^S(x) - x_i\| + \|x_i - \pi_\beta^S(x_i)\| \\ &\le (\beta+\varepsilon_\tau) + \beta + \varepsilon_\tau < \delta.\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$d_M(\pi_\beta^S(p_\beta^S(x)), \pi_\beta^S(x_j)) < 2\xi(\beta+\varepsilon_\tau). \tag{24}$$

这两者推出

$$d_M(\pi_\beta^S(p_\beta^S(x)), T_{\eta_{\kappa_1\beta}}(\psi_{\kappa_1\beta}^S(x))) < \eta_{\kappa_1\eta} + 2\xi(\beta+\varepsilon_\tau) < \rho(M).$$

由此，我们得到所需的结论。

□

我们最终证明定理5.9。

定理 5.9 的证明。 利用假设 (G)、假设 (H) 和引理 23) 对图（5.10 取同伦群，并进一步取正向极限，我们得到如下交换图：

$$\begin{array}{ccc}
\pi_m(\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(\mathbb{S}_\tau)) & \xrightarrow{p_\beta^{\mathbb{S}_\tau}} & \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(\mathbb{S}_\tau))) \\
\downarrow{\scriptstyle k_{\beta,\tau}^{\mathbb{S}_\tau}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{S}(k_{\beta,\tau}^{\mathbb{S}_\tau})} \\
\pi_m(\mathcal{R}_{\kappa_1\beta}^{d_\tau}(\mathbb{S}_\tau)) & \xrightarrow{p_\beta^{\mathbb{S}_\tau}} & \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_{\kappa_1\beta}^{d_\tau}(\mathbb{S}_\tau))) \\
\downarrow{\scriptstyle \psi_{\kappa_1\beta}^{\mathbb{S}_\tau}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_\beta^{\mathbb{S}_\tau}} \\
\pi_m(\mathcal{R}_{\eta_{\kappa_1\beta},\tau}(M)) & \xrightarrow[T_{\eta_{\kappa_1\beta}}]{} & \pi_m(M)
\end{array} \tag{25}$$

根据假设 (G)， $\psi_{\kappa_1\beta}^{\mathbb{S}_\tau}$ 是同构；根据假设 (H)， $T_{\eta_{\kappa_1\beta}}$ 是同构。

现在，我们转向逆向极限 $\varprojlim_{(\beta,\tau)}$。极限同态 $\varprojlim_{(\beta,\tau)} k_\beta^{\mathbb{S}_\tau}$根据引理是同构5.2。此外，极限同态

$$\varprojlim_{(\beta,\tau)}(\pi_\beta^{\mathbb{S}_\tau} \circ \mathcal{S}(k_{\beta,\tau}^{\mathbb{S}_\tau})) \colon \varprojlim_{(\beta,\tau)} \pi_m(\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(\mathbb{S}_\tau))) \to \pi_m(M)$$

根据定理是同构5.5。因此，我们看到 $\varprojlim_{(\beta,\tau)} p_\beta^{\mathbb{S}_\tau}$是同构。

证明至此完成。 □

6. 闭曲线的有限重构

鉴于第 1.2 节中的问题 (b)，我们可以问，上述极限过程在什么条件下会真正稳定下来。本节讨论有限重构问题：对于具有足够小 $\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))$ 的 M 子集 $S \subset \mathbb{R}^N$，其影是否与 $d_H(M,S)$ 同伦等价?

当 M是一维闭光滑子流形，也就是一条光滑简单闭曲线时，我们在定理 6.1 中得到了如下若干结果。我们不仅重构了 M的同伦，还重构了其拓扑嵌入类型。

下文中， M是 $\mathbb{R}^N$ 中的一条光滑简单闭曲线，而 $N(M)$ 是 1.2 (M3) 中的一个管状邻域，包含 M，其丛投影为 $\pi\colon N(M)\to M$。它满足

$$\|\pi(x)-x\|=\min_{p\in M}\|p-x\|$$

对每个点 $x\in N(M)$。此外， $\tau>0$, $N_\tau(M)$ 表示 M 的 τ-管状邻域。对于点 $p\in M$， $T_p(M)$ 表示 M 在 p 处的切线，将其视为经过 p 的 $\mathbb{R}^N$ 的仿射直线。此外， $(T_p(M))^\perp$ 表示经过 p 、且与 $T_p(M)$ 正交的 $\mathbb{R}^N$ 的仿射子空间。对于点 $x\in\mathbb{R}^N$ 和 $\varepsilon>0$，令 $B_{\mathbb{R}^N}(x,\varepsilon)=\{y\in\mathbb{R}^N\mid\|x-y\|<\varepsilon\}$。由于 M 是一维的，存在一个正数 $\eta(M)$，使得

$$(T_p(M))^\perp\cap(B_{\mathbb{R}^N}(p,\eta)\cap M)=\{p\}$$

对每个 $p\in M$ 和 $\eta<\eta(M)$。

我们考虑关于尺度 β 的以下条件。

(β-1) $\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M))\subset N(M)$.(β-2) $3\beta<\eta(M)$,(β-3) $\beta+\xi(\beta+\varepsilon_\beta)<\rho(M)$，其中 ξ 和 ε_β 是 1.2（M2）和（M3）中的常数，针对诱导度量 d_M 在 M 上作为黎曼子流形时的 $\mathbb{R}^N$。

当 $\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M))\subset N(M)$ 时，将 $\pi:N(M)\to M$ 到 $\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M))$ 的限制记为 π_β。与前几节一样，$\mathbb{S}$ 和 $\mathbb{S}_\tau$ 分别表示 M 和 $N_\tau(M)$ 的所有有限子集的集合。

定理 6.1。设 M 是 $\mathbb{R}^N$ 的一维光滑闭子流形。假设 $\beta>0$ 满足条件（β-*1*）、（β-*2*）和（β-*3*）。

（1）投影 $\pi_\beta\colon\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M))\to M$ 和影子投影 $p_\beta\colon\mathcal{R}_\beta(M)\to\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M))$ 都是同伦等价。（2）取 $S\in\mathbb{S}$，使得 S 是 $\beta/2$-稠密的。投影 $\pi_\beta^S\colon\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))\to M$ 和影子投影 $p_\beta^S\colon\mathcal{R}_\beta(S)\to\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))$ 都是同伦等价。（3）假设 $\tau>0$，且 $S\in\mathbb{S}_\tau$ 满足 $N_\tau(M)\subset N(M)$，并且 $\pi(S)$ 是 ζ-稠密的。若 $\tau+\zeta<\beta/2$，则存在一条分片线性简单闭曲线 $K\subset\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(S))$，使得 K 和 M 在 $\mathbb{R}^N$ 中拓扑等价嵌入。

注 6.2。本文中将度量加厚记为 $\mathcal{R}_\beta^{\mathfrak{M}}(M)$。对于带有尺度参数 M 的度量空间 β，该概念最早由 [1] 引入。存在一个自然连续双射 $j\colon\mathcal{R}_\beta(M)\to\mathcal{R}_\beta^{\mathfrak{M}}(M)$，它在所有维数的同伦群上都诱导出同构。 [17, 定理 1]。对于 M 的一个子集 $\mathbb{R}^N$，赋予其诱导度量后， $\mathcal{R}_\beta^{\mathfrak{m}}(M)$ 存在一个自然映射 $f:\mathcal{R}_\beta^{\mathfrak{M}}(M)\to\mathcal{S}(\mathcal{R}^{\mathbb{R}^N}(M))$，使得影子投影等于 f 与 j的复合:

$$p=f\circ j\colon\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(M)\to\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(M)).$$

Adamszek-Adams [3, 定理 4.6] 和 Gillespie [17, 定理 1] 的证明表明，复合映射 $\pi_\beta\circ p_\beta\colon\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(M)\to\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(M))\to M$ 在所有维数的同伦群上都诱导出同构。因此， π_β 和 p_β 诱导的同态分别是满射和单射。

（2）命题 6.1（1）和（2）的证明无法推广到欧几里得 Vietoris-Rips 复形 $\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(M)$。

（3）对于上述定理（3）中的 PL 简单曲线 K，可以证明存在一个收缩 $r:\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(S))\to K$，使得 r 与包含映射 $\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(S))\to$同伦

$\mathcal{S}(\mathcal{R}_{2\beta}^{\mathbb{R}^N}(S))$。然而，尚不清楚 r 是否与 $\mathrm{id}^{\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))}$同伦。注意， K 与 M同胚。

我们先给出一个引理。

引理 6.3。 假设 β 满足 *(β-1)* 、*(β-2)* 和 *(β-3)*。令 $p_1,\dots,p_k$ 为 M 中的点，使得$d_M(p_i,p_j)<\beta$ 对每个 i, $j=1,\dots,k$均成立，并令 $C_M(p_1,\dots,p_k)$ 为包含集合 $\{p_1,\dots,p_k\}$的 M 的最小曲线。对于每个点 $x\in$凸包$(\{p_1,\dots,p_k\})$，有 $\pi(x)\in C_M(p_1,\dots,p_k)$

引理的证明 6.3。 令 x 为假设中所述的点。令 H^+ 和 H^- 为由 $\mathbb{R}^N$确定的闭半空间，该 $(N-1)$维超平面为 $(T_{\pi(x)}(M))^\perp$。再令 $\Pi:\mathbb{R}^N\to T_{\pi(x)}(M)$为到切线 $T_{\pi(x)}(M)$ 在 $\pi(x)$处的正交投影。注意 $\Pi(x)=\Pi(\pi(x))=\pi(x)$，并且 $x\in(T_{\pi(x)}(M))^\perp$。

由于 $\pi(x)=\Pi(x)\in$凸包$_{T_{\pi(x)}(M)}(\Pi(p_1),\dots,\Pi(p_k))$，我们有

$$\{p_1\dots,p_k\}\cap H^+\neq\emptyset\neq\{p_1,\dots,p_k\}\cap H^-.$$

因此我们得到

$$C_M(p_1\dots,p_k)\cap H^+\neq\emptyset\neq C_M(p_1\dots,p_k)\cap H^-,$$

这意味着 $C_M(p_1\dots,p_k)\cap(T_{\pi(x)}(M))^\perp\neq\emptyset$. 注意

$$\|\pi(x)-x\|\le\|p_i-x\|$$

因为 $p_i\in M$。对于每个点 $q\in C_M(p_1,\dots,p_k)$，我们看到

$$\begin{aligned}\|q-\pi(x)\| &\le \|q-p_1\|+\|p_1-x\|+\|x-\pi(x)\|\\ &\le \|q-p_1\|+2\|p_1-x\|\le d_M(q,p_1)+2\beta<3\beta.\end{aligned}$$

因此，我们有包含映射

$$C_M(p_1,\dots,p_k)\subset B^{\mathbb{R}^N}(\pi(x),3\beta)\cap M=\{\pi(x)\},$$

其中，最后一个等式由（β-2）推出。因此我们有

$$\emptyset\neq C_M(p_1,\dots,p_k)\cap(T_{\pi(x)}(M))^\perp\subset B^{\mathbb{R}^N}(\pi(x),3\beta)\cap M=\{\pi(x)\},$$

这就推出了 $\{\pi(x)\}=C_M(p_1,\dots,p_k)\cap(T_{\pi(x)}M)^\perp$，如所求。

□

定理 6.1 的证明。(1) 首先我们证明投影 π_β 是一个同伦等价。取一点 $x\in\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M))$，并取点 $p_1,\dots,p_k$，属于 M，使得

$$x\in\mathrm{Conv}(\{p_1,\dots,p_k\})\text{ and }d_M(p_i,p_j)<\beta\ (i,j=1,\dots,k).$$

根据引理 6.3，我们得到 $\pi_\beta(x)\in C_M(p_1,\dots,p_k)$。由于直径$_M(C_M(p_1,\dots,p_k))<\beta$，我们有 e

$$\mathrm{diam}_M(\{\pi(x),p_1,\dots,p_k\})<\beta,$$

这就推出 $(1-t)x+t\pi_\beta(x)\in\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M))$ 对每个 $t\in[0,1]$都成立。证明的其余部分与命题4.4的证明完全相同。

令 $T_\beta:\mathcal{R}_\beta(M)\to M$为式（15）中定义的同伦等价。重复命题 4.10的证明并使用（β-3），我们得到

$$T_\beta\simeq\pi_\beta\circ p_\beta.$$

因此，我们看到 p_β 也是一个同伦等价。

(2) 同样，我们先证明投影 π_β^S 是一个同伦等价。设 S是 M 的一个 $\beta/2$-稠密有限子集。我们取 M 的一个弧长参数化 $\gamma:[0,\ell]\to M$，满足$\gamma(0)=\gamma(\ell)$，并将 S枚举为

$$S=\{\gamma(t_1),\gamma(t_2),\dots,\gamma(t_n)\}$$

其中 $t_1<t_2<\cdots<t_n$。由于 S在 M中是 $\beta/2$-稠密的，我们可以看到

$$d_M(\gamma(t_i),\gamma(t_{i+1}))<\beta \tag{26}$$

对每个 $i=1,\ \dots,\ k-1$。

令 L 为 $\mathbb{R}^N$ 中由下式定义的折线曲线

$$L=\cup_{i=1}^n\overline{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})}\cup\overline{\gamma(t_n)\gamma(t_1)}$$

由下文的（27）可知 $L\subset\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))$。我们定义映射 $g_\beta^S:M\to L(t_1,\dots,t_n)$ 如下：对每个 $t\in[t_i,t_{i+1}]$，点 $\gamma(t_i)$ 和 $\gamma(t_{i+1})$ 分别位于由$(n-1)$-超平面 $(T_{\gamma(t)}(M))^\perp$确定的不同半空间中，因此线段 $\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})$与 $(T_{\gamma(t)}(M))^\perp$ 恰好相交于一点。我们将 $g_\beta^S(\gamma(t))$ 定义为唯一的点 $\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})\cap(T_{\gamma(t)}(M))^\perp$:

$$\{g_\beta^S(\gamma(t))\}=\overline{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})}\cap(T_{\gamma(t)}(M))^\perp.$$

我们验证 $\pi_\beta\circ g_\beta^S=\mathrm{id}_M$ 和 $g_\beta^S\circ\pi_\beta\simeq\mathrm{id}^{\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(M))}$。

由于 $\pi_\beta^S(T_{\gamma(t)}(M))^\perp=\gamma(t)$，我们得出 $\pi_\beta^S(g_\beta^S(\gamma(t)))=\gamma(t)$。因此 $\pi_\beta^S\circ g_\beta^S=\mathrm{id}_M$。对于每个 $x\in\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))$，我们取 S 的点 p_1、.....、p_k，使得 $x\in$凸包$(\{p_1,\dots,p_k\})$ 且直径$_M(\{p_1,\dots,p_k\})<\beta$。假设 $\pi_\beta^S(x)$ 写作 $\pi_\beta^S(x)=\gamma(t)$，$t\in[t_i,t_{i+1}]$。由引理 6.3，我们有 $\pi_\beta^S(x)=\gamma(t)\in C_M(p_1,\dots,p_k)$。由于 $\gamma(t_i,t_{i+1})$中没有 S 的点，因此我们有包含映射 $\gamma([t_i,t_{i+1}])\subset C_M(p_1,\dots,p_k)$。特别地，直径$_M(\{\gamma(t_i),\gamma(t_{i+1}),p_1,\dots,p_k\})<\beta$，因此

$$\mathrm{Conv}(\{\gamma(t_i),\gamma(t_{i+1}),p_1,\dots,p_k\})\subset\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S)).$$

因此，我们得到由 $\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))\times[0,1]\to\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))$ 给出的映射

$$(x,t)\mapsto(1-t)x+tg_\beta^S(\pi_\beta^S(x)),\ t\in[0,1]$$

是 $\mathrm{id}^{\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))}$ 与 $g_\beta^S\circ\pi_\beta^S$ 之间的一个同伦。

应用命题 4.10 于样本集 $S\subset M$，该样本集在 $\beta/2$中是 M -稠密的，并结合上述结果与（β-3），我们看到阴影投影映射 $p_\beta^S:\mathcal{R}_\beta(S)\to\mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(S))$ 是一个同伦等价。

这些证明了（2）。

（3）。首先注意到，对于每个 $p\in M$，都有 $\pi^{-1}(p)\subset(T_p(M))^\perp$。按照假设，取 $\tau>0$ 和 $S\subset N_\tau(M)$。同样地，我们取 M 的一个弧长参数化 $\gamma:[0,\ell]\to M$，满足 $\gamma(0)=\gamma(\ell)$，并将 M 的有限子集 $\pi(S)$ 枚举为

$$\pi(S)=\{\gamma(t_1),\gamma(t_2),\dots,\gamma(t_n)\}$$

其中 $t_1<t_2<\cdots<t_n$。由于 $\pi(S)$ 在 M 中是 ζ-稠密的，我们得到

$$d_M(\gamma(t_i),\gamma(t_{i+1}))<2\zeta \tag{27}$$

对每个 $i=1,\dots,k-1$。令 $S_i=S\cap\pi^{-1}(\gamma(t_i))$，并为每个 $i=1,\dots,n$ 选取一个点 $x_i\in S_i$。令 K 为 $\mathbb{R}^N$ 中定义的折线曲线，其定义为

$$K=\cup_{i=1}^{n-1}\overline{x_ix_{i+1}}\cup\overline{x_nx_1}.$$

由此可直接得出，K 是一条简单闭曲线。此外，我们看到

$$\begin{aligned}\|x_i-x_{i+1}\| &\le \|x_i-\gamma(t_i)\|+\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i+1})\|+\|\gamma(t_{i+1})-x_{i+1}\|\\ &< 2\tau+2\zeta<\beta,\end{aligned}$$

其中最后一个不等式由假设得出。由此可知 $K \subset S(\mathcal{R}_\beta(S))$。此外，由于 $\gamma(t_i, t_{i+1})$中没有 $\pi(S)$ 的点，我们看到

$$\pi(\overline{x_i x_{i+1}}) = \gamma([t_i, t_{i+1}])$$

and

$$\overline{x_i x_{i+1}} \cap \pi^{-1}(\gamma(t)) \text{ is a singleton.}$$

令 $f : M \to K$ 为由 $f(\gamma(t_i)) = x_i$、 $i = 1$、 ……、 n 和

$$\{f(\gamma(t)) = \overline{x_i x_{i+1}} \cap \pi^{-1}(\gamma(t)).$$

对每个 $t \in (t_i, t_{i+1})$。注意， $N_\tau(M) = \cup_{p\in M} D_p$，其中 $D_{\gamma(t)}$ 是包含于 $(T_{\gamma(t)}(M))^\perp$ 中的一个 $(N-1)$ 维圆盘，使得对每个 $t \in [0, \ell]$， $\gamma(t)$、 $f(t) \in D_{\gamma(t)}$。对于 $p \in M$，我们有一个同伦 $H_p : D_p \times [0, 1] \to D_p$，使得

(1) 对每个 $x \in D_\gamma(t)$， $H_{\gamma(t)}(x, 0) = x$，并且对每个 $t \in [0, \ell]$， $H_{\gamma(t)}(\gamma(t), 1) = f(t)$。

(2) 对每个 $x \in \partial D_p$， $H_p(x, s) = x$，并且 $s \in [0, 1]$。 (3) 由下式定义的映射

$H : N_\tau(M) \times [0, 1] \to N_\tau(M)$

$$H(x, s) = H_{\pi(x)}(x, s), (x, s) \in N_\tau(M) \times [0, 1]$$

是一个同伦。

上面的同伦 H 自然延伸为 $\mathbb{R}^N$ 上的同伦，该同伦固定 $N_\tau(M)$之外的每个点。因此， K 和 M 等价地嵌入在 $\mathbb{R}^N$中。

这证明了 (3)。

7. 讨论与开放问题

在本研究中，我们成功证明了关于 Vietoris– Rips 复形及其在良态欧氏子集附近的欧氏影子的最直观极限定理 M。秉持欧氏形状有限重构的理念，我们还证明，当 M 是光滑简单闭曲线时，极限确实会稳定下来（定理6.1）。与此同时，我们的研究也引出了许多开放问题，并为进一步探索指明了新的方向。下面列出其中一些问题。

(1) 空间 $S(\mathcal{R}_\beta(M)$ 是 ANR 吗? 对于 $\mathbb{R}^N$的紧度量子空间 M，我们有等式

$$M = \cap_{\beta>0} S(\mathcal{R}_\beta(M)).$$

因此，如果上述问题的答案是肯定的，那么通过空间 $S(\mathcal{R}_\beta(M))$研究（不一定是ANR） M 的形状理论性质将会有所帮助。

(2) $\eta(M)$ （定义见第6 节）与闭曲线的reach有何关系 M ?

(3) 鉴于定理6.1，下面这个（完整）有限重构问题似乎很自然，但至今仍未得到解答。

猜想7.1。 设 M 是 $\mathbb{R}^N$中的一条光滑简单闭曲线。对于任意充分小的 $\beta > 0$，以及任意一个在 *Hausdorff*距离意义下与 M 充分接近的有限集 S，有同伦等价 $S(\mathcal{R}_\beta^{\mathbb{R}^N}(S)) \simeq M$。

(4) 在多大程度上 定理6.1 的结果可以推广到高维流形 ?

参考文献

[1] Michał Adamaszek、Henry Adams 和 Florian Frick。通过最优传输进行度量重构。《*SIAM* 应用代数与几何杂志》，2：597–619，2018年。[2] Michał Adamaszek、Florian Frick 和 Adrien Vakili。欧氏Rips复形的同伦类型。《离散与计算几何》，58(3)：526–542，2017年10月。出版商：Springer New York LLC。[3] Henry Adams 和 Joshua Mirth。欧氏子流形的度量加厚。拓扑学及其应用，254：69–84，2019年3月。

[4] Nina Amenta、Marshall Bern 和 David Eppstein。外壳与 β骨架：组合曲线重建。《图形模型与图像处理》，60(2)：125–135，1998年。[5] Dominique Attali、Andr´e Lieutier 和 David Salinas。Vietoris-Rips复形同样能为采样形状提供拓扑正确的重建。载于第二十七届计算几何年度研讨会论文集，第491–500页，2011年。[6] Karol Borsuk。形状理论。《数学专著》，第59卷。波兰科学出版社，华沙，1975年。[7] Dmitri Burago、Yuri Burago 和 Sergei Ivanov。《度量几何教程》，第33卷。美国数学学会，2022年。[8] Erin W. Chambers、Vin de Silva、Jeff Erickson 和 Robert Ghrist。平面点集的 Vietoris–Rips 复形。《离散与计算几何》，44(1)：75–90，2010年7月。[9] Fr´ed´eric Chazal、David Cohen-Steiner 和 Andr´e Lieutier。欧几里得空间中紧集的采样理论。《离散与计算几何》，41(3)：461–479，2009年。[10] Fr´ed´eric Chazal 和 Andr´e Lieutier。$\mathbb{R}^n$中立体拓扑不变量的稳定性与计算。《离散与计算几何》，37(4)：601–617，2007年。[11] Fr´ed´eric Chazal 和 S. Y. Oudot。迈向欧几里得空间中的基于持久性的重建。载于第24届 ACM 计算几何研讨会论文集，第232–241页，2008年。[12] Tamal K. Dey。《曲线与曲面重建：带数学分析的算法》（剑桥应用与计算数学专著）。剑桥大学出版社，美国纽约州纽约市，2006年。[13] Jerzy Dydak 和 Jack Segal。《形状理论：导论》。《数学讲义》第688卷。施普林格出版社，柏林—海德堡—纽约，1978年。[14] Herbert Edelsbrunner 和 John L Harer。《计算拓扑学：导论》。美国数学学会，2022年。[15] Brittany Terese Fasy、Rafal Komendarczyk、Sushovan Majhi 和 Carola Wenk。关于 $\mathbb{R}^n$测地子空间的重建。《国际计算几何与应用杂志》，32(01n02)：91–117，2022年。[16] Robert Ghrist。《应用拓扑学基础》。Createspace，2014年9月。[17] Patrick Gillespie。Vietoris加厚与复形弱同伦等价。《应用与计算拓扑学杂志》，2024(8)：35–53，2024年。[18] Allen Hatcher。《代数拓扑学》。剑桥大学出版社，剑桥，2002年。[19] Jean-Claude Hausmann。关于度量空间上的 Vietoris-Rips 复形与上同调理论。载于《拓扑学展望》，Frank Quinn 编，第138卷：175–188，1995年。[20] Jisu Kim、Jaehyeok Shin、Fr´ed´eric Chazal、Alessandro Rinaldo 和 Larry Wasserman。通过 Čech 复形和 Vietoris-Rips 复形进行同伦重建。载于第36届国际计算几何研讨会（SoCG 2020）。Schloss Dagstuhl-Leibniz 信息学中心，2020年。[21] Rafal Komendarczyk、Sushovan Majhi 和 Atish Mitra。用于欧几里得图重建的 Vietoris–Rips影。arXiv *[*math.AT*],* 2025。[22] Rafal Komendarczyk、Sushovan Majhi 和 Atish Mitra。用于欧几里得图重建的 Vietoris–Rips影，2025年。[23] Rafal Komendarczyk、Sushovan Majhi 和 Will Tran。曲率上界空间的拓扑稳定性与 Latschev型重建定理。arXiv:2406.*04259 [*math.AT*],* 2024。[24] Janko Latschev。闭黎曼流形附近度量空间的 Vietoris-Rips复形。《数学档案》，77(6)：522–528，2001年。[25] Sushovan Majhi。《形状重建与比较中的拓扑方法》。博士论文，杜兰大学，2020年。[26] Sushovan Majhi。度量图附近度量空间的 Vietoris–Rips复形。《应用与计算拓扑学杂志》，第1–30页，2023年。[27] Sushovan Majhi。揭秘 Latschev定理：从有噪声数据进行流形重建。《离散与计算几何》，74：544–568，2025年，2024年5月13日在线发表。[28] Partha Niyogi、Stephen Smale 和 Shmuel Weinberger。如何从随机样本中高置信度地求出子流形的同调。《离散与计算几何》，39. 1-3：419–441，2008年。[29] S.Mardeˇsic 和 J. Segal。《形状理论》。《北荷兰数学图书馆》第26卷。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，荷兰，1982年。[30] Edwin Henry Spanier。《代数拓扑学》。施普林格，纽约，1995年。.[31] L. Vietoris。关于紧¨空间的高阶连通性及一类保持连通性的映射。《数学年刊》，97：454–472，1927年。