arXiv:2601.01377v1 [math.GR] 4 Jan 2026

关于 $\mathrm{Aut}(F_n)$ 的某些部分 Torelli 子群的有限可表示性

米哈伊尔·叶尔绍夫

ABSTRACT. 设 F_n 是秩为 n的自由群，并设 ρ_{ab} : Aut(F_n) →GL$_n$(ℤ) 是由自然投影 $F_n \to \mathbb{Z}^n$诱导的映射。IA-自同构子群 IA$_n$ = Ker ρ_{ab} 是否为有限呈示群，是一个长期悬而未决的问题。本文证明了 Aut(F_n) 中包含 IA$_n$的某些无限指数子群具有有限表示性。按照 Putman 的术语，这些子群是映射类群的部分 Torelli 子群的自然类比。

1. INTRODUCTION

给定 $n \geq 2$，设 F_n 是秩为 n 的自由群，Aut(F_n) 是其自同构群。本文首先简要回顾关于 Aut(F_n) 及其某些子群的有限表示性的已有研究。

有限表示性Aut(F_n) 及其若干子群。Aut(F_n) 的有限生成性由 Nielsen 证明 1921 [Ni21], , 不久之后，Nielsen 又证明了 Aut(F_n) 是有限呈示的 [Ni24]。尽管 [Ni21]中的有限生成性证明以及 [Ni24] 中的有限表示描述都很初等，但对这一群表示的论证却运用了复杂的几何技巧。Whitehead [Wh36] 给出了一种算法，用来判断给定的两个 n元组（其元素取自 F_n ）是否属于同一个 Aut(F_n)-轨道；该算法使用了如今称为峰值约化引理的结果。这是关于 Aut(F_n) 的又一项基本结果：其陈述简单明了，却是通过非代数方法证明的。

Rapaport [Ra58]给出了 Whitehead 峰值约化引理的代数证明，后来 Higgins 和 Lyndon [HL74]又简化了该证明。McCool [Mc74a] 运用 [HL74] 中结果的一种变体，为 Aut(F_n) 找到了另一种群表示，随后又在 [Mc74b] 中利用它，为 Nielsen 在 [Ni24]中给出的表示正确性提供了另一种（这次是纯代数的）证明。后来，McCool [Mc75]运用类似的峰值约化技巧，证明了 Aut(F_n) 的若干类子群具有有限表示性，其中包括有限子集的稳定子以及代数映射类群。最近，Day 将 McCool 关于有限表示性的结果推广到了直角 Artin 群 [D09] 的自同构群及其相应子群 [D14]。

主要结果。Aut(F_n) 的一个重要子群是 IA$_n$，称为 IA-自同构子群或 *Torelli* 子群。对于这个子群，McCool 的方法（或其变体）似乎难以处理其有限呈示问题。它定义为映射ρ_{ab} 的核：Aut(F_n) → Aut($\mathbb{Z}^n$) = GL$_n$(ℤ)，该映射由自然投影 $F_n \to \mathbb{Z}^n$ 诱导。Mag- nus [Ma35] 证明了 IA$_n$ 有限生成，并找到了一个简单的有限生成

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：20F05、20F65；次要分类号：20F06、20F28、57M07。*Key words and phrases.* 自由群自同构、Torelli 子群、BNSR 不变量、范坎彭图。

集。这个结果立即表明 IA_2 是秩为 2 的自由群，因此显然是有限呈示的。Krstic 和 McCool [KM97] 证明了 IA_3 不是有限呈示的，而对于 $n \geq 4$，IA_n 是否有限呈示仍是一个悬而未决的问题。

我们注意到，如果对于某个 n，Torelli 群 IA_n 是有限呈示的，那么任何形如 $\rho_{ab}^{-1}(P)$ 的子群也都是有限呈示的，其中 P 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 的有限呈示子群。另一方面，据我们所知，只有在 P 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 的有限指数子群时，才已知这类群是有限呈示的（此时该结果自动由 $\mathrm{Aut}(F_n)$ 的有限表示性推出）。本文的目标是证明一族自然的形如 $\rho_{ab}^{-1}(P)$ 的群具有有限表示性，其中 P 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 的无限指数子群（见下文定理 1.1）。类比于 [Pu 23], ，我们将这些群称为部分 *Torelli* 子群。

部分 Torelli 子群。 给定整数 $1 \leq d \leq n$，令 $\mathrm{Col}_{n,\,d}$（分别为 $\mathrm{Row}_{n,\,d}$）表示 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 的子群，该子群由所有前 d 列（分别为行）与单位矩阵对应列（分别为行）相同的矩阵组成。令 $\mathrm{IAC}_{n,\,d}$（分别为 $\mathrm{IAR}_{n,\,d}$）表示 $\mathrm{Col}_{n,\,d}$（分别为 $\mathrm{Row}_{n,\,d}$）在 $\rho_{ab}\colon \mathrm{Aut}(F_n) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 下的原像。因此，

$$\mathrm{IA}_n = \mathrm{IAC}_{n,n} \subseteq \mathrm{IAC}_{n,n-1} \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{IAC}_{n,0} = \mathrm{Aut}(F_n)$$

对于 $\mathrm{IAR}_{n,\,d}$，也有类似的结论。

定理 1.1. 当 $n \geq d + 115$ 时，群 $\mathrm{IAC}_{n,\,d}$ 和 $\mathrm{IAR}_{n,\,d}$ 是有限呈示的。此外，对于所有 $n \geq 26$，群 $\mathrm{IAC}_{n,\,1}$ 和 $\mathrm{IAR}_{n,\,1}$ 都是有限呈示的。

注. 关于当 $n \geq 4$ 时，$\mathrm{IAR}_{n,\,1}$ 是否有限呈示的问题，是 Krstic 和 McCool 在 [KM97，问题 3] 中提出的。[KM97] 证明了 $\mathrm{IAR}_{3,1}$ 不是有限呈示的。

动机：BNSR 不变量。定理 1.1 的证明受到了 Renz 关于第二 BNSR 不变量的工作的启发。给定一个有限生成群 G，其 BNS 不变量 $\Sigma(G) = \Sigma^1(G)$（也称为第一个 BNSR 不变量）由 Bieri、W. Neumann 和 Strebel 在著名论文 [BNS87] 中引入。[BNS87] 证明了，除其他结果外，$\Sigma(G)$ 完全决定了 G 的哪些余阿贝尔子群是有限生成的（若子群 N 是 G 的正规子群，且 G/N 是阿贝尔群，我们称 N 为 G 的余阿贝尔子群）。这一结果通常称为*BNS* 判据。$\Sigma(G)$ 的高阶类比，即现称为*BNSR* 不变量的概念，由 Renz 在其博士论文 [Re88]（同伦 BNSR 不变量）以及 Bieri 和 Renz 在论文 [BR88]（同调 BNSR 不变量）中引入并研究。尤其是，Renz [Re88] 证明了第二个同伦 BNSR 不变量 $\Sigma^2(G)$ 可以与任何有限呈示群 G 相关联，并能确定 G 的哪些余阿贝尔子群是有限呈示的（此结果将称为*Renz* 判据）。

在 BNS 判据和 Renz 判据的证明中，G/N 的凯莱图的几何性质在判断 N 是否为 G 的有限生成（分别为有限呈示）子群时起着关键作用。A. Putman[1] 提出，这种几何方法或许也适用于余阿贝尔情形之外；本文将把这一想法应用于 $G = \mathrm{SAut}(F_n)$ 和 $N = \mathrm{IAR}_{n,\,d} \cap G$ 或 $\mathrm{IAC}_{n,\,d} \cap G$ 的情形（其中 n 和 d 与定理 1.1 中相同）。这里，$\mathrm{SAut}(F_n)$ 是由 F_n 的“保定向”自同构构成的子群，定义为 $\mathrm{SAut}(F_n) = \rho_{ab}^{-1}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}))$（其在 $\mathrm{Aut}(F_n)$ 中的指数为 2）。注意，在这些

[1] 私人通信

情形下， N 不是 G的正规子群，因此我们将不使用凯莱图，而是研究 G/N的施莱尔图。

我们之所以使用SAut(F_n)而不是Aut(F_n)，是因为SAut(F_n)具有一种特别简洁的 Steinberg 型表示，该表示由 Gersten [Ge84], 给出，与 SL$_n(\mathbb{Z})$ 的标准表示非常相似——参见 § 2.3。

关于定理 1.1 的证明。我们将利用一个关于范坎彭图的一般判据来证明定理 1.1：

命题 1.2。设 $G = \langle X|R\rangle$ 是一个有限呈示群， H 是 G 的一个有限生成子群，且 $\rho\colon G \to G/H$ 是自然投影。设 $A \subseteq G/H$ 是一个有限子集，使得 $\rho^{-1}(A)$ 在凯莱图 $Cay(G, X)$中连通，并假设存在 G/H 的一个有限子集 B，具有以下性质：

(*) 对于 $Cay(G, X)$ 中所有顶点均位于 $\rho^{-1}(A)$内的任意简单闭路 γ，存在一个相对于 (X, R) 的圆盘范坎彭图 Ω，使得 $\partial\Omega = \gamma$ （定义见下文），且 Ω 的所有顶点均位于 $\rho^{-1}(B)$ 内。

那么 H 是有限呈示的。

在命题 1.2 的陈述中，我们假设 Ω 的顶点由 G 中的元素标记（并且照例，Ω 的边由 X 中的元素标记），且当 e 是一条从 v 到 w 的边时，$l(w) = l(e)l(v)$。若我们固定 Ω 的某个顶点 v 和某个$g \in G$，则存在唯一这样的顶点标记，使得 $l(v) = g$。等式 $\partial\Omega = \gamma$ 表示存在 $\partial\Omega$ 的一个顶点 v 和一个顶点 $g \in G$，使得 $l(v) = g$ 且 $l(\partial\Omega) = l(\gamma)$，其中 $l(\partial\Omega)$ 和 $l(\gamma)$ 分别是从 v 和 g 出发读取路径 Ω 和 γ 所得到的标签。

注。总是存在一个有限子集 $A \subseteq G/H$，使得 $\rho^{-1}(A)$ 连通，因为 H是有限生成的（见 [Str12, EF23]）。

命题 1.2 是 Brown [Br87, 定理 3.2]中的一个众所周知的判据的特例。尽管不能从 [Br87, 定理 3.2], 的陈述形式上推出命题 1.2，但它可以立即由该定理的证明得到（见定理 2.5 ）。在 § 2 中，我们还将给出命题 1.2 的一个自包含的纯群论证明（我们将使用 § 2 开头引入的附加术语对其略作重新表述——见命题 2.3）。

上述 Renz 判据在 [Re88] 中的证明使用了命题 1.2 的一个特例，其中假设条件 (*) 对 $B = A$ 成立。在此情形下，可以使用如下基本事实：若一个群 H 自由地作用在一个单连通 CW-复形 $\mathcal{C}$ 上，且商空间 $\mathcal{C}/H$ 具有有限 2-骨架（例如见 [Br84, 定理 4]），则该群是有限呈示的。

现在我们来描述一种通用方法，用于验证命题 1.2 中针对特定对 (G, H) 的条件 (*)。这一方法最初由 [Re88] in 在一个更特殊的情形下提出。设我们有一个范数函数 $N\colon G/H \to Z_0$，其定义域为某个良序集 Z_0，且对所有 $z \in G/H$，集合 $\{y \in G/H\colon N(y) \leq N(z)\}$ 都是有限的（特别地，N 的纤维有限）。由于总可以在不违反 (*) 的前提下扩大 B，我们可以假设 B 包含 $\{z \in G/H\colon N(z) \leq N(a)$，其中 $a \in A\}$ 具有某种性质。根据范坎彭引理，对于 (*) 中的任意简单闭路 γ，都存在一个相对于 (X, R) 的圆盘范坎彭图 Ω，使得 $\partial\Omega = \gamma$。于是，Ω 要么满足 (*) 的结论，要么包含一个范数极大的内部顶点 v。后一种情况下，我们的目标是用一个修改后的图 Ω′ 替换 Ω，其中 v 被消去，且每个新顶点 w 都满足 $N(w) < N(v)$。

如果总能构造出这样的 Ω′，那么通过一个简单的论证可知，经过有限次修改后，我们将得到一个满足 (*) 的图。

Renz [Re88] 讨论了这一问题的特殊情形： H 是 G 的正规子群，且G/H 是自由阿贝尔群。在这种情况下，范数函数 N 就是 G/H的一组固定基下G/H 上的欧几里得范数，并且存在一种相当通用的算法来构造修改后的图 Ω′（当然，该算法只有在群 H确实有限呈示时才有效）。

本文中的范数函数将更加复杂，其定义方式也更为特设。同样，在每一步中，我们都需要通过若干个子步骤从 Ω 构造 Ω′，而且算法将取决于包含 v （所选的最大范数顶点）的二维胞腔的边界标记。

我们刚才描述的方法也可以恰当地称为峰值约化（每一步的目标都是移除所选的“峰值”顶点 v），但其背景不同于 Whitehead 引理及其在 McCool 的论文 [Mc74a, Mc75] 中的推广。在那些论文中，首先给出一个由对某个集合 Ω 的忠实作用定义的群 G ，然后利用该作用直接证明 G 的有限表示性。而在我们的情形中，我们从一个已知具有有限表示的群 G （X, R）出发，并利用它在与表示（X, R）对应的 G 的 Cayley 复形上的作用，证明 G 的一个子群 H 具有有限表示性。

一些相关问题。给定一个群 G，有以下蕴含关系

G 是有限呈示的 $\Rightarrow$ G 具有类型 (FP$_2$) $\Rightarrow$ rk H$_2$(G $\mathbb{Z}$) $< \infty \Rightarrow$ dim $H_2(G, \mathbb{Q}) < \infty$。

对于 $G = \mathrm{IA}_n$, $n \geq 4$ 的情形，目前尚不清楚上述性质是否有任何一项成立。本文证明了群 $\mathrm{IAR}_{n,\,d}$和 $\mathrm{IAC}_{n,\,d}$, $n \geq d+115$ 具有有限表示性。自然而然地，我们会问，能否运用类似的思路，为某个严格介于 $\mathrm{IAR}_{n,\,d}$ 或 $\mathrm{IAC}_{n,\,d}$ 与 IA_n 之间的群 H ，确立上述列表中某种较弱形式的有限表示性；最有雄心的情形则是 $H = \mathrm{IA}_n$。在 [DP17], 中，Day 和 Putman 证明，对于 $n \geq 6$，第二同调 $H_2(\mathrm{IA}_n, \mathbb{Z})$ 作为 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$- 模是有限生成的；此外，$\mathrm{IA}_n$ “相对于 Aut(F_n) 的共轭作用有限呈示”（在适当的意义下）。若能借助这些结果加强定理 1.1，将会很有意义。

另一项挑战是将本文中的证明改编到映射类群的情形。给定非负整数 g 和 b，设 $\Sigma_{g,b}$ 是一个亏格为g 、具有 b 个边界分支的可定向曲面，并令 $\mathrm{Mod}_{g,b} = \mathrm{Mod}(\Sigma_{g,b})$ 为其映射类群。由 $\mathrm{Mod}_{g,b}$ 中在 $H_1(\Sigma_{g,b}, \mathbb{Z})$ 上作用平凡的元素组成的子群 $\mathcal{I}_{g,b}$ ，称为 $\mathrm{Mod}_{g,b}$ 的 Torelli 子群；在 $b = 0, 1$ 的情形下，群 $\mathrm{Mod}_{g,b}$ （分别为 $\mathcal{I}_{g,b}$）与 Aut(F_n)（分别为 IA_n）有许多相似之处。在 [Pu23], Putman 考察了 $\mathrm{Mod}_{g,b}$, $b \geq 1$ 中 $\mathrm{IAR}_{n,d}$ 和 $\mathrm{IAC}_{n,d}$ 的自然对应子群，称为部分 Torelli 子群，并将其定义如下。我们把 $\Sigma_{g,b}$ 看作一个附有 g 个把手并挖去 b 个圆盘的球面，并任意给把手编号。对 $1 \leq d \leq g$ ，定义部分 Torelli 子群 $\mathcal{I}_{g,b;d}$ 为 $\mathrm{Mod}_{g,b}$ 中由在 $H_1(\Sigma_{g,b}, \mathbb{Z})$ 中支撑于前 d 个把手的部分上作用平凡的映射类所组成的子群（因此，$\mathrm{Mod}_{g,b} = \mathcal{I}_{g,b;0} \supseteq \mathcal{I}_{g,b;1} \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{I}_{g,b;g} = \mathcal{I}_{g,b}$）。Putman [Pu23] 为这些群建立了若干同调稳定性结果。据我们所知，除 $d = 0$ 情形外，目前这些群 $\mathcal{I}_{g,b;d}$ 是否有限呈示仍是一个公开问题。

过去两年里，关于 $\mathrm{Mod}_{g,b}$ 的若干密切相关问题取得了令人瞩目的突破。首先，Minahan [Mi23b] 证明，Torelli 群 $\mathcal{I}_{g,b}$, $b \leq 1$ 的第二有理同调是有限维的（对于 $g \geq 51$）。在 [MP25a], 中，Minahan 和 Putman 将这一结论推广到了所有 $g \geq 6$，并且明确描述了$H_2(\mathcal{I}_{g,b}, \mathbb{Q})$ 作为 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$-模的结构；另请参阅 [Mi23a], [MP25b] 和 [MP25c]，其中包含重要的相关结果，部分结果在 [MP25a] 中有所应用。我们不清楚这些论文中的技术是否可用于群 IA_n，或任一群 $\mathrm{IAR}_{n,d}$ 和 $\mathrm{IAC}_{n,d}$。

论文提纲。本文结构如下。第 2 节将介绍范坎彭图相关的大部分术语，其中有些并非标准术语，并详细说明我们证明有限表示性所采用的一般方法。我们还将介绍 $\mathrm{SAut}(F_n)$ 的 Gersten 表示及其万能中心扩张，这将为证明 $\mathrm{IAR}_{n,\,d}$ 和 $\mathrm{IAC}_{n,\,d}$的有限表示性提供起点。第 3 节和第 4 节将分别证明群 $\mathrm{IAR}_{n,\,1}$ 和 $\mathrm{IAC}_{n,\,1}$具有有限表示性。由于这两种情形下的证明遵循相同的一般思路，第 4 节将着重讨论 $\mathrm{IAC}_{n,\,1}$ 的证明中需要进行实质性修改的部分。最后，在第 5 节中，我们将证明一般情形下的定理 1.1。证明本质上是归纳式的，尽管我们无法严格地对 d 使用归纳法。更准确地说，为了证明 $\mathrm{IAR}_{n,\,d}$ 和 $\mathrm{IAC}_{n,\,d}$ 满足定理 1.1，仅假设结论对较小的 d 成立并不足够。相反，我们需要在更一般的情形下仿照证明 $d = 1$ 时的某些步骤。

致谢。我非常感谢 Andrew Putman。在他于 2017 年秋季访问弗吉尼亚大学期间，他向我讲解了 [Str12] 中 BNS 判据的证明，并分享了关于可能推广的想法。若没有那次交谈，这个项目绝不会启动。我还要感谢 Matthew Day、Andrei Jaikin、Daniel Minahan 和 Dmitriy Sonkin 富有成效的讨论。

2. Preliminaries

凯莱图、施莱尔图与施莱尔集。在本文中，我们将采用一种略显不同寻常的约定，使用左凯莱图，而不是更常用的右凯莱图。我们还将凯莱图视为带标号有向图。因此，若 G 是一个群，S 是其生成集，我们将 $Cay(G,\ S)$ 定义为如下图：其顶点集为 G，并且对于每个 $g \in G$ 和 $s \in S$，都有一条从 g 指向 sg、标记为 s 的有向边。类似地，当 Z 是任意左 G-集时，可定义施莱尔图 $Sch(Z,\ S)$。

为与这一约定保持一致，我们将自由群 $F(X)$ 的子集 A 定义为$Schreier$，如果对于每个 $a \in A$，a 的每个后缀也都属于 A（通常的定义使用前缀而不是后缀）。从几何上看，这意味着从 $Cay(F(X)\ X)$ 形成的 1 到 $a \in A$ 的唯一路径上的所有顶点都必须属于 A。

2.1. 范坎彭图。

我们从范坎彭图的定义开始。设 X 为一个有限字母表，设 Ω 为一个有限连通有向平面图，其边由 X中的元素标记。我们将 $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ 的有界连通分支称为 Ω 的胞腔 。给定一个胞腔 $\mathcal{F}$，设 e_1，……，e_k为我们从某个顶点出发，沿顺时针或逆时针方向遍历 $\partial\mathcal{F}$（即 $\mathcal{F}$ 的边界）时依次经过的边。我们1将 $l(\partial\mathcal{F})$ 定义为 $\partial\mathcal{F}$ 的边界标记，即字 $\prod l(e_i)^{\varepsilon_i}$，其中 $l(e_i)$ 是标记$_{i=k}$

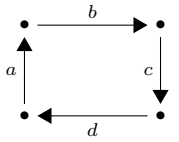


FIGURE 1.

e_i 和 $\varepsilon_i = 1$ 或 -1，具体取决于 e_i 是沿正向还是反向遍历的（注意，$l(\partial F)$ 仅在循环移位和取逆的意义下定义）。

定义 2.1. 固定群 G 的一个群表示 (X, R)，其中每个 $r \in R$ 都是循环约化的，并令 Ω 如上所述。

(1) 假设对于 Ω 的每个胞腔 $\mathcal{F}$，其边界标记等于 $R \cup R^{-1}$ 中某个元素的循环移位。那么称 Ω 为关于 (X, R) 的范坎彭图 。(2) 令 $\mathcal{U}$ 为 $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ 的唯一无界连通分支。为方便起见，我们定义边界 $\partial\Omega$ 为 $\partial\mathcal{U}$，并以与 Ω 的胞腔标签相同的方式定义其标记 $l(\partial\Omega)$。(3) 若 $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{U}$ 同胚于一个（闭）圆盘，则称 Ω 为圆盘图 。

注。 请注意，范坎彭图中胞腔的边界标记应当“从右向左”读取——例如，图 1 所示胞腔的边界标记是 $dcba$，而不是 $abcd$。这是因为我们使用的是左凯莱图。

以下基本结果称为范坎彭引理:

引理 2.2 (范坎彭引理)。 设 (X, R) 是群 G的一个群表示，其中每个 $r \in R$ 都是循环约化的。设 $f \in F(X)$。那么， $f = 1$ 属于 G，当且仅当存在一个基于 Ω 的范坎彭图(X, R)，其边界标记为 f。

与常见约定不同，我们不允许出现 0-边（标记为单位元 1 的边）。这意味着引理 2.2 中的图 Ω 不一定是圆盘图；一般来说，它由若干个通过（可能退化的）弧连接起来的圆盘子图组成。

在范坎彭图的定义中，只有边（而非顶点）带有标签。不过，引理 2.2 的“若”方向很容易推出：对于任意范坎彭图 Ω，都可以用 G 中的元素给顶点标记，使得每当 v 和 w 是顶点，且 e 是从 v 到 w 的一条边时，我们有 $l(w) = l(e)l(v)$；事实上，这种标记由一个顶点的标签唯一确定（该顶点可以任意选取）。更一般地，若 Z 是任意左 G-集，则可以用 Z 的元素给 Ω 的顶点标记，使得若 e 是从 v 到 w的一条边，则 $l(w) = l(e).l(v)$。在这种情况下，我们称 Ω 是一个基于 (X, R) 的 Z-标记图。

我们还将使用以下简写记法。假设对于某个子群 H 和 ρ， $Z = G/H$： $G \to Z$ 为自然投影。如果 Ω 是一个关于 (X, R) 的 Z-标记图，并且 γ 是 $Cay(G, X)$ 中的一条简单闭路，我们记作 $\partial\Omega = [\gamma]_Z$，若存在 $\partial\Omega$ 的一个顶点 v 和一个顶点 $g \in G$，使得 $l(v) = \rho(g)$ 且 $l(\partial\Omega) = l(\gamma)$，其中路径标签 $l(\partial\Omega)$ 和 $l(\gamma)$ 分别从 v 和 g 开始读取。

现在我们将给出命题 1.2 的一个自包含证明，下面我们使用刚刚引入的顶点标签对其稍作改述（见命题 2.3）。

命题 2.3。 设 $G = \langle X|R\rangle$ 是一个有限呈示群，且 R 是循环约化的。设 H 是 G 的一个子群。令 $Z = G/H$，并令 $\rho\colon\ G \to Z$ 为自然投影。令 A 为 Z 的一个有限子集，使得 $\rho^{-1}(A)$ 在凯莱图 $Cay(G,\ X)$ 中连通，并假设存在 Z 的一个有限子集 B，满足以下性质：

(*) 对于 $Cay(G, X)$ 中所有顶点都位于 $\rho^{-1}(A)$ 内的任意简单闭路 γ，存在一个相对于 (X, R) 的 Z 标记范坎彭图 Ω，使得 $\partial\Omega = [\gamma]_Z$，且 Ω 的所有顶点都位于 B 中。

那么 H 是有限呈示的。

证明。首先，我们将问题化归到 $1 \in \rho^{-1}(A)$ 的情形。事实上，假设某个四元组 (G, H, A, B) 满足命题 2.3 的假设条件，并选取有限集 $A, B \in G$，使得 $\rho^{-1}(A) = \widetilde{A}H$ 且 $\rho^{-1}(B) = \widetilde{B}H$。群 G 通过右乘作用在 G 标记范坎彭图的集合上，并且对于任意 $g \in G$，有 $\widetilde{A}H = (\widetilde{A}g)(g^{-1}Hg)g^{-1}$ 且 $\widetilde{B}H = (\widetilde{B}g)(g^{-1}Hg)g^{-1}$。因此，$(G, g^{-1}Hg, \rho_g(\widetilde{A}g)\rho_g(\widetilde{B}g))$ 也满足命题 2.3 的假设条件，其中 ρ_g 是到 $G/(g^{-1}Hg)$ 上的投影。因此，对于任意 $g \in G$，我们可以用 $g^{-1}Hg$ 替换 H，并用 $\rho_g(\widetilde{A}g)$ 替换 A；任取一个 $g \in \widetilde{A}^{-1}$，即可保证 $\rho_g(1) \in \rho_g(Ag)\widetilde{\ }$。

因此，从现在起我们假设 $1 \in \rho^{-1}(A)$。我们将首先证明，H 有一个具有良好性质的有限生成集（见下文断言 2.4）。令 N 为 R 在 $F(X)$ 中的正规闭包（因此 $G = F/N$），并令 F_H 为 $F(X)$ 中满足 $H = F_H/N$ 的唯一子群。记 θ 为从 $F(X)$ 到 Z 的自然投影。

断言 2.4。 存在 F_H 的有限子集 S，使得

(a) S 在 G 中的像生成 H；(b) S 包含于 F_H 的某个自由生成集 X_H 中；(c) $S \cup S^{-1}$ 中每个元素的每个后缀都属于 $\theta^{-1}(A)$。

证明。回想一下，根据我们的假设，$\rho^{-1}(A)$ 在 $Cay(G, X)$ 中是连通的，因此 A 在施莱尔图 $Sch(Z, X)$ 中是连通的（注意，后一性质要弱得多，而原始假设稍后会在证明中再次用到）。

在由 A 张成的 $Sch(Z, X)$ 子图中任取一棵极大树 $\mathcal{T}_A$（使得 A 是 $\mathcal{T}_A$ 的顶点集）。对于每个 $a \in A$，令 γ_a 为 $\mathcal{T}_A$ 中从 $\rho(1)$ 到 a 的唯一路径（回忆一下，$\rho(1) \in A$），并令 t_a 为与 γ_a 对应的 $F(X)$ 中唯一的元素（也就是说，t_a 是 γ_a 的边标签之积）。令 $T_A = \{t_a\colon\ a \in A\}$。根据构造，$\theta\colon\ F(X) \to Z = G/H$ 将 T_A 双射到 A，且 T_A 是一个 Schreier 子集（也就是说，T_A 中每个元素的后缀都属于 T_A）。

给定 $u \in \theta^{-1}(A)$，令 u 为 T_A 中满足 $\theta(u) = \theta(u)$ 的唯一元素。令 S 为所有形如 $xt^{-1}xt$ 的非单位元组成的集合，其中 $t \in T_A$ 和 $x \in X$ 满足 $xt \in \overline{\theta^{-1}}(A)$。我们断言，$S$ 具有所需的性质。

首先，S包含于 F_H，因为 $\theta(u) = \theta(v)$当且仅当 $u^{-1}v \in F_H$对于 $u,\ v \in F(X)$成立。由于$\rho^{-1}(A)$在 $Cay(G,\ X)$中是连通的（这次我们需要充分利用这一假设），由 [EF23，定理 2 可知，12] S 满足 (a)。

由于 T_A 是一个施莱尔子集，因此它包含于某个施莱尔陪集代表系 T中。根据施莱尔定理，集合 $X_H = \{xt^{-1}xt\colon\ t \in T,\ x \in X\}\overline{\ } \setminus \{1\}$（显然包含 S）自由生成 F_H。这就证明了 (b)。

最后，我们证明 (c)。任取 $s \in S$，根据定义，$s = xt^{-1}xt$ 对于某个 $t \in T_A$和 $x \in X$ 成立，使得 $\theta(xt) \in A$ 也成立。令 q 为 s的任意后缀，则 $s = pq$ 对于某个

$p \in F(X)$，且字 pq 是既约的。由于 $s = xt^{-1}xt$，要么 q 是 xt 的后缀，要么 p 是 xt^{-1} 的前缀。在前一种情况下，要么 $q = xt$，从而根据假设，$\theta(q) \in A$；要么 q 是 t 的后缀，此时 $\theta(q) \in A$，因为 $t \in T_A$ 且 T_A 是 Schreier。现在假设 p 是 xt^{-1} 的前缀。那么 p^{-1} 是 $xt \in T_A$ 的后缀，因此 $\theta(p^{-1}) \in A$。但是 $pq \in H$，所以 $\theta(q) = qH = p^{-1}H = \theta(p^{-1}) \in A$。

因此，我们证明了对于 s 的每个后缀 q，$\theta(q) \in A$。此外，最后一种情形中的论证表明，对于 s 的每个前缀 p，$\theta(p^{-1}) \in A$。由于 s 的前缀的逆恰好是 s^{-1} 的后缀，我们证明了对于 s^{-1} 的每个后缀 q，$\theta(q) \in A$，从而完成了 (c) 的证明。□

W我们继续证明命题 2.3。设 S 和 X_H 如断言 2.4 所述。

任取一个字 $r \in F(S)$，它在 G 中表示 1；令 $r' \in F(X)$ 为由 r 得到的字，其中将每个 $s \in S$ 都用 $X \cup X^{-1}$ 表示。令 δ 为 $Cay(G, X)$ 中一条以 1 为起点、表示 r' 的闭路径（但不一定是简单路径）。

根据断言 2.4 中的条件 (c)，δ 的每个顶点都属于 $\rho^{-1}(A)$。因此，由命题 2.3 中的条件 (*) 可知，对于 δ 的任意简单闭子路径 γ，都存在一个 Z 标记的圆盘图 Ω_γ，满足 $\partial\Omega_\gamma = [\gamma]_Z$，且其顶点属于 B。根据圆盘图与关系子之间的标准对应关系，这意味着对于某个 $w_i \in \theta^{-1}(B)$，有 $r' = \prod_{i=1}^{k} w_i^{-1} r_i^{\pm 1} w_i$，且 $r_i \in R$。

选取 $F(X)$ 的有限子集 V，使得 $\theta(V) = B$；并对每个 $1 \le i \le k$，令 $v_i \in V$ 满足 $\theta(w_i) = \theta(v_i)$。那么 $w_i^{-1}v_i$ 在 G 中表示 H 的一个元素，也就是说，$w_i^{-1}v_i \in F(X_H)$。因此

$$r' = \prod_{i=1}^{k} w_i^{-1} r_i^{\pm 1} w_i = \prod_{i=1}^{k} (w_i^{-1}v_i)(v_i^{-1} r_i^{\pm 1} v_i)(w_i^{-1}v_i)^{-1}$$

位于群 $F_H = F(X_H)$ 中有限集 $R^V = \{r \in R, v \in V\}$ 的闭包内。

回忆一下，N 表示自然投影 $F(X) \to G$ 的核。我们刚刚证明了，$N \cap F(S)$ 位于 $F(X_H)$ 中 R^V 的正规闭包内。因此，嵌入 $F(S) \to F(X_H)$ 诱导出一个从 $F(S)/N \cap F(S)$ 到 $H^* = \langle X_H | R^V \rangle$ 的映射。由于 S 生成 H，$F(S)/N \cap F(S)$ 自然同构于 H。

现在定义群 H' 和 H'' 如下。对于每个 $u \in X_H \setminus S$，任取一个 $s_u \in F(S)$，使得 $u = s_u$ 属于 G。令 H' 为对 H^* 施加关系 $u = s_u$（对所有 $u \in X_H \setminus S$）后得到的群；令 H'' 为从 H' 中删去 $X_H \setminus S$ 的所有生成元及形如 $u = s_u$（其中 $u \in X_H \setminus S$）的关系，并将来自 R^V 的关系中的每个 u 替换为 s_u 后得到的群。根据标准论证，H'' 与 H' 同构；根据构造，H'' 是有限呈示的。

由于 H' 由 X_H 的像生成，且 H' 的每个定义关系在 H 中都成立，因此存在一个良定义的投影 $\alpha_3 : H' \to H$。现在考虑以下映射序列：

$$H \xrightarrow{\alpha_1} F(S)/N \cap F(S) \xrightarrow{\alpha_2} H' \xrightarrow{\alpha_3} H.$$

根据构造，每个 α_i 都是满射。另一方面，容易验证复合映射 $\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \alpha_3$ 是 H 上的恒等映射，因此每个 α_i 也必定是单射，进而是同构。因此 $H \cong H' \cong H''$，所以 H 是有限呈示的。□

现在我们来说明命题 2.3 也可以由 Brown 的一个判据推出。以下结果可由证明 [Br87, 定理 3.2]推得：

定理 2.5。 设群 H 对 *CW*复形 C 有胞腔作用，且顶点稳定子均有限呈示、边稳定子均有限生成。假设 $C_1 \subseteq C_2$ 是 C 的连通 H-不变子复形，并且满足

(i) H 在 C_2 上的作用（因而在 C_1上的作用）是余紧的；
(ii) 诱导映射 $\pi_1(C_1) \to \pi_1(C_2)$ 是平凡的。
那么， H 是有限呈示的。

命题 *2.3* 的另一种证明。定义 $C = Cay(G; X, R)$为与群表示(X, R)相关联的 Cayley 复形，并令 C_1 （分别为 C_2）表示由所有 $g \in \rho^{-1}(A)$（分别由所有 $g \in \rho^{-1}(B)$）张成的满子复形。

群 H 通过右乘在 C 上作用。此作用是胞腔作用，并且在顶点上自由，因此顶点稳定子是平凡的，边稳定子是有限的。由于对于所有 $g \in G$ 和 $h \in H$， $\rho(gh) = \rho(g)$，所以 C_1 和 C_2 都是 H-不变的。根据命题 2.3 的假设，子复形 C_1 是连通的；如有需要，我们可以通过扩大 B 使 C_2 连通（在 $Cay(G, X)$ 中取一个以 1 为中心的球，使其在 G/H 中的像包含 A，并令 B为该球在 G/H中的像）。由于 B 是有限的， H 在 C_2 上的作用是余紧的。

最后， $\pi_1(C_1)$ 由 $Cay(G, X)$ 中包含于 C_1的闭路生成。命题 2.3 中的条件 (*) 表明，任何此类路径在 C_2 中都同伦于平凡路径，因此诱导映射 $\pi_1(C_1) \to \pi_1(C_2)$ 是平凡的。至此，我们验证了定理 2.5 的所有假设条件，因此 H 是有限呈示的。□

我们以两个重要的定义结束本小节。

超约化表示。

定义 2.6. 设 (X, R) 是群 G 的一个群表示。若 $r \in R$ 是循环约化的，且其任意非平凡真子词都表示 G 的非平凡元素，则称 $r \in R$ 为超约化的。若 (X, R) 中的每个 $r \in R$ 都是超约化的，则称 (X, R) 为超约化的。

从现在起，我们假设群表示 (X, R) 是超约化的。这并不是一个很强的限制。事实上，若 (X, R) 是 G 的任意一个群表示，且某个 $r \in R$ 不是超约化的，那么 r 的某个循环置换可以写成 $r_1 r_2$，其中 r_1 和 r_2 是 G 中长度比 r 短的关系子。将每个这样的 r 替换为相应的对 $\{r_1, r_2\}$，并在 r_1 或 r_2 不是超约化的情况下重复这一过程，我们便得到 G 的一个超约化表示。

拥有超约化表示 (X, R) 的重要性在于，对于任意关于 (X, R) 的范坎彭图 Ω，以及 Ω 中任意具有 n 个顶点的胞腔 $\mathcal{F}$，从拓扑 n-边形 P_n 到 $\mathcal{F}$ 的相应映射在整个 P_n 上都是同胚，而不只是在其内部。

胞腔的消去。

定义 2.7. 设 Ω 是一个圆盘范坎彭图，且 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 是 Ω 中不同的胞腔。若满足以下条件，我们称对 $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ 是可消去的：

(i) 交集 $\partial\mathcal{F}_1 \cap \partial\mathcal{F}_2$ 至少包含一条边 e；(ii) 从某个固定顶点 $v \in \partial\mathcal{F}_1 \cap \partial\mathcal{F}_2$ 开始读取时， $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 的边界标记相同，且 $\partial\mathcal{F}_1 \cap \partial\mathcal{F}_2$ 的遍历方向相同；(iii) 交集 $(\partial\mathcal{F}_1 \cup \partial\mathcal{F}_2) \cap \partial\Omega$ 包含于某个 $i = 1, 2$ 中的 $\partial\mathcal{F}_i$。

对于任意可消去对（$\mathcal{F}_1$， $\mathcal{F}_2$），我们都可以构造一个新的圆盘图 Ω′，其边界标记相同。若交集 $\partial\mathcal{F}_1 \cap \partial\mathcal{F}_2$ 连通，我们只需移除胞腔

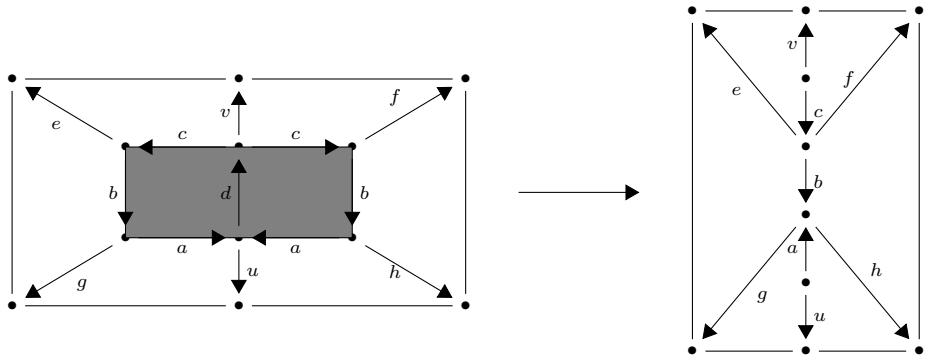


FIGURE 2. 消去两个阴影胞腔

$\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$，并将它们边界上交集之外的部分识别起来（这是可行的，因为我们假设 R 是超约化的，因此边界 ∂F_1 和∂F_2 不会自相交）。

一般而言，我们令 Δ 为包含 $\Omega_1 \cap \Omega_2$ 的最小圆盘子图。根据我们的假设条件可以推出，$l(\partial\Delta)$表示 $F(X)$的单位元；更具体地说，$\partial\Delta = (\partial\Delta \cap \partial F_1) \cup (\partial\Delta \cap \partial F_2)$、$\partial\Delta \cap \partial F_1$ 和 $\partial\Delta \cap \partial F_2$ 仅在端点处相交，并且如果从 $\partial\Delta \cap \partial F_1 \cap \partial F_2$中的同一点出发，沿相同方向遍历两条路径，则 $l(\partial\Delta \cap \partial F_2) = l(\partial\Delta \cap \partial F_2)^{-1}$。现在，我们通过移除 Δ 的内部并将 $\partial\Delta \cap \partial F_1$ 与 $\partial\Delta \cap \partial F_2$识别，构造一个新图。

我们刚才描述的操作称为对 $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ 进行消去 ——示意见图 2。本文中通常用于此类操作的术语约化 将具有完全不同的含义（见下一小节中的定义 2.12）。

注。 技术条件 (iii) 是必要的，以确保在识别 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 的边界时，不会粘合 $\partial\Omega$ 中彼此不同的边（因为后一种情况下，新图的边界标记会不同，实际上甚至不再是圆盘图）。通常只要求 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 是内部胞腔（此时 (iii) 自动成立）。

2.2. 图映射与约化。 本节中，我们固定以下对象和记号：

- 一个由有限超约化表示 (X, R) 给出的群 G；
- 一个 G 的有限生成子群 H；
- $Z = G/H$ 视为左 G-集。我们将 $\rho\colon G \to Z$ 和 $\theta\colon F(X) \to Z$ 记为自然投影。

本文中，图 始终指相对于（ Z 标记的圆盘范坎彭图X, R）（在某些定义中，标记不会起作用）。从本小节后文的约化 定义（定义 2.12）开始，我们还将假设Z 带有一个超阿廷 偏序（满足一个附加条件的阿廷偏序——见下文定义 2.11）。

图 Ω 的顶点集和边集分别记为 $V(\Omega)$ 和 $E(\Omega)$。

定义 2.8. 设 Ω 是一个图， Δ 是 Ω 的一个圆盘子图。设 Δ′ 是另一个满足 $\partial\Delta' = \partial\Delta$ 的图。考虑将 Ω 中的 Δ 替换为 Δ′ 后得到的图（也就是说，先移除 Δ，再沿着 $\partial\Delta$将 Δ′ 粘合到 Ω 上）。在这种情况下，我们称 Ω′ 由 Ω 经过一个 Δ-映射 得到，并以符号表示为 (Ω Δ) $\to$ (Ω′, Δ′)，或简写为 Ω $\to$Ω′。

- 所谓图映射，是指某个 Δ 的 Δ-映射。
- 若 φ : (Ω Δ) $\to$ (Ω′， Δ′) 是一个图映射，– 则子图 Δ 称为 φ 的定义域；– 子图 Δ′ 称为 φ 的替换图。我们还将符号化地写作 $\Delta' = \varphi(\Delta)$。

显然，任何图映射都不会改变图的边界。具有相同边界的任意两个图 Ω 和 Ω′ 都可以通过图映射相互得到（因为我们可以取 Δ =Ω）。我们主要会在 Δ的所有胞腔共享一个公共顶点的情形下使用 Δ-映射。对我们而言尤其重要的是单胞腔映射。

定义 2.9. 设 φ : (Ω $\mathcal{F}$) $\to$ (Ω′, Δ′) 是一个图映射。若 φ 是一个单胞映射，则称

(i) $\mathcal{F}$ 是 Ω 的一个胞腔；(ii) 对于 $\mathcal{F}$ 的每个顶点 v，存在唯一一条包含 v 的边 $e(v) \in E(\Delta') \setminus E(\mathcal{F})$。形如 $e(v)$ 的边称为 φ 的侧边。

条件 (ii) 确保对于 $\mathcal{F}$ 的每条边 e，图 Δ′ 都有唯一一个包含 e 的胞腔 $\mathcal{F}(e)$。这种形式的胞腔称为 φ 的侧胞。

注。 将这种形式的映射称为单胞腔细化或许更准确。同样，省略定义 2.9 中的条件 (ii) 可能更自然。不过，考虑到这类映射在论文中会频繁出现，我们决定采用更简单的名称和限制更严格的定义。

交换与共轭单胞腔映射。现在我们介绍一种构造单胞映射的简单方法。

定义 2.10. 设 $\mathcal{F}$ 是图 Ω 的一个胞腔，设 $t \in X$，并假设 t 与 $\mathcal{F}$的每个边标记 e 都可交换，且所有关系子 $[t, e]$ 都属于 R。定义 $\mathcal{F}$-映射 φ : Ω $\to$ Ω′如下：

(1) φ（替换图）$\mathcal{F}$的所有侧边都标记为 t，且方向相同；(2) 对于 $\mathcal{F}$的每条边 e，对应的侧胞腔 $\mathcal{F}$（e）的边界标记为 $e^{-1}t^{-1}et$；(3) φ（$\mathcal{F}$）有唯一一个内部胞腔，其边界标记与 $\mathcal{F}$相同。

如果 φ（$\mathcal{F}$）的所有侧边都背离（分别朝向） ∂F，则映射 φ称为交换 $\mathcal{F}$-映射，记作 $C_{\mathcal{F}}$（t^{ε}），其中 $\varepsilon = 1$（分别为 $\varepsilon = -1$）。示意见图 3。

共轭映射。 现在我们来描述一种称为共轭 $\mathcal{F}$-映射的交换 $\mathcal{F}$-映射的某种推广。

固定一个图 Ω、其中的胞腔 $\mathcal{F}$ 和 $t \in X$，并假设对于 $\mathcal{F}$的每个边标签 e，都存在一个字 $w_{t,e} \in F(X)$，使得 $w_{t,e} = t^{-1}et$ 是一个定义关系（即，$w_t^{-1}{}_{,e}\, t^{-1}et \in R$）。现在从 Ω 中移除 $\mathcal{F}$，如上文 (1) 所示添加侧边，并且对于

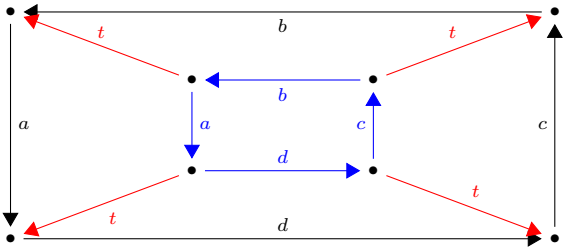


FIGURE 3. 交换单胞映射的替换图。四条黑色边来自原图 Ω。标记为 t的四条红色边是侧边。包含黑色边的四个胞腔是侧胞。

每条边 e，在 $\partial\mathcal{F}$处添加侧胞腔 $\mathcal{F}(e)$，其边界标记为 $w_t^{-1}{}_{,\ e}\, t^{-1}et$。这样便得到一个环形图 Ω_1，其内边界 $\partial_{inn}\Omega_1$ 的标记为 $r_1 = \prod_{e\in\partial\mathcal{F}} w_{t,\ e}$ （注意，r_1 未必是循环约化的，甚至未必是约化的）。

首先假设 r_1 是超约化的。在这种情况下，我们只需任取一个满足 $l(\partial\mathcal{G}_1) = r_1$ 的图 $\mathcal{G}_1$（注意，由于 r_1 是超约化的，$\mathcal{G}_1$ 必定是一个圆盘图），并用它填充 Ω_1,中的孔，从而得到一个圆盘图 Ω'。

一般情况下，我们按如下方式进行。首先假设 r_1 不是约化的。那么，$\partial_{inn}\Omega_1$包含两条连续的边 e 和 e'，它们具有相同的标记且方向相反。于是我们可以通过将 e和 e'识别起来，生成一个新图。重复这一操作数次，我们得到一个环形图 Ω_2，其内边界标记 r_2 是约化的（其循环移位也同样如此），因而是循环约化的。如果 r_2 是超约化的，我们便像之前一样完成了；因此假设 r_2 不是超约化的。我们将分几个步骤填充 Ω_2 中的孔。

由于 r_2 不是超约化的，$\partial_{inn}\Omega_2$ 包含一个适当的非空边子路径 γ'，其边为 e_1、……、e_m，使得 $r' = \prod_{i=m}^{1} l(e_i)$ 是 G的一个关系子；若假设 m 取可能的最小值，则 r' 是超约化的。由于 r' 是 G的一个关系子，我们可以通过识别 γ' 的端点（将 Ω_2 中的洞分成两部分）生成一个新图，然后用圆盘图 $\mathcal{G}'$ 填充边界关系子为 r' 的洞，使得 $l(\partial\mathcal{G}') = r'$。重复此操作数次后，我们最终就能如期填满 Ω_2, 中的整个洞。

超阿廷序。本节余下部分中，我们假设 Z 配备了一个超阿廷（定义如下）偏序 $<$。

定义 2.11。 集合 P 上的偏序 $<$称为

(a) 若 P 不存在无限严格下降链，则称为阿廷；(b) 若其为阿廷序，且当 $p, q \in P$ 不可比时，有$\{r \in P\colon\ r < p\} = \{r \in P\colon\ r < q\}$ 以及 $\{r \in P\colon\ r > p\} = \{r \in P\colon\ r > q\}$，则称为超阿廷；(c) 若其为超阿廷序，且对任意 $p \in P$，集合 $\{r \in P : r < p\}$有限，则称为强阿廷。

容易验证，集合 P 上的超阿廷序恰好是以下形式的序：选取一个良序集 P_0 和一个映射 $N\colon\ P \to P_0$ （即“范数”函数），并对 $p, q \in P$，定义 $p < q$ 当且仅当 $N(p) < N(q)$。若进一步可以要求 N 具有有限纤维，且 $P_0 \cong \mathbb{N}$ 为偏序集，则该序为强阿廷序。

以这种方式将超阿廷序形象化或许会比较方便，不过通常没有必要明确地定义范数函数。

给定某个图中的顶点 v 和 w，如果它们的标签满足相应的不等式，我们就记作 $v < w$ 或 $v \leq w$。图 Ω 的一个极大顶点是 Ω 中任意一个顶点，其标签是 Ω 的顶点标签集合中的极大元。

图约化。现在我们定义图约化这一关键概念（相对于所选偏序 $<$）。

定义 2.12。设 $\varphi : \Omega \to \Omega'$ 是一个图映射，v 是 Ω 的一个极大顶点。我们称

(i) 如果对每个顶点 $w \in V(\Omega') \setminus V(\Omega)$，$w < v$，则 φ 是一种约化；(ii) 给定 Ω 的一个极大顶点 $v \in V(\Omega)$，如果 φ 是一种约化，并且还消去 v，则称其为 v 处的完全约化。

我们将某个极大顶点处的完全约化称为完全约化。若 Δ 是 Ω 的一个圆盘子图，则 a Δ-约化是一个属于约化的 a Δ-映射。

超阿廷序的定义（定义 2.11）中的条件 (b) 意味着，约化的定义（定义 2.12）不依赖于极大顶点 v 的选择。此外，以下结论成立：

观察 2.13. 图映射 φ: Ω $\to$ Ω′ 是约化，当且仅当对每个$w' \in V(\Omega') \setminus V(\Omega)$，都存在 $w \in V(\Omega)$，使得 $w' < w$。

下一个关键引理只用到 $<$ 是阿廷的这一事实。

引理 2.14. 任意图 Ω 都不可能存在无限序列的完全约化。此外，Ω 也不可能存在包含无限多个完全约化的约化序列。

证明. 首先注意，约化的复合仍是约化，而完全约化与约化的复合（无论顺序如何）都是完全约化。因此，只需证明引理 2.14 的第一个断言。

反设某个图 Ω 存在一个无限的完全约化序列 $\Omega = \Omega_1 \to \Omega_2 \to \ldots$，使得对于每个 n，都存在一个顶点 $v_n \in V(\Omega_n) \setminus V(\Omega_{n+1})$，它对于 Ω_n 是极大的（如果这样的顶点不止一个，我们就任意选取一个）。按如下方式归纳地构造图 $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$。图 Γ_1 没有边，其顶点恰好是 Ω_1 的顶点。现在假设对于某个 $n \geq 1$，Γ_n 已定义。我们通过向 Γ_n 添加一些顶点和边来定义 Γ_{n+1}。Γ_{n+1} 的额外顶点恰好是 $V(\Omega_{n+1}) \setminus V(\Omega_n)$ 中的顶点，并且对于每个 $w \in V(\Omega_{n+1}) \setminus V(\Omega_n)$，我们添加一条从 v_n 指向 w 的有向边。最后，将所有 Γ_n 的并定义为 Γ。

Γ 的每个顶点都通过一条路径与 Γ_1的某个顶点连通，因此 Γ 是一个具有有限个连通分支的无限图，故必有一个无限连通分支C。由于对每个 $n \in \mathbb{N}$，映射 $\Omega_n \to \Omega_{n+1}$ 都是在 v_n处的约化，Γ 的每个顶点的度都是有限的，因此 C 必有一条无限有向路径。但根据构造，Γ 中有向路径上的每个顶点都小于前一个顶点，因此我们在 $(Z, <)$ 中得到一个无限下降链，这与 $<$ 是阿廷的假设矛盾。□

我们的下一个结果（引理 2.15）是命题 2.3 的一个简单推论，并以约化为依据给出了判定 H 有限表示性的判据。注意，与命题 2.3 不同，引理 2.15 中的条件 (*) 对图的边界关系子没有任何假设。

引理 2.15。 设 H 是 G 的有限生成子群，并假设 $Z = G/H$ 上选定的序是强阿廷的。假设存在 Z 的一个有限子集 B，具有以下性质：

(*) 若 Ω 是任意一个 Z标记图，且其内部有一个位于 B之外的极大顶点 v，那么 Ω 存在完全约化。

那么 H 是有限呈示的。

证明。 任取有限的 $A \subseteq Z$，使得 $\rho^{-1}(A)$ 连通（由于 H 是有限生成的，根据 EF23, 定理 2.12], 这样的 A存在）。显然，我们可以把 B 取大一些（只要它仍然是有限的）。因此，我们可以假设 $A \subseteq B$；此外，由于 Z 上的序是强阿廷的，我们可以假设 $B = \{z \in Z : z < z_0\}$，其中 $z_0 \in Z$。

根据命题 2.3，要证明 H 是有限呈示的，只需说明：对于 $Cay(G, X)$ 中任意一条简单闭路 γ，若其所有顶点都位于 $\rho^{-1}(A)$ 中，则存在一个 Z标记图 Ω，使得 $\partial\Omega = [\gamma]_Z$，且其所有顶点都位于 B 中。

从任意一个带 Z 标记的图 Ω_0 开始，其中有 $\partial\Omega_0 = [\gamma]_Z$。如果 Ω_0 的所有顶点都位于B中，我们就完成了；因此假设某个顶点 v_0 不在 B中。由于 $\partial\Omega_0 = [\gamma]_Z$，$\Omega_0$ 的所有边界顶点都位于 A中，并且根据假设 $A \subseteq B$。因此， v_0 必定是一个内部顶点。虽然 v_0 不一定是极大顶点，但由于 $B = \{z \in Z : \ z < z_0\}$，$\Omega_0$ 的任意极大顶点v 也位于 B 之外（因而也是内部顶点）。因此，由 (*) 可知，Ω_0 存在一个完全约化 $\Omega_0 \to \Omega_1$。

对 Ω_1 应用相同的过程，并尽可能持续进行。根据引理 2.14，经过有限步后，我们将得到一个图 Ω，其中有 $\partial\Omega = [\gamma]_Z$，且它不存在完全约化。但这意味着 Ω 的所有顶点都位于 B中，正如所需。□

如何构造完全约化。 注意，单胞映射不会从图中消除任何顶点，因此尤其不可能是完全约化。然而，正如我们接下来将要解释的，通过在与顶点 v 相邻的所有胞腔上复合单胞映射，随后进行适当的消去，可以消除顶点 v。

定义 2.16。 设 v 是图 Ω 的一个顶点，且有 $k \in \mathbb{N}$。称 Ω 的子图 Δ 为一个长度为 k 且位于 v 的廊道，若 Δ含有 k 个胞腔，且这些胞腔都包含 v，并且存在一个胞腔的排列 $\mathcal{F}_1$、……、$\mathcal{F}_k$，使得对于每个 $1 \le i \le k-1$，胞腔 $\mathcal{F}_i$和$\mathcal{F}_{i+1}$ 至少共享一条包含 v的边。若 Δ是所有包含 v的胞腔的并集，则称 Δ 为 v处的完整廊。

定义 2.17。 设 Ω 为一个图，且 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 是 Ω 中具有公共边 e的两个不同胞腔。假设我们已定义了单胞映射 $\varphi_i : (\Omega\ \mathcal{F}_i) \to (\Omega_i',\ \Delta_i)$，其中$i = 1,\ 2$。若由$\varphi_1$ 和 φ_2 产生的 e 处的侧胞构成一个可消去对，则称 φ_1 和 φ_2 在 e 处相容。

定义 2.18. 设 Ω 是一个图， v 是 Ω 的一个顶点， Δ 是在 v处长度为 k、包含胞腔 $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ 的一条廊道，胞腔的排序如定义 2.16 所示。对每个 $1 \le i \le k$，我们固定一条包含 v 的边$e_i \in E(\mathcal{F}_i) \cap E(\mathcal{F}_{i+1})$。假设

(i) 对每个 $1 \le i \le k$，我们定义了一个单胞映射 $\varphi_i : (\Omega\ \mathcal{F}_i) \to (\Omega_i', \Delta_i)$;

(ii) 对每个 $1 \le i \le k-1$，映射 φ_i 和 φ_{i+1} 在 e_i 处相容。

按如下方式定义 $\varphi = \cup\varphi_i$：首先分别应用每个 φ_i，然后消去所有由条件 (ii) 产生的可消去对。

这种形式的映射 φ 称为在 v 处的 k-重胞腔映射（ $k = 2$ 时称为双胞腔映射， $k = 3$ 时称为三胞腔映射）。我们也称 φ 为在 v 处的廊道 Δ-映射。

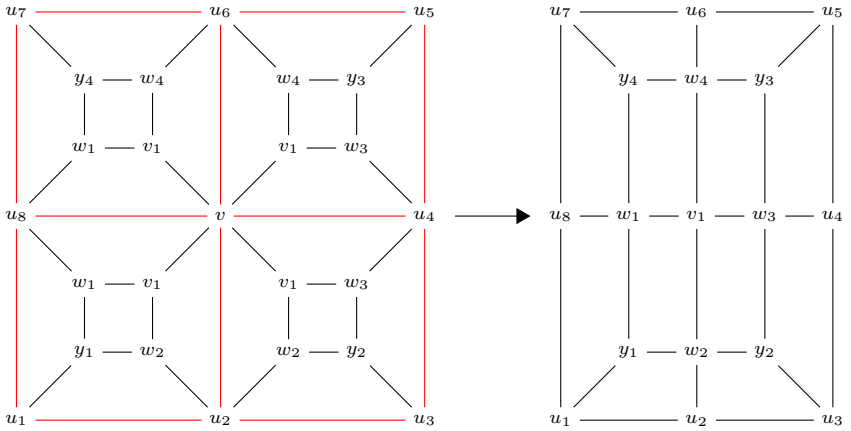


FIGURE 4. 顶点 v处的完全约化 φ。 φ 的定义域 Δ 包含 4 个矩形胞腔，如左侧的图中红色所示 Δ_{left}。整个图 Δ_{left} 是通过在每个胞腔处执行单胞映射得到的 Δ。右侧的图（即 φ 的替换图）是通过消去 Δ_{left} 中的 4 对胞腔得到的，其中每对胞腔都共享一条与 v 相 incident 的边。

注。 显然， φ 是约化，当且仅当每个 φ_i 都是约化 n.

定义 2.19。 假设在定义 2.18 中，每个 φ_i 都是针对相同 t 和 ε 的交换（分别为共轭）映射 $C_{\mathcal{F}_i}(t^\varepsilon)$，此时条件 (ii) 自动成立。相应的映射 φ 称为交换 Δ-映射 （分别称为共轭 Δ-映射），记作 $C_\Delta(t^\varepsilon)$。

如果 Δ 是在内部顶点 v 处的完整廊，且 φ 是在 v处的一个廊道 Δ-映射，那么 φ 会消去 v （示意见图 4），因此如果 φ 也是一次约化，则它必定是在 v处的完全约化。在 [Re88], 中证明了，如果 G/H 是自由阿贝尔的，并且 H 恰好是有限呈示的，那么通过引理 2.15，只使用这种形式的完全约化，就可以建立 H 的有限表示性。在我们的情形中，我们需要处理由若干次廊道约化的复合构造而成的更复杂的完全约化。

引理 *2.20*。设 v 是图 Ω 的一个内部顶点， Δ 是 v处长度为 k的一个廊道，且 $\varphi : \Omega \to \Omega'$ 是一个廊道 Δ-映射。假设 $k < \deg(v)$（即 Δ 不是 v处的完整廊），从而 φ 不会消去 v。那么 $\deg_{\Omega'}(v) - \deg_{\Omega}(v) \leq 2 - k$。特别地，如果 $k \geq 3$，则 $\deg_{\Omega'}(v) < \deg_{\Omega}(v)$。

证明。 回想一下， φ 的构造方式是：先在 Δ的每个胞腔上依次复合单胞映射，然后移除某些共享一条包含 v的边的胞腔对。在 v 上的每个单胞映射都会使 v 的度增加 1，而每次消去都会使v 的度减少 2。根据长度为 k的廊道的定义，我们将至少进行 $k-1$ 次消去。因此，$\deg_{\Omega'}(v) - \deg_{\Omega}(v) \leq k - 2(k-1) = 2 - k$。 □

引理 2.20 表明，若对于某个内部顶点 v ，我们总能在 v处构造一个 Δ-约化，所用廊道为 Δ，其长度为 $\min(3, \deg(v))$，那么通过反复应用引理 2.20 足够多次，就能消去v 。因此，若 v 也为极大，则在 v处存在完全约化。这一观察（它推广了 [Re88]的基本思想）对我们的目的仍然不够。我们移除图中的顶点 v 的一般策略

如下（实际算法会更加复杂，此处我们只想概述主要思路）：

固定一个极大顶点 v，并假设 v 位于内部。

(i) 首先，我们应用若干次单胞约化，移除 v 处边界标记“复杂”的胞腔。此阶段，包含 v 的胞腔总数会增加。(ii) 然后，我们应用双胞腔约化，移除包含 v 且标记复杂的边。(iii) 一旦 v 处所有标记复杂的胞腔和边都被消除，我们就总能定义一次三胞腔约化（这不会重新引入新的复杂胞腔和边）。由于三胞腔约化会降低 v 的度，经过有限步后，v 将从图中消除。

2.3. **群与关系**。虽然本文的主要目标是证明 Aut(F_n) 的 IAR$_{n,d}$ 和 IAC$_{n,d}$ 子群有限可呈示，但使用下文定义的群 SAut(F_n) 的相应子群会更方便。照例，SAut(F_n) 是 SL$_n(\mathbb{Z})$ 在自然同态 Aut(F_n) $\to$ GL$_n(\mathbb{Z})$ 下的原像；因此它是 Aut(F_n) 的指数为2的子群。我们将 SAut(F_n) 定义为 SAut(F_n) 的万能中心扩张。

Gersten [Ge84] 为所有 $n \geq 3$ 的 SAut(F_n) 给出了一个非常简单的 Steinberg 型表示。此外，他证明了如果 $n \geq 5$，则可以通过删去一族关系，从 SAut(F_n) 的群表示得到 SAut(F_n) 的群表示，并且 SAut(F_n) $\to$ SAut(F_n) 的核是 2阶循环群。我们定义 IAR$_{n,d}$（分别地，IAC$_{n,d}$）为 IAR$_{n,d} \cap$ SAut(F_n)（分别地，IAC$_{n,d} \cap$ SAut(F_n)）在 SAut(F_n) 中的原像。显然，如果 $n \geq 5$，则 IAR$_{n,d}$（分别地，IAC$_{n,d}$）的有限表示性蕴含 IAR$_{n,d}$（分别地，IAC$_{n,d}$）的有限表示性。

接下来我们将描述 Gersten 在 [Ge84] 中建立的 SAut(F_n) 和 SAut(F_n) 的群表示。该群表示采用由 Nielsen 映射 R_{ij}：$x_i \mapsto x_i x_j$ 和 L_{ij}：$x_i \mapsto x_j x_i$ 组成的标准生成集，其中 $i \neq j$；不过，最简单的描述方式是添加由 $w_{ij} = L_{ij} L_{ji}^{-1} R_{ij}$ 给出的额外生成元 w_{ij}。

定理 2.21 (Gersten [Ge84])。群 $\mathrm{SAut}(F_n)$ 有一个生成集 $\{R_{ij}, L_{ij}, w_{ij} : \ 1 \leq i \neq j \leq n\}$，并满足以下关系。这里 T_{ij} 表示 R_{ij} 或 L_{ij}，且在每个关系中，不同字母表示不同的指标：

$$[R_{ij}, L_{ij}] = 1 \qquad [T_{ij}, T_{kl}] = 1 \qquad [T_{ij}, T_{kj}] = 1 \quad (2.1)\ (2.2)$$

$$[L_{jk}, L_{ij}] = L_{ik}, \quad [L_{ij}, L_{jk}^{-1}] = L_{ik}^{-1}, \quad [R_{jk}, R_{ij}] = R_{ik}, \quad [R_{ij}^{-1}, R_{jk}^{-1}] = R_{ik}^{-1}, \quad [L_{jk}, R_{ij}] = L_{ik}, \quad [L_{ij}^{-1}, R_{jk}^{-1}] = L_{ik}^{-1} \quad (2.3)$$

$$w_{ij} = L_{ij} L_{ji}^{-1} R_{ij} \qquad w_{ij} = R_{ij} R_{ji}^{-1} L_{ij} \quad (2.4)$$

$$w_{ij}^{-1} R_{ij} w_{ij} = L_{ji}^{-1} \quad w_{ij}^{-1} L_{ij} w_{ij} = R_{ji}^{-1} \quad w_{ij}^{-1} R_{ji} w_{ij} = R_{ij}^{-1} \quad w_{ij}^{-1} L_{ij} w_{ij} = L_{ij}^{-1} \quad (2.5)$$

$$w_{ji} = w_{ij}^{-1} \quad (2.7) \qquad w_{ij}^4 = 1 \quad (2.8)$$

此外，以下结论对 $n \geq 5$ 成立：

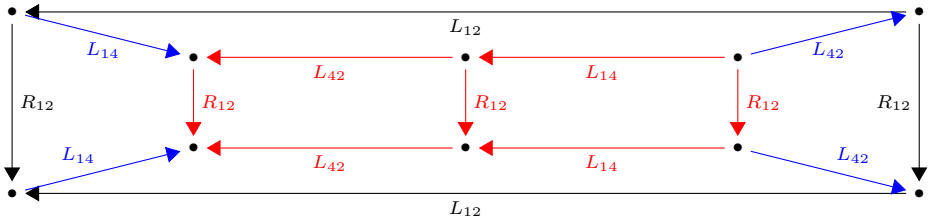


FIGURE 5. 从其他关系推导出 $[R_{12}, L_{12}] = 1$

(a) 群SAut(F_n) 可由在上述群表示的基础上删去最后一族关系 $(w_{ij}^4 = 1)$ 得到的群表示定义。(b) 投影 SAut(F_n) →SAut(F_n) 的核是一个阶为2的循环群。

注。 1. [Ge84] 中的表示实际上包含的关系更少——(2.5)、(2.6) 和 (2.7) 可由其他关系推出；不过，为了简化约化映射的描述，加入这些关系会更方便。

2. Gersten 表示由 McCool 对 Aut(F_n) 的表示导出，见 [Mc74a]，；但后者的生成集大得多，由 Whitehead 映射构成。这些是形如 $T_{i,\ A,\ B}$ 的自同构，其中 A 和 B 是 $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ 的不相交子集，并且

$$T_{i,A,B}(x_j) = \begin{cases} x_j x_i & \text{if } j \in A \setminus B; \\ x_i^{-1} x_j & \text{if } j \in B \setminus A; \\ x_i^{-1} x_j x_i & \text{if } j \in A \cap B; \\ x_j & \text{if } j \notin A \cup B. \end{cases}$$

扩展 Nielsen 生成元。我们将把定理 2.21 中的生成集称为扩展 *Nielsen* 生成元集。元素 R_{ij} 和 L_{ij} 称为*Nielsen* 生成元，元素w_{ij} 称为*Weyl* 生成元。

优化的 Gersten 表示。 图 5 表明，关系 $[R_{ij}, L_{ij}] = 1$实际上可由涉及 Nielsen 生成元的其他关系推出，因此可以（并且将会）删去。我们还可以方便地删去一半 Weyl 生成元——也就是说，只保留生成元 w_{ij} 和 $i < j$，从而删去 w_{ij} 和 $i > j$以及 (2.7) 中的关系（并在其他关系中用 w_{ji}^{-1}替换 w_{ij}，用 $i > j$ 替换 w_{ji}^{-1}）。

因此，对于 $n \geq 5$，群 SAut(F_n) 有一个群表示 $\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \rangle$，其中 $\mathcal{X} = \{R_{ij}, L_{ij} : 1 \leq i \neq j \leq n\} \sqcup \{w_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$，而 $\mathcal{R}$ 是定理 2.21 中除 $[R_{ij}, L_{ij}] = 1$、(2.7) 和 (2.8) 之外的所有关系的集合（其中(2.4)、(2.5) 和 (2.6) 中的 w_{ij} 应解释为 w_{ji}^{-1}）。所得的 SAut(F_n) 群表示称为优化的 *Gersten* 表示。

带符号对称群的作用。现在令 $\Sigma_n = S_n \ltimes \{\pm 1\}^n$ 为 n 次带符号对称群，并考虑 Σ_n 在自由群 $F_n = F(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 上的自然作用。此作用通过共轭作用诱导出 Σ_n 在 Aut(F_n) 上的作用，该作用保持 $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}^{-1}$，其中 $\mathcal{X} = \{R_{ij}, L_{ij} : 1 \leq i \neq j \leq n\} \sqcup \{w_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$ 如上所述。因此，我们可以将此作用扩展到自由群 $F(\mathcal{X})$。所得的 $F(\mathcal{X})$ 上的作用几乎保持了优化的 Gersten 表示中的关系集合 $\mathcal{R}$；

更确切地说，如果我们将 $\mathcal{R}$ 的元素视为几何关系，那么此作用确实保持 $\mathcal{R}$，具体含义如下：

定义 2.22。设 X 为一个集合。X 上的几何关系子 是由 $X \sqcup X^{-1}$ 中的循环约化词构成的一个等价类，其中若词 v 和 w 满足 w 可以由 v 或 v^{-1} 经循环置换得到，则这两个词等价。

注。1. 我们将这类等价类称为几何关系子的原因如下。若 Ω 是一个边界标记为循环约化的范坎彭图，那么读取 Ω 的边界标记的所有可能方式（起点和方向均可任意选择）构成一个几何关系子。

2. 设 $u, v \in F(X)$ 是约化字，且它们的首符号和尾符号各不相同。那么这 4 个词 $u^{-1}v, uv^{-1}, v^{-1}u, vu^{-1}$ 都是循环约化的，并且都属于同一个等价类。因此，我们可以毫无歧义地将几何关系子写成 $u = v$ 的形式（而不是 $w = 1$）。

将尽可能多的关系子写成 $u^{-1}vu = f(u,\ v)$ 的形式会很方便，其中 u 和 v 是生成元或其逆元，而 $f(u,\ v)$ 是一个短字，因为这样将简化共轭单胞映射的构造（参见 § 2.2 中定义 2.10 之后的段落）。当然，将形如 $[u, v] = 1$（其中 $u,\ v$ 是生成元）的关系写成这种形式是显然的。下面我们给出（2.2）和（2.3）中关系的此类表达式。事实上，对于其中一些关系，我们给出两种不同的表达式，交换 u 和 v 的角色。

观察 2.23。以下关系成立：

$$R_{jk}^{-1}R_{ij}R_{jk} = R_{ij}R_{ik}^{-1} \quad R_{ij}^{-1}R_{jk}R_{ij} = R_{jk}R_{ik} \quad R_{jk}R_{ij}R_{jk}^{-1} = R_{ij}R_{ik} \quad R_{ij}^{-1}R_{jk}R_{ij} = R_{ik}R_{jk}$$
$$L_{jk}^{-1}R_{ij}L_{jk} = R_{ik}^{-1}R_{ij} \quad R_{ij}L_{jk}R_{ij}^{-1} = L_{jk}R_{ik}^{-1} \quad L_{jk}R_{ij}L_{jk}^{-1} = R_{ik}R_{ij} \quad R_{ij}L_{jk}R_{ij}^{-1} = R_{ik}^{-1}L_{jk}$$
$$L_{jk}^{-1}L_{ij}L_{jk} = L_{ij}L_{ik}^{-1} \quad L_{ij}^{-1}L_{jk}L_{ij} = L_{ik}L_{jk} \quad L_{jk}L_{ij}L_{jk}^{-1} = L_{ij}L_{ik} \quad L_{ij}^{-1}L_{jk}L_{ij} = L_{jk}L_{ik}$$
$$R_{jk}^{-1}L_{ij}R_{jk} = L_{ik}^{-1}L_{ij} \quad L_{ij}R_{jk}L_{ij}^{-1} = R_{jk}L_{ik}^{-1} \quad R_{jk}L_{ij}R_{jk}^{-1} = L_{ik}L_{ij} \quad L_{ij}R_{jk}L_{ij}^{-1} = L_{ik}^{-1}R_{jk}$$

2.4. 图上的作用与偏序。固定整数 $n \geq 2$ 和 $1 \leq d \leq n$，令 $G = \mathrm{SAut}(F_n)$，并令 H 为 $\mathrm{IAC}_{n,\ d}$ 或 $\mathrm{IAR}_{n,\ d}$。我们的目标是使用 § 2.2 中描述的一般方法，证明 H 的有限表示性（其中 d 如定理 1.1 所述）。回顾 § 2.2 的情形，范坎彭图的顶点由空间 G/H 中的元素标记，该空间在 § 2.2 中记作 Z。对于下面的讨论，将 Z 定义为一个易于描述的 G-集合，而不是定义为 G/H 本身；该集合与 G/H（作为一个 G-集合）同构。

给定 $g \in G$，令 $[g]$ 为其到 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 的自然投影。在 $\mathbb{Z}$ 上的 $d \times n$ 矩阵集合 $Mat_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 上，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 有两种自然作用。利用投影 $g \mapsto [g]$，我们将其视为 G 的作用：

$$g.A = A[g]^{-1} \qquad \text{(row action)} \tag{2.9}$$
$$g.A = A[g]^{T} \qquad \text{(column action)}. \tag{2.10}$$

令 $I_{n,\ d} = (I_d|0_{d\times n}) \in Mat_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 为一个矩阵，其前 d 列构成单位$d \times d$ 矩阵，最后 $n - d$ 列为零。对于这两种作用，G-轨道 $I_{n,\ d}$ 由一些矩阵组成，我们将其称为幺模矩阵（尽管称作列幺模矩阵会更准确）：

定义 2.24。 若矩阵 $A \in Mat_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 的列张成$\mathbb{Z}^d$，则称其为幺模矩阵。我们将所有 $d \times n$-幺模矩阵构成的集合记为 $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$。

如引言所述，令 $\mathrm{Row}_{n,\,d}$（分别地，$\mathrm{Col}_{n,\,d}$）为 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 中由首 d 行（分别地，首 d 列）与单位矩阵相同的矩阵组成的子群。我们可以将 $\mathrm{IAR}_{n,\,d}$ 和 $\mathrm{IAC}_{n,\,d}$ 的定义改写如下：

$$\widetilde{\mathrm{IAR}}_{n,d} = \{g \in G : [g] \in \mathrm{Row}_{n,d}\} \text{ and } \widetilde{\mathrm{IAC}}_{n,d} = \{g \in G : [g] \in \mathrm{Col}_{n,d}\}.$$

另一方面，直接验证可知，$\mathrm{IAR}_{n,\,d}$（分别地，$\mathrm{IAC}_{n,\,d}$）是关于 (2.9)（分别地，(2.10)）的 $I_{n,\,d}$ 稳定子——这解释了“行作用”和“列作用”这两个名称。

因此，如果 $H = \widetilde{\mathrm{IAR}}_{n,\,d}$（分别为 $H = \widetilde{\mathrm{IAC}}_{n,\,d}$），则作为一个 G-集，G/H 同构于$Z = Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$，其作用为上述行作用（分别为列作用）。我们将群 $\mathrm{IAR}_{n,\,d}$（分别为 $\mathrm{IAC}_{n,\,d}$）称为行稳定子（分别为列稳定子）群。

下面两个简单的观察描述了 Nielsen 生成元在$Mat_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 上的作用，并给出了 G/H 与 $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 之间一个明确的 G-集同构。这两个结果都可由定义立即得出。

引理 2.25。设 $A \in Mat_{d\times n}(\mathbb{Z})$。

(a) 若 G 通过行作用 (2.9) 作用于 $Mat_{d\times n}(\mathbb{Z})$，则 $R_{ij}.A = L_{ij}.A$ 是由 A 的 A 矩阵的 j^{th} 列减去 A的 i^{th} 列得到的矩阵。(b) 若 G 通过列作用 (2.10) 作用于 $Mat_{d\times n}(\mathbb{Z})$，则 $R_{ij}.A = L_{ij}.A$ 是由 A 的 A 矩阵的 i^{th} 列加上 A的 j^{th} 列得到的矩阵。

引理 2.26。 回忆一下， $g \mapsto [g]$ 是从 G 到 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$的自然投影，并定义$\varphi$： $G \to Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 如下：

(a) 若 $H = \mathrm{IAR}_{n,\,d}$，令 $\varphi(g)$ 为由 $[g]^{-1}$ 的前 d 行组成的矩阵。

(b) 若 $H = \mathrm{IAC}_{n,\,d}$，令 $\varphi(g)$ 为由 $[g]^T$ 的前 d 行组成的矩阵。

于是， φ 通过 G-集合同态 $G/H \to Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$诱导出一个同构。

从现在起，我们将通过引理 2.26 中的同构，把 G/H 与 $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 视为同一对象，尽管后者的显式公式只会在论文末尾命题 5.6 的证明中使用。相比之下，引理 2.25 中的公式将频繁用于计算，恕不另行说明。

为了继续采用 § 2.2 中概述的方法，我们需要在 $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 上固定一个超阿廷偏序。我们将在 $Mat_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 上定义这样一个偏序（但只会使用它在 $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 上的限制）。

本节余下部分我们只考虑 $d = 1$ 的情形（此时我们将写作 $\mathbb{Z}^n$，而不写作 $Mat_{1\times n}(\mathbb{Z})$）。对于 $d > 1$，定理 1.1 的证明会更加复杂，而且我们会在证明的不同部分使用不同的偏序。关于 $d > 1$ 的这些偏序的描述将推迟到 § 5。

定义 2.27。 任取 $\mathbb{Z}^n$ 中的一个元素 $x = (x_1, \ldots, x_n)$，令 $M = \|x\|_\infty = \max\{|x_i|\}$，并固定 $1 \le i \le n$。我们称 x 的 i^{th} 坐标为

- 极大 当且仅当 $|x_i| = M$;
- 零如果 $x_i = 0$;
- 良好否则。

如果一个坐标不是良好坐标，我们也称其为坏。我们分别用 $m(x)$、$z(x)$ 和 $g(x)$ 表示 x 的极大坐标、零坐标和良好坐标的数量。

现在，我们为 $\mathbb{Z}^4_{\geq 0}$ 赋予（全）字典序：比较两个元素时，先比较它们的第一坐标，再比较第二坐标，依此类推。定义映射 $N\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^4_{\geq 0}$ 如下：

$$N(x) = (\|x\|_\infty, m(x), n - g(x), \|x\|_1),$$

并通过令 $x < y \iff N(x) < N(y)$，在 $\mathbb{Z}^n$ 上定义一个偏序（相对于 $\mathbb{Z}^4_{\geq 0}$ 上的字典序）。

$\mathbb{Z}^n$ 上得到的序是强阿廷的（特别地，是超阿廷的），因为 $\mathbb{Z}^n$ 中的 ℓ^∞-球是有限的。

更明确地说，可以依次应用以下判据来比较 $\mathbb{Z}^n$ 中的两个向量（我们从第一个判据开始；若它能区分两个向量，就停止；若无法判定，则继续使用第二个判据，依此类推）：

（1）ℓ^∞-范数较大的向量较大；（2）极大坐标数量较多的向量较大；
（3）良好坐标数量较少的向量较大；（4）ℓ^1-范数较大的向量较大。

如果无法利用准则 (1)-(4) 将两个向量区分开来，就称它们不可比较。

引入这个序。 在继续之前，我们先说明上述序的一些动机。首先给出一个一般性定义。

定义 2.28. 设 G 是由有限集 S 生成的群，并假设 G 在偏序集 P 上传递作用。给定 $v \in P$，其返回度 $\deg_S^-(v)$ 是满足 $w < v$ 和 $w = sv$ 的对 $(w, s) \in P \times S \cup S^{-1}$ 的数量。换言之，$\deg_S^-(v)$ 是施莱尔图 $Sch(G, S)$ 中连接 v 与较小顶点的边数。

现在假设 G 是有限呈示群，并给定其某个有限群表示 (S, R) 上的一个 P-标记范坎彭图 Ω。固定 Ω 的一个极大顶点 v。直观地说，$\deg_S^-(v)$ 越大，就越容易在 v 处对 Ω 作完全约化。

下面的引理表明，在我们感兴趣的情形下，所有标签位于某个固定有限集之外的顶点都具有足够大的返回度：

引理 2.29. 令 $G = \mathrm{SAut}(F_n)$，$\mathcal{X}$ 为其优化的尼尔森生成集，并令 $P = Um_{1,n}(\mathbb{Z})$ 取自 (2.9)、(2.10) 中的某个 G- 作用。设 $v \in P$ 满足 $\|v\|_\infty \geq 2$。那么 $\deg_{\mathcal{X}}^-(v) \geq \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$.

注。 引理 2.29 似乎没有适用于 $Um_{1,n}(\mathbb{Z})$ 上某些更自然偏序的有用对应结论。例如，若先按 ℓ^∞-范数、再按 ℓ^1-范数对向量排序，那么对于任意 n，$Um_{1,n}(\mathbb{Z})$ 中都会有无穷多个返回度为 2 的元素。事实上，令 $v = (a, b, 0, \ldots, 0)$，其中 a 和 b 互素且 $|a| > 2|b|$。施莱尔图 $Sch(G, \mathcal{X})$ 中 v 的邻点可由 v 经坐标带符号置换（此时得到一个与 v 不可比较的元素），或者将 i^{th} 坐标加到或从 j^{th} 坐标中减去而得到，其中某个 i 和 j；后一种情况下，只有当 $i = 2$ 和 $j = 1$ 时才能得到较小的元素，且符号是唯一确定的

由 a和 b决定。因此， v 至多有 1 个邻点 w 满足 $w < v$，并且有 2 个元素 $s \in S \cup S^{-1}$ 满足 $w = sv$ （ s 可能的取值为 $\{R_{ij}^{\varepsilon}, L_{ij}^{\varepsilon}\}$ 或 $\{R_{ji}^{\varepsilon}, L_{ji}^{\varepsilon}\}$ ，具体取决于 a 和 b 的符号，以及采用行作用还是列作用）。不难验证，将此偏序扩充为全序也无法解决这个问题。

本文不会正式应用引理 2.29，但其证明应能很好地预示下一节将如何构造单胞腔约化。

引理 *2.29* 的证明。 我们将给出行 G 作用 (2.9) 的证明；列作用的证明类似。此外，不失一般性，我们可以假设 v 的所有坐标均为非负数。

回顾一下， $m(v)$、 $g(v)$ 和 $z(v)$ 分别表示 v 的极大、良好和零坐标的数量。因此， $m(v) + g(v) + z(v) = n$。为简化记号，令 $t = \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$，则 $n \geq 3t-1$。因此，以下 3 个不等式之一成立： $m(v) \geq t+1$、 $g(v) \geq t$ 或 $z(v) \geq t$。我们相应地讨论这 3 种情况。

情形 *1*： $m(v) \geq t+1$。不失一般性，我们可以假设 $v_1, \ldots, v_{t+1}$ （ v 的前 $t+1$ 个坐标）是极大的。于是向量 $R_{12}v, \ldots, R_{1,t+1}v$ 互不相同（因为对于 $2 \leq i \leq t+1$, $v_i \neq 0$ ），并且都小于 v ，因为它们都是由 v 将一个极大坐标替换为 0 得到的。因此， v 至少有 t 个更小的邻点，所以特别地， $\deg_{\bar{\mathcal{X}}}(v) \geq t$。

情形 *2*： $g(v) \geq t$。不失一般性，假设第一坐标 v_1 是极大的，且 $v_2, \ldots, v_{t+1}$ 都是良好的。于是向量 $R_{12}v, \ldots, R_{1,t+1}v$ 都小于 v ，因为它们的 ℓ^∞-范数要么小于 v （当 v_1 是唯一的极大坐标时），要么 ℓ^∞-范数相同但极大坐标更少（当 v 有多个极大坐标时）。与情形 1 不同，向量 $\{R_{1i}v\}_{i=2}^{t+1}$ 不一定互不相同，但数对 $(R_{1i}v, R_{1i})$ 肯定互不相同，因此我们仍有 $\deg_{\bar{\mathcal{X}}}(v) \geq t$。

情形 *3*： $z(v) \geq t$。这是唯一使用假设 $\|v\|_\infty \geq 2$ 和 v 是幺模的情形。它们共同意味着 v 至少有一个良好坐标。不失一般性，假设第一坐标 v_1 是良好坐标，且 $v_2, \ldots, v_{t+1}$ 全都是零。于是，向量 $R_{21}v, \ldots, R_{t+1,1}v$ 彼此不同，且都小于 v，因为它们都是由 v 将一个零坐标替换为一个良好坐标得到的，因此再次有 $\deg_{\bar{\mathcal{X}}}(v) \geq t$。□

现在我们来建立一个简单但非常有用的判据，用于判断交换映射是否是关于上述偏序的约化。

定义2.30。

(a) 设 $w \in F(\mathcal{X})$。其支撑集 $supp(w)$ 是 w 中出现的所有指标的集合（将其写成 $\mathcal{X} \sqcup \mathcal{X}^{-1}$ 中的约化字）。(b) 现在设 Ω 为一个图。对于 Ω 的每条边 $e \in E$，其支撑集 $supp(e)$ 是其标记 $l(e)$ 的支撑集。(c) 给定 Ω 的一个子图 Δ ，我们将 $supp(\Delta)$ 定义为 Δ 中所有边的支撑集的并集。

引理 2.31。 回想一下，在本节 *§2* 中有 $d = 1$ 。设 v 是图 Ω 的一个内部极大顶点，且 $M = \|v\|_\infty$。设 $\mathcal{F}$ 是包含 v 的胞腔，设 $i \neq j$ 是不包含于 $supp(\mathcal{F})$ 中的互异指标，并设 S_{ij} 是 $\{R_{ij}^{\pm 1}, R_{ji}^{\pm 1}\}$ 或 $\{L_{ij}^{\pm 1}, L_{ji}^{\pm 1}\}$。那么以下映射之一

与 $x \in S_{ij}$ 交换的映射 $C_{\mathcal{F}}(x)$ 是约化，但以下情形除外：

(i) $v_i = v_j = 0$；(ii) $|v_i| = M$ 和 $v_j = 0$，
或反过来；(iii) v_i 和 v_j 均良好且 $|v_i| = |v_j|$。

证明。我们将给出$S_{ij} = \{R_{ij}^{\pm 1}, R_{ji}^{\pm 1}\}$的证明；另一种情况下的证明完全相同。下面我们将证明存在 $x \in S_{ij}$，使得仅利用关于 v_i和v_j的上述假设（而不利用 v是极大的事实），就有 $xv < v$。由于 $i,\ j \notin supp$（$\mathcal{F}$），$\mathcal{F}$ 的所有顶点都具有相同的 i^{th} 和 j^{th} 坐标。因此，同样的论证可推出，对 $\mathcal{F}$中的任意顶点 w，都有 $xw < w$，从而 $C_{\mathcal{F}}$（x）是一个约化。

与引理 2.29 一样，我们将给出行作用（2.9）的证明。假设 (i)–(iii) 均不成立。不失一般性，可以假设 $0 \le v_i \le v_j$。由于 (i) 不成立，必有 $v_j > 0$。

情形 *1*：$v_j = M$。由于 (ii) 不成立，$v_i > 0$ 这意味着 $R_{ji}v < v$。

情形 *2*：$0 < v_j < M$。在这种情况下，v_j 是良好的。由于 (iii) 不成立，$v_i < v_j$。如果 $v_i = 0$，那么 $R_{ij}v$ 和 v 具有相同的 ℓ^∞-范数以及相同数量的极大坐标，但 $R_{ij}v$ 具有更多良好坐标，因此 $R_{ij}v < v$。而如果 $v_i > 0$，那么 $R_{ji}v$ 和 v 具有相同的 ℓ^∞-范数、相同数量的极大坐标和良好坐标，但 $R_{ij}v$ 具有更小的ℓ^1-范数，因此同样有 $R_{ij}v < v$。□

相对于图的极大、良好和坏。我们以此前定义的一个技术变体结束本节，这将简化论文后文中的术语。

定义 2.32。设 Ω 是一个图，设 $M = \|\Omega\| =$ 极大$\{\|w\| :\ w \in V(\Omega)\}$，并设$c \in \mathbb{Z}$ 满足 $|c| \le M$。如果 c 是 Ω-极大（分别为 Ω-良好），我们称之为 $|c| = M$（分别为$0 < |c| < M$）；如果 c 不是 Ω- 良好，则称其为 Ω- 坏 。

下面的观察概述了上述性质与图及该图中特定顶点之间的基本关系。

观察 2.33。设 w 是图Ω 的一个顶点，c 是 w 的一个坐标。以下结论成立：

(a) 如果 c 是 w 的一个良好坐标，那么 c 是Ω-良好的。(b) 如果 c 是Ω-极大的，那么 c 是 w 的一个极大坐标，且 $\|w\| = \|\Omega\|$。(c) 如果 $\|w\| = \|\Omega\|$，那么 c 是 w 的一个极大（分别为良好）坐标，当且仅当 c 是 Ω- 极大（分别为 Ω- 良好）。

下面这个显而易见的事实证明非常重要：

观察2.34。设 $a, b \in \mathbb{Z}$，并假设 a, b 和 $a + b$ 是某个图Ω中某些顶点（不一定互异）的坐标。那么，它们要么全都是Ω-坏的，要么至少有两个是Ω-良好的。

证明。这是成立的，因为如果 $M = \|\Omega\|$ 且 $c \in \mathbb{Z}$ 满足 $|c| \le M$，那么当且仅当 M 整除 c时，c 是 Ω-不良的。□

3. Finite presentability of $\mathrm{IAR}_{n,1}$

3.1. 预备知识。本节将证明对于 $n \ge 26$，行稳定子群 $\mathrm{IAR}_{n,1}$ 具有有限表示性。

本节中我们将始终使用以下记号： $G = \mathrm{SAut}(F_n)$， $H = \mathrm{IAR}_{n,1}$以及带有行 G-作用 (2.9) 的 $Z = Um_{1\times n}(\mathbb{Z})$。回顾一下， $Z \cong G/H$ 是一个 G-集，我们通过引理 2.26 中的同构将 Z与 G/H等同。此外，我们还令 $(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ 为 G 的优化的 Gersten 表示（见 § 2.3）。

本节的大部分内容将用于证明以下结果：

命题 3.1. 假设 $n \geq 6$。设 Ω 是一个关于 $(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ 的 Z-标记图，令$v \in V(\Omega)$ 为一个内部极大顶点，并令 $\mathcal{F}$ 为 Ω 中包含 v 的一个胞腔。此外，假设 $\|v\|_\infty > 1$ 或 $\|v\|_\infty = 1$ 且 $\|v\|_1 \geq 6$。那么 Ω 可进行一次单胞腔$\mathcal{F}$-约化。

我们将根据$\mathcal{F}$ 的类型（定义如下），通过逐案论证来证明命题 3.1。最终，我们需要的不仅是这一结果，还需要关于证明中构造的约化的一些额外信息。

我们先给出一些简单的初步观察。

对图的作用。回忆一下， Σ_n 表示 n度的带符号对称群。正如我们在 § 2.3 中所述， Σ_n 作用于 $F(\mathcal{X})$，并将 $\mathcal{R}$ 作为几何关系的集合保持不变，因此也作用于 G。给定 $\sigma \in \Sigma_n$，令 $M_\sigma \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$为相应的带符号置换矩阵。回忆一下，对于 $g \in G$，我们用 $[g]$ 表示其在 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 中的典范像。不难验证

$$[\sigma(g)] = M_\sigma [g] M_\sigma^{-1} \text{ for all } g \in G \text{ and } \sigma \in \Sigma_n.$$

Σ_n在 $Z = Um_{1\times n}(\mathbb{Z})$上还有一个自然作用，由以下公式给出：对所有$z \in Z$ 和 $\sigma \in \Sigma_n$， $\sigma(z) = zM_\sigma^{-1}$。

观察 3.2. 对于所有 $g \in G$ 和 $z \in Z$，我们有 $\sigma(g.z) = \sigma(g).\sigma(z)$。

证明。 回忆一下， $g.z = z[g]^{-1}$，因此 $\sigma(g.z) = z[g]^{-1}M_\sigma^{-1}$。另一方面，

$$\sigma(g).\sigma(z) = \sigma(z)[\sigma(g)]^{-1} = zM_\sigma^{-1}(M_\sigma[g]M_\sigma^{-1})^{-1} = zM_\sigma^{-1}(M_\sigma[g]^{-1}M_\sigma^{-1}) = z[g]^{-1}M_\sigma^{-1}. \quad \square$$

观察 3.2 表明，在 $(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ 上的 Z-标记图集合上存在由 Σ_n 诱导的作用。

在证明命题 3.1 时，对于任意 $\sigma \in \Sigma_n$，我们可以将给定的图 Ω 替换为 $\sigma\Omega$。事实上，设命题 3.1 的假设条件对于某个图 Ω 及其胞腔 $\mathcal{F}$ 成立，并且我们构造了图 $\sigma\Omega$ 在其胞腔 $\sigma\mathcal{F}$ 处的单胞约化 $\varphi\colon (\sigma\Omega, \sigma\mathcal{F}) \to (\Omega', \Delta')$。我们可以考虑诱导的图映射 $\sigma^{-1}\varphi\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (\sigma^{-1}\Omega', \sigma^{-1}\Delta')$。由于我们在 Z 上的偏序是 Σ_n-不变的（即，对于所有 $\sigma \in \Sigma_n$，$z < z'$ 蕴含 $\sigma(z) < \sigma(z')$），该映射 $\sigma^{-1}\varphi$ 也是一个约化。

除了 Σ_n 的作用外，我们还有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在 Z-标记图集合上的一个简单作用： $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的非单位元只需将所有顶点标签乘以 -1。注意，该作用与 Σ_n-作用可交换。

回顾一下，我们在第2节末尾（见定义2.30）定义了$(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ 上的 $F(\mathcal{X})$ 中的词和 Z-标记图的支撑集概念。下面的观察记录了其一些基本性质：

Obs察 3.3。 设 Ω 为任意一个在 $(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ 上的 Z-标记图。以下结论成立 ：

(i) $|supp(r)| \leq 4$ 对任意 $r \in \mathcal{R}$ 均成立，因此 $|supp(\mathcal{F})| \leq 4$ 对 Ω 中任意胞腔 $\mathcal{F}$ 均成立。(ii) 若 Δ 是 Ω 中长度为 k 的一条廊道，则 $supp(\Delta) \leq 2k + 2$。

(iii) 假设 $n \geq 6$，并令 $\Sigma_n(1)$ 为 Σ_n 的子群，由稳定集合 $\{x_1, x_1^{-1}\}$ 的置换组成。那么，$\Sigma_n(1)$ 在 $\mathcal{R}$ 上作用的任意轨道都包含一个关系子 r，满足 $4 \notin supp(r)$。

证明。(i) 由定义关系的形式立即得出。为证明 (ii)，令$\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$为 Δ 中按廊道定义（定义 2.16）排列的胞腔。由于$\mathcal{F}_i$与 $\mathcal{F}_{i+1}$至少共用一条边，因此我们有 $|supp(\mathcal{F}_i) \cap supp(\mathcal{F}_{i+1})| \geq 2$。于是，从 $\mathcal{F}_2$开始的每个胞腔至多为 $supp(\Delta)$贡献 2 个新的指标，因此 $|supp(\Delta)| \leq 4 + 2(k-1) = 2k+2$。

(iii) 任取给定轨道中的 $r_0 \in R$，并假设 $4 \in supp(r_0)$。由于 $n \geq 6$且 $|supp(r_0)| \leq 4$，存在 $i \in \{2,3,5,6\}$ 使得 $i \notin supp(r_0)$。但此时，对换 $(i,4)$ 属于 $\Sigma_n(1)$，而 $r = (i,4)r_0$ 的支撑集不包含 4。□

现在固定如命题 3.1 中的 Ω、v和 $\mathcal{F}$，并记 $v = (v_1, \dots, v_n)$。由于$|supp(\mathcal{F})| \leq 4$ 且 $n \geq 6$，我们有 $n \geq |supp(\mathcal{F})| + 2$，因此以下条件至少有一个成立：

(1)（极大坐标情形）：存在 i，$j \notin supp(\mathcal{F})$，使得 v_i和 v_j均为极大；(2)（良好坐标情形）：存在 $i \notin supp(\mathcal{F})$，使得 v_i是良好的；(3)（零坐标情形）：存在 $i \notin supp(\mathcal{F})$，使得 v_i为零。

在极大坐标情形下，命题 3.1 的证明完全直接——事实上，在此情形下，四个映射 $C_{\mathcal{F}}(R_{ij}^{\pm 1})$、$C_{\mathcal{F}}(R_{ij}^{\pm 1})$ 中的一个（其中 i，j如上面的 (1) 所示）根据引理 2.31 是一个约化。

在良好坐标情形和零坐标情形中，我们将使用 $\Sigma_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的作用作出一些额外假设，从而大大简化证明中的记号。首先，令我们选取 $\mathcal{R}_{rep}$ 作为 $\Sigma_n(1)$ 在 $\mathcal{R}$ 上的轨道（视为几何关系子的集合）的代表元集合，并要求对于所有 $r \in \mathcal{R}_{rep}$ 都有 $4 \notin supp(r)$（根据观察 3.3(iii)，这是可能的）。

引理 3.4。在良好坐标情形中，只需在以下额外假设下证明命题 *3.1*：

(i) v_1 是极大且为正的；(ii) v_4 是良好且为正的；(iii) $l(\partial\mathcal{F}) \in \mathcal{R}_{rep}$；特别地，$4 \notin supp(l(\partial\mathcal{F}))$。

证明。令 $r = l(\partial\mathcal{F})$。我们将证明，在 $\Sigma_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中某个适当元素的作用下，可以实现条件 (i)–(iii)。为简化记号，在通过不同元素作用的过程中，我们将始终改变 r 的定义。

步骤 *1*：我们首先对坐标进行置换，使 v_1 为极大值。

步骤 *2*：接下来，我们作用某个 $\sigma \in \Sigma_n(1)$，使得 $l(\partial\mathcal{F}) \in \mathcal{R}_{rep}$。$\Sigma_n(1)$ 的定义保证 v_1 仍为极大值（尽管其符号可能改变）。

步骤 *3*：接下来，我们确保 v_4 是良好的。根据 $\mathcal{R}_{rep}$ 的定义，经过步骤 2 后，我们有 $4 \notin supp(r)$。由于我们处于良好坐标情形，我们还知道对于某个 $i \notin supp(r)$，v_i 是良好的；此外，由于 v_1 是极大值，因此 $i \neq 1$。如果 $i = 4$，则（步骤 3）完成。如果 $i \neq 4$，我们就作用对换 $(i,4)$；这使 v_4 变为良好，同时不影响步骤 1 和步骤 2 的结论，因为 $i \neq 1$ 且 $i, 4 \notin supp(r)$。

步骤 *4*：现在我们确保 $v_1 > 0$。由于 v_1 是极大值，因此它非零。如果 $v_1 > 0$，我们就完成了；否则，我们用 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的非平凡元素作用（将所有坐标乘以

$v \ -1$）。此操作不会改变任何关系子，因此步骤 2 的结论仍然成立，而且显然不会影响步骤 1 和步骤 3 的结论。

步骤 *5*：最后，我们确保 $v_4 > 0$。由于 v_4 良好，因此它非零。若 $v_4 > 0$，则证毕；否则，我们施以带符号置换 $x_4 \mapsto x_4^{-1}$。由于 $4 \notin supp(r)$，这不会影响步骤 1-4 的结论。□

以下结果是零坐标情形下引理 3.4 的一个类似结果。

引理 3.5。在零坐标情形下，只需在以下附加假设下证明命题 *3.1*：

(i) v_1 是良好且为正；(ii) v_4 为零；(iii) $l(\partial\mathcal{F}) \in \mathcal{R}_{rep}$；特别地，$4 \notin supp\,(l(\partial\mathcal{F}))$。

证明。若 $\|v\| > 1$，则 v 必须至少有一个良好坐标，我们可以按照引理 3.4 的证明进行论证。若 $\|v\| = 1$，则根据命题 3.1 的假设条件，至少存在 2 个指标 $i, j \notin supp\,(\mathcal{F})$，使得 $|v_i| = |v_j| = 1$，因此 v_i 和 v_j 都是极大的，由极大坐标情形即可得证。□

回顾一下，$\Sigma_n(1)$ 是 Σ_n 中 $\{x_1, x_1^{-1}\}$ 的稳定子。令 $\mathcal{R}_1$ 为 $\mathcal{R}$ 中支撑集包含指标 1 的关系子的集合。$\Sigma_n(1)$ 在 $\mathcal{R}$ 上的作用保持 $\mathcal{R}_1$，并且不难验证，$\Sigma_n(1)$ 在 $\mathcal{R}_1$ 上的作用有 14 个轨道，其代表元列于下方的表 1 中。若图中的两个胞腔的边界关系子属于同一轨道，则称它们具有相同类型。类型将用整数 1 到 12 以及符号 $6'$ 和 $7'$ 表示。类型 $6'$（分别为类型 $7'$）的单胞约化与类型6（分别为类型 7）的单胞约化完全类似，因此不再逐一讨论。

我们还将追踪较小子群 $\Sigma_n^+(1)$ 下的轨道，该子群由固定 x_1 和 x_1^{-1} 的带符号置换组成。由于 $[\Sigma_n(1) : \Sigma_n^+(1)] = 2$，$\mathcal{R}_1$ 上的每个 $\Sigma_n(1)$-轨道在 $\Sigma_n^+(1)$ 下要么仍是单个轨道，要么分裂成两个轨道。在后一种情形中，我们将区分左亚型和右亚型，分别记为 iL 和 iR，其中 i 是其基础类型。

下方的表 1 按如下方式编排。表中的每一行对应一种胞腔类型或亚型，它们列于第一列；第二列则包含该类型或亚型的一个（选定的）关系子。第 3 列和第 4 列给出良好坐标情形下各类型或亚型的单胞约化映射信息：第 3 列列出侧边可能的标记（仅对将出现在双胞和三胞腔约化中的胞腔类型提供此信息），第 4 列列出侧胞可能的类型（我们只关注包含 v（即所选极大顶点）的侧胞，但在大多数情况下，图中不会标出 v，因此需要考虑所有侧胞）。最后，第 5 列和第 6 列给出零坐标情形下的对应信息。

在开始证明良好情形和零坐标情形下的命题 3.1 之前，我们先引入一些额外的记号和术语。设 I 是 $\{1, \ldots, n\}$ 的一个非空子集。给定 $v \in \mathbb{Z}^n$，我们将从 v 中删除 j^{th} 坐标后得到的向量记为 $v_I \in \mathbb{Z}^{|I|}$，其中对所有 $j \notin I$ 均如此。

定义 3.6。

TABLE 1. IAR 群的单胞映射$_{n,\ 1}$。

		良好坐标情形		零坐标情形	
type	关系	侧边	侧胞	侧边	侧胞
1R	$[R_{23}, R_{12}] = R_{13}$	L_{14}	$5, 6L$		2, 7
1L	$[L_{23}, L_{12}] = L_{13}$	R_{14}	$5, 6R$		2, 7
2R	$[R_{13}, R_{21}] = R_{23}$	L_{14}	$2L, 5$	R_{41} 或 R_{43}	2R, 4, 7
2L	$[R_{13}, L_{21}] = R_{23}$	R_{14}	$2R, 5$	R_{41} 或 R_{43}	2L, 4, 7
3	$[R_{21}, R_{32}] = R_{31}$		$2, 6$		4, 7
4	$[R_{21}, R_{31}] = 1$		2	R_{41}	4
5	$[R_{12}, L_{13}] = 1$	L_{14}	$5, 1L$		2, 6, 6′, 9
6R	$[R_{12}, R_{35}] = 1$	L_{14}	$5, 6L$		2R, 7
6L	$[L_{12}, R_{35}] = 1$	R_{14}	$5, 6R$		2L, 7
6′R	$[R_{12}, R_{32}] = 1$	L_{14}	$5, 6L$		2R, 7
6′L	$[L_{12}, R_{32}] = 1$	R_{14}	$5, 6R$		2L, 7
7	$[R_{21}, R_{35}] = 1$		$2, 6$	R_{41}	4, 7
7′	$[R_{21}, L_{23}] = 1$		$2, 6$	R_{41}	4, 7
8	$L_{12}L_{21}^{-1}R_{12} = w_{12}$		1, 2,5, 7′, 11		2, 3,4, 6′, 12
9	$L_{21}L_{12}^{-1}R_{21} = w_{21}$		1, 2,5, 7′, 11		2, 3,4, 6′, 12
10	$w_{12}^{-1}R_{21}w_{12} = R_{12}^{-1}$		1, 2,5, 7′, 11		2, 3, 12
11L 11L	$w_{12}^{-1}R_{13}w_{12} = L_{23}^{-1}$ $w_{12}R_{13}w_{12}^{-1} = R_{23}$	L_{14}, R_{24}^{-1} L_{14}, R_{24}^{-1}	5, 6, $11R$ 5, 6, $11R$		2、6、7、12 2、6、7、12
11R 11R	$w_{12}^{-1}L_{13}w_{12} = R_{23}^{-1}$ $w_{12}R_{13}w_{12}^{-1} = R_{23}$	R_{14}, L_{24}^{-1} R_{14}, L_{24}^{-1}	5, 6, $11L$ 5, 6, $11R$		2、6、7、12 2, 6, 7, 12
12	$w_{12}^{-1}R_{31}w_{12} = R_{32}^{-1}$		2, 6, 7, 11	R_{41}, R_{42}	4, 12

(a) 设 Ω 为一个图。Ω 的 I-迹记作 Ω_I，它由 Ω 得到，方法是保留相同的顶点、边和边标签，并将 Ω 中每个顶点标签v 的 v 替换为 v_I（注意，Ω_I 不是一个 Z-标记图）。

(b) 设 φ 为图映射，Δ' 为其替换图。设 I 为 $\{1, \dots, n\}$ 的子集。若对于每个 $j \notin I$，Δ' 的所有顶点都具有相同的 j^{th} 坐标，我们就称 φ 支撑于 I。

根据偏序的定义，显然，若 φ 支撑于 I，那么要检验 $\varphi : (\Omega\ \Delta) \to (\Omega',\ \Delta')$ 是否为约化，只需知道 Δ' 沿 I 的迹以及原始图 Ω。

显然，只要 $supp(\Delta') \subseteq I$，$\varphi$ 就支撑于 I。然而，后一个条件并非必要。例如，下文描述的 2R 型约化支撑于 $I = \{1, 2, 4\}$，而 $supp\,(\Delta') = \{1, 2, 3, 4\}$（事实上，3 已属于 Δ 的支撑集）。

对于接下来两个小节中描述的每一种单胞约化，我们都会先指定一个集合 I，给定映射的支撑集位于该集合上（在所有情况下，我们都有 $I \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$），然后只使用 Δ 中顶点的 I-迹（而非完整的顶点标签）进行处理。

简化的术语和记号。在接下来两个小节（以及论文后文）对单胞约化的描述中，还会使用以下补充术语和记号。

- 第 3、4 节中描述的单胞约化映射将始终记作 φ。初始图记作 Ω，修改后的图记作 Ω′，φ （它是一个单胞）的定义域记作 $\mathcal{F}$，而 φ 的替换图记作 Δ'。因此，符号表示为 $\varphi\colon(\Omega\ \mathcal{F})\to(\Omega',\ \Delta')$。
- $\mathcal{F}$ 的边界关系子通常写作 $r=s$ （请回想一下，严格来说，这表示以 $r^{-1}s$ 为代表元的几何关系子）。
- $\mathcal{F}$ 的顶点称为旧顶点，而 $V(\Delta')\setminus V(\mathcal{F})$ 中的顶点称为新顶点。

- 滥用记号，对于一个顶点 w，我们将写作 $w=(a,\ b,\ c,\ \ldots\ldots)$，意指 $(a,\ b,\ c,\ \ldots\ldots)$ 是 w 的标记。
- 类似于 $(a,\ b,\ *)$ 的记号表示 $\mathbb{Z}^n$ 的一个元素，其第一和第二个坐标分别为 a 和 b。

- 如前所述，在每种情形下，我们都会指定一个集合 I，φ 的支撑集包含于该集合中。§ 3.2、3.3、4.1 和 4.2 中的每幅图都将描绘相应单胞约化的替换图 Δ' 的 I-迹。

- 回忆一下，v 表示 $\mathcal{F}$ 的一个选定的极大顶点。对于某些类型，我们将明确指定 v 在图中的出现位置，或至少给出一些限制。在这些情形下，$\mathcal{F}$ 中可能等于 v 的顶点（的标记）将以粗体显示。
- 和之前一样，对于任意 $w\in\mathbb{Z}^n$ 通过 w_I，我们将用 $\mathbb{Z}^{|I|}$ 表示其投影。我们将通过规定：$w_I<w'_I$ 当且仅当 $w<w'$，在 $V(\Delta'_I)$ 的标记集合上定义偏序。由于选取 I 的方式，映射 $w\mapsto w_I$ 是从 $V(\Delta_I)$ 的标记到 $V(\Delta'_I)$ 的双射，因此该偏序定义良好；然而，这个偏序可能不同于由 $\mathbb{Z}^{|I|}$ 诱导的偏序。

- 和之前一样，我们将处理 $\mathbb{Z}^n$ 中向量的 ℓ^∞ 和 ℓ^1-范数。由于前者使用得更频繁，我们通常会写作 $\|v\|$，而不是 $\|v\|_\infty$。
- 对于任意图 Ψ，我们定义 $\|\Psi\|=\max\{\|v\|:\ v\in V(\Psi)\}$。
- 我们将使用形如 n.GA、n.GB、n.ZA 和 n.ZB 的表达式来指代在第 3、4 节中构造的单胞约化，其中 n 是介于 1 和 12 之间的整数。这里，n 表示 $\partial\mathcal{F}$ 的边界关系类型；第一个字母（G 或 Z）区分良好坐标情形和零坐标情形；在行稳定子群（第 3 节中讨论）的情形下，第二个字母为 A，而对于列稳定子群（第 4 节中讨论），第二个字母为 B。
- 当我们说一个整数 e 是极大的（分别为良好的、坏的）时，除非我们将 e 视为某个特定顶点的坐标（见第 2 节末尾的定义 2.32），否则我们指的是 e 是 Ω-极大的（分别为 Ω-良好的、Ω-不良的）。

3.2. **良好坐标情形下的单胞约化**。本小节将按胞类型分别描述良好坐标情形下的单胞约化。回顾我们的初始约定：$v=(v_1,\ v_2,\ \ldots\ldots)$ 是 $\mathcal{F}$ 的选定极大顶点（它位于内部，且是整个图 Ω 中的极大顶点）。我们设

$$M=\|v\|=\|\mathcal{F}\|=\|\Omega\|.$$

1型，GA： $l\left(\partial\mathcal{F}\right) = \left([R_{23}, R_{12}] = R_{13}\right)$，

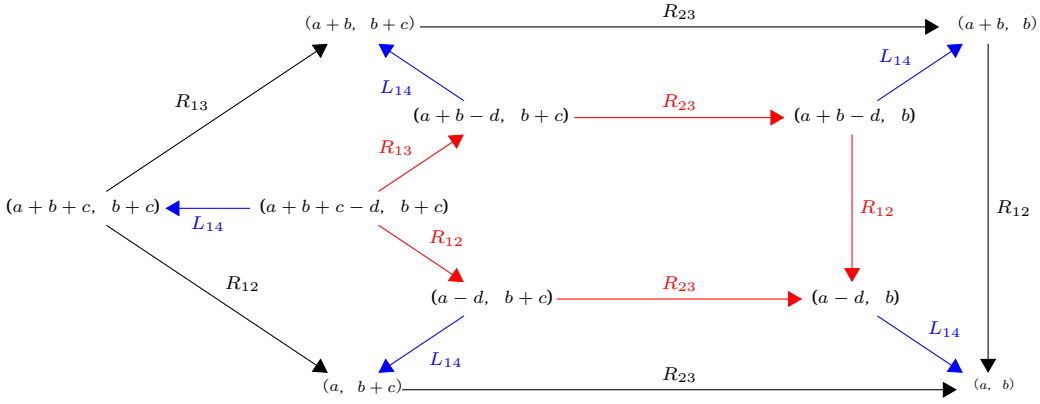


FIGURE 6. 列出了前两个坐标

由观察 3.4 可假设 v_1 是极大且为正的，v_4 是良好且为正的，并且 $l(\partial\mathcal{F}) \in \mathcal{R}_{rep}$。特别地，$4 \notin supp(\mathcal{F})$，因此 $\mathcal{F}$ 的所有顶点具有相同的第 4 个坐标。为简化记号，我们将其值记为 d。于是，$v = (M,\ v_2,\ v_3,\ d,\ .....)$，其中 $M > d > 0$。

简单情形：$1 \notin supp(l(\partial\mathcal{F}))$. 由于 $g(v) > 4$和 $|supp(l(\partial\mathcal{F}))| \leq 4$，在某个 $\Sigma_n($1) 的元素作用后，我们可以假设 $4 \notin supp\,(l(\partial\mathcal{F}))$ 且 v_4 仍然是良好的。因此，交换映射 $C_{\mathcal{F}}(R_{14}^{\pm 1})$、$C_{\mathcal{F}}(R_{41}^{\pm 1})$ 均有定义，根据引理 2.31，其中一个是约化。

从现在起，我们假设 $1 \in supp\,(l(\partial\mathcal{F}))$，因此通过选择合适的 $\mathcal{R}_{rep}$，可以假设 $l($$\partial\mathcal{F})$ 是表 1 中的一个关系子。对于每种区分了子类型 iR 和 iL 的胞类型 i，我们只描述子类型 iR 的一种约化，因为只需在所有边标签中交换 L 和 R，即可得到子类型 iL 对应的约化。

类型*1R*：$l(\partial\mathcal{F}) = ([R_{23}, R_{12}] = R_{13})$。在此情形下，$I = \{1, 2\}$。$\partial\mathcal{F}$中的所有边标签都与 L_{14}可交换。下面我们将证明，交换映射 $C_{\mathcal{F}}(L_{14})$是一种约化（见图 6）

断言 3.7。 $\mathcal{F}$ 的每个顶点的第一坐标都非负。

证明。$\mathcal{F}_I$的顶点为(a, b)、$(a+b, b)$、$(a+b, b+c)$、$(a+b+c, b+c)$和$(a, b+c)$，其中 a、b、c取某些值。由于 $v = (M, *)$，根据我们的假设，数值 a、$a+b$或 $a+b+c$中有一个等于 M。因此，若 $\mathcal{F}$ 的某个顶点的第一坐标为负，则 $\mathcal{F}$ 中某对顶点的第一坐标之差大于 M。然而，这些差（相差一个符号）为 b、c和 $b+c$，每一个都作为 $\mathcal{F}$ 某个顶点的坐标出现，因此其绝对值不可能超过 $M = \|\mathcal{F}\|$，矛盾。□

现在取 w' of φ 的任意一个新顶点。我们需要证明 $w' < v$。存在一个旧顶点 w（即 $\mathcal{F}$ 的一个顶点），使得 $w_I = (x,\ y)$ 且 $w'_I = (x-d,\ y)$。由断言 3.7 可知 $x \geq 0$，又因为 $x \leq M$（因为 x 是 w 的一个坐标），所以 w' 的第一坐标不是极大的。如果 $y = b+c$ 或 $v_I \neq (a+b+c,\ b+c)$，则存在一个旧顶点 u，它具有极大的

2型，GA： $l(\partial\mathcal{F}) = ([R_{13}, R_{21}] = R_{23})$.

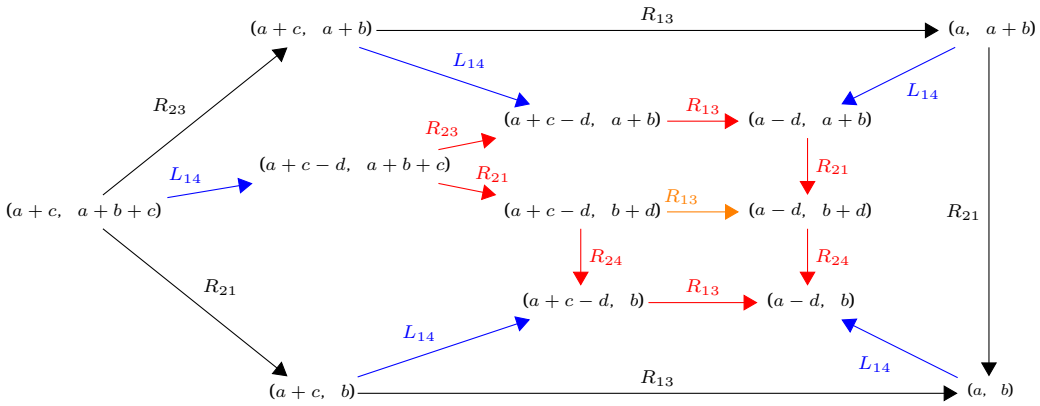


FIGURE 7. 坐标 1 和 2 已列出。

第一坐标（等于 M），且在所有其他坐标上都与 w' 相同，因此 $w' < u$，进而 $w' < v$。

现在假设 $y = b$ 和 $v_I = (a+b+c, b+c)$，那么 $a+b+c = M$ 和 $w' = (a-d, b)$ 或 $(a+b-d, b)$。

子情况 *1*： $|b| < M$。于是， w' 的前两个坐标是非极大的，因此 $w' < v$。

子情形 *2*： $b = M$。于是 $a + c = 0$，并且由于 $a + b$ 和 $b + c$ 都是作为 $\mathcal{F}$的坐标的 $\leq M$，我们必有 $a = c = 0$。于是 $v_I =$（M， M），因此 $w' < v$，因为 v的极大坐标多于 w'。

子情形*3*： $b = -M$。于是 $a + c = 2M$，所以 $a = c = M$，从而 $v_I =$（M， 0），而 $w'_I =$（$M - d$， $-M$）或（$-d$， $-M$），因此 w'和 v具有相同数量的极大坐标，但 w' 具有更多良好坐标，所以再次有 $w' < v$。

因此我们证明了 φ 是一个约化。

*2R*型： l（$\partial\mathcal{F}$） $=$（[（R_{13}， R_{21}] $=$ R_{23}），$I = \{1, 2\}$。我们将使用图 7所示的映射。

下面证明此映射是一个约化。此映射产生 7 个新顶点，我们需要检查它们的 I-迹全都是 $< v_I$。$\mathcal{F}$ 中每个顶点的第一坐标不是 a，就是 $a + c$，因此根据假设， $a = M$ 或 $a + c = M$，从而 (M, b) 和 $(M, a + b)$ 都出现在 $\mathcal{F}_I$的顶点之中。由于 c 也是一个$\mathcal{F}$-顶点的坐标， $|c| \leq M$，由此 a，$a + c \geq 0$。由于 d是一个良好的正坐标，我们有$|a + c - d| < M, |a - d| < M$。因此，$(a + c - d, b)$ 和 $(a - d, b)$ 都是 $< (M, b)$ 和 $(a + c - d, a + b)$ 以及 $(a - d, a + b)$ 都是 $< (M, a + b)$，所以 $(a + c - d, b)$、$(a - d, b)$、$(a + c - d, a + b)$ 和 $(a - d, a + b)$ 全都是 $< v_I$。

接下来注意到 $b \leq 0$（否则 $a+b > M$ 或 $a+b+c > M$），由此可得 $|b+d| < M$。因此，顶点 $(a-d,\ b+d)$ 和 $(a+c-d,\ b+d)$ 的两个坐标都是非极大的，所以它们也是 $< v_I$。

唯一剩下的新顶点是（$a + c - d$， $a + b + c$）。它的第一坐标不是极大的。由于 $a + c \geq 0$ 和 $b \leq 0$，$a + b + c$ 成为极大的唯一可能是 $b = 0$ 和 $a + c = M$，或 $b = -M$ 和 $a + c = 0$；而在第二种情况下，我们必须有 $a = -c = M$（因为 a 或 $a + c$ 必有一个是极大的）。在第一种情况下，我们有（$a + c - d$，$a + b + c$） $=$（$M - d$， M） $<$（M， M） $=$（$a + c$， $a + b + c$），而在第二种情况下

类型3，GA： $l(\partial\mathcal{F}) = ([R_{21}, R_{32}] = R_{21})$。

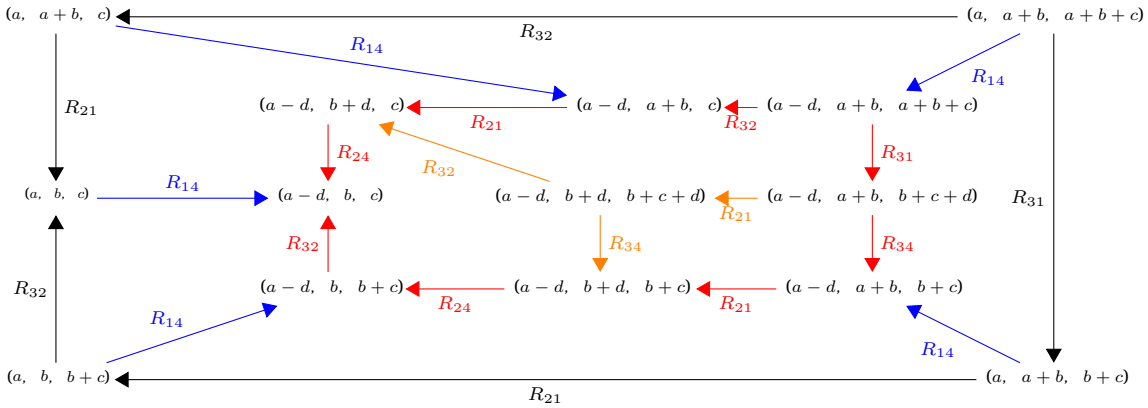


FIGURE 8. 坐标 1、2 和 3 已列出。

我们有 $(a + c - d,\ a + b + c) = (-d,\ -M) < (M,\ -M) = (a,\ b)$，因此我们证明了 $(a + c - d,\ a + b + c) < v_I$。

现在让我们阐述一个简单的一般性观察，它可用于证明一个新顶点小于 v。

引理 3.8。 设Ω 是一个图，且 $M = \|\Omega\|$。以下结论成立：

(a) 设 w 是Ω的一个顶点，J 是 $\{1, \dots, n\}$的一个子集，并假设对于某个 $t \in J$，$|w_t| = M$成立（因此特别有 $\|w\| = M$）。设 $\widetilde{w} \in \mathbb{Z}^n$ 满足(i) 对于所有 $j \notin J$，$\widetilde{w}_j = w_j$；(ii) 对于所有 $j \in J$，$|\widetilde{w}_j| < M$。若 $w' \in \mathbb{Z}^n$ 由 $\widetilde{w}$ 经过坐标的带符号置换得到，则 $w' < w$。(b) 设 $\varphi : \Omega \to \Omega'$ 是一个图映射，并假设 φ 的每个新顶点 w' 都是由某个旧顶点 w 按照 *(a)* 中的方式得到的（对某个 $\widetilde{w}$的选择）。那么 φ 是一个约化。

证明。 (a) 条件 (i) 和 (ii) 表明，要么是 $\|w'\| < \|w\|$，要么是 $\|w'\| = \|w\|$，但 w' 的极大坐标少于 w，因此无论哪种情况，$w' < w$。

(b) 由 (a) 和约化的定义（定义 2.12）直接得出). □

请注意，我们关于 2R 型的论证完全基于引理 3.8。引理 3.8 也适用于其余类型中的大多数情形（在这些情况下，我们只需检查某些坐标是否为非极大坐标，其余细节则略去，因为它们都显而易见）。

类型*3* R: $l(\partial\mathcal{F}) = ([R_{21}, R_{32}] = R_{31})$，$I = \{1, 2, 3\}$。我们将使用图 8 中的映射 φ。$\mathcal{F}$ 的所有顶点具有相同的第一坐标 a，因此根据我们的假设，$a = M$。由于 $a+b$、$a+b+c$、b 和 $b+c$ 都是 $\mathcal{F}$ 的坐标，我们必须有 $-M \le b$，$b+c \le 0$。由于 d 是良好的且为正的，因此可得 $|a - d|$，$|b + d|$，$|b + c + d| < M$，所以根据引理 3.8，φ 是一次约化。

*4R*型: $l(\partial\mathcal{F}) = [R_{21}, R_{31}]$, $I = \{1, 2, 3\}$。我们将使用图9中的映射。其论证与类型3完全类似。

类型 4，GA： $l(\partial\mathcal{F}) = [R_{21}, R_{31}]$

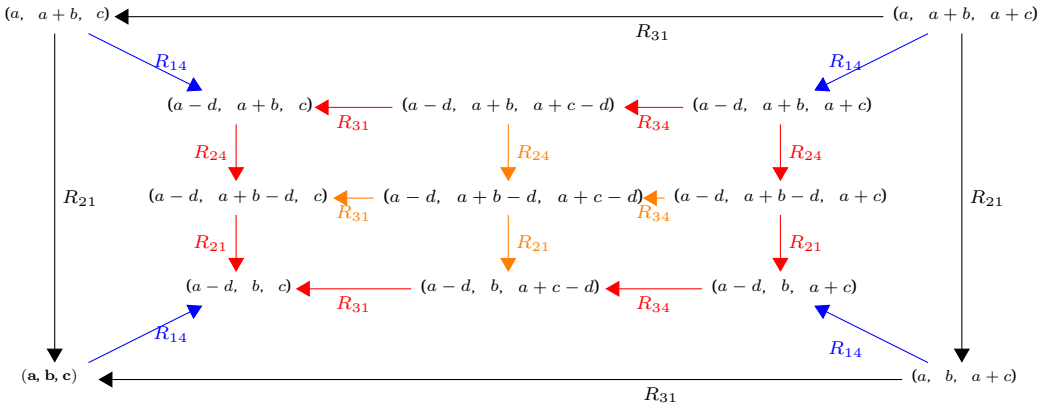


FIGURE 9. 坐标1、2和3已列出。

类型5，GA： $l(\partial\mathcal{F}) = [R_{12}, L_{13}]$

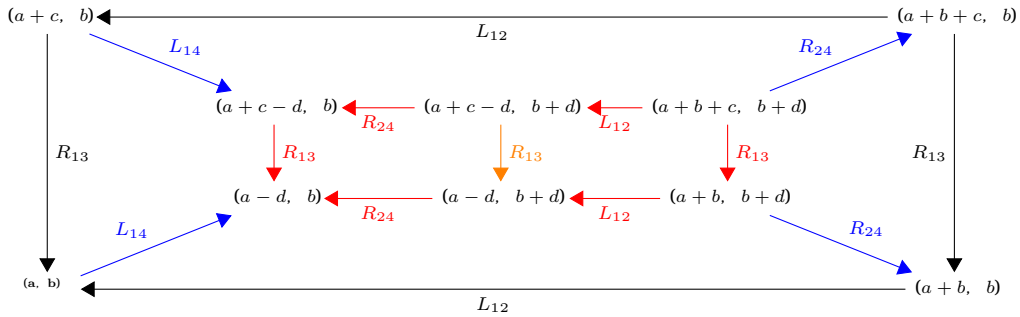


FIGURE 10. 仅列出前两个坐标

类型*5*： $l(\partial\mathcal{F}) = [L_{12}, R_{13}]$, $I = \{1, 2\}$。写作 $v = (a, b, c, d, *)$。如有需要，通过带符号置换 $x_2 \mapsto x_2^{-1}$和/或 $x_3 \mapsto x_3^{-1}$作用，我们可以假设v 处的两条边都是入射的，因此 $l(\partial\mathcal{F})$ 恰如图10所示。图10所示的映射是一种约化——证明同样与类型3类似。

类型*6*： $l(\partial\mathcal{F}) = [R_{12}, R_{35}]$, $I = \{1, 3\}$。 $\partial\mathcal{F}$中的所有边标签都与 L_{14}可交换。按照与1型相同的论证，交换映射 $C_{\mathcal{F}}(L_{14})$是一个约化。

类型*7*： $l(\partial\mathcal{F}) = [R_{21}, R_{35}]$, $I = \{1, 2, 3\}$。这种情况与类型 4 类似（而且更简单）。

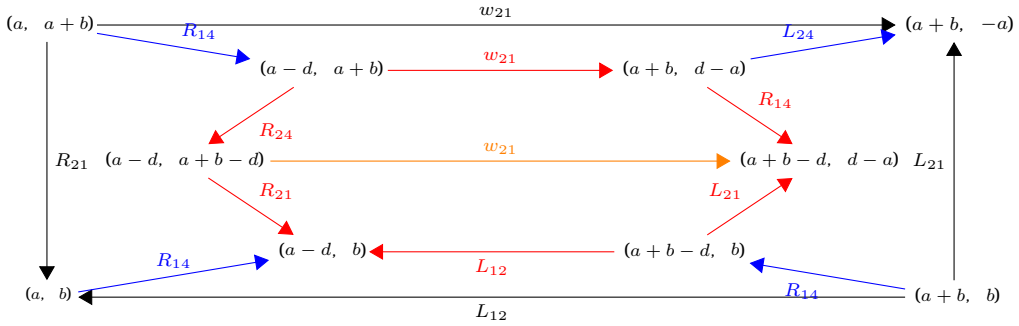
类型 *9*： $l(\partial\mathcal{F}) = (L_{21}L_{12}^{-1}R_{21} = w_{21})$, $I = \{1, 2\}$。 $\mathcal{F}_I$的顶点为（a, b）、（a, $a+b$）、（$a+b$, $-a$）和（$a+b$, b），因此 $a = M$或 $a + b = M$。我们将使用图 11 中的两个映射之一——若 $a = M$则使用第一个映射，若 $a + b = M$但 $a \neq M$则使用第二个映射。

由于 $a = M$或 $a + b = M$且 a, b, $a + b$全都是 $\mathcal{F}$-坐标，因此可得 $0 \leq a$, $a + b \leq M$，从而 $|a + b - d|$, $|a - d| < M$。

情形 *1*： $a = M$。在这种情况下，图 11 中的第一个映射根据引理 3.8 是一个约化。

类型 9，GA： $l(\partial\mathcal{F}) = (L_{21}L_{12}^{-1}R_{21} = w_{21})$

情形 1： a 是极大



情形 2： $a+b$ 为极大， a 不为极大

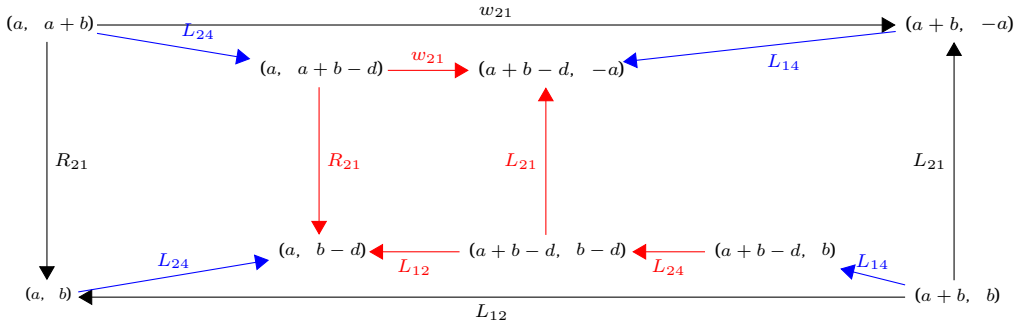


FIGURE 11. 前两个坐标已列出

情形 *2*： $a+b=M$， $0 \le a < M$。由于 $a+b=M$，我们必须有 $b \ge 0$，因此 $|b-d| < M$。由于我们还假设 $|a| < M$，图 11 中的第二个映射根据引理 3.8 是一个约化。

类型 *8*： $l(\partial\mathcal{F}) = (L_{12}L_{21}^{-1}R_{12} = w_{12})$，$I = \{1,2\}$。$\mathcal{F}_I$的顶点为 (a,b) 、 $(a,a+b)$ 、 $(-b,a+b)$ 和 $(a+b,b)$ ，因此 M等于 $a, a+b$ 或 $-b$。

情形 *1*： $a+b=M$。与类型 9 中一样，我们有 $a, a+b \ge 0$ 和 $|a+b-d|$, $|a-d| < M$。因此，图 12 中的映射根据引理 3.8 是一次约化。

情形 *2*： $a=M$。在这种情况下，我们对图 12 中的映射稍作修改，将从顶点 $(a, a+b)$ 出发的子路径 $L_{14}L_{24}$ 替换为 $L_{24}L_{14}$。这使得与 $(a,a+b)$ 相邻的新顶点从 $(a, a+b-d)$ 变为 $(a-d, a+b)$ 。其余论证与情形 1 类似。

情形 *3*： $-b=M$。在此情形下，$(-b,\ a+b)$ 是 $\mathcal{F}_I$ 的极大顶点。但此时，$(a+b,\ b)$ 也是一个具有极大第二坐标的极大顶点。因此，我们可以交换第一和第二坐标的角色；这样一来，问题就归约为上文讨论的 9 型。

类型 *10*： $l(\partial\mathcal{F}) = (w_{12}^{-1}L_{21}w_{12} = R_{12}^{-1})$， $I = \{1,2\}$。此情形下的映射如图 13 所示。

$\mathcal{F}_I$的顶点为 $(a,\ b)$ 、 $(a+b,\ b)$ 、 $(b,\ -a)$ 和 $(b,\ -a-b)$ 。若 $v = (b,\ *)$ ，也就是说 $b=M$，我们使用图 13 中的第一个映射。由于 $b=M$且 $a+b$是一个 $\mathcal{F}$-坐标， $a \le 0$，因此 $|b-d|$, $|a+d| < M$，由引理 3.8，我们便如类型 8 的情形一样得证。

类型 8，GA： $l(\partial\mathcal{F}) = (L_{12}L_{21}^{-1}R_{12} = w_{12})$，　$a+b$ 是极大的

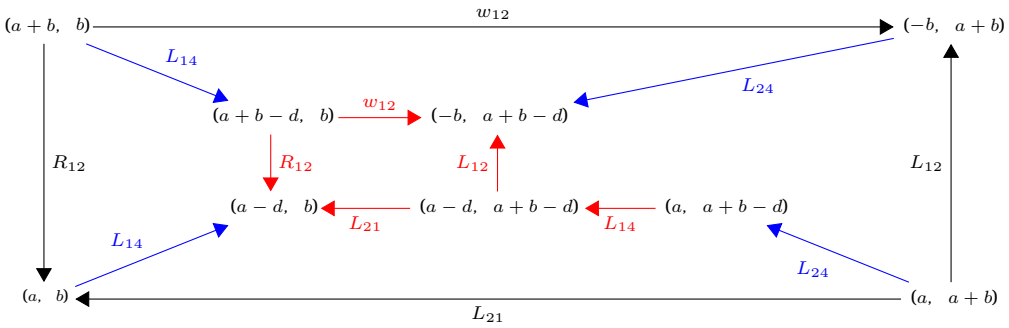
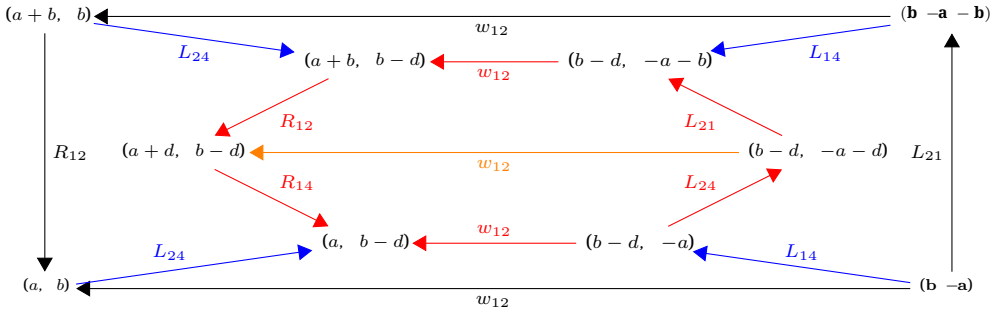


FIGURE 12. 前两个坐标已列出

类型 10，GA： $l(\partial\mathcal{F}) = (w_{12}^{-1}L_{21}w_{12} = R_{12}^{-1})$，$v_I = (b,\ -a)$ 或 $(b,\ -a-b)$



类型 10，GA： $l(\partial\mathcal{F}) = (w_{12}^{-1}L_{21}w_{12} = R_{12}^{-1})$，$v_I = (a,b)$ or $(a+b,b)$

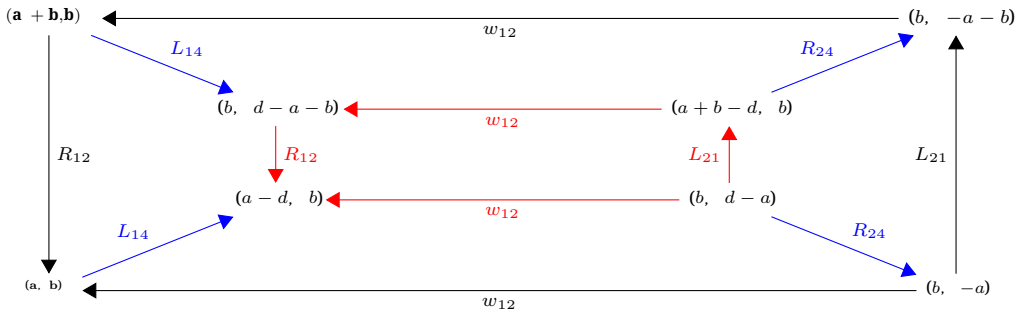


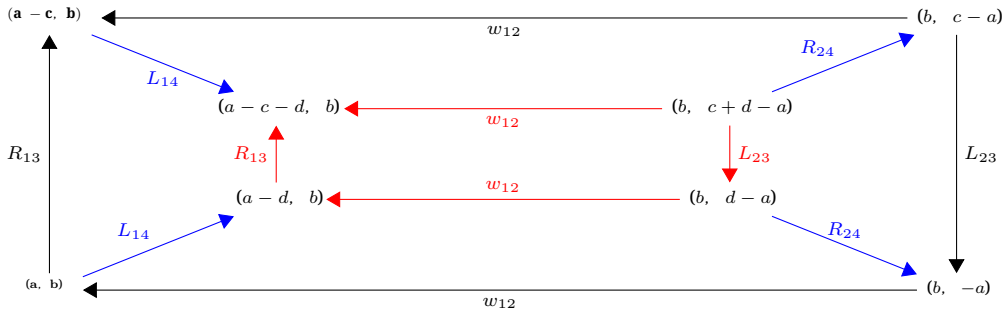
FIGURE 13. 前两个坐标已列出

若 $v = (*,\ b)$，我们使用图 13 中的第二个映射。在这种情况下 a，$a+b \geq 0$，因此 $|a-d|$，$|a-b-d| < M$，同样可如第一种情形一样得证。

*11R*型：　$l(\partial\mathcal{F}) = (w_{12}L_{23}w_{12}^{-1} = R_{13}^{-1})$ 或 $l(\partial\mathcal{F}) = (w_{12}R_{13}w_{12}^{-1} = R_{23})$，$I = \{1,2\}$。注意，此处我们没有预先指定边界关系子，而是会根据包含 v的边的标签，从这两个关系子中选择一个（它们都属于 $\Sigma(1)^+$下的同一轨道）。

起初，我们只假设 $\mathcal{F}$ 具有 11R型。 v 处的一个边标签是形如 w_{1i} 的 Weyl生成元，另一个是 Nielsen 生成元。在施以一个适当的

11R.1 型，GA： $l(\partial\mathcal{F}) = (w_{12}L_{23}w_{12}^{-1} = R_{13}^{-1}),\ v = (*, b)$



11R.2 型，GA： $l(\partial\mathcal{F}) = (w_{12}R_{13}w_{12}^{-1} = R_{23}),\quad v = (a, *)$

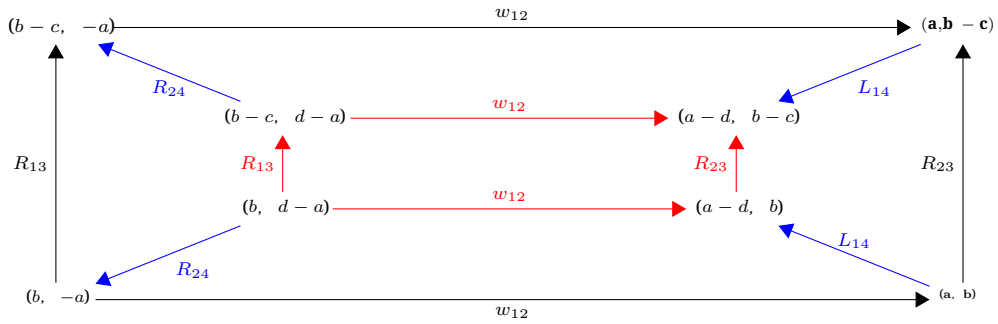


FIGURE 14. 在这两个图中，前两个坐标列为

$\Sigma(1)^+$ 的元素后，我们可以假设 $i = 2$, $supp(\mathcal{F}) = \{1, 2, 3\}$，并且 v 处标记为 w_{12} 的边是入射的。若 e 是 v 处的另一条边，则 $supp(e) = \{1, 3\}$ 或 $\{2, 3\}$，我们将分别考虑这两种情况：

- 子类型11.R.1： $supp(e) = \{1, 3\}$。在这种情况下，我们可以假设 $l(\partial\mathcal{F}) = (w_{12}L_{23}w_{12}^{-1} = R_{13}^{-1})$。
- 子类型11.R.2： $supp(e) = \{2, 3\}$。在这种情况下，我们可以假设 $l(\partial\mathcal{F}) = (w_{12}R_{13}w_{12}^{-1} = R_{23})$。

两种子类型的约化映射如图14所示。注意，在子类型11.R.1 $v_I = (a,\ b)$ 或 $(a - c,\ b)$，而在子类型11.R.2 $v_I = (a,\ b)$ 或 $(a,\ b - c)$。论证与前面的情形类似。

注意，我们不得不为子类型11.R.1和11.R.2使用不同的边界关系子代表元，因为我们要求由 w_{12} 标记的边在 v 处入射。我们希望使用具有后一性质的代表元，是因为这将简化双胞腔约化的描述；本节稍后构造类型 11 时将需要这些约化。

类型 *12*： $l(\partial\mathcal{F}) = (w_{12}^{-1}R_{31}w_{12} = R_{32}^{-1}),\ I = \{1, 2, 3\}$。$\mathcal{F}_I$的顶点为 $(a,\ b,\ c)$、$(b,\ -a,\ c)$、$(b,\ -a,\ a + c)$ 和 $(a,\ b,\ a + c)$。约化映射见图 15。其论证与类型 10 非常相似。

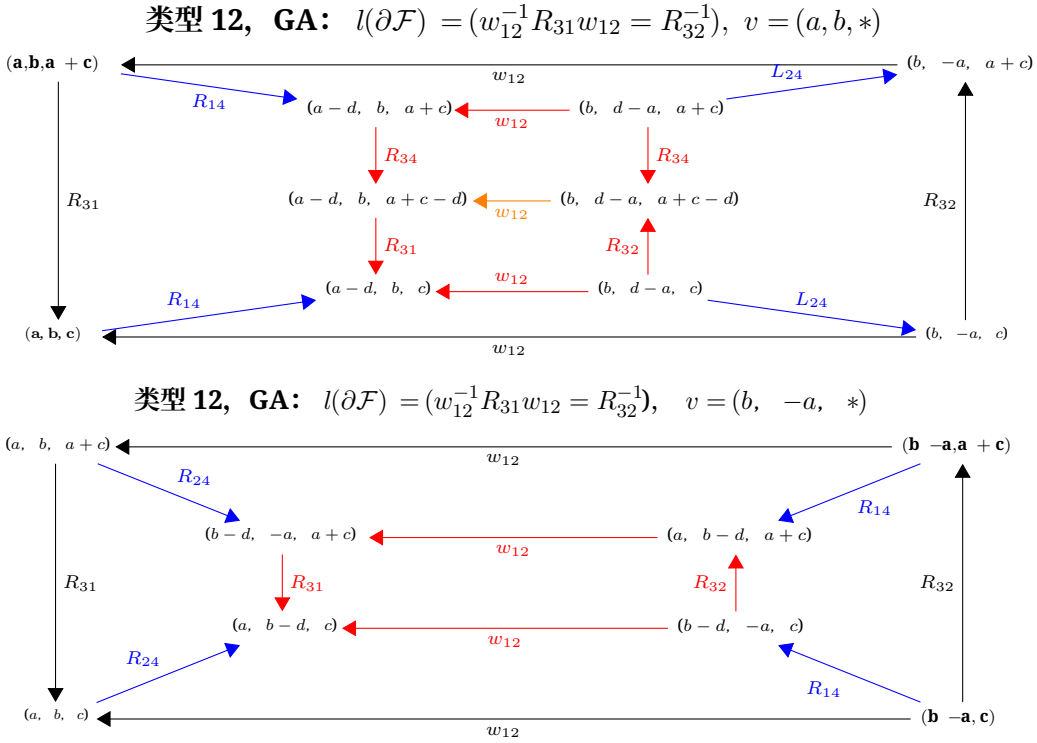


FIGURE 15. 前三个坐标列出如下

3.3. 零坐标情形下 IAR$_{n,\ 1}$ 的单胞约化。 我们先介绍一个简单的观察，它适用于许多胞腔类型。它在零坐标情形中的作用，与引理 3.8 在良好坐标情形中的作用相似。

引理 3.9。 设 $\varphi : \Omega \to \Omega'$ 是一个图映射，且 v 是Ω的一个极大顶点。以下结论成立：

(a) 设 w 是Ω的一个顶点，并假设 $w' \in \mathbb{Z}^n$ 是由 w 将一个或多个Ω-坏坐标替换为Ω-良好坐标得到的。那么 $w' < w$。因此，如果 φ的每个新顶点 w' 都是以这种方式从某个旧顶点 w 得到的，那么 φ是一个约化。(b) 设 u 是 φ 的一个旧顶点，除某个 j对应的 j^{th} 坐标外，它与 v 一致，并假设 v 的 j^{th} 坐标是良好的（因此，由于 v 是极大的，该坐标也是Ω-良好的）。那么 u 的 j^{th} 坐标是Ω-良好的。

证明。(a) 设 $M = \|\Omega\|$。根据假设 $\|w\| \le M$，并且对于任意满足 $w'_i \neq w_i$ 的 i，我们有 $|w'_i| < M$，因此要么 $\|w'\| < M = \|v\|$（这自动意味着$w' < v$），要么 $\|w'\| = \|w\| = M$。但在后一种情况下，对于每个满足 $w'_i \neq w_i$ 的 i，w 的 i^{th}坐标是坏的，而 w' 的 i^{th} 坐标是良好的，因此根据定义，$w' < w$。

(b) 如果 u 的 j^{th} 坐标是 Ω-不良的，我们可以对 $w = u$ 和 $w' = v$ 应用 (a)，从而得出 $v < u$，这就产生了矛盾。□

在本小节余下部分，我们固定 Ω、$\mathcal{F}$ 和 v，如命题 3.1 中所述，并假设处于零坐标情形。根据观察 3.5，我们可以（也将会）假设

类型1R，整数集 ZA: $l(\partial\mathcal{F}) = ([R_{23}, R_{12}] = R_{13})$.

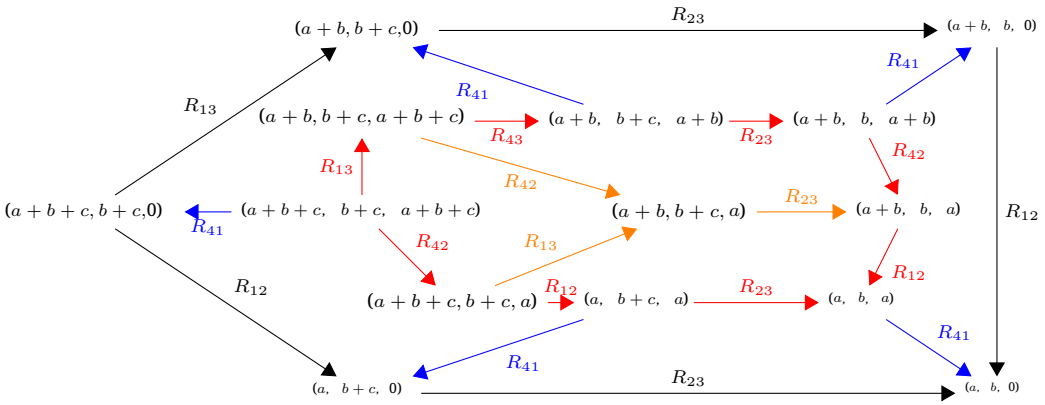


FIGURE 16. 坐标 1、2 和 4 已列出。

v_1 （v 的第一坐标）是良好且为正的，并且 v 的第四坐标为 0。因此，$v = (v_1, v_2, v_3, 0, *)$，其中 $0 < v_1 < M = \|v\|$。

类型*1R*：$l(\partial\mathcal{F}) = ([R_{23}, R_{12}] = R_{13})$，$I = \{1, 2, 4\}$。我们考虑两种情况。如果第三个坐标 c （对于 $\mathcal{F}$ 的所有顶点都相同）是良好的，我们可以直接使用交换约化 $C_{\mathcal{F}}(R_{43})$。因此，假设 c 是坏的，并使用图 16 所示的映射。

每个新的顶点除第四个坐标外，在其他所有坐标上都与 $\mathcal{F}$ 的某个顶点重合；第四个坐标则从 0 变为 a、$a + b$ 或 $a + b + c$，因此根据引理3.9(a)，只需证明 a，$a + b$ 和 $a + b + c$ 都是良好的。由于 c 是坏的，根据观察2.34，$a + b$ 和 $a + b + c$ 要么都是良好的，要么都是坏的。此外，由于 v 的第一坐标是良好的，整数 a，$a + b$ 和 $a + b + c$ 中至少有一个必定是良好的。因此，我们只需排除以下两种可能：

(i) a 是良好的，而 $a + b$，$a + b + c$ 是坏的；

(ii) a 是坏的，而 $a + b$，$a + b + c$ 是良好的。

若 (i) 成立，则 $v_I = (a, b, 0)$ 或 $(a, b + c, 0)$。但这是不可能的，因为 $(a + b, b, 0)$ 和 $(a + b, b + c, 0)$ 也是 $\mathcal{F}_I$ 的顶点，而且，由于 a 是良好的、$a + b$ 是坏的，我们有 $(a, b, 0) < (a + b, b, 0)$，以及 $(a, b + c, 0) < (a + b, b + c, 0)$。

现在假设情形 (ii) 发生。如果 $v_I = (a + b, b, 0)$ 或 $(a + b, b + c, 0)$，则与情形 (i) 一样会得到矛盾。唯一剩下的可能性是 $v_I = (a + b + c, b + c, 0)$。由于 $a + b + c$是良好的，而 a 是坏的，因此 $b + c$必定是良好的。但这样一来，$(a + b + c, b + c, 0) < (a, b, 0)$，这就产生了矛盾。

*2R*型：$l(\partial\mathcal{F}) = ([R_{13}, R_{21}] = R_{23})$，$I = \{1, 2, 4\}$。论证与 1 型类似，但更简单。如果 c 是良好的，那么交换映射 $C_{\mathcal{F}}(R_{43})$ 是一种约化，因此不妨假设 c 是坏的。在这种情况下，我们使用图17所示的映射。与 1 型一样，我们只需证明 a 和 $a + c$ （新顶点的第四坐标唯一可能的取值）是良好的。由于 c是坏的，它们要么都是良好的，要么都是坏的。而它们不可能都是坏的，因为那样 $\mathcal{F}$ 的所有顶点都没有良好的第一坐标。

*3R*型、*4R*型和*7R*型：$l(\partial\mathcal{F}) = ([R_{21}, R_{32}] = R_{31})$ $[R_{21}, R_{31}]$ 或 $[R_{21}, R_{35}]$, $I = \{2, 3, 4\}$。在这些情况下，$\mathcal{F}$ 的所有边标签都与 R_{41}可交换，并且 $\mathcal{F}$ 的所有顶点都具有

2R型，整数集 Z： $l(\partial\mathcal{F}) = ([R_{13}, R_{21}] = R_{23})$。

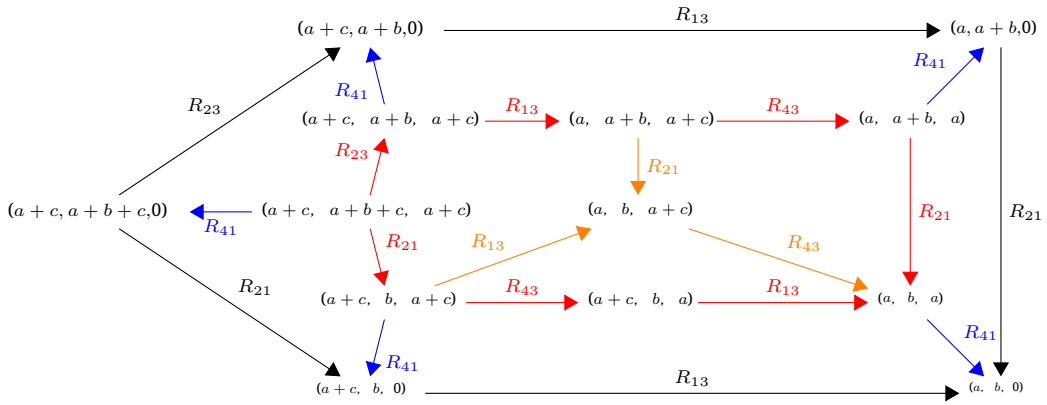


FIGURE 17. 仅列出了坐标 1、2 和 4。

类型5，整数集 ZA： $l(\partial\mathcal{F}) = [R_{12}, L_{13}]$

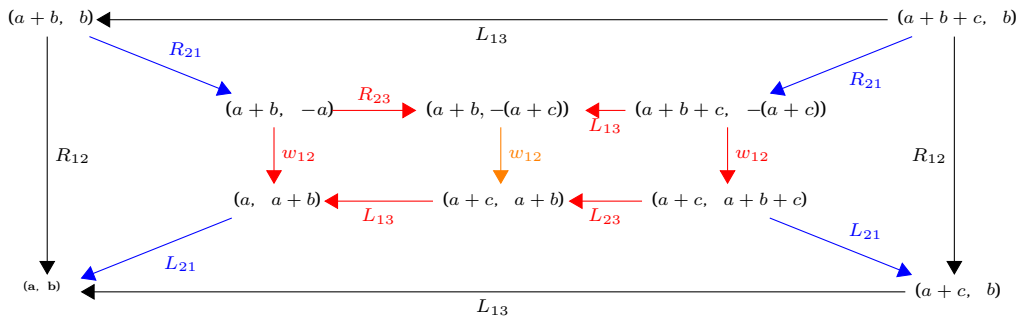


FIGURE 18. 列出了前两个坐标

a 作为第一坐标（按假设这是良好的），因此交换映射 $C_{\mathcal{F}}(R_{41})$是一次约化。

类型5： $l(\partial\mathcal{F}) = [L_{12}, R_{13}]$, $I = \{1, 2\}$。此类型使用的映射 φ 与目前所见的映射截然不同，因为指标4不仅不在φ的支撑集中，甚至也不在其替换图的支撑集中。记 $v = (a, b, c, 0, *)$。与类型5.GA中一样，我们可以假设 v 处的两条边都是入射边，此时 $\mathcal{F}$的另外三个顶点为$(a + b, b, c, 0, *)$、$(a + b + c, b, c, 0, *)$和$(a + c, b, c, 0, *)$。

如果 b（分别地， c）是良好的，那么交换映射 $C_{\mathcal{F}}(R_{42})$（分别地， $C_{\mathcal{F}}(R_{43})$）就是一个约化，因此不妨假设 b 和 c都是坏的。由于 a 是良好的（它是 v的第一坐标），根据观察2.34，数 $a + b$、 $a + c$和 $a + b + c$也都是良好的。我们将使用图18中的映射。每个新顶点都是由 $\mathcal{F}$的一个顶点将坏的第二坐标 b替换为一个良好值（$-a$、 $a+b$、 $-(a+c)$或 $a+b+c$）而得到的，因此根据引理3.9(a)，这个映射是一个约化。

类型6： $l(\partial\mathcal{F}) = [R_{12}, R_{35}]$, $I = \{1, 3, 4\}$。我们将使用图 19 所示的映射。 $\mathcal{F}$ 各顶点的第一坐标分别等于 a 和 $a + b$，根据

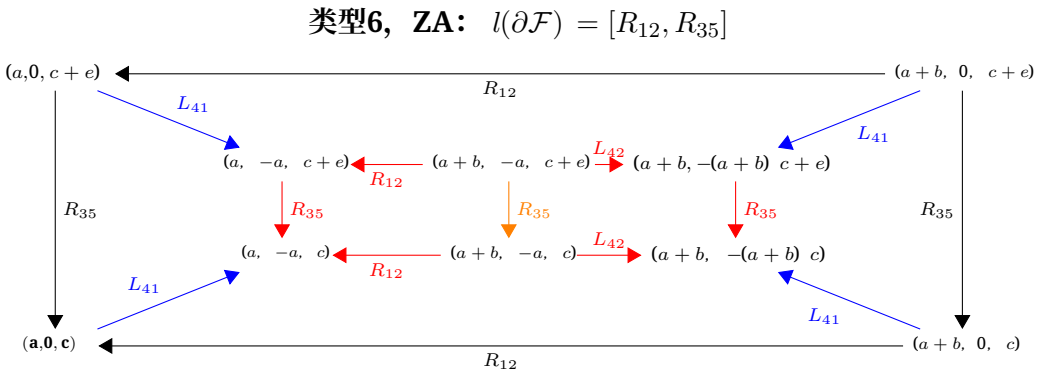


FIGURE 19. 列出了坐标 1、3 和 4

引理3.9(b)。每个新顶点都是将 $\mathcal{F}$ 的某个顶点的第四坐标中的 0 替换为 $-a$ 或 $-(a+b)$ 得到的，因此根据引理3.9(a)，该映射是一个约化。

类型 8： $l(\partial\mathcal{F}) = (L_{12}L_{21}^{-1}R_{12} = w_{12})$，$I = \{1,2,4\}$。$\mathcal{F}_I$的顶点为 $(a,b,0)$、$(a, a+b, 0)$、$(-b, a+b, 0)$ 和 $(a+b, b, 0)$。我们将使用图 20 中的两个映射之一。根据引理 3.9(a)，当且仅当 a 和 $a+b$ 都良好时，第一个映射是约化；当且仅当 a 和 b 都良好时，第二个映射是约化。下面证明这两种情况必有一种成立。事实上，与之前一样，a、b、$a+b$中至少有两个是良好的，因此我们只需排除 b 和 $a+b$ 良好而 a 为坏的可能性。若后一种情况发生，则 $v_I = (-b, a+b, 0)$或$(a+b, b, 0)$（因为 v的第一坐标必定良好）；另一方面，由于 a为坏，这两个顶点都是 $<(a,b,0)$，矛盾。

类型 *9*： $l(\partial\mathcal{F}) = (L_{21}L_{12}^{-1}R_{21} = w_{21})$，$I = \{1,2,4\}$。$\mathcal{F}_I$的顶点为（$a$，$b$，0）、（$a+b$，$b$，0）、（$a+b$，$-a$，0）和（$a$，$a+b$，0）。如果 a和 $a+b$都良好，则图 21 中的映射是一个约化。现在假设 a 或 $a+b$ 是坏的。根据我们的假设，$\mathcal{F}_I$必定有一个极大顶点，其第一坐标良好而第二坐标为坏。因此，（$a+b$，$-a$，0）或（a，$a+b$，0）是极大的；由于这两个顶点相差一个坐标的带符号置换，它们都是极大的。因此，$\mathcal{F}_I$（从而 $\mathcal{F}$）有一个第二坐标良好的极大顶点，所以我们可以交换第一和第二坐标的角色，从而约化为类型 8。

类型 *10–12*：这些类型的约化映射与我们在良好坐标情形中使用的映射类似。类型 12 的映射见图 22——我们特别强调这一类型的映射，因为它将用于构造双胞腔约化。

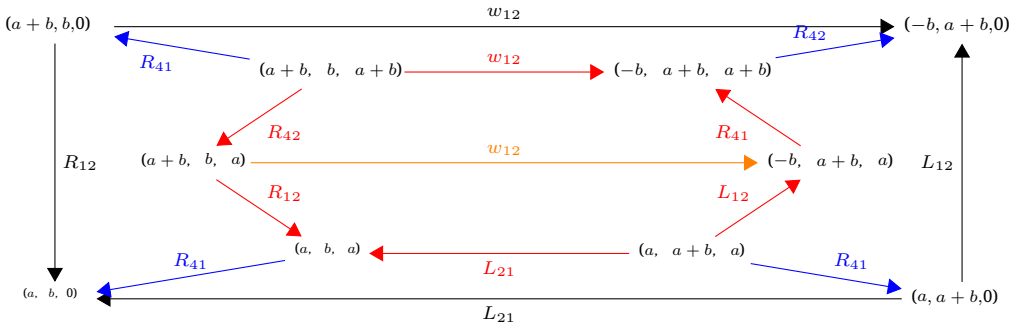
3.4. 证明的结束。 我们首先为某些长度为 2 的廊道类型构造双胞腔约化。与本节前文一样，我们假设 v 是某个图 Ω 的内部极大顶点，且 v 的第一坐标为正（这样我们就能像之前那样指称胞腔类型）。

回顾一下，$m(v)$ $g(v)$ 和 $z(v)$ 分别表示 v 的极大、良好和零坐标的数量。

引理 3.10. 设 Δ 是一条长度为 2、位于 v 处且由胞腔 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 构成的廊道，并设 $e \in E(\mathcal{F}_1) \cap E(\mathcal{F}_2)$ 是一条包含 v 的边。在以下每种情况下，Ω 都允许进行一次 Δ 约化，以消去 e：

类型 8，整数集 Z A： $l(\partial\mathcal{F}) = (L_{12}L_{21}^{-1}R_{12} = w_{12})$

情形 1： a 和 $a+b$ 是良好的



情形 2： a 和 b 是良好的

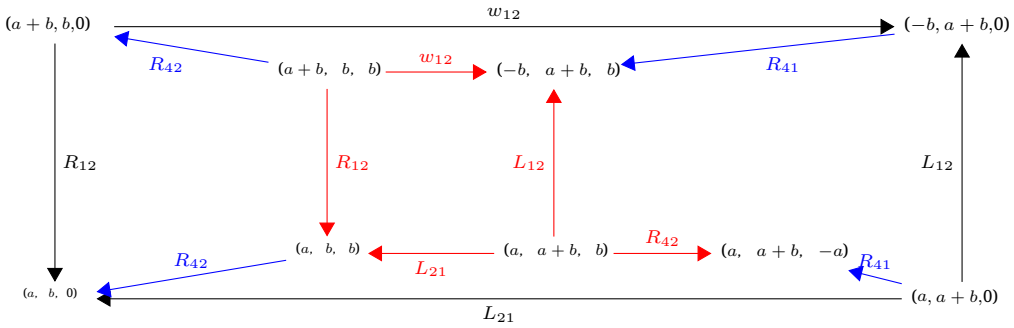


FIGURE 20. 坐标 1、2 和 4 已列出

类型 9，整数集 Z A： $l(\partial\mathcal{F}) = (L_{21}L_{12}^{-1}R_{21} = w_{21})$

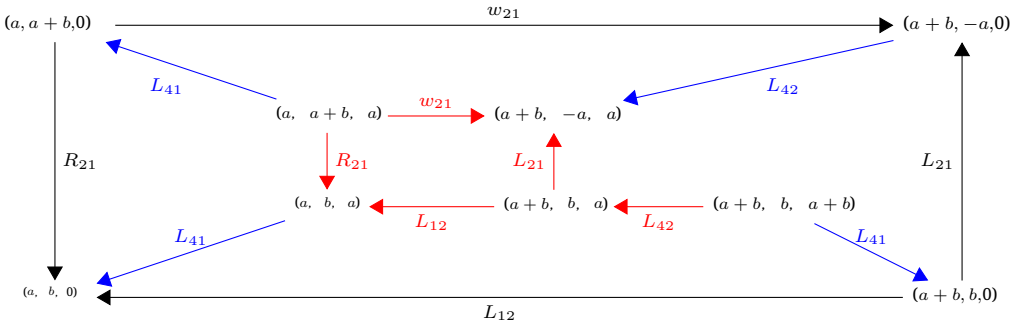


FIGURE 21. 坐标 1、2 和 4 已列出

(1) $g(v) \geq 7$、$\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 的类型均为 *2R* 型或均为 *2L* 型，且 e 的标记为 R_{j1} 或 L_{j1}，其中 j；*(2)* $g(v) \geq 7$、$\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 的类型均为类型*5*，且 e 的标记为 R_{1j}，其中 j；*(3)* $g(v) \geq 7$、$\mathcal{F}_1$ 的类型为类型*5*，$\mathcal{F}_2$ 的类型为 *6R* 型，且 e 的标记为 R_{1j}，其中 j；*(4)* $g(v) \geq 7$、$\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 的类型均为类型 *11L*，且 e 的标记为 w_{1j}，其中 j；*(5)* $z(v) \geq 7$、$\|v\|_\infty > 1$、$\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 的类型均为 *2*型，且 e 的标记为 R_{1j}，其中 j；

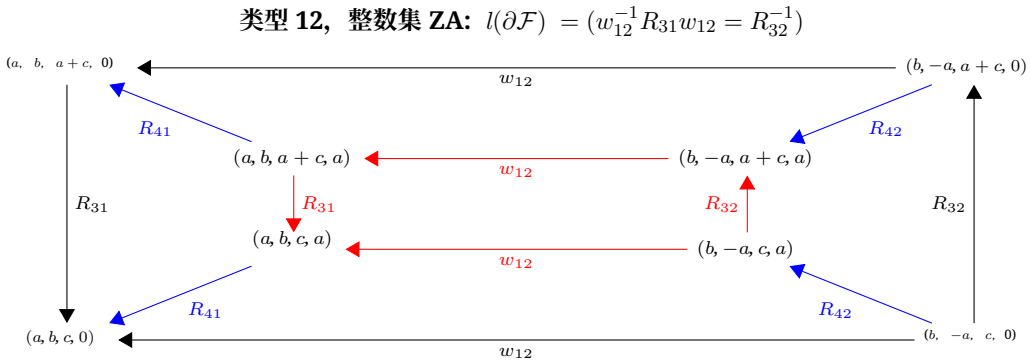


FIGURE 22. 前三个坐标已列出

(6) $z(v) \geq 7$, $\|v\|_\infty > 1$, $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 都属于类型 *12*，而 e 对某个 j有标记w_{1j}。

证明。根据命题 3.1，在每种情况下，都存在一个 $\mathcal{F}_i$-约化 φ_i，用于 $i = 1,\ 2$；我们只需检验 φ_1 和 φ_2 能否在 e 处做到相容。下面我们将对情形 (1) 给出详细论证；其余 5 种情形可类似处理。

首先，不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 都是 2R型。由于 $g(v) \geq 7$，因此有 $|supp(\Delta)| \leq 6 < g(v)$。仿照引理 3.4 的证明，在施以一个适当的 $\Sigma_n^+(1)$ 元素后（这不会改变胞腔类型），我们可以假设 v_4 是良好且为正的，$4 \notin supp(\Delta)$（因此特别有 $j \neq 4$），并且 e 的标记是 R_{21}。

现在，我们可以按照 § 3.1，在 $\mathcal{F}_i$ 处为 $i = 1,\ 2$ 构造单胞约化 φ_i，使得在两种情况下，e 处的两条侧边都标记为 L_{14}，且都背离 e。注意，φ_1 和 φ_2 的替换图可能与图 7 中的不完全相同——例如，我们只知道对于某个 $k_i \notin \{1, 2, 4\}$，$supp\,(\mathcal{F}_i) = \{1, 2, k_i\}$，而且 $k_1 \neq k_2$ 也有可能成立。不过，简单验证可知，如果 $\mathcal{G}_i$ 是 φ_i 在 e 处的侧胞，那么 $supp\,(\mathcal{G}_i) = \{1, 2, 4\}$，且 $\mathcal{G}_i$ 的边界标记恰如图 7 所示。因此，$\mathcal{G}_1$ 和 $\mathcal{G}_2$ 的边界标记互为镜像，于是单胞约化 φ_1 和 φ_2 在 e 处相容，正如所需。□

现在我们可以证明行稳定子群 $\mathrm{IAR}_{n,\ 1}$ 是有限呈示的$n \geq 26$。首先我们断言，只需证明以下命题。

命题 3.11。设 $n \geq 26$，设 v 是某个图 Ω 的内部极大顶点，并假设 $\|v\|_\infty > 1$ 或 $\|v\|_1 > 9$。那么 v 可消去，也就是说，Ω 存在一种完全约化，可以消去 v。

事实上，$\mathbb{Z}^n$ 中 ℓ^∞-范数为 1 的元素只有有限多个。因此，结合命题 3.11 和应用于 $B = \{w \in \mathbb{Z}^n : \|w\| = 1\}$ 的引理 2.15，我们可推出 $\mathrm{IAR}_{n,\ 1}$ 是有限呈示的。

我们在命题 3.11 中不将范围限于满足 $\|v\|_\infty > 1$ 的顶点 v，而是也允许一些 ℓ^∞-范数为 1 的顶点，原因在于：为了证明 $d > 1$时 $\mathrm{IAR}_{n,\ d}$ 的有限表示性，我们需要使用这一形式的命题 3.11。

命题 *3.11* 的证明。由于 $n > 25$，我们必有 $m(v) > 9$ 或 $g(v) > 8$ 或 $z(v) > 8$。据此，我们分别讨论这 3 种情形。

情形 *1*： $m(v) > 9$。令 Δ 为 v 处任意一条长度为 ≤ 3的廊道。由观察 3.3(ii)，我们有 $|supp(\Delta)| \leq 8$。由于 $m(v) > 9$，存在互不相同的 i，$j \notin supp(\Delta)$，使得 v_i和 v_j 均为极大。因此，由引理 2.31，带有 $x \in \{R_{ij}^{\pm 1}, R_{ji}^{\pm 1}\}$ 的交换映射 $C_\Delta(x)$之一是一个 Δ-约化。任何此类约化都会降低 v的度，因此经过有限步后，v 将被消去。

回想一下，根据我们的假设，要么 $\|v\|_\infty > 1$，要么 $\|v\|_1 > 9$。若 $\|v\|_\infty = 1$，则 v 的每个非零坐标都是极大的，并且 $m(v) = \|v\|_1 > 9$，因此情形 1 成立。从现在起，我们可以假设 $\|v\|_\infty > 1$。这一观察对于情形 2 并非本质，但将在情形 3 中用到。

情形 *2*： $g(v) > 8$。此情形下的证明复杂得多，将分为 3 个步骤。为简洁起见，若胞腔 $\mathcal{F}$ 包含 v，我们就称其为 本质的，条件是$1 \in supp(\mathcal{F})$。

步骤 *1*：首先，在每个包含 to v 的本质胞腔 $\mathcal{F}$ 处，于良好坐标情形下进行单胞约化（回想一下，这类约化已在 § 3.1 中描述）。从表 1（见 § 3.1）可以看出，某些关系类型永远不会作为侧胞出现；在新图中，所有包含 v的本质胞腔都将属于 1型，2型，5型，6 型或 11 型。此外，在类型为 $1R$、$2R$、$6R$ 和 $11R$ 的胞腔处再进行一轮单胞约化后，我们可以假设剩下的本质胞腔类型只有 $1L$、$2L$、5、$6L$ 和 $11L$。此外，容易验证，表中所述约化后出现的每个包含 v 的胞腔 $\mathcal{F}$ 都具有以下性质 (P)：

(P) 若 e 是 $\mathcal{F}$ 的任意一条边，且 $1 \in supp(e)$，那么 $\mathcal{F}$ 有一条边 e'（可能与 e相同），它包含 v，并且满足 $l(e') = l(e)$。

步骤 *2*：现在我们将说明如何消去其余包含 v的胞腔。下文中，胞腔一词始终指包含 v 的胞腔。后续步骤只涉及双胞腔约化和三胞约化，因此在约化过程的其余部分中，胞腔总数不会增加；此外，经过足够多次三胞约化后，该过程必定终止。

回想一下，步骤 1 之后，剩下的是类型为 $1L$、$2L$、5、$6L$ 和 $11L$ 的胞腔，以及非本质胞腔。首先注意到，w_{1i} 只作为类型 $11L$的胞腔的边标签出现；根据性质 (P)，任何类型为 $11L$ 的胞腔都必须有一条标记为 w_{1i} 且包含v的边。因此，若至少存在一个类型为 $11L$的胞腔，就必定有两个这样的胞腔 $\mathcal{F}_1$、$\mathcal{F}_2$，它们共用一条标记为 w_{1i} 且包含 v的边 e。根据引理 3.10(4)，存在一种双胞腔约化可以消去 e。在这次双胞腔约化过程中被消去的侧胞元类型为 $11L$，而未被消去的侧胞元类型为 5。因此，重复应用此操作几次，就能消去所有类型为 $11L$的胞腔。

接下来，我们使用类似的论证消除所有类型为 $2L$ 的胞腔，然后消除所有类型为 5 的胞腔。对于类型为 $2L$ 的情形，我们利用这样一个事实：这些是仅存的带有边标签 R_{i1} 或 L_{i1} 的胞腔，因此可以应用引理 3.10(1)。类型为 $2L$ 的胞腔消除后，类型为 5 的胞腔是仅存的带有标签 R_{1i} 的胞腔，因此可以应用引理 3.10(2)。

步骤 *3*：现在我们得到一个图，其中 v 处的所有本质胞腔都属于 $1L$ 或 $6L$ 类型。对于任意这样的胞腔 $\mathcal{F}$，$\mathcal{F}$ 的所有边标签都将与 R_{1i} 在 $i \notin supp$（$\mathcal{F}$）下可交换，因此，如同情形 1，我们可以对任意长度为 3 的廊道应用三胞约化（若 deg(v) $= 2$，则应用双胞腔约化）。

请注意，经过这次约化后，会出现两个类型为 5 和/或 $6R$ 且共享一条边 R_{1i} 的胞腔；不过这并不成问题。事实上，由引理 3.10(2)，我们可以使用双胞腔约化消去这两个胞腔（从而也消去上述边 R_{1i}），由此得到一个图，其中所有胞腔再次属于 $1L$ 或 $6L$ 类型，但胞腔总数比步骤 3 开始时少 1。因此，只要充分重复步骤 3，就能消去 v 处的所有胞腔（从而也消去 v 本身）。情形 2 的证明至此完成。

情形 *3*： $z(v) > 8$。回想一下，我们还假设 $\|v\|_\infty > 1$，因此可以应用引理 3.10(5)(6)。这种情形下的整体约化过程与情形 2 类似（但要容易得多）。

首先，经过两轮单胞约化后，剩下的将是 2型、类型 4、7、类型 12 的本质胞。剩下的胞腔中，只有类型 12 的胞腔含有标记为 w_{1i} 或 w_{i1} 的边；根据引理 3.10(5)，可以通过双胞腔约化将它们消去。同样，根据引理 3.10(6)，我们可以消去所有类型 2 的胞腔，因为它们是仅剩下含有标记为 R_{1i} 或 L_{1i}的边的胞腔。

此时只剩下类型 4 和 7 的胞腔以及非本质胞腔。注意，在零坐标情形下，对类型 4 和 7 的胞腔进行单胞约化，可能只会产生类型 4 和 7 的侧胞腔。此外，类型 4 或 7 的胞腔中的所有边，对于任意 i，都与R_{i1} 可交换。因此，利用形式为 $C(R_{i1})$（其中指标 i 取适当值）的交换三胞腔约化，我们可以消去 v处剩余的所有胞腔。□

4. The column-stabilizer subgroup for $d = 1$

本节将证明列稳定子群 $\mathrm{IAC}_{n,\,1}$ 对于$n \geq 26$具有有限表示性。证明与 $\mathrm{IAR}_{n,\,1}$的情形相当类似，因此我们将省略与 $\mathrm{IAR}_{n,\,1}$的情形相同或类似的论证部分。引理 3.8 和 3.9 对 $\mathrm{IAC}_{n,\,1}$ 仍然成立（证明过程不变）。

$\mathrm{IAC}_{n,\,1}$ 的单胞约化所用的边标记与 $\mathrm{IAR}_{n,\,1}$的几乎相同，不过良好坐标情形和零坐标情形的作用会互换。也就是说，$\mathrm{IAR}_{n,\,1}$ 在良好坐标情形中使用的边标记，通常可用于 $\mathrm{IAC}_{n,\,1}$ 的零坐标情形，反之亦然。

然而，$\mathrm{IAC}_{n,\,1}$ 情形下的顶点标签会大不相同（因为 $\mathrm{IAC}_{n,\,1}$ 和 $\mathrm{IAR}_{n,\,1}$ 对 $\mathbb{Z}^n$ 的作用不同），因此，我们通常需要新的论证来证明给定的单胞映射是约化。

单胞约化构造完成后，证明的其余部分（消去范数足够大的内部极大顶点）大体上与 $\mathrm{IAR}_{n,\,1}$ 情形相似，但在良好坐标情形下还需要大量额外工作。相关内容将在 § 4.3 中说明。

与 $\mathrm{IAR}_{n,\,1}$ 情形一样，我们先给出单胞约化的汇总表，随后逐一进行说明。

4.1. **良好坐标情形下**$\mathrm{IAC}_{n,\,1}$ **的单胞约化**。

我们将采用与 $\mathrm{IAR}_{n,1}$ 的良好坐标情形中相同的记号，并作出相同的基本假设。因此，$v \in V(\mathcal{F})$ 是选定的内部极大顶点，$M = \|\mathcal{F}\| = \|v\|$，并且我们假设 $v = (M, v_2, v_3, d, *)$，其中 $M > d > 0$，也就是说，d 是良好且为正的。

TABLE 2. IAC$_{n,\ 1}$ 群的单胞映射。

		良好坐标情形		零坐标情形	
type	关系	侧边	侧胞	侧边	侧胞
1R	$[R_{23}, R_{12}] = R_{13}$		$2, 7$	L_{14}	$5,\ 6L$
1L	$[L_{23}, L_{12}] = L_{13}$		$2, 7$	R_{14}	$5,\ 6R$
2R	$[R_{13}, R_{21}] = R_{23}$	R_{41} 或 L_{41}	$2,\ 4,\ 7$	L_{14}	$2L, 5, 6L$
2L	$[L_{13}, L_{21}] = L_{23}$	R_{41} 或 L_{41}	$2,\ 4,\ 7$	R_{14}	$2R, 5, 6R$
3	$[R_{21}, R_{32}] = R_{31}$		$4, 7$		$2,\ 6$
4	$[R_{21}, R_{31}] = 1$	L_{41}, L_{42}	$3, 4$		2
5	$[R_{12}, L_{13}] = 1$		$2, 9$	$L_{21},\ R_{21}$	$1L,\ 5,\ 6R$
6R	$[R_{12}, R_{35}] = 1$		$2, 7$	L_{14}	$5,\ 6L$
6L	$[L_{12}, R_{35}] = 1$		$2, 7$	R_{14}	$5,\ 6R$
6′R	$[R_{12}, R_{32}] = 1$		$2, 7$	L_{14}	$5,\ 6L$
6′L	$[L_{12}, R_{32}] = 1$		$2, 7$	R_{14}	$5,\ 6R$
7	$[R_{21}, R_{35}] = 1$	R_{41} 或 L_{41}	$4, 7$		$2, 6$
7′	$[R_{21}, L_{23}] = 1$	R_{41} 或 L_{41}	$4, 7$		$2, 6$
8	$L_{12}L_{21}^{-1}R_{12} = w_{12}$		$2,\ 4,\ 12$		$1,\ 2,\ 5,\ 6',\ 11$
9	$L_{21}L_{12}^{-1}R_{21} = w_{21}$		$2,\ 3,\ 4,\ 6',\ 12$		$1,\ 2,\ 5,\ 6',\ 11$
10	$w_{12}^{-1}R_{21}w_{12} = R_{12}^{-1}$		$2,\ 3,\ 12$		$1,\ 2,\ 11$
11L	$w_{12}^{-1}R_{13}w_{12} = L_{23}^{-1}$		$2,\ 6,\ 7,\ 12$	$L_{14},\ R_{24}^{-1}$	$5, 6, 11R$
11R	$w_{12}^{-1}L_{13}w_{12} = R_{23}^{-1}$		$2,\ 6,\ 7,\ 12$	R_{14}, L_{24}^{-1}	$5, 6, 11L$
12	$w_{12}^{-1}R_{31}w_{12} = R_{32}^{-1}$	R_{41}, R_{42}	$4,\ 7,$ 12		$1、2、5、6'、$ 11

类型1R，GB： $l(\partial\mathcal{F}) = ([R_{23}, R_{12}] = R_{13})$。

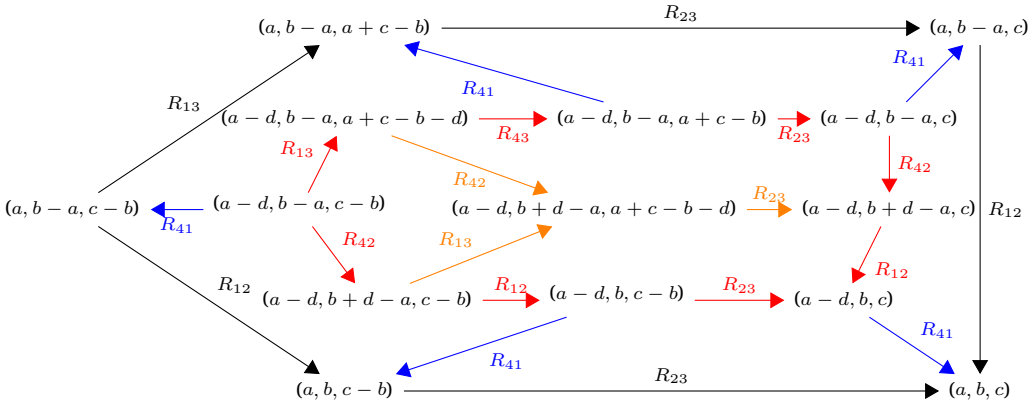


FIGURE 23. 列出了前三个坐标。

类型*1R*：$l(\partial\mathcal{F}) = ([R_{23}, R_{12}] = R_{13})$，$I = \{1, 2, 3\}$。我们将使用图23中所示的映射。

2R型，GB： $l(\partial\mathcal{F}) = ([R_{13}, R_{21}] = R_{23})$。

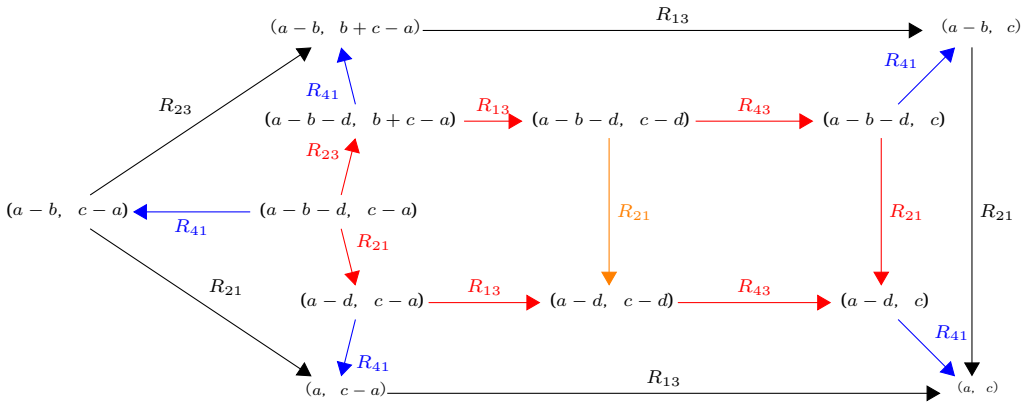


FIGURE 24. 坐标 1 和 3 已列出

$\mathcal{F}$ 每个顶点的第一坐标都是 a，因此必有 $a = M$。根据引理3.8(b)，要证明该映射是一个约化，只需证明 $|M-d| < M$, $|M-b-d| < M$和 $|M+c-b-d| < M$。后者可由以下事实推出： $M > d > 0$和 b， $b-M$， $c-b$和 $M + c - b$ 都是 $\mathcal{F}$-坐标，因此其绝对值不会超过 M。

2R型： $l(\partial\mathcal{F}) = ([R_{13}, R_{21}] = R_{23})$， $I = \{1, 3\}$。我们将在图24中使用映射 φ。因此， $M = a$或 $M = a - b$。在这两种情况下，我们都可以像 1 型那样推出 $|a - d|$， $|c - d|$， $|a - b - d| < M$。如果 $M = a - b$，这些不等式足以根据引理3.8(a)证明 φ 是一个约化。现在假设 $M = a$且 $a - b \neq M$（因此 $a - b$是非极大的）。引理3.8(a)仍适用于 φ的大多数新顶点，唯一可能的例外是顶点 w，其 $w_I = (a - b - c,\ b - d)$，且此时$a - b - c$ 是极大的。但只有在 $a = b = c = M$ 时才可能出现后一种情况；此时$w_I = (-M,\ b - d) < (a,\ c)$，因此 $w < v$，如所需。

类型*3R*、*6R*、*7*： $\mathcal{F}$ 的所有边标签都与 R_{41}可交换。此外， $\mathcal{F}$ 的所有顶点的第一坐标均非负（这可完全仿照类型1.GA的情形证明）。因此，交换映射 $C_{\mathcal{F}}(R_{41}^{-1})$ 是一种约化。

类型 *4*： $l(\partial\mathcal{F}) = [R_{21}, R_{31}]$， $I = \{1, 2\}$。与类型3R不同，我们不能使用 $C_{\mathcal{F}}(R_{41}^{-1})$，因为与 v 相对的 $\mathcal{F}$ 顶点的第一坐标可能为负。我们将改用图25中的映射 φ。

记作 $v = (a, b, c, d, *)$，因此 $a = M$。与类型5.GA和5.ZA的情形一样，我们可以假设 v处的两条边均为入射边，因此 $\mathcal{F}_I$的其他顶点如图25所示。由于 $a-b, a-c, b, c$都是 $\mathcal{F}$-坐标，因此有 $0 \leq a-b, a-c, b, c \leq M$，从而 $|a-d|, |b-d|, |a-c-d| < M$。引理3.8(a)适用于 φ 的大多数新顶点，但在 $a - b = M$的情形下，可能不适用于 $(a - b, b - d, *)$；在 $|a - b - c| = M$的情形下，可能不适用于 $(a - b - c, b - d, *)$。我们断言，这两种情形下这些顶点都是 $<$ $(a, b, *)$，由此即可完成证明。

回忆一下 $a = M$。因此，若 $a - b = M$，则有 $b = 0$，从而 $(a - b, b - d) = (M, -d) < (M, 0) = (a, b)$。又 $b, c \geq 0$，所以 $|a - b - c| = M$ 迫使 $b = c = 0$ 或 $b = c = M$ 成立。在前一种情况下，有 $(a - b - c, b - d) = (M, -d) < (M, 0) = (a, b)$；在后一种情况下， $(a - b - c, b - d) = (-M, M - d) < (M, M) = (a, b)$，如所需。

类型 4, GB: $l(\partial\mathcal{F}) = [R_{21}, R_{31}]$

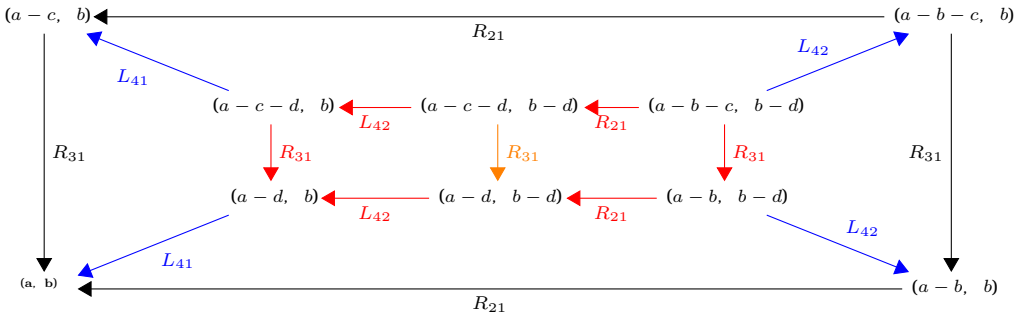


FIGURE 25. 前两个坐标列出为

类型5, GB: $l(\partial\mathcal{F}) = [R_{12}, L_{13}]$

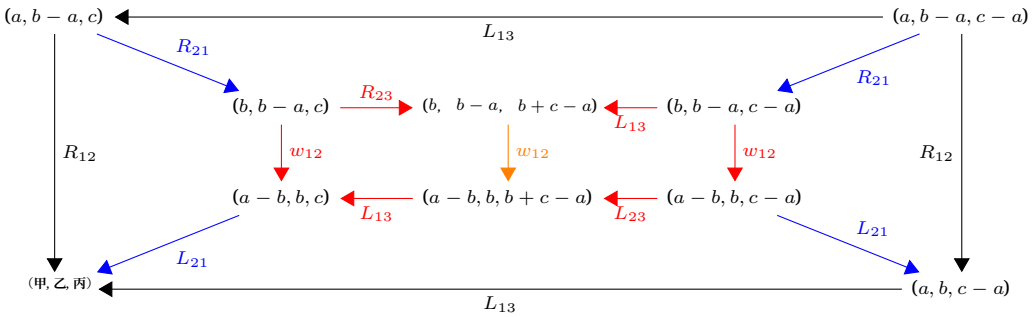


FIGURE 26. 列出了前三个坐标

类型*5*: $l(\partial\mathcal{F}) = [L_{12}, R_{13}]$, $I = \{1,2,3\}$。此处的映射 φ 如图26所示。注意，与类型5.ZA类似，指标4不属于 φ的替换图的支撑集。

与类型 4 一样，我们可以假设 $v = (a,b,c,*)$，且 v处的两条边都是入射边。由于 v 是极大的，且 $a = M > 0$，我们必须有 $b, c > 0$。这保证了 $|a-b| < M$以及 $|b+c-a| < M$或 $a = b = c = M$。若 $|b+c-a| < M$，根据引理 3.8，所有新顶点都小于 v。若 $a = b = c = M$，则 $v_I = (a,b,c)$ 有 3 个极大坐标，而对于任意新顶点 w，w_I 至多有 2 个极大坐标。在这两种情况下，φ 都是一种约化。

类型 *8*: $l(\partial\mathcal{F}) = (L_{12}L_{21}^{-1}R_{12} = w_{12})$, $I = \{1,2\}$。我们将使用图 27 所示的映射。$\mathcal{F}_I$的顶点为 $(a,b),(a-b,b),(a-b,a),(a,b-a)$。因此 $a = M$或$a-b = M$。可以像处理类型9GA那样证明，图 27 中的映射是一种约化。

类型 *9*: $l(\partial\mathcal{F}) = (L_{21}L_{12}^{-1}R_{21} = w_{21})$, $I = \{1,2\}$。$\mathcal{F}_I$的顶点为 (a,b)、$(a,b-a)$、$(b,b-a)$、$(a-b,b)$。因此，$a = M$、$b = M$或 $a-b = M$。若 $b = M$或 $a-b = M$，则 v 的第二坐标是极大的（无论这 4 个顶点中的哪一个等于v）。在这些情况下，通过交换第一和第二坐标的角色，我们可将问题约化为类型 8。

类型 8，GB： $l(\partial\mathcal{F}) = (L_{12}L_{21}^{-1}R_{12} = w_{12})$

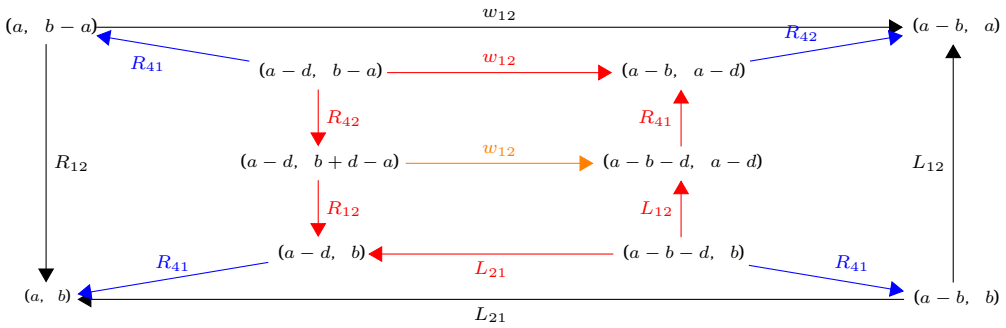


FIGURE 27. 仅列出坐标 1 和 2

类型 9，GB： $l(\partial\mathcal{F}) = (L_{21}L_{12}^{-1}R_{21} = w_{21})$

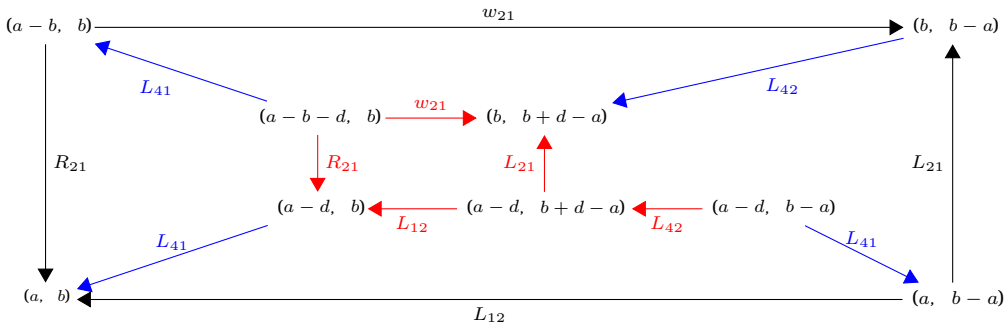


FIGURE 28. 坐标 1 和 2 已列出

因此，我们只需考虑 $a = M$的情形。在这种情形下，我们使用图 28 中的映射。可以像类型 8 那样证明，这个映射是一个约化。

类型 *10*： $l(\partial\mathcal{F}) = (w_{12}^{-1}R_{12}w_{12} = L_{21}^{-1})$, $I = \{1,2\}$。$\mathcal{F}_I$的顶点为 $(a,\ b)$，$(b,\ -a)$，$(b-a,\ -a)$ 和 $(a,\ b-a)$。若 $a = M$，约化映射如图 29 所示。在其余情形（$M = b$ 或 $b-a$）中，映射的构造类似，但会更简单，因为所有侧胞腔都是四边形。

类型 *11*： $l(\partial\mathcal{F}) = (w_{12}^{-1}R_{13}w_{12} = R_{23})$, $I = \{1,2,3\}$。$\mathcal{F}_I$的顶点为 $(a,\ b,\ c)$，$(-c,\ b,\ a)$，$(-c,\ b-a,\ a)$ 和 $(a,\ b-a,\ c)$。若 $a = M$，约化映射如图 30 所示。在剩余情形 $M = -b$ 中，图的构造类似，但会更简单，因为与类型 10 中一样。

类型 *12*： $l(\partial\mathcal{F}) = (w_{12}^{-1}R_{31}w_{12} = R_{32})$，$I = \{1,2\}$。此情形下的约化映射类似于（但比类型 10 和 11 的约化映射更简单），因为所有侧胞都是四边形。

4.2. $\mathrm{IAC}_{n,\ 1}$ 在零坐标情形下的单胞约化。

与 $\mathrm{IAR}_{n,1}$ 的零坐标情形一样，我们假设 v 是 $\mathcal{F}$的内部极大顶点，v_1 良好且为正，并且 $v_4 = 0$。和之前一样，我们还设定 $M = \|v\| = \|\mathcal{F}\|$。

类型 10，GB： $l(\partial\mathcal{F}) = (w_{12}^{-1}R_{12}w_{12} = L_{21}^{-1})$，$v_I = (a,\ b)$ 或 $(a,\ b-a)$

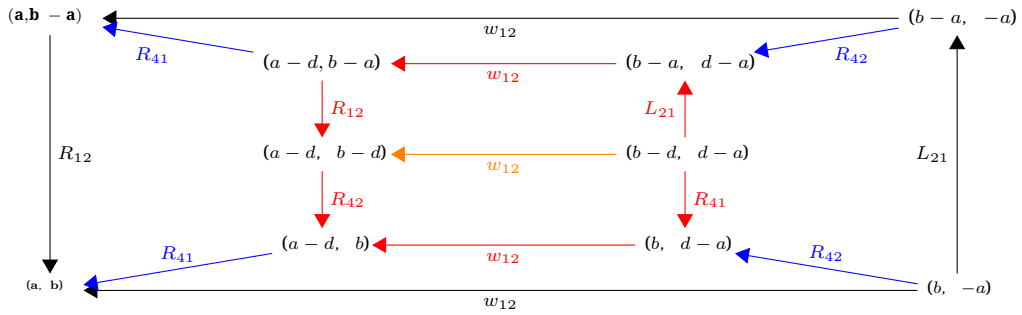


FIGURE 29. 坐标 1 和 2 已列出

类型 11，GB： $l(\partial\mathcal{F}) = (w_{12}^{-1}R_{13}w_{12} = R_{23})$，$v = (a, *, c)$

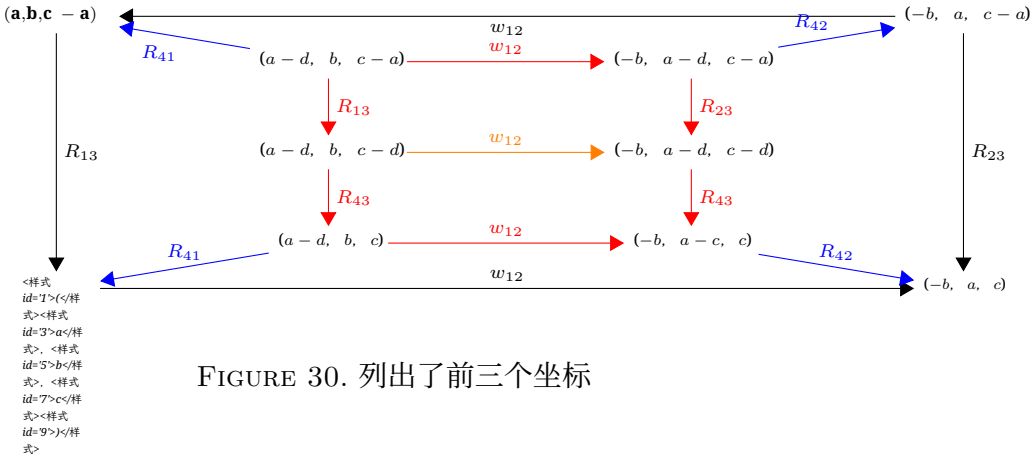


FIGURE 30. 列出了前三个坐标

下面描述的大多数约化映射，其侧边的标记为 R_{14} 或 L_{14}。

类型*1R*： $l(\partial\mathcal{F}) = ([R_{23}, R_{12}] = R_{13})$，$I = \{2,3,4\}$。所有边标签都与 L_{14}可交换。此外，$\mathcal{F}$ 的所有顶点具有相同的第一坐标，按假设该坐标是良好的。因此，交换映射 $C_{\mathcal{F}}(L_{14})$ 是一种约化。

*2R*型： $l(\partial\mathcal{F}) = ([R_{13}, R_{21}] = R_{23})$，$I = \{1,3,4\}$。如果 b 是良好的，那么交换映射$C_{\mathcal{F}}(L_{24})$ 是一种约化。而如果 b 是坏的，那么根据观察2.34，a 和 $a+b$ 都是良好的（因为其中一个必定是良好的），因此根据引理3.9(a)，图31中的映射是一种约化。

*3R*型： $l(\partial\mathcal{F}) = [R_{32}, R_{21}]R_{31}^{-1}$、$I = \{1,2,4\}$。$\mathcal{F}$的所有顶点都具有相同的第三坐标 c。如果 c 是良好的，则交换映射 $C_{\mathcal{F}}(L_{34})$ 是一个约化，因此现在假设 c 是坏的。我们断言，图32中的映射是一个约化。根据引理3.9(a)，只需证明 a、$a+b$ 和 $a-c$ 都是良好的。

$\mathcal{F}_I$的顶点为（$a-c$，b，0）、（a，b，0）、（$a+b$，b，0）、（$a+b$，$b+c$，0）和（$a-c$，$b+c$，0）。如果 v_I 是前三个顶点之一，那么根据引理3.9(b)，$a-c$，a 和 $a+b$ 是良好的。如果 v是最后两个顶点之一，那么引理3.9(b)表明 $a-c$和 $a+b$ 是良好的。由于 c是坏的，我们得出 $a = (a-c)+c$ 也是良好的。

2型，整数集 ZB: $l(\partial\mathcal{F}) = ([R_{13}, R_{21}] = R_{23})$.

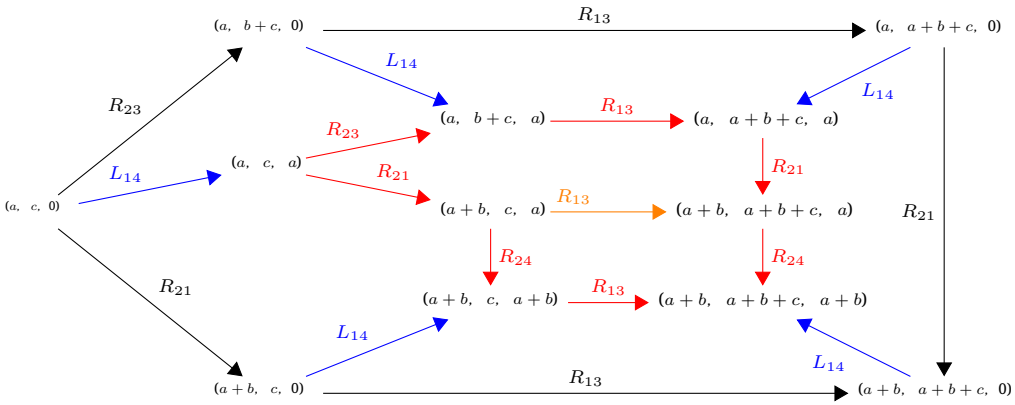


FIGURE 31. 坐标1、3和4已列出。

类型3，整数集 ZB: $l(\partial\mathcal{F}) = ([R_{21}, R_{32}] = R_{31})$.

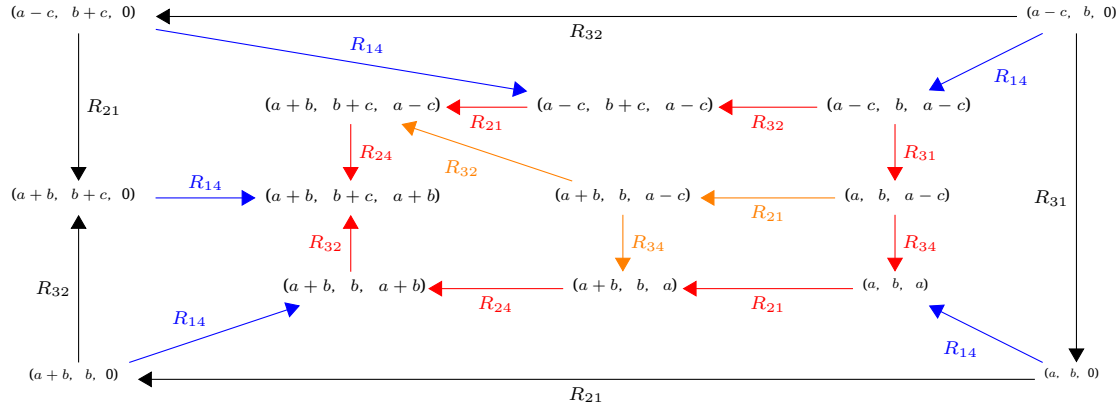


FIGURE 32. 列出了坐标 1、2 和 4。

4R型： $l(\partial\mathcal{F}) = [R_{21}, R_{31}]$, $I = \{1, 4\}$。我们将使用图33中的映射 φ。与3R型一样，根据引理3.9(b)，$a - b$、$a - c$和 $a - b - c$是良好的，因此根据引理3.9(a)，φ是一个约化。

类型*5*： $l(\partial\mathcal{F}) = [R_{12}, L_{13}]$, $I = \{2, 3, 4\}$。与前面一样，记作 $v = (a,\ b,\ c,\ 0,\ *)$（因此 $v_I = (b,\ c,\ 0)$），并且可以假设 v处的两条边都是入射边。那么，$\mathcal{F}_I$的顶点为 $(b,\ c,\ 0)$、$(b,\ c - a,\ 0)$、$(b - a,\ c,\ 0)$ 和 $(b - a,\ c - a,\ 0)$。我们断言，图34中的映射是一个约化。

事实上，每个新顶点都是将 $\mathcal{F}$ 的一个顶点的第四个坐标中的 0 替换为 a 或 $a - c$得到的。我们知道 a 是良好的。如果 $a - c$ 也良好，那么根据引理3.9(a)，此映射是一个约化。若 $a - c$ 是坏的，则 $c = a - (a - c)$ 是良好的，因此 $(b,\ c,\ 0) < (b,\ c - a,\ 0)$，这与假设 $v_I = (b,\ c,\ 0)$ 矛盾。

6R型： $l(\partial\mathcal{F}) = [R_{12}, R_{35}]$, $I = \{2, 4, 5\}$。此时，我们可以完全仿照类型1R的论证。

类型 4，整数集 ZB： $l(\partial\mathcal{F}) = [R_{21}, R_{31}]$

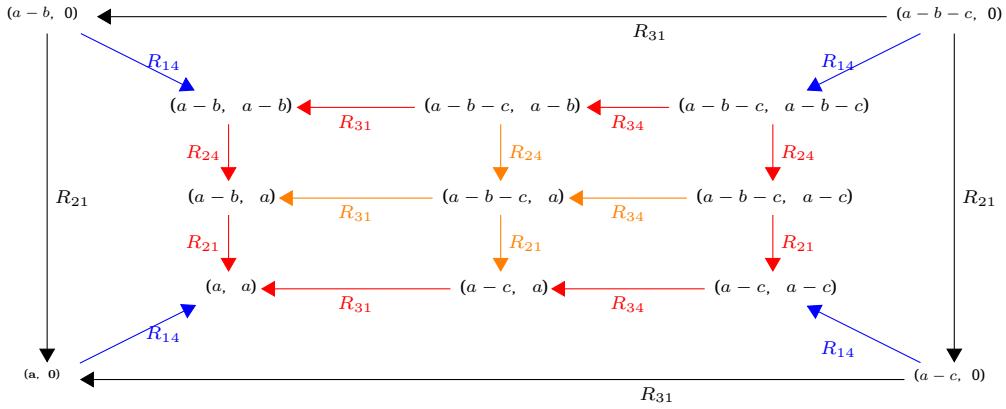


FIGURE 33. 坐标1和4已列出

类型5，ZB： $l(\partial\mathcal{F}) = [R_{12}, L_{13}]$

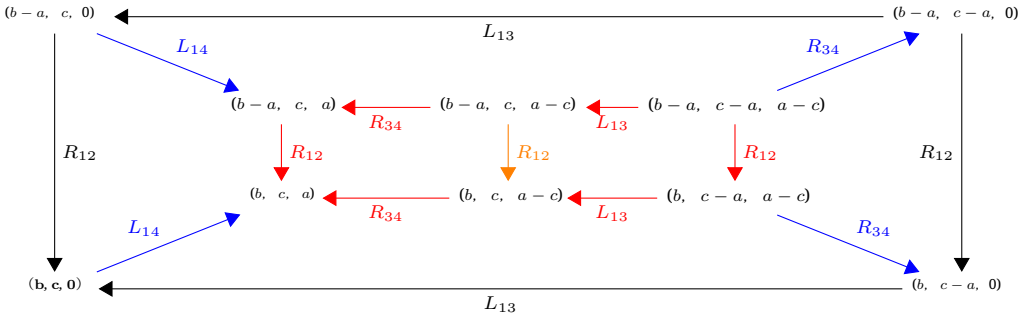


FIGURE 34. 坐标 2、3 和 4 已列出

7R型： $l(\partial\mathcal{F}) = [R_{21}, R_{35}]$, $I = \{1, 4, 5\}$。此处的论证与3R型相似，但更简单。

8-12型。这些情形中的约化图具有与 IAR$_{n,\ 1}$ （GA型）良好坐标情形下相应图相同的边标记，其论证也非常相似。为完整起见，我们将在论文末尾的附录中给出 8、9、10 和 11 型的图。

4.3. 证明的总结。 对于群 IAR$_{n,\ 1}$，只需证明群 IAC$_{n,\ 1}$的命题 3.11（的类似结论）即可。

IAC$_{,1}$群的命题 *3.11* 的证明。与 IAR$_{n,1}$群的情形类似，我们考虑 3 种情况： $m(v) > 9$、 $g(v) > 8$ 和 $z(v) > 8$ （回想一下， $m(v)$ $g(v)$ 和 $z(v)$ 分别表示 v的极大、良好和零坐标的数量）。

如果 $m(v) > 9$，证明与群 IAR$_{n,\ 1}$ 的情形完全相同。对于群 IAR$_{n,\ 1}$， $z(v) > 8$ 情形的证明与 $g(v) > 8$ 情形类似。最后，对于群 IAR$_{n,\ 1}$， $g(v) > 8$ 情形的证明与 $z(v) > 8$ 情形大体相似，但论证需要进行较大的修改，具体如下所述。

因此，假设 $g(v) > 8$。与群 IAR$_{n,\,1}$ 的 $z(v) > 8$ 情形一样，经过两轮单胞约化后，我们可以假设所有包含 v 的本质胞腔都属于 2、4、7 或 12 型（回忆一下，当一个胞腔的支撑集包含 1 时，它就是本质胞腔）。接下来，我们可以使用双胞腔约化先消去 12 型胞腔，再消去 2 型胞腔，这样所有剩余的本质胞腔都属于 4 型和 7 型。差别出现在下一步。我们不能对 4 型胞腔应用形式为 $C(R_{i1})$ 的交换映射，因为此时 4 型胞腔中的第一坐标可能符号相反，因此映射 $C(R_{i1})$ 可能不是约化。

让我们更仔细地考察图25中的约化映射，因为我们不仅需要将其应用于边界标记恰如图25所示的胞腔，还需要将其应用于同一类型的其他胞腔。外部水平边的方向和标记（标记为 R_{21}）十分重要。另一方面，如果改变外部竖直边的方向，或将其标记从 R_{31} 改为 L_{31}，我们仍会得到一个有效的范坎彭图，从而得到一个约化映射（在改变方向的情况下，顶点标签会有所不同）。此外，对于固定的互异 i、$j \notin \{1,2,3\}$，将所有标记为 R_{31} 的边替换为R_{ij}或 L_{ij} 中的任意一种，也可以得到类似的约化映射（对于类型7的胞腔而言，这将是一个单胞约化）。下文中，我们将把这类映射称为图*25*型约化。此外，为简便起见，如果一条边的标记等于 R_{i1}（其中某个 i），我们就称该边具有*右*标记；如果其标记等于 L_{i1}（其中某个 i），则称其具有*左*标记。

下面的引理说明如何从图 25 型约化出发构造多胞腔约化。

引理4.1。设 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 是共享一条包含 v 的边 e 的胞腔，其中 $\mathcal{F}$ 的类型为4，并设 φ 是一个图 *25* 型 $\mathcal{F}$-约化。此外，假设满足下列条件之一：

(i) $\mathcal{F}'$ 的类型为 7。(ii) $\mathcal{F}$ 的类型为 4，且包含 e 的 φ 的侧胞腔类型为 3（因此 e 在图 *25* 中充当底部水平边）。(iii) $\mathcal{F}$ 的类型为 4，且包含 e 的 φ 的侧胞腔类型为 4。此外，若 e_1（分别为 e_1'）是 $\mathcal{F}$（分别为 $\mathcal{F}'$）中包含 v 且不同于 e 的边，那么 e_1 和 e_1' 在 v 处方向相同，且二者均带有*右*标签或均带有*左*标签；或者 e_1 和 e_1' 在 v 处方向相反，且它们的标签分别为 R_{i1} 和 L_{j1}，其中 $i \neq j$。

那么存在一个图 *25* 型约化 φ'，位于 $\mathcal{F}'$ 处，且与 $\mathcal{F}$ 在 e处相容，因此 φ 可以扩展为一个双胞腔 $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$-约化。

证明。我们将略述 (iii) 的证明。其他部分的证明类似，但更简单。如果 e_1和 e_1' 都入射于 v 且具有右标签，那么由图25可知结论显然成立；由显然的对称性可知，若 e_1 和 e_1' 都入射于 v 且具有左标签，结论同样成立。

现在假设 e_1 和 e_1' 都出射于 v，且都具有右标签，例如 R_{1i}和 R_{1j}（两个左标签的情形类似）。如果 $i = j$，胞腔 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 互为镜像，因此引理4.1的断言显然成立（当然，这种情况下我们也可以直接消去 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$），故假设 $i \neq j$。若我们应用自同构 $x_i \mapsto x_i^{-1}$，$x_j \mapsto x_j^{-1}$，边 e_1 和 e_1' 将改变方向，其标签也将变为 L_{1i} 和 L_{1j}，从而归结为第一段中的情形。

最后，对于 e_1 和 e_1' 方向相反的情形，$l(e_1) = R_{i1}$ 和 $l(e_1') = L_{j1}$ 且满足 $i \neq j$，处理方式与前一种情形类似。假设 $i \neq j$ 是必要的

以确保我们可以应用一个自同构，只改变边 e_1 和 e_1' 中恰好一条边的方向（及标记），而不是同时改变两条边。□

我们继续证明命题 3.11。回想一下，根据假设，所有剩余的包含 v 的胞腔，其类型均为 4 或 7，或者不是本质的。如果 $\deg(v) = 2$，则很容易构造一个双胞腔约化（它将消去 v）。

接下来假设 $\deg(v) > 3$。下文将通过逐案论证说明，对于某个在 v 处的廊道 $\mathcal{G}$，存在一个三胞腔 $\mathcal{G}$-约化，使得 v 处的新的胞腔（它们必定彼此相邻）要么均为类型 4，要么均为类型 7，要么类型分别为 3 和 7。在后一种情形下，可以接着使用形式为 $C(R_{i1})$ 的双胞腔约化消去这 2 个新的胞腔（该约化可能只产生类型 4 和 7 的新胞腔）。

情形 *1*：存在一条长度为 3 的廊道 $\mathcal{G}$，位于 v 且不包含任何类型为 4 的胞腔。在这种情形下，对于任意良好指标 $i \notin supp(\mathcal{G})$，我们使用交换约化 $C_{\mathcal{G}}(R_{i1}^{-1})$（如前所述，这样的 i 存在，因为 $g(v) > 8$）。

情形 *2*：存在一条长度为 3 的廊道 $\mathcal{G}$，位于 v，其中间胞腔的类型为 4，而另外两个胞腔的类型不同。将 $\mathcal{G}$ 的胞腔记为 $\mathcal{F}_1$、$\mathcal{F}_2$ 和 $\mathcal{F}_3$（其中 $\mathcal{F}_2$ 是中间胞腔）。令 φ_2 为任意一个图 25 型 $\mathcal{F}_2$-约化。根据引理 4.1(i)，存在图 25 型约化 φ_i，位于 $\mathcal{F}_i$，对于 $i = 1$，3，且与 φ_2兼容。于是，映射 $\varphi_1 \cup \varphi_2 \cup \varphi_3$ 是一个具有所需性质的 $\mathcal{G}$-约化。

情形 *3*：存在一条长度为 3 的廊道 $\mathcal{G}$，位于 v，其中恰有2 个类型为 4的胞腔，包括中间胞腔。令 $\mathcal{F}$和和 $\mathcal{F}'$为 $\mathcal{G}$中类型为 4 的胞腔。因此，$\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}'$相邻，而 $\mathcal{G}$ 中剩下的胞腔类型为 7（它不可能是非本质的，因为它与一个类型为 4 的胞腔共边）。令 e 为 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$的唯一公共边。从任意一个图 25 型 $\mathcal{F}$-约化开始，且其位于 e 的侧胞腔类型为 3。根据引理 4.1(ii)，我们可以将其扩展为 $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$上的双胞腔约化 φ_2。又由于 $\mathcal{G}$中剩下的胞腔类型为 7，根据引理 4.1(i)，我们将 φ_2 扩展为三胞腔 $\mathcal{G}$-约化。

情形 *4*：存在一个长度为 3 的廊道 $\mathcal{G}$ 位于 v，其所有胞腔的类型均为 4。令 e_1、e_2、e_3、e_4 为 $\mathcal{G}$ 的边，它们按逆时针顺序包含 v；对于 $i = 1$、2、3，令 $\mathcal{F}_i$ 为 $\mathcal{G}$ 中包含 e_i 和 e_{i+1}的胞腔。

首先假设 e_1 和 e_3 满足引理 4.1(iii)的假设。我们可以从任意一个图25型 $\mathcal{F}$-约化开始，使得 e_2 处的侧胞类型为 4；然后利用引理 4.1(iii)将其扩展为双胞腔 $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$-约化 φ_2，最后利用引理 4.1(ii)将 φ_2 扩展为三胞腔 $\mathcal{G}$-约化。

现在考虑一般情形。不妨设对于某个 i，$l(e_3) = R_{i1}$。我们总能进行一次双胞腔 $\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$-约化，使得 e_3 处（ $\mathcal{F}_2$ 和 $\mathcal{F}_3$的公共边）的侧胞类型为 3（根据引理 4.1(ii)，这是可能的）。这会将 $\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ 替换为另一个长度为 2 且胞腔类型为 4 的廊道，但 e_3 的标记（更准确地说，是取代 e_3位置的新边）会从 R_{1i} 变为 L_{1k}，其中 k 是任意不属于 $supp(\mathcal{G})$的良好指标（由我们选择），而 e_3 的方向保持不变。至多进行两次这样的双胞腔约化后，我们可以确保 e_1 和 e_3 满足引理 4.1(iii)的假设，从而归结为上一段的情形。

这就完成了 $\deg(v) > 3$ 情况下的证明，接下来需要考虑 $\deg(v) = 3$ 的情况。在这种情况下，$\mathcal{G}$ 将表示 v处的完整廊。如果 $\mathcal{G}$ 没有类型 4 的胞腔，我们可以使用形式为 $C(R_{i1})$ 的交换约化，因此假设 $\mathcal{G}$ 至少有

类型 4，GB：长度为 3 的完整廊道上的约化，其中所有胞腔均为类型 4。

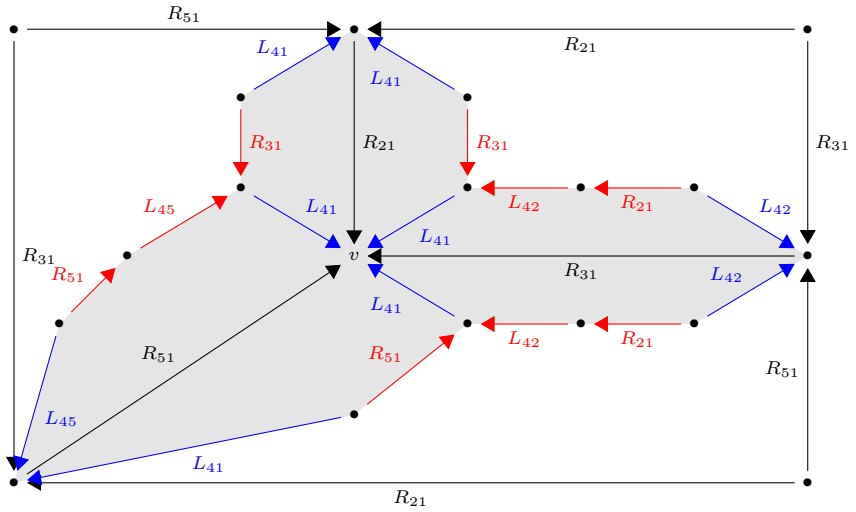


FIGURE 35. 包含 v 的六个侧胞以灰色阴影标出。其中四个胞腔组成两对可消去对——共享标记为 R_{21}的边的两个胞腔，以及共享标记为 R_{31}的边的两个胞腔。消去这两对后，我们得到一个图，其中 v 的度为 2，而包含 v 的两个胞腔的并集是一个子图，其边界标记为 $[L_{45}^{-1}, R_{51}] = L_{41}$，这是一个类型 3 的定义关系。随后，我们可以用一个类型 3 的单胞替换这两个胞腔，并消去 v。

一个类型 4 的胞腔。下面我们将考虑所有胞腔均为类型 4 的情况；其他情况也可以类似处理，但稍微容易一些。

将 $\mathcal{G}$的胞腔记为 $\mathcal{F}_1$、$\mathcal{F}_2$、$\mathcal{F}_3$，将包含 v的 $\mathcal{G}$的边记为 e_1、e_2、e_3，使得 $\mathcal{F}_i$ 包含 e_i 和 e_{i+1}，其中指标模 3 计算。边 e_i 必须具有互不相同的支撑，因为其中任意两条都是类型 4 胞腔的相邻边。按照引理 4.1(iii) 的证明，应用适当的自同构后，我们可以假设所有边 e_i 在 v处均为入射；然后如上文情形 4 中的论证，我们可以假设所有 e_i 都带有右标签。在这种情况下，我们可以仿照上文情形 3 构造一个完整的 $\mathcal{G}$-约化。尽管我们无法使所有边处的单胞约化彼此兼容（其中一条边处不得不出现类型 3 和类型 4 的侧胞），胞腔消去后仍可得到完全约化——见下文图 35。□

5. FINITE PRESENTABILITY OF $\mathrm{IAR}_{n,d}$ AND $\mathrm{IAC}_{n,d}$ FOR $d > 1$

本节将证明任意 d 下的定理 1.1。

5.1. 概述。 在本节中，我们固定整数 $1 \le d \le n$，令 $G = \mathrm{SAut}(F_n)$ 和 $H = \mathrm{IAR}_{n,d}$ 或 $\mathrm{IAC}_{n,d}$。回顾 § 2 中引入的一些记号和约定：

- $(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ 表示 G 的优化的 Gersten 表示（见 § 2.3）；
- $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 表示列张成 $\mathbb{Z}^d$ 的、元素取自 $\mathbb{Z}$ 的 $d \times n$ 矩阵集合；

当 $H = \mathrm{IAR}_{n,d}$ 时，• $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 与 G/H同构，构成一个 G-集，其中 G通过 (2.9) 作用于 $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$；当 $H = \mathrm{IAC}_{n,d}$时，则通过 (2.10) 作用。

- 与前面一样，我们将通过引理 2.2 中的映射，把 G/H 与 $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 等同起来6.

除非另有特别说明，本节中的图均指带有 $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 标记、定义在 $(\mathcal{X},\mathcal{R})$ 上并带有 G 相应作用的图。不过， $Um_{k\times n}(\mathbb{Z})$-标记图也会自然出现于 $1\le k<d$ 中（见下方的观察 5.1）。

给定一个图 Ω 以及 $\{1,\dots,d\}$ 的一个非空子集 I，我们将 $row_I\Omega$ 定义为 Ω 在由 I 所索引的行集上的投影；也就是说， $row_I\Omega$ 与 Ω 具有相同的顶点、边和边标签，并且 $row_I\Omega$ 中每个顶点的标记，是通过仅保留由 I 中元素所索引的行，从 Ω 中对应顶点的标记得到的。在两种特殊情况下，我们将使用简化记号。给定 $1\le k\le d$，令

- $row_k\Omega$ 表示 Ω 投影到其第 k_{th} 行所得的结果，即 $row_k\Omega = row_{\{k\}}\Omega$ 且
- $bot_k\Omega$ 表示 Ω 投影到其最底部 k 行所得的结果，即

$$bot_k\Omega = row_{\{d-k+1,d-k+2,\dots,d\}}\Omega.$$

以下基本观察使我们能够使用此前在 $d=1$ 情形下确立的许多结果，而无需明确引用群 $\mathrm{IAR}_{n,1}$ 和 $\mathrm{IAC}_{n,1}$:

观察 5.1。 设 Ω 为一个 $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$-标记图，其 G-作用由 (2.9)（分别由 (2.10)）给出，且 I 是 $\{1,\dots,d\}$ 的任意非空子集。那么 $row_I\Omega$ 是一个 $Um_{|I|\times n}(\mathbb{Z})$-标记图，其 G-作用由 (2.9)（分别由 (2.10)）给出。特别地，对于任意 $1\le k\le d$，图 $row_k\Omega$ 是 $Um_{1\times n}(\mathbb{Z})$-标记的。

我们保留 G-作用并通过投影到行而非列来处理，原因在于 (2.9) 和 (2.10) 中， G 都是通过右乘作用的。

继续之前，我们先引入一些额外术语。下文的不变量仅用于 $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 中的矩阵，但也可以针对任意 $d\times n$ 上的矩阵来定义。对于每个 $0\le k\le d$ ，我们将 $\mathbb{Z}^k$ 视为 $\mathbb{Z}^d$ 中最后 $d-k$ 个坐标均为 0 的向量所组成的集合。向量 $c\in\mathbb{Z}^d$ 的深度是满足$c\in\mathbb{Z}^k$ 的最小 k。

定义 5.2. 令 $0\le k\le d$。

(a) $\mathbb{Z}^k$ 中的元素称为 k-向量。换言之，当且仅当 $c\in\mathbb{Z}^d$ 的深度为 $\le k$ 时，它才是一个 k-向量（特别地，0-向量就是零向量）。(b) 如果 $c\in\mathbb{Z}^d$ 是一个 k-向量，且它被定义为某个 $v\in Mat_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 的一列，我们就称 c 为 v 的一个 k-列。(c) 如果 $v\in Mat_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 的 k-列张成 $\mathbb{Z}^k$，则称其为 k-幺模。(d) $v\in Mat_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 的 k-亏损记为 $def_k(v)$，其值为 v 中非 k-列的数量。

现在令 Ω 为一个 $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$-标记图。

(d) 如果 Ω 的所有顶点都是 k-幺模的，我们就称 Ω 为 k-幺模的 （因此，Ω 总是 d-幺模的）。(e) 我们将 $def_k(\Omega)$ 定义为 Ω 的 k-亏损 ，即其顶点的 k-亏损中的最大值。

一维情形与高维情形。在特殊情形 $d=1$ 中引入的许多定义和构造，都可以显而易见地推广到任意 d。

在其他一些情况下，我们将利用在 $d = 1$ 情形下的工作，来确立 $d > 1$的相应结果。我们分别将 $d = 1$ 和 $d > 1$ 称为一维情形和高维情形。 [2]

常数 C。在本节中，C 将表示一个具有如下性质的常数：对于任意长度为 ≤ 3 的廊道 Δ，都有 $|supp(\Delta)| \leq C$。根据观察 3.3(ii)，具有此性质的最小整数是 $C = 8$，因此读者可以直接在下面的所有公式中将 C 替换为 8；不过，我们认为，如果把 C 看作一个未指定的常数，某些计算可能会更容易理解。

提升图映射。在第 3、4 节中，我们在一维情形下构造了若干特定的图映射。若 φ 是其中一个映射，我们可以考虑相应的映射φ^*，其作用于 $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$-标记图。根据定义，$\varphi^*$ 所对应的底层无标记范坎彭图与 φ 的相同，并且所有新顶点的标签均由旧顶点的标签通过相同的公式得到。在这种情况下，我们称 φ^* 是 φ 的提升。本节中考虑的大多数图映射都将以这种方式构造。

扩展标签。高维情形中的一个新关键特征是，顶点上的序并不完全由其标签决定，因此我们将使用扩展标签。令 $Z = Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$。本节稍后将介绍 Z 上的两个超阿廷序，称为步骤 1 预序和步骤 2 预序（这些序将在证明的不同部分使用）。对于这两个序中的每一个，我们都将考虑按字典序排列的偏序集 $Z' = Z \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$，也就是说，$(z_1, h_1) < (z_2, h_2)$ 当且仅当 $z_1 < z_2$ 或 z_1，且 z_2 不可比较，并且 $h_1 < h_2$。显然，Z' 也是超阿廷的。

我们将为图 Δ 的每个顶点 v 关联一个扩展标签 $L_\Delta(v)$，使得

$$L_\Delta(v) = (l(v), h_\Delta(v))$$

对于某个 $h_\Delta(v) \in \mathbb{Z}$，也就是说，扩展标签的 Z 分量是 v 的通常标记 .

群 G 只作用于 Z，而不作用于 Z'，但这不会给证明带来任何复杂性。

若 $L_\Delta(v)$ 是集合 $\{L_\Delta(w) : w \in V(\Delta)\}$ 的极大元，则称顶点 $v \in V(\Delta)$ 对于 Δ 是极大的。

设 $\psi : \Delta \to \Delta'$ 是一个图映射。回顾一维情形，若顶点 $v \in V(\Delta')$ 满足 $v \in V(\Delta') \setminus V(\Delta)$，则称其为新的（对于 ψ）；否则称其为旧的。使用扩展标签后，情况变得更加复杂，因为一个顶点可能仍然留在图中，却获得一个新的扩展标签，而在存在此类顶点时，我们原先的约化定义就变得含糊不清。

为了解决这个问题，在高维情形下我们将使用以下术语：

定义 5.3. 设 $\psi : \Delta \to \Delta'$ 是一个图映射。顶点 $v \in V(\Delta')$ 将被称为

(i) 新的 当 $v \in V(\Delta') \setminus V(\Delta)$；(ii) 旧的 当 $v \in V(\Delta') \cap V(\Delta)$ 且 $h_{\Delta'}(v) = h_\Delta(v)$；(iii) 伪新的 当 $v \in V(\Delta') \cap V(\Delta)$，但 $h_{\Delta'}(v) \neq h_\Delta(v)$。

[2]为避免混淆，在这种情况下我们不会明确提及 d 的取值，因为在本节中我们始终将 d 视为固定整数。
[3]请注意，这意味着顶点没有标记，但边仍有标记。

因此，按照我们的约定，伪新顶点同时属于旧图 Δ 和新图 Δ'，但根据我们所考虑的图不同，它表示 Z' 中的不同元素。这就是为什么我们在扩展标签的记号中明确指出图。

现在我们可以给出一个适用于高维情形的约化的正式定义。

定义 5.4. 设 $\psi\colon \Delta \to \Delta'$ 是一个图映射，且 $v \in V(\Delta)$ 是Δ的一个极大顶点。对于任意新的或伪新的顶点w，若 $L_{\Delta'}(w) < L_{\Delta}(v)$，我们称 ψ 为一个约化。

与一维情形一样，显然可以验证，这一定义不依赖于极大顶点 v的选取。

虽然这个定义严格来说并不符合第 2 节的情形，但引理 2.14 的断言仍然成立（证明相同）。

定理 1.1 的证明概要（适用于 $d > 1$。）与一维情形一样，给定某个图的一个顶点 v，我们用 $\|v\|$ 表示其标记的 ℓ^∞-范数。给定一个图 Δ，我们令 $\|\Delta\| = \max\{\|v\| : v \in V(\Delta)\}$。

我们还需要一个技术定义：

定义 5.5. 若矩阵 $v \in Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 满足以下条件，则称其为小矩阵

(i) $\|v\| = 1$；(ii) v 与“恒等”矩阵 $d \times n$ $(I_{d\times d} \mid 0_{d\times(n-d)})$ 至多有 8 列不同。特别地，v 的每一行至多有 9 个非零项，因此由 (i) 可知其范数为 $\ell^1 \le 9$；(iii) 对所有 $k \le d$，v 都是 k-幺模的。

$Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 的子集若其所有元素都是小的，则称为 小的 。

以下结果将在本节末尾证明。

命题 5.6。 存在一个 G/H 的小子集 E，使得它在 $Cay(G, \mathcal{X})$ 中的原像是连通的（如前所述，此处我们将 G/H 与 $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 等同）。

与 $d = 1$ 的情形不同，我们将使用一般的有限表示性判据——命题 2.3——正式证明 H 对于 $d > 1$ 的有限表示性，而不借助引理 2.15。实际上，后者并不适用，因为我们将用于 $d > 1$ 的偏序仅假定为超阿廷，而不一定是强阿廷。

更确切地说，我们将使用下面的推论 5.7，它是命题 5.6 和命题 2.3 的一个直接推论。

推论 5.7。 假设存在一个常数 M，使得对于任意的 $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$-标记图 Ω，若其定义在 $(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ 上且具有小边界，则存在一个图映射 $\Omega \to \Omega'$，使得 $\|\Omega'\| \le M$。那么 H 是有限呈示的。

证明。令 E 为命题 5.6 中的小集合。推论 5.7 表明，若 $A = E$ 和 B 是 $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 中范数不超过 M 的矩阵集合（显然，这是一个有限集），则命题 2.3 的假设成立。因此，由命题 2.3 可知，H 是有限呈示的。□

如何验证推论 5.7 的假设。设 Ω 是任意一个具有小边界的图。我们的目标是证明推论 5.7 的假设总是成立，也就是说，构造一个图映射 $\Omega \to \Omega'$，使 Ω' 具有有界范数。这将分几个阶段完成，每个阶段我们都将专注于图的某一行。我们首先将整个图 Ω 投影到它的最后一行 $row_d\Omega$ 上。Ω 具有小边界这一假设特别意味着，对任意 $v \in V(\partial\Omega)$，都有 $\|v\| = 1$ 和 $\|row_d(v)\|_1 \le 9$。由于 $C \ge 8$，反复应用命题 3.11 足够多次，我们得到一个约化映射 $\varphi : row_d\Omega \to \Delta_d$，使得 $\|v\| = 1$，并且对于 Δ_d 的每个顶点 v，都有 $\|v\|_1 \le C+1$。现在我们可以提升 φ，构造一个图映射 $\varphi^* : \Omega \to \Delta$，使得对于 Δ 的每个顶点 v，都有 $\|row_d(v)\| = 1$ 和 $\|row_d(v)\|_1 \le C+1$，因此 $def_{d-1}(\Delta) \le C+1$。新图 Δ 仍然是 $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$- 标记的，因此是 d- 幺模的。

接下来，我们希望对 Δ 的 $(d-1)^{\text{st}}$ 行应用类似的过程，但必须谨慎行事，因为我们不希望破坏 d^{th} 行良好的结构。为此，我们首先对 d^{th} 行进行额外的约化，使我们的图成为 $(d-1)$-幺模的。这样做可以保留条件 $\|row_d(v)\| = 1$ 对所有 v 都成立，同时使 $(d-1)$-亏损一致有界（尽管界限略差于 $C+1$）。一旦得到满足这些附加条件的 $(d-1)$-幺模图，我们就可以提升一维约化（只需稍作修改），使 $\|row_d\|$ 和 $\|row_{d-1}\|$ 均等于 1，并使 $(d-2)$-亏损有界。然后，我们依次对每一行应用相同的过程（从下往上），最终使整个图的 ℓ^∞-范数等于 1。

到目前为止我们所概述的算法仅在 $d \le \frac{n}{C}$ 时有效，因为它只能确保 k-亏损的上界为 $C(d-k)$（而为了处理 k^{th} 行，我们需要 k-亏损远离 n）。为克服这一问题，我们将在处理完 k^{th} 行之后（如前一段所述）进行额外调整，从而得到更好的 k-亏损界：$def_k \le d-k+C$。遗憾的是，这将以大幅增加最后 $d-k$ 行的范数为代价，因此最终我们只能断言 ℓ^∞-范数有绝对上界（而不是上界为 1）。以上是对本节将要描述的算法的一个（非常）非正式概述。

现在我们表述本节的主要结果：

定理 5.8。假设 $1 \le d \le n - (C^2+6C+3)$。则存在一列正整数 $M_1, \dots, M_d$，具有以下性质。设对于某个 $1 \le k \le d$，给定一个图 Ω，使得

(a) Ω 是 k- 幺模的；(b) $def_k(\Omega) \le d-k+C$；(c) 若 $k < d$，则 $\|bot_{d-k}\Omega\| \le M_{k+1}$；(d) Ω 具有小边界。

那么存在一个图映射 $\Omega \to \Omega_1$，使得

(i) Ω_1 是 $(k-1)$-幺模的；(ii) $def_{k-1}(\Omega_1) \le d-k+C+1$；(iii) $\|bot_{d-k+1}\Omega_1\| \le M_k$。

首先，我们将由定理 5.8 推导出定理 1.1。

定理 *1.1* 的证明。 注意，对于 $C = 8$，$(C^2 + 6C + 3) = 115$，因此任意 $d \leq n - 115$ 都满足定理 5.8 的假设条件。我们将利用推论 5.7 证明 H 的有限表示性。

首先注意，任何 $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$-标记图 Ω 都满足定理 5.8 中关于 $k = d$ 的条件 (a)-(c)。事实上，根据假设，Ω 是 d-幺模的，$def_d(v) = 0$ 对所有 $v \in \mathbb{Z}^d$ 都成立（因此 $def_d(\Omega) = 0$），而对于 $k = d$，条件 (c) 是空泛成立的。

现在假设 Ω 具有小边界，因此 (d) 也成立，于是我们可以对 Ω 应用定理 5.8，其中取 $k = d$。所得的图 Ω_1 满足关于 $k = d$ 的条件 (i)-(iii)，这些条件与关于 $k = d - 1$ 的条件 (a)-(c) 相同。由于图映射不会改变边界，Ω_1 也满足 (d)（这对所有 k 都相同）。因此，我们可以对 Ω_1 应用定理 5.8，其中取 $k = d - 1$，并继续进行，直至（包括） $k = 1$。若 Ω_{fin} 是最终得到的图，则根据关于 $k = 1$ 的条件 (iii)，我们有 $\|\Omega_{fin}\| = \|bot_d(\Omega_{fin})\| \leq M_1$，因此 H 是有限呈示的（由推论 5.7）。□

在详细讨论定理 5.8 的证明结构之前，我们先引入一些辅助术语。

定义 5.9. 设 $0 \leq k \leq d$。

(i) 定义 $\sim_k$ 在 $\mathbb{Z}^d$ 上的一个关系：若 $w - v$ 或 $w + v$ 是一个 k-向量，即 w 在最后 $d - k$ 行与 v 或 $-v$ 相同，则称 $v \sim_k w$。显然，$\sim_k$ 是一个等价关系。(ii) 给定 $v \in Mat_{d\times n}(\mathbb{Z})$，其弱 k亏损 记为 $wdef_k(v)$，它是 v 中两两关于 $\sim_k$不等价的非-k列的最大数量。(iii) 若 Ω 是一个图，我们将 $wdef_k(\Omega)$ 定义为 $wdef_k(v)$的最大值，其中 v是 Ω 的一个顶点。

显然，$wdef_k(v) \leq def_k(v)$。当然，$def_k(v)$与 $wdef_k(v)$之间的差异可以任意大；然而，根据下文的命题 5.13，任何图都可以经过简单修改，使修改后图的每个顶点 v 处的差异 $def_k(v) - wdef_k(v)$均由一个绝对常数所界。因此，在很大程度上，k-亏损受弱 k-亏损控制。采用后者的好处是，正如我们将在下文看到的，构造不会增加弱k-亏损的约化要容易得多。

定义 5.10。 图映射 $\Delta \to \Delta'$ 称为 k-安全的，如果

(A) $\|row_i\Delta'\| \leq \|row_i\Delta\|$ 对所有 $i > k$均成立，因此特别有 $\|bot_{d-k}\Delta'\| \leq \|bot_{d-k}\Delta\|$;
(B) $wdef_k(\Delta') \leq wdef_k(\Delta)$；(C) 如果 Δ 是 k-幺模的，那么 Δ'也是如此。

非常不严格地说，如果一个图映射不会使图中最后$d - k$ 行的结构变得更加复杂，那么它就是 k-安全的。

在本节余下部分，我们固定 $1 \leq k \leq d$，并将其视为定理 5.8陈述中的 k。定理 5.8的证明将分为 3 个步骤：

- 在步骤 1 中，我们将 ℓ^∞-范数的 k行 设为 1。
- 在步骤 2 中，我们将使图 $(k - 1)$ 成为幺模的。
- 最后，在步骤 3 中，我们将在保持最后 $d - k + 1$ 行的范数有界的同时，得到所需的 $(k - 1)$-亏损界。

5.2. **步骤 1**。 我们首先阐述证明定理 5.8 的第一步的主要结果。回顾一下，超阿廷偏序的概念定义于 § 2.2 中。

定理 5.11 (步骤 1)。 设 Ω 和 d 如定理 *5.8* 中所述。存在一个超阿廷偏序（定义如下，称为步骤 *1* 序）以及一个 k-安全约化 φ: Ω →Ω′（相对于该偏序），使得

(i) $def_k(\Omega') \leq def_k(\Omega) + C$，因此 $def_k(\Omega') \leq d - k + 2C$（回忆一下，根据定理 *5.8* 的假设条件，$def_k(\Omega) \leq d - k + C$）；(ii) *Ω* 中任意顶点的 k^{th} 行的 ℓ^∞-范数为1。

该断言 是以下两个命题的直接推论 .

命题 5.12。 设 Δ 是一个具有小边界的 k-幺模图，使得

(a) $def_k(\Delta) \leq n - 4C - k - 1$;

(b) $\|row_k(\Delta)\| \geq 2$.

那么，对于 Δ 的任意极大顶点 v，都存在一个 k-安全约化 $\Delta \to \Delta'$，它消去 v。

注。 正如我们稍后将要说明的，命题 5.12 的假设条件意味着 v 必须是一个内部顶点（见下文观察 5.22）。

命题 5.13。 任何具有小边界的图 Δ 都存在一个 k-安全约化 Δ →Δ′，使得 $def_k(\Delta')$ $\leq wdef_k(\Delta') + C$。

我们先说明定理 5.11 如何由命题 5.12 和命题 5.13 推出。

定理 *5.11* 的证明。 我们从初始图 Ω 开始，只要可以，就不断应用这两个命题之一。更具体地说，如果某一步得到的图 Δ 具有$def_k(\Delta) > wdef_k(\Delta) + C$，就应用命题 5.13；否则，只要命题 5.12 的假设条件成立，就应用命题 5.12。由于命题 5.12 中的约化都是完全约化，且该序是阿廷的，根据引理 2.14，这一过程将在有限步后终止。令 Ω′ 为所得的图，并令 $\varphi : \Omega \to \Omega'$ 为命题 5.12 和命题 5.13 中所有约化的复合。我们断言，φ 和 Ω′ 满足所有所需条件。

由于命题 5.12 和命题 5.13 中的约化是 k-安全的，因此 φ 也是如此。特别地，$wdef_k$(Ω′) $\leq wdef_k$(Ω)。由于命题 5.13 不适用于 Ω′（以非平凡的方式），我们有 def_k(Ω′) $\leq wdef_k$ (Ω′)+C，因而 def_k(Ω′) $\leq wdef_k$(Ω)+$C \leq def_k$(Ω)+C，所以定理 5.11 中的条件(i)成立。

现在回忆 $d \leq n$ –($C^2 + 6C + 3$) $< n - 6C - 3$，从而 def_k(Ω′) $\leq$ ($n - 6C$ –3) $- k + 2C = n - k - 4C - 3$，因此 Ω′ 满足命题 5.12 的条件(a)。由于命题 5.12 不适用，条件(b)不成立，也就是说，$\|row_k\Omega'\| = 1$。因此 Ω′ 满足定理 5.11 结论中的(i)和(ii)。□

在转向命题 5.12 和 5.13 的证明之前，我们需要定义步骤 1 中将使用的序。首先，我们引入一些额外的术语。

定义 5.14。 固定 k，使得 $1 \leq k \leq d$。令 $v \in Mat_{d\times n}(\mathbb{Z})$，并令 c 为 v 的一列。我们称

(i) c 是极大 的，当且仅当 $|c_k| \geq |d_k|$ 对 v的任意一列 d 都成立；

(ii) 若 c 是一个 k-列，c 不是极大的，且 $c_k \neq 0$，则称 c 是良好 的。

注意， c 是极大的，当且仅当 c_k 是 $row_k(v)$的一个最大坐标。若 c是良好的，则 c_k 必定是 $row_k(v)$的一个良好坐标，但反过来并不成立（因为$row_k(c)$无法告诉我们 c 是否为 k-列）。

与一维情形一样，我们还需要相对于一个 $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$-标记图 Ω 的相应概念。给定这样一个图 Ω，令 $M = \|row_k(\Omega)\|_\infty$。若向量 $c \in \mathbb{Z}^d$ 满足 $|c_k| \le M$，则称其为 Ω-极大（分别为 Ω-良好），当且仅当 $|c_k| = M$（分别为 c是一个 k-向量且 $0 < |c_k| < M$）。

我们很快就会看到，在命题 5.12 的证明中，步骤 1 序的定义和约化的构造所涉及的 k-列与非-k-列扮演的角色有明显区别。为了更清楚地体现这种区别，我们将称

- 若向量 $c \in \mathbb{Z}^d$ 满足 c 是一个 k-向量，则称其为非受限；否则称其为受限。

我们将在下面的注中解释为什么称 k-向量为非受限。

观察 5.15. 设 $v, v' \in Mat_{d\times n}(\mathbb{Z})$，并假设 v' 是通过将 v 中的 $col_i(v)$ 替换为 $col_i(v) \pm col_j(v)$ 得到的，其中 $i \ne j$ 是某个对象。若 $col_j(v)$ 是一个 k-列，则
(a) v 和 v' 在最后 $d-k$ 行相同；(b) $wdef_k(v') = wdef_k(v)$；(c) v 的 k-列与 v' 的 k-列张成 $\mathbb{Z}^d$的同一个子空间。

证明。(a) 根据定义成立。它还意味着， v' 的每一列相对于 $\sim_k$ 都与 v 中对应的列等价，由此得到 (b)（请回忆， $\sim_k$ 是在定义 5.9 中定义的）。最后，由于 $col_j(v)$ 是一个 k-列， $col_i(v)$ 和 $col_i'(v) = col_i(v) \pm col_j(v)$ 要么都是 k- 列，要么都不是 k- 列；无论哪种情况，(c) 均成立。□

注。回想一下，定理 5.11 陈述中的约化必须是k-安全的。现在假设 ψ 是一个图映射，使得每个新顶点 v' 都是从某个顶点 v 通过将 $col_i(v)$ 替换为 $col_i(v) \pm col_j(v)$ 得到的，其中 $i \ne j$。若 $col_j(v)$ 在所有情况下都是一个 k-列，则观察 5.15 立即推出 ψ 是 k-安全的（见下文引理 5.21）。因此，在构造 k-安全映射时，我们可以将一个 k-列加到（或从）任意其他列上，而不受任何限制。

步骤 1 序。现在我们来定义步骤 1 序。与一维情形一样，它将定义为一种比较算法：一旦两个顶点依据给定判据可比较，我们就停止。需要提醒读者的是，这个序只会在步骤 1 中使用。步骤 2 和步骤 3 中将使用不同的序。

正如我们已经提到的，与一维情形的一个关键区别在于，要比较两个顶点，通常仅知道它们的标签是不够的。不过，我们先定义步骤 1 预序，它只考虑标签。

步骤 1 预序：

（1） k^{th} 行的 ℓ^∞范数较小的顶点更小。（2）极大列较少的顶点更小。（3）非极大受限列较少的顶点更小。等价地，非极大非受限列较多的顶点更小。（4）优列较多的顶点更小。（5）$(k-1)$列较多的顶点更小。

（6）令 v^{ur} 为从 v 的标记中移除所有受限列后得到的矩阵。具有较小向量值的顶点 v

$$(\|row_k(v^{ur})\|_1, \|row_{k-1}(v^{ur})\|_1, \ldots, \|row_1(v^{ur})\|_1)$$

（相对于从左向右的字典序）更小 .

给定两个顶点 v 和 w，如果 v 相对于步骤 1 预序小于 w，我们记作 $v < w$；如果 v 和 w 不可比较，则记作 $v \sim w$。

在继续之前，我们需要给出一个技术定义。

定义 5.16. 设 Δ 为一个图。

(a) 如果顶点 v 的标记 $l(v)$ 相对于步骤 1 预序是极大的，则称其为预极大。(b) 如果胞腔 $\mathcal{F}$ 的所有顶点都是预极大的，则称图 Δ 中的该胞腔为纯极大。(c) 给定顶点 v，定义 $h_\Delta(v)$ 为包含 v 且类型为5的 Δ 中的纯极大胞腔数量。

如下文将看到的，给定一个包含预极大顶点 v 的胞腔 $\mathcal{F}$，在几乎所有情况下，都可以相对于步骤 1 预序构造一个单胞腔 $\mathcal{F}$-约化；唯一的例外是 $\mathcal{F}$ 纯极大且类型为5的情况。对于后一种情况，我们可以构造一个图映射 φ，使得对于 φ 的每个新顶点 w，要么 $w < v$（相对于步骤 1 预序），要么 $w \sim v$，但 $h_\Delta(w) < h_\Delta(v)$。为了将该映射转化为约化，我们引入如下扩展标签。

扩展标记集为 $Z' = Z \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$，其中 $Z = Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 与之前相同。给定一个顶点 $v \in V(\Delta)$，其扩展标签为 $L_\Delta(v) = (l(v)\ \ h_\Delta(v))$，其中 $l(v)$ 是通常标记。回忆一下，Z' 按字典序排列，即，

$$L_\Delta(v) < L_{\Delta'}(v') \text{ if and only if } l(v) < l(v') \text{ or } l(v) \sim l(v') \text{ and } h_\Delta(v) < h_{\Delta'}(v').$$

记号： 给定顶点 v 和 w，仅当 $l(v) < l(w)$ 时，我们才仍将 $v < w$ 写作。每当顶点之间的不等式考虑到扩展标签时，都会明确提及这些扩展标签。

回顾定义 5.3，给定一个图映射 $\psi : \Delta \to \Delta'$，如果 $v \in V(\Delta') \cap V(\Delta)$，但 $L_{\Delta'}(v) \neq L_\Delta(v)$，则称顶点 v 对于 ψ 是伪新顶点。因此，一个伪新顶点将被视为同时属于旧图和新图，但具有不同的扩展标签。

虽然难以控制哪些顶点会成为伪新顶点，但存在一个判定图映射为约化的充分条件，该条件只取决于新顶点的扩展标签。

引理 5.17。 设 $\psi : \Delta \to \Delta'$ 是一个图映射，v 是 Δ 的极大顶点（相对于步骤 *1* 序）。假设

(i) $L_{\Delta'}(w) < L_\Delta(v)$ 对于每个新的顶点 w *of* ψ;(ii) 每个类型为5 的 ψ 新胞腔至少有一个顶点 u（不一定是新的），且$u < v$。

那么 ψ 是一个约化（相对于步骤 *1* 序）。

如果对于 ψ 的每个新顶点，$w < v$ 都自动满足条件 (i) 和 (ii)（对于 (ii)，这是因为每个新胞腔都必须至少包含一个新顶点）。因此，我们得到引理 5.17 的以下特例，它适用于大多数胞腔类型：

引理5.18。 设 ψ： $\Delta \to \Delta'$ 是一个图映射， Δ 的 v 是一个极大顶点。如果对于 ψ 的每个新顶点， $w < v$ 都成立，那么 ψ 是一个约化。

引理 *5.17* 的证明。 由于条件(i)，我们只需证明当 w 是一个伪新顶点时， $L_{\Delta'}(w) < L_{\Delta}(v)$。

设 w 是一个伪新顶点，即 $h_{\Delta}(w) \neq h_{\Delta'}(w)$。如果 $h_{\Delta'}(w) < h_{\Delta}(w)$，那么 $L_{\Delta'}(w) = (l(w)\ h_{\Delta'}(w)) < L_{\Delta}(w) = (l(w)\ h_{\Delta}(w))$，从而 $L_{\Delta'}(w) < L_{\Delta}(v)$（因为 v 对于 Δ 是极大的）。

现在假设 $h_{\Delta'}(w) > h_{\Delta}(w)$。这意味着 Δ' 有一个新胞腔 $\mathcal{F}$，该胞腔是纯极大的，类型为 5，并且包含 w。根据条件(ii)， $\mathcal{F}$ 包含一个顶点 u，满足 $l(u) < l(v)$。由于 $\mathcal{F}$ 是纯极大的并且包含 w，我们必须有 $l(w) \sim l(u)$。因此 $l(w) < l(v)$ 也成立，从而 $L_{\Delta'}(w) < L_{\Delta}(v)$，如所需。□

命题 *5.13* 的证明。 如果 $def_k(\Delta) \leq wdef_k(\Delta) + C$，则无需处理，因此不妨设相反的不等式成立。于是存在一个顶点 v，使得 $def_k(v) > wdef_k(v) + C$；我们称任何这样的 v 不规则。小矩阵定义（定义 5.5）中的条件 (ii) 表明，小顶点不可能是不规则的。由于我们假设 Δ 具有小边界，不规则顶点必定是内部顶点。在所有不规则顶点中，选取一个 k-亏损最大的顶点，并将其记为 v。

令 $\mathcal{G}$为 v处任意一条长度为 min(3，deg (v)) 的廊道，即 v处一条长度为 3 的廊道；若 deg (v) $= 2$，则为 v处的完整廊道。回忆一下， $|supp(\mathcal{G})| \leq C$（根据 C的定义）。由于 v是不规则的，存在互不相同的指标 $i,\ j \notin supp\,(\mathcal{G})$，使得 $col_i(v) \sim_k col_j(v)$，且 $col_i(v)$（因此 $col_j(v)$也）是受限的。于是交换映射 $C_{\mathcal{G}}(R_{ij}^{\pm 1})$ 是一种约化（选择适当的符号即可），因为它不会增大 ℓ^∞-范数，也不会增加极大列的数量，并且会增加非极大非受限列的数量。显然还可验证，此映射是 k-安全的。由于 $C_{\mathcal{G}}(R_{ij}^{\pm 1})$ 会降低 v的度，对不同的 $\mathcal{G}$反复施行此操作，经过有限次迭代后即可消除 v。

还要注意，由映射 $C_{\mathcal{G}}(R_{ij}^{\pm 1})$ 产生的新顶点的 k-亏损小于 $def_k(v)$。由于 v 是具有最大 k-亏损的非正规顶点，在对有限多个顶点应用上一段中的过程后，我们将得到一个没有非正规顶点的图 Δ'，也就是说， $def_k(\Delta') \leq wdef_k(\Delta') + C$。□

在转入命题 5.12 的证明之前，我们先陈述引理 3.8 和 3.9 的高维类似结果，它们为图映射成为约化提供了充分条件。证明与一维情形中的证明完全类似。

引理 5.19（引理 3.8 的类似结果）。 设 Δ 是一个图，且 $M = \|row_k(\Delta)\|$。则有以下结论：

（a）设 w 是 Δ 的一个顶点，设 I 是 $\{1, \ldots, n\}$ 的一个子集，并假设对于某个 $t \in I$ 有 $|w_{kt}| = M$（这里 w_{kt} 是 w 的 （k,t）-条目）。设 $\widetilde{w} \in \mathbb{Z}^n$ 满足（i）对所有 $j \notin I$ 都有 $\widetilde{w}_{kj} = w_{kj}$；（ii）对所有 $i \in I$ 都有 $|\widetilde{w}_{ki}| < M$。如果 $w' \in Mat_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 由 $\widetilde{w}$ 经过列的带符号置换得到，则 $w' < w$。（b）设 ψ： $\Delta \to \Delta'$ 是一个图映射，并假设 ψ 的每个新顶点 w' 都可以由某个旧顶点 w 按照 *(a)* 构造得到。那么 ψ 是一个约化。

引理 5.20（引理 3.9 的类似结论）。 设 ψ： $\Delta \to \Delta_1$ 是一个图映射，且 v 是 Δ 的极大顶点。以下结论成立：

（a）设 w、$w' \in Mat_{d\times n}(\mathbb{Z})$，并假设 w' 是通过将一个或多个 Δ-坏列替换为 Δ-优列而从 w 得到的。若 w 是 Δ 的一个顶点，则 $w' < v$。因此，若 ψ 的每个新顶点 w' 都以这种方式由某个旧顶点 w 得到，则 ψ 是一个约化。（b）假设对于某个 i，$col_i(v)$ 是良好的。设 u 是 Δ 的另一个顶点，除 i^{th} 列外，它与 v 一致。那么 u 的 i^{th} 列是 Δ-良好的。

我们还需要以下一个充分条件，以判定图是否为 k-安全。回想一下，如果 c 是 k向量（分别是非k向量），我们就称 $c \in \mathbb{Z}^d$ 为非受限（分别为受限）。

引理 5.21. 设 ψ 是一个图映射。假设 ψ 的每个新顶点 w 都由某个旧顶点经过以下若干操作的复合得到：

(a) 对列进行带符号置换；(b) 将一个非受限列加到（分别从）另一列上（减去），例如 $(a, b, c, x, \ldots) \mapsto (a + x, b, c, x, \ldots)$ 其中 x 是非受限的；(c) 用另一列（可能是受限列）替换一个0列；(d) 用一个非受限向量替换受限列或0列；(e) 如果该顶点有两列相同，则用0替换其中一列，例如 $(a, b, a, \ldots) \mapsto (a, b, 0, \ldots)$。

那么 ψ 是 k-安全的。

证明。 操作 (a)-(e) 不会增加最后 $d-k$ 行中任何一行的 ℓ^∞-范数，不会增加弱 k-亏损，并且保持 k-幺模性。根据观察 5.15，这对 (b) 成立；对其余操作则显而易见。因此，由这些操作复合得到的任意映射都是 k-安全的。□

现在我们开始证明命题 5.12。

命题 *5.12* 的证明。 回忆一下，$def_k(v) \le n-4C-k-1$，因此 v 至少有 $4C+k+1$ 个非受限列。于是，以下情况至少有一种成立：

(1) v 至少有 $C+k$ 个深度介于 1 和 $k-1$ 之间的列；(2) v 至少有 $C+2$ 个极大非受限列；(3) v 至少有 $C+1$ 个好列；(4) v 至少有 $C+1$ 0 列。

我们将分别考虑这 4 种情形。情形 1 和 2 较为简单，下面将具体说明如何构造一列约化来消去 v。情形 3 和 4 分别对应一维情形中的良好坐标情形和零坐标情形。在这些情形下，所需的约化映射将由单胞约化、双胞约化和三胞约化复合而成。双胞约化和三胞约化将主要像一维情形中那样，由相容的单胞约化组合得到，但我们需要对涉及 4GB 型胞腔的情形稍作修改。

在证明的其余部分，我们固定一个极大顶点 v。

观察 5.22. 顶点 v 位于内部，且至少有一列是优列 .

证明。令 $M = \|row_k(v)\|$。由于 v 是极大元，根据步骤 1 序的定义$\|row_k(v)\| = \|row_k(\Delta)\|$，因此由命题 5.12 中的假设 (b) 可得 $M \ge 2$。又由于我们还假设 Δ 具有小边界，对于 Δ 的任意边界顶点 w，都有 $\|row_k(w)\| = 1$，因此 v 必定位于内部。

由于 v 是 k-幺模的，它必有一列 c，其深度为 k，且其 k^{th} 坐标（记作 c_k）不能被 M 整除。因此， $0 < |c_k| < M$，所以根据定义， c 是良好的。□

观察 5.22 对下面情形 4 中的论证至关重要。

情形 *1*： v 至少有 $C + k$ 个深度介于 1 和 $k - 1$。

取 v 处任意长度为 min(3,deg (v)) 的廊道 $\mathcal{G}$。根据此情形的假设条件，存在互不相同的 $i, j \notin supp(\mathcal{G})$，使得 $col_i(v)$ 和 $col_j(v)$ 具有相同的深度 m，且$1 \leq m \leq k-1$，因此两个条目 $v_{m,i}$ 和 $v_{m,j}$ 均非零。

考虑交换映射 $C_{\mathcal{G}}(R_{ij}^{\pm 1})$ 和 $C_{\mathcal{G}}(R_{ji}^{\pm 1})$。这 4 个映射中至少有一个，记作 ψ，具有以下性质：对于每个新顶点 w'，都存在 $\mathcal{G}$的一个顶点 w，使得根据步骤 1 预序中的判据 (1)-(5)， w 和 w' 不可比较；对于判据 (6) 中记号里的所有 $m < t \leq k$ 和 $\|row_m^{\text{ur}}$，均有$\|row_t^{\text{ur}}(w')\| = \|row_t^{\text{ur}}(w)\|$，且 $\|row_m^{\text{ur}}(w')\| < \|row_m^{\text{ur}}(w)\|$。于是 $w' < w$，因此 ψ 是一次约化。它也是 k-安全的，因为每个新顶点都是通过引理 5.21 中的操作 (b) 从一个旧顶点得到的。

由于交换映射 $C_{\mathcal{G}}(R_{ij}^{\pm 1})$ 和 $C_{\mathcal{G}}(R_{ji}^{\pm 1})$ 会降低 v 的度，重复这一操作有限次后，我们就会消去 v。

在情形 2、3 和 4 中，我们将通过提升一个合适的一维约化 φ 来构造约化 φ^*。

情形 *2*： v 至少有 $C + 2$ 个极大非受限列。

我们按照极大坐标情形（见第 3、4 节）构造一维约化 φ。证明 φ^* 是约化的方法，与我们在第 3、4 节证明 φ 是约化的方法完全相同。与情形 1 一样，每个新顶点都是从一个旧顶点通过引理 5.21 中的操作 (b) 得到的，因此 φ^* 也是 k-安全的。

情形 *3*： v 至少有 $C + 1$ 个优列。本情形的大部分工作将用于构造单胞约化。完成后，我们将说明如何对多单元约化的定义稍作修改（与一维情形中的定义相比）。

因此，固定一个包含 v 的胞腔 $\mathcal{F}$。与一维情形一样，我们将指定一个小集合 I（取决于 $\mathcal{F}$ 的类型），使得约化映射的替换图支撑在 I 上。我们可以对列重新排列，使第一列为极大列，第四列为优列，且 $4 \notin supp$（$\mathcal{F}$）（由于 $|supp$（$\mathcal{F}$）$| \leq C$，最后一个条件可以满足）。此外，我们还可以假设 v 的第一列和第四列的 k^{th} 坐标为正。

还需回顾一下， $\mathcal{F}_I$ 和 v_I 分别表示 $\mathcal{F}$ 和 v的 I-迹。

首先，假设 $\mathcal{F}$ 的类型不是 4GB、5GA 或 5GB。与情形 2 类似，我们按照良好坐标情形（见第 3、4 节）构造一维约化 φ。通过直接的逐情况验证， φ^* 的每个新顶点 w' 都满足以下 2 个条件：

（1） w' 由某个旧顶点 w 得到，或者如引理5.19(a)中所述，或者通过将一个 0 列替换为 Δ-优列（这是引理 5.20(a)中条件的特殊情形）；（2） w' 由某个旧顶点 w_1 得到（其可能不同于（1）中的 w ），方法是向另一列添加/从另一列减去一个非受限列（引理5.21中的操作（b））。

条件 (1)、引理5.19(b) 和引理 5.20(a) 意味着 φ^* 是一个约化，而 (2) 和引理 5.21 意味着 φ^* 是 k- 安全的。

4GB 型。接下来考虑 $\mathcal{F}$ 具有 4GB 型的情形。与一维情形一样，我们设定 $I = \{1, 2\}$，并假设 $v_I = (a,\ b)$ 以及 $\mathcal{F}$ 的另外三个顶点具有 I-迹，分别为 $(a-b,\ b)$、$(a-c,\ b)$ 和 $(a-b-c,\ b)$。

若 $b_k \neq 0$，我们如图25所示定义 φ。根据引理5.21(b)，映射 φ^* 是 k-安全的，并且可以完全按照一维情形证明 φ^* 是一个约化。另一方面，若 $b_k = 0$，则 $\mathcal{F}$ 的所有顶点的第一列都具有非负的 k^{th} 坐标，因此交换映射 $C(R_{41})$ 是一个约化。根据引理 5.21(b)，此映射也是 k-安全的。

类型*5GA*。与一维情形一样，我们令 $I = \{1, 2\}$，并假设 $v_I = (a,\ b)$ 及 $\mathcal{F}$ 的其他三个顶点具有 I-迹 $(a+b,\ b)$、$(a+c,\ b)$ 和 $(a+b+c,\ b)$。我们如图10所示定义 φ。根据引理5.21(b)，映射 φ^* 是 k-安全的，因此我们只需证明 φ^* 是一个约化。

如果 $b_k \neq 0$ 或 b 是非受限的，我们可以像在一维情形中那样论证，证明对于 φ^* 的每个新的顶点 w，都有 $w < v$，因此根据引理5.18，φ^* 是一个约化。如果 $c_k \neq 0$ 或 c 是非受限的，我们可以交换2^{nd} 列和 3rd 列的角色来构造一个约化。

因此，剩下的情形是 $b_k = c_k = 0$、b 和 c 都是受限的。此时，胞腔 $\mathcal{F}$ 是纯极大的，因此 $h_\Delta(v) > 0$。我们将使用引理 5.17。令$\Delta_{new} = \varphi^*(\Delta)$。先验证条件(i)。若 w 是 φ^* 的一个新顶点，则 $w < v$，除非 $w_I = (a+b, b+d)$ 或 $w_I = (a+b+c, b+d)$，在这两种情况下，$l(w) \sim l(v)$。假设 w 是后两个顶点之一。图 Δ_{new} 恰有一个包含 w 的类型5胞腔 $\mathcal{F}_5$，其顶点的 I-迹为 $(a+b, b+d)$、$(a+b+c, b+d)$、$(a-d, b+d)$ 和 $(a+c-d, b+d)$。若 z 是最后两个顶点中的任意一个，则 $z < w$，所以 $\mathcal{F}_5$ 不是预极大的。因此 $h_{\Delta_{new}}(w) = 0$，所以 $L_{\Delta_{new}}(w) < L_\Delta(v)$，从而条件(i)成立。

映射 φ^* 有 2 个类型5的新胞腔，其中一个是 $\mathcal{F}_5$。我们已经验证了 $\mathcal{F}_5$满足条件 (ii)，对另一个胞腔验证 (ii) 的方法类似。因此，根据引理 5.17，φ^* 是一次约化。

类型 *5GB*。与一维情形一样，我们令 $I = \{1, 2, 3\}$，并假设$v_I = (a,\ b,\ c)$以及 $\mathcal{F}$的另外三个顶点具有 I-迹 $(a,\ b-a,\ c)$、$(a,\ b,\ c-a)$和$(a,\ b-a,\ c-a)$。我们考虑 4 种子情形。

子情形 *1*：b 是非受限的。在这种情况下，我们像一维情形中那样定义 φ。φ^* 的每个新顶点都可以通过将非受限的第二列 b 加到其他列或从其他列中减去，并进行列的带符号置换，从某个旧顶点得到，因此根据引理 5.21，φ^* 是 k-安全的。可以像一维情形中那样证明，φ^* 是一次约化。

子情形 2：b 受限，$b-a$ 非受限。注意，在此子情形中，a 也必须受限。我们再次按照一维情形中的定义定义 φ。经过列的带符号置换后，φ^* 有 3 个新顶点，其 I-迹分别为 $(a-b, b, c)$、$(a-b, b, b+c-a)$ 和 $(a-b, b, c-a)$。第一个顶点由旧顶点 $(a, b, c, *)$ 通过将受限的第一列 a 替换为 $a-b$（根据假设，该列是非受限的）得到。第三个顶点以同样的方式由旧顶点 $(a, b, c-a, *)$ 得到。最后，第二个顶点由 $(a, b, c, *)$ 通过将受限的第一列 a 替换为 $a-b$，再从第三列中减去非受限的第一列 $a-b$ 得到。所有这些操作都来自引理 5.21 中的列表，因此 φ^* 是 k-安全的。与子情形 1 中一样，根据与一维情形中相同的论证，φ^* 是一次约化。

类型5，GB，高维情形： $l(\partial\mathcal{F}) = [R_{12}, L_{13}]$

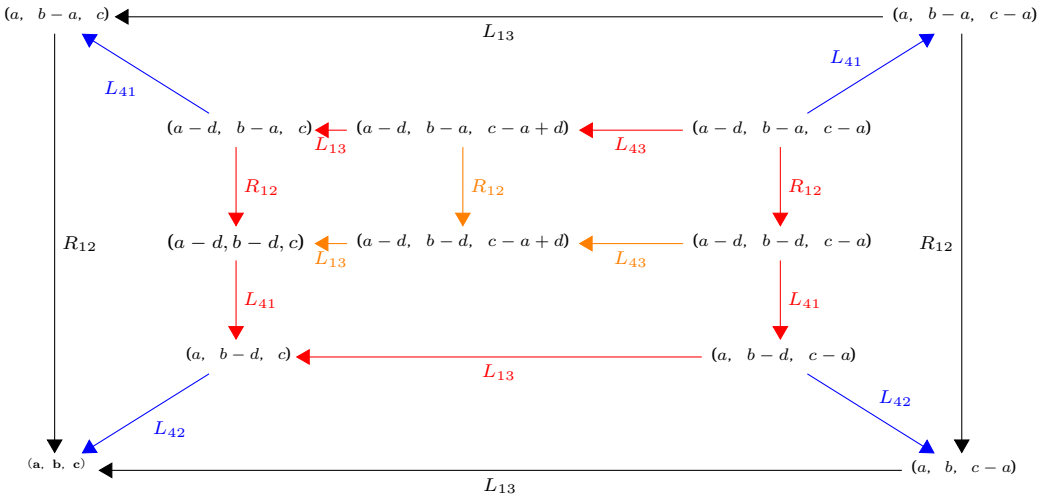


FIGURE 36. 这里只列出了前三个坐标

子情形 *3*： c 或 $c-a$ 是非受限的。通过交换 2nd 列和 3rd 列的作用，此子情形可约化为子情形 1 和 2。

子情形*4*： b，c，$b-a$和 $c-a$均为受限的。在这种情况下，我们通过图36中给出的一个完全不同的图来定义 φ^*。这里，d表示 $\mathcal{F}$ 顶点的公共 4th 列。根据对称性，不妨设 b 和 c 均为非极大的，或 b 为极大的。

根据引理5.19(a)，所有首列为 $a-d$ 的新顶点都小于 v。若 b 是极大顶点，则其余两个新顶点（其前两列分别为 a和 $b-d$）也同样如此，因此根据引理5.19(b)，φ^* 是一个约化。另一方面，若b 和 c 都不是极大顶点，则不难验证胞腔 $\mathcal{F}$ 是纯极大的，并且我们可以仿照类型5GA证明 φ^* 是一个约化。

多胞腔约化。 现在我们讨论双胞腔约化和三胞腔约化构造中的一处细微改动。它只影响类型GB（群 IAC$_n$、d 的良好坐标情形）。回顾一下，v 是一个固定的极大顶点，至少有 $C+1$ 个优列，并且 v 的首列是极大的，且具有正的 k^{th} 坐标。

与一维情形一样，我们可以推进到这样一个阶段：所有包含 v 的剩余胞腔要么是类型4、类型7，要么不是本质的。然而，在下一步（其一维对应情形已在§ 4.3中描述）我们需要格外谨慎，因为高维情形中对类型4GB胞腔的单胞约化定义取决于额外数据。

引入以下定义将很方便。

定义5.23。 设 e 是一条包含 v 的边，其中 $l(e) = R_{i1}$ 或 L_{i1}，且对于某个 i成立。如果 v 的 i^{th} 列的 k^{th} 坐标为0，我们就称 e 对 v 有问题。

如果 v 没有问题边，我们就可以继续这一过程，最终像一维情形那样消去 v。另一方面，如果 e 是一条问题边，而 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 是包含 v 的两个胞腔，那么 $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ 所有顶点的第一列的第一坐标均非负。因此，如果 j 是任意一个不属于

$supp(\mathcal{G})$ 的良好指标，那么 $C_{\mathcal{G}}(R_{j1}^{\pm 1})$ 就是一次双胞腔约化（选择适当的符号），它将 e 替换为一条没有问题的边。有限次应用此操作后，我们便可以消去所有问题边，然后像之前一样继续。这就完成了情形 3 的证明。

情形 *4*： v 至少有 $C+1$ 0列。

这里， v 至少有一列优列这一点至关重要（见上文观察 5.22）。与情形 3 不同，我们只描述单胞约化，因为多单元约化的构造没有非平凡的变化。因此，我们固定一个包含v的胞腔 $\mathcal{F}$ 。与一维情形一样，我们可以假设第一列是具有正 k^{th} 坐标的优列，第四列为零，并且 $4 \notin supp(\mathcal{F})$。

在继续之前，我们先引入一个技术定义。

定义 5.24。 设 ψ 是一个图映射，且 $1 \leq i \leq n$。如果对于 ψ 的每个新顶点 w' ，都存在一个旧顶点 w ，使得 $col_i(w) = 0$ ，并且 w' 可由 w 在 c 是 ψ的某个旧顶点的列的情况下，将 i^{th} 列中的 0 替换为 c 得到，则称 ψ 为一个ZS_i-映射（其中 ZS 表示零替换）。如果 ψ 是一个 ZS_i 映射，则新顶点的 i^{th} 列的集合称为 ψ 的替换集，并记作$Sub_i(\psi)$。

下面给出一个简单判据，用于判断映射 a ZS_i 是否为 k-安全映射以及是否为约化。

观察 5.25. 设 ψ 是一个 ZS_i 映射。

(a) 如果 $Sub_i(\psi)$ 的每个元素都是非受限的，那么 ψ 是 k-安全的。

(b) 如果 $Sub_i(\psi)$ 的每个元素都是良好的，那么 ψ 是一个 k-安全约化。

证明。 (a) 由引理 5.21 得出，因为 (a) 的假设意味着 ψ 的每个新顶点都是通过引理 5.21 陈述中的 (d) 类操作从一个旧顶点得到的。(b) 根据 (a)， ψ 是 k-安全的；根据引理 5.20(a)，它是一个约化。□

注。 即使观察 5.25 的两个部分都不适用于映射 a ZS_i ψ，仍然可以用同样的思路，简化验证 ψ 是约化或 ψ 是k-安全的过程。特别地，若 $\psi\colon \Delta \to \Delta_1$ 是一个 ZS_i 映射，且 v 是 Δ 的一个极大顶点，要证明 ψ 是约化，只需检查每个带有受限 i^{th} 列的新顶点 w 是否满足 $w < v$ 。同样，要证明 ψ 是 k-安全的，只需检查每个带有受限 i^{th} 列的新顶点能否通过引理 5.21 中的操作从一个旧顶点得到。

在一维情形中，我们在零坐标情形下使用的单胞约化 φ 是一种映射，但 5ZA 类型除外。此外，我们能够利用观察 5.25(b) 证明 φ 是一种约化（尽管我们没有正式引用后者）。

我们继续证明命题 5.12。固定一种胞腔类型，并令 φ 为一维情形中用于该类型的约化；与之前一样，令 φ^* 为 φ的提升。除 5ZA 类型外， φ是一个 ZS_4 映射，因此 φ^* 也是一个 ZS_4 映射。直接验证可知，对于大多数胞腔类型， $Sub_4(\varphi^*)$ 的所有元素都是良好的（这也可以完全按照一维情形中的方法证明），因此根据观察 5.25(b)， φ^* 是一个 k-安全约化。唯一的例外是类型 1ZA、2ZA、2ZB、3ZB 和类型 5ZB（此外还有我们之前排除的 5ZA 类型），下文将分别讨论这些类型。

对于类型 1ZA、2ZA、2ZB、3ZB，我们将使用相同的映射 φ^*，但为了证明 φ^* 是一个k-安全约化，我们将采用观察 5.25 后的注记，而非观察 5.25 本身。对于类型 5ZB，我们将对一维情形中使用的映射稍作修改，但其余论证仍将十分相似。

最后，5ZA 类型无需特殊处理，我们可以像在一维情形中那样使用相同的 φ。尽管在此情形下 φ^* 不是一个 ZS_4 映射，但可以像在一维情形中那样证明， φ^* 是一个 k-安全约化。□

例外类型（情形 4）

在下文的讨论中，称 $\mathbb{Z}^d$ 的一个元素为良好（分别为坏），是指它是 Δ-良好的（分别为 Δ-坏的）。另请回忆， v 表示 $\mathcal{F}$ 的（选定的）极大顶点，并且我们假设 col_1（v）是良好的，而 col_4（v）$=0$。

对于 1ZA、2ZA、2ZB 和 3ZB 类型，在一维情形下，我们对约化映射的定义取决于 v 的某个特定坐标是良好还是坏（即，1ZA、2ZA 和 3ZB 类型取决于 3rd 坐标，2ZB 类型取决于 2nd 坐标）；当该坐标良好时，我们证明了某个交换映射是约化。类似的论证表明，在高维情形下，只要 v 中相应的列是良好的，同一个交换映射就是一个 k-安全约化，因此从现在起我们假设

- 对于 1ZA、2ZA 和 3ZB 类型， v 的第 3rd 列是坏的，并且
- 对于 2ZB 类型， v 的第 2nd 列是坏的。

1ZA 型， $I=\{1,2,4\}$。如图 16 所示，我们要替换的胞腔 $\mathcal{F}$（即 φ^* 的定义域）有 5 个顶点，其 I-迹分别为 $(a,b,0)$、$(a+b,b,0)$、$(a+b,b+c,0)$、$(a+b+c,b+c,0)$ 和 $(a,b+c,0)$。φ^* 的替换集是 $\{a,a+b,a+b+c\}$。

先假设 v 是第二列为 $b+c$ 的三个顶点之一。由于这三个顶点仅第一列不同，且 v 有良好的第一列，根据引理 5.20(b)，这个三元组中的另外两个顶点也必定有良好的第一列。因此，a、 $a+b$ 和 $a+b+c$ 都是良好的，由观察 5.25 即可得证。

现在考虑剩余情形： $v_I=(a,\ b,\ 0)$ 或 $(a+b,\ b,\ 0)$。与上一段中的论证相同， a 和 $a+b$ 都是良好的。还要记住，根据最初的假设， c 是坏的。若 c 是非受限的，那么 $a+b+c$ 也是良好的，结论即得；因此不妨假设 c 是受限的，此时 $a+b+c$ 和 $b+c$ 也都是受限的。在这种情形下， φ^* 有 2 个带有新的受限列的新顶点（即受限的 4th 列）： $u_1=(a+b+c,\ b+c,\ c,\ a+b+c,\ *)$ 和 $u_2=(a+b,\ b+c,\ c,\ a+b+c,\ *)$。根据观察 5.25 后的注记，要完成证明，只需验证

(i) u_1 和 u_2 均通过使用引理 5.21 中的操作由一个旧顶点得到（这将证明 φ^* 是 k-安全的）；(ii) $u_1<v$ 和 $u_2<v$ （这将证明 φ^* 是一个约化）。

为证明 (i)，我们只需注意到， u_1 是通过将旧顶点 $u_0=(a+b+c,\ b+c,\ c,\ 0,\ *)$ 的 4th 列中的 0 替换为 $a+b+c$ 而得到的（引理 5.21 中的操作 (c)），而 u_2 则是通过先将同一顶点 u_0的 4^{th}列中的 0 替换为良好向量 $a+b$（操作 (d)），再进行坐标置换（操作 (a)）而得到的。

现在证明 (ii)。回顾一下， $a+b+c$和 $b+c$ 都受限。特别地，$(a,\ b+c,\ 0)$ 和 $(a+b,\ b+c,\ 0)$ 都是 $\mathcal{F}_I$ 的顶点，且前两列中有一列受限。由于 v 的前两列都是非受限的，第一列良好，而 v 是极大的，唯一的可能性是 v 的第二列（我们知道它

等于 b）是极大的。因此， $b_k = \pm M$，且不失一般性，我们可以假设 $b_k = M$。

由于 $(u_1)_I = (a+b+c, b+c, a+b+c)$ 且 $(u_2)_I = (a+b, b+c, a+b+c)$，要证明 (ii)，只需证明列 $a+b$、 $b+c$ 和 $a+b+c$ 均不是极大列（因为我们已经证明 v 的第二列是极大的）。我们已经知道 $a+b$ 是良好的（因此不是极大的）。如果 $b+c$ 是极大的，那么 $v_I < (a+b+c, b+c, 0)$，这就产生了矛盾。最后，假设 $a+b+c$ 是极大的。由于 b 是极大的，而 a 是良好的（特别地，不是极大的），$(a+b+c)_k = M$，从而 $c_k = -a_k$。由于 $(a+b)_k = M + a_k$ 且 $(b+c)_k = b_k + c_k = M - a_k$ 且 $(a+b)_k$，$(b+c)_k \leq M$，我们必有 $a_k = 0$，这与 a 是良好的假设相矛盾。

对于 2ZA、2ZB 和 3ZB 类型，可以证明如下定义的映射 φ^* 是 k-安全的，这与 1ZA 类型的情况类似。因此，对于这些类型，我们只解释为什么 φ^* 是一种约化。

2ZA 类型， $I = \{1, 2, 4\}$. $\mathcal{F}_I$ 的顶点为 $(a,\ b,\ 0)$、$(a+c,\ b,\ 0)$、$(a,\ a+b,\ 0)$、$(a+c,\ a+b,\ 0)$ 和 $(a+c,\ a+b+c,\ 0)$，并且我们假设 c 是坏的。我们按照图 17 定义 φ，使得 $Sub(\varphi^*) = \{a, a+c\}$。

如果 v_I 等于上述列表中的前 4 个顶点之一，按照 1ZA 类型的论证，我们可以得出 a 和 $a+c$ 都是良好的，因此结论成立。所以从现在起，假设 $v_I = (a+c,\ a+b+c,\ 0)$。这意味着 $a+c$ 是良好的。由于 c 是坏的，如果它也是非受限的，那么 $a = (a+c) - c$ 是良好的，结论成立。因此，假设 c 是受限的；在这种情况下， a 也受限。

唯一以 a 作为其 4th 列的新顶点，其 I迹为（$a,\ b,\ a$）、（$a,\ a+b,\ a$）和（$a+c,\ b,\ a$）。要证明这些顶点是 $< v$，只需证明 v_I 有一列是极大的，而 $a,\ b$ 和 $a+b$ 都不是极大的（我们已经知道 $a+c$ 是良好的，因此不是极大的）。

由于 a 是受限的，而 $a+c$ 是非受限的，（$a,\ b,\ 0$）的受限列比 $v_I =$（$a+c,\ a+b+c,\ 0$）多。由于 v 是极大的且其第一列良好，只有在 a 和 b 不是极大、而 $a+b+c$ 是极大时，这才可能成立。并且如果 $a+b$ 是极大的，那么我们有 $v_I =$（$a+c,\ a+b+c,\ 0$）$<$（$a,\ a+b,\ 0$），这就产生了矛盾。因此， $a,\ b$ 和 $a+b$ 都不是极大的，而 $a+b+c = col_2(v)$ 是极大的，正如所需。

2ZB 型， $I = \{1, 3, 4\}$。 $\mathcal{F}_I$ 的顶点为（$a,\ c,\ 0$）、（$a+b,\ c,\ 0$）、（$a,\ a+b+c,\ 0$）、（$a+b,\ a+b+c,\ 0$）和（$a,\ b+c,\ 0$），这次我们假设 b 是坏的。我们将使用图映射 φ^*，其中 φ 由图31给出。因此， $Sub(\varphi^*) = \{a, a+b\}$。

如果 v_I 等于（$a,\ b+c,\ 0$）以外的任意顶点，那么根据引理 5.20(b)， a 和 $a+b$ 是良好的，我们就完成了。现在假设 $v_I =$（$a,\ b+c,\ 0$），此时 a 仍然是良好的。由于 b 是坏的，如果它也是非受限的，那么 $a+b$ 就是良好的，因此我们同样可以得出结论。因此，我们可以假设 b 是受限的，这意味着 $a+b$ 也是受限的。以 $a+b$ 为其 4th 列的新顶点只有两个，其 I-迹分别为（$a+b,\ c,\ a+b$）和（$a+b,\ a+b+c,\ a+b$）；只需证明 $v_I =$（$a,\ b+c,\ 0$）具有极大列，而 $a+b,\ c$ 和 $a+b+c$ 都不是极大的。

注意，$(a+b,\ a+b+c,\ 0)$ 的受限列比 $v_I = (a,\ b+c,\ 0)$ 多（因为 $a+b$ 受限，而 a 不受限，因此 $a+b+c$ 和 $b+c$ 要么都受限，要么都不受限）。由于 $(a+b,\ a+b+c,\ 0) \leq (a,\ b+c,\ 0)$，这意味着 $(a,\ b+c,\ 0)$ 的极大列比 $(a+b,\ a+b+c,\ 0)$ 多。又因为 a 是良好的（因而是非极大的），我们得出 $b+c$ 是极大的，而 $a+b$ 和 $a+b+c$ 不是极大的。如果 c 不是极大的，那么结论成立，因此假设 c 是极大的。由于 $b+c$ 也是极大的，且 $|b_k| \leq M$，我们

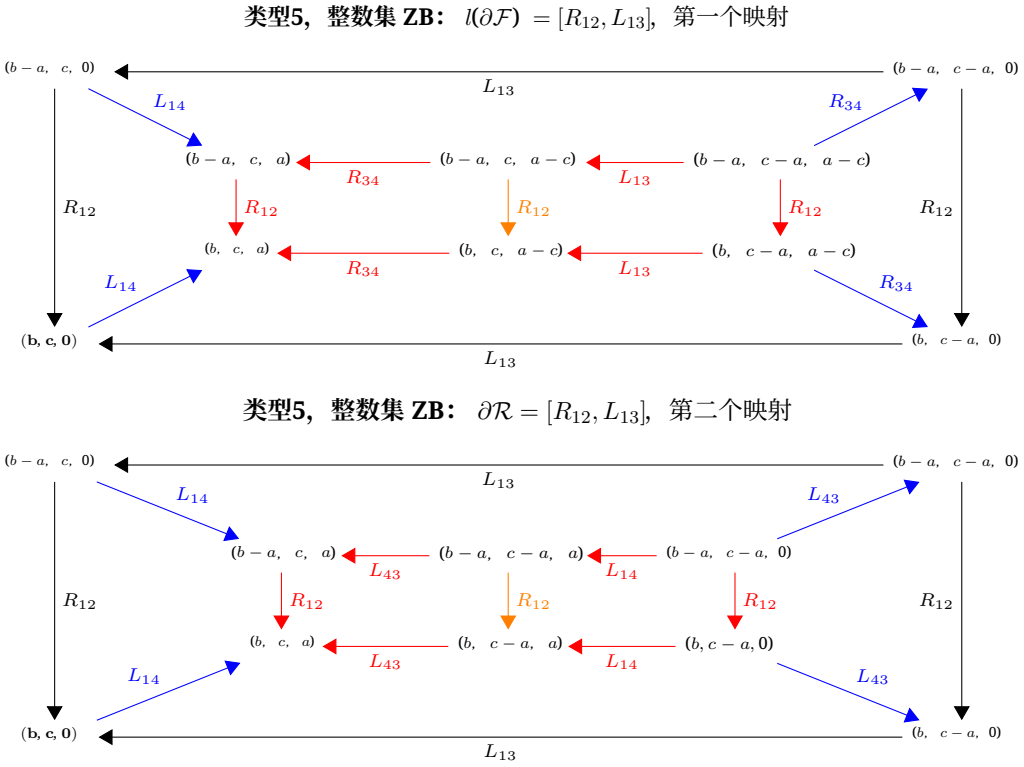


FIGURE 37. 两种情况下列出的都是坐标 2、3 和 4

有 $(b+c)_k = c_k$，由此 $b_k = 0$。但此时 $(a,\ b+c) < (a+b,\ c)$，因为这两个顶点的极大列数相同，而 $(a+b,\ c)$ 的受限非极大列数至少与 $(a,\ b+c)$ 一样多，且优列更少。这个不等式与假设 $v_I = (a,\ b+c,\ 0)$ 矛盾。

3ZB 型，$I = \{1,2,4\}$。$\mathcal{F}_I$的顶点为 $(a-c,\ b,\ 0)$、$(a,\ b,\ 0)$、$(a+b,\ b,\ 0)$、$(a+b,\ b+c,\ 0)$ 和 $(a-c,\ b+c,\ 0)$，并且我们假设 c是坏的。我们将使用图映射 φ^*，其中 φ 由图32给出。因此，$Sub(\varphi^*) = \{a, a+b, a-c\}$。

如果 $v_I = (*,\ b,\ 0)$，那么根据引理 5.20(b)，a，$a+b$，$a-c$均为良好，我们便完成了。因此，设 $v_I = (*,\ b+c,\ 0)$，此时 $a+b$和 $a-c$仍然是良好的。由于 c是坏的，若它同时也是非受限的，那么 $a = (a-c) + c$就是良好的，我们便完成了。

因此，我们可以假设 c 是受限的。由于 $a+b$ 和 $a-c$ 良好，$b+c = (a+b)-(a-c)$ 是非受限的；另一方面，$a = (a-c)+c$ 和 $b = (b+c)-c$ 都必须是受限的。由于 $(a,b,0)$ 不可能严格大于 v_I 和 $v_I = (x, b+c, 0)$，且其中 $x \in \{a+b, a-c\}$ 良好，因此 $b+c$ 必须是极大的，而 a 和 b 则不是极大的。我们还知道 $a+b$ 良好（因此是非极大的）。于是，$(a+b,b,a) < v_I$，且 $(a,b,a) < v_I$（因为 $col_2(v) = b+c$ 是极大的）。由于 $(a+b,b,a)$ 和 (a,b,a) 恰好是新顶点的 I-迹，且这些新顶点以 a 为其 4th 列，证毕。

类型 *5ZB*，$I = \{2,3,4\}$。与一维情形不同，我们将根据 a、b 和 c 的值，使用图 37 所示的两个不同映射之一。第一个映射是图34中映射的提升；我们在一维情形中将其用于类型 5ZB。

与一维情形中一样，我们可以假设 $v = (a、\ b、\ c、0、\ *)$，因此特别地，a是良好的。

首先，假设 c 是非受限的，因此 $a-c$ 也是非受限的。若 $a-c$ 是坏的，则 $c = a-(a-c)$ 是良好的，从而 $(a,\ b,\ c,\ 0,\ *) < (a,\ b,\ c-a,\ 0,\ *)$，这就产生了矛盾。因此，$a-c$ 是良好的，故图 37 中第一个映射是一个 k-安全约化，这由观察 5.25(b) 得出。

若 b 是非受限的，我们可以交换第二列和第三列的角色，应用同样的论证。现在假设 b 和 c 都是受限的（因此 $b-a$ 和 $c-a$ 也都是受限的）。由对称性，不妨再假设 b 和 c 都是非极大的，或者 c 是极大的。我们将证明图 37 中的第二个映射（记作 φ^*）是一个约化。根据观察5.25(a)，此映射也是 k-安全的。

我们有 $Sub_4(\varphi^*) = \{a, 0\}$。回忆一下，$a$ 是良好的，而 φ^* 中第四列为 0 的唯一新顶点具有 I-迹 $(b,\ c-a,\ 0)$ 和 $(b-a,\ c-a,\ 0)$。如果 c 是极大的，则根据引理5.19(a)，这两个顶点都是 $< v$，于是结论成立。而如果 b和 c 都不是极大的（并且根据先前的假设受到限制），胞腔 $\mathcal{F}$ 是纯极大的，在这种情况下，φ^* 是一个约化，理由与类型5GA中的相同。

5.3. **步骤 2**。步骤 2 的主要结果如下定理所述：

定理 5.26 (步骤 2)。*存在一个超阿廷序（称为步骤 2 序），具有以下性质。对于满足步骤 1 结论的任意图 Ω'，存在一个 k-安全约化 $\Omega' \to \Omega''$（相对于步骤 2 序），使得 Ω'' 是 $(k-1)$-幺模的。*

在定义步骤 2 序之前，我们先在 $\mathbb{Z}^m$ 的子群集合上引入一个全序 $\prec$（下文会对 m 的不同取值使用此序）。具体定义对我们的目的并不重要，证明中相关的性质只有

(i) $\prec$ 将序按包含关系细化；
(ii) $\prec$ 是诺特的（即不存在无限严格递增链）。

首先，对每个 $t \in \mathbb{N}$，在 $\mathbb{Z}^t$ 上选取一个细化 ℓ^1-范数的全序。由于 ℓ^1-球是有限的，该序自动满足阿廷条件。

现在，设 A 是某个 m 对应的 $\mathbb{Z}^m$ 的非零子群，并设 $r = rk(A)$。将 $\mathbb{Z}^m$ 中元素的 r-元组视为 $\mathbb{Z}^{mr}$ 的元素，定义 A 的范数，记作 $N(A)$，为由线性无关向量组成的 A 中最小的 r-元组（关于上述 $t = mr$ 对 $\mathbb{Z}^t$ 所取的序）。给定两个子群 A 和 A'，若 $rk(A) < rk(A')$，或 $rk(A) = rk(A')$ 且 $N(A') < N(A)$，则规定 $A \prec A'$。剩下的工作是定义固定秩和固定范数的子群集合上的序。

固定 $r \in \mathbb{N}$ 和一个由线性无关向量组成的 r 元组 S。那么，任何秩为 r 且范数为 S 的子群都包含 $\mathbb{Z}S$（S 的 $\mathbb{Z}$-张成），并且包含于 $\mathbb{Q}S \cap \mathbb{Z}^m$ 中。由于 $\mathbb{Z}S$ 是 $\mathbb{Q}S \cap \mathbb{Z}^m$ 的有限指数子群，这类子群构成的子集是有限的，我们在该子集上任取一个与包含序相容的顺序。至此，我们在 $\mathbb{Z}^m$ 的子群集合上定义了一个全序；显然，根据构造，它满足上文的 (i) 和 (ii)。

接下来，我们介绍顶点 v 的活跃子群和半活跃子群的概念，分别记为 $A(v)$ 和 $SA(v)$：

定义 5.27。设 $v \in Mat_{d\times n}(\mathbb{Z})$。由 v 的 $(k-1)$-列生成的 $\mathbb{Z}^{k-1}$ 的子群称为活跃子群，记作 $A(v)$。

注。图 Ω 是 $(k-1)$-幺模的，当且仅当对于每个 $v \in V(\Omega)$，都有 $A(v) = \mathbb{Z}^{k-1}$。

现在我们定义 v 的半活跃子群，记为 $SA(v)$。

定义 5.28. 考虑 $\mathbb{Z}^k$ 上的等价关系 $\sim$，其中 $y \sim z \iff y - z \in A(v)$。

(a) k-向量的一个等价类若不属于 $A(v)$（即其元素的深度恰为 k），且 v 至少包含该类中的 $C+1$ 列（这些列作为 $\mathbb{Z}^d$ 的元素不必互不相同），则称该等价类为频繁。
(b) 半活跃子群 $SA(v)$ 是由 $A(v)$ 以及所有来自频繁类的列生成的子群（显然，每个类只需取一列即可）。因此，$A(v) \subseteq SA(v) \subseteq \mathbb{Z}^k$。

与步骤 1 一样，新序将考虑受限列的数量。在这一步中，优列不起任何作用。事实上，根据假设，Ω' 的所有顶点（即步骤 1 结束时得到的图）都有范数为 1 的 k^{th} 行，因此不可能包含任何优列。相反，我们将追踪有利列的数量：

定义 5.29。令 $v \in Mat_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 和 $c \in \mathbb{Z}^d$。我们称
(*) c 是 v-有利的，如果 c 是非受限的且 $c \notin SA(v)$;
If c 是 v 的一个列，且 c 是 v-有利的，我们称 c是 v的一个有用列 .

现在我们可以定义顶点上的新序了。和之前一样，我们依次应用以下标准来比较两个顶点（只要某个标准适用，就立即停止比较）。

步骤 2 序： 类似于步骤 1 序，我们首先根据顶点标签定义步骤 2 预序：

(1) 活跃子群较大的顶点较小。(2) 半活跃子群较大的顶点较小。(3) 有用列数量较大的顶点较小。(4) ($k-1$)-列数量较大的顶点较小。(5) 受限列数量较少的顶点较小。(6) 向量的值较小的顶点 v

$$(\|row_k(v^{\text{ur}})\|_1, \|row_{k-1}(v^{\text{ur}})\|_1, \dots, \|row_1(v^{\text{ur}})\|_1)$$

（按照字典序）更小。此处的 v^{ur} 定义同步骤 1 序。

现在，我们按照步骤 1 中的方式，完全基于此预序定义步骤 2 序；唯一不同的是，预极大顶点和纯极大胞腔的概念现在是相对于步骤 2 预序而言的。与步骤 1 不同，步骤 1 中使用扩展标签来处理 5GA、5GB 和 5ZB 类型的胞腔，而步骤 2 中仅在类型 5ZB 时需要扩展标签。

我们的目标是证明以下命题：

命题 5.30。设 Λ 是一个 k-幺模图，但不是 $(k-1)$-幺模图。还假设 $def_k(\Lambda) \leq n - (C^2+3C+k+3)$ 且 $\|row_k(\Lambda)\| = 1$。那么，对于 Λ 中相对于步骤 *2* 序极大的任意顶点 v，都存在一个 k-安全约化 $\Lambda \to \Lambda'$，它消去 v。

在证明命题 5.30 之前，我们先由此推导出定理 5.26。

定理 *5.26* 的证明。根据假设，Ω' 满足定理 5.11 的结论，因此$\|row_k(\Omega')\| = 1$ 且 $def_k(\Omega') \leq d - k + 2C$。由于 $d \leq n - (C^2+6C+3)$，我们有

$def_k(\Omega') \leq n - (C^2 + 4C + k + 3)$。因此，要么 Ω' 是 $(k-1)$-幺模的，无须证明；要么命题 5.30 适用于 $\Lambda = \Omega'$。下面讨论后一种情况。

设 Λ_1 是对 Ω' 应用命题 5.30 后得到的图，并设 Λ_2 是对 Λ_1 应用命题 5.13 后得到的图（可能有 $\Lambda_2 = \Lambda_1$），因此 $def_k(\Lambda_2) \leq wdef_k(\Lambda_2) + C$。命题 5.13 只断言映射 $\Lambda_1 \to \Lambda_2$ 是相对于步骤 1 序的约化，但从证明可立即得出，该映射也是相对于步骤 2 序的约化，因此复合映射 $\Omega' \to \Lambda_2$ 也是相对于步骤 2 序的约化。

根据构造，复合映射 $\Omega' \to \Lambda_2$ 是 k-安全的，因此我们有 $\|row_k(\Lambda_2)\| \trianglelefteq \|row_k(\Omega')\| = 1$（因此 $\|row_k(\Lambda_2)\| = 1$，因为幺模图不可能有零行），并且

$$wdef_k(\Lambda_2) \leq wdef_k(\Omega') \leq def_k(\Omega') \leq n - (C^2 + 4C + k + 3),$$

由此 $def_k(\Lambda_2) \leq n - (C^2 + 3C + k + 3)$。因此，要么 Λ_2 是 $(k-1)$-幺模的（这样就完成了），要么我们可以对 $\Lambda = \Lambda_2$ 应用命题 5.30 并继续进行。

由于步骤 2 序是阿廷的，根据引理 2.14，该过程将在有限步后终止；也就是说，我们将得到一个 $(k-1)$-幺模的图，记作 Ω''。

所得到的映射 $\Omega' \to \Omega''$ 是 k-安全约化（相对于步骤 2 序）的复合，因此其本身也是 k-安全约化，正如所需。□

接下来，我们陈述并证明引理 5.19 和 5.20 的恰当对应命题，它们将适用于步骤 2 序。引入另一条技术定义会很方便。

定义 5.31。设 v，$w \in \mathbb{Z}^d$。若 w 满足以下条件之一，我们称其为 v-软的：要么 $A(w) > A(v)$，要么 $A(w) = A(v)$，但 $S(w) > S(v)$。

等价地，若 $w < v$（相对于步骤 2 预序），且该不等式可用步骤 2 预序中的前两个判据之一检验，则 w 是 v-软的。

引理 5.32。设 Δ 是一个图，v 是 Δ 的一个极大顶点，J 是 $\{1, \dots, n\}$ 的一个子集。设 w 是 Δ 的任意顶点，使得对所有 $i \notin J$，$col_i(w) = col_i(v)$。以下结论成立：

(a) 若对所有 $j \in J$，$col_j(w)$ 都是受限的，则对所有 $j \in J$，$coi_j(v)$ 都是受限的。(b) 假设对所有 $j \in J$，$col_j(v)$ 都是有利的。那么，要么 w 是 v-软的，要么 $S(v) = S(w)$，并且对所有 $j \in J$，$col_j(w)$ 都是 v-有利的。

注。我们将主要在 $|J| = 1$ 的情形下应用引理 5.32。

证明。(a) 设 $j \in J$。由于 $col_j(w)$ 受限，因此它不会对 w 的活跃子群或半活跃子群、有用列的数量或 $(k-1)$-列的数量作出贡献。由于对于所有 $i \notin J$，$col_i(w) = col_i(v)$，我们无法使用步骤 2 序的前 4 个判据证明 $w > v$。此外，如果对于某个 $j \in J$，$col_j(v)$ 是非受限的，那么 w 的受限列比 v 多，因此 $w > v$（根据步骤 2 序中的判据 5），矛盾。

(b) 假设 w 不是 v-软的。由于 v 是极大顶点，我们必有 $A(w) = A(v)$且$S(w) = S(v)$。若对于某个 $j \in J$，$col_j(w)$不是 v-有用的，那么它也不是 w-有用的（因为$S(w) = S(v)$），因此 w 的有用列少于 v，从而 $w > v$（根据步骤 2 序中的判据 3），矛盾。□

引理 5.33。 设 $\psi : \Delta \to \Delta_1$ 是一个图映射，且 v 是 Δ的一个极大顶点。以下结论成立：

(a) 设 w' 是 ψ的一个新顶点。假设 w' 由一个旧顶点 w 通过将一个零列替换为某个 $c \in \mathbb{Z}^d$ 得到，其中(i) w 是 v-软的，或者(ii) c是 v-有用的。那么 $w' < v$。(b) 假设 ψ 是某个 i 的一个 ZS_i 映射（见定义 *5.24*），且$Sub_i(\psi)$ 的所有元素都是 v-有用的。那么 ψ 是一个约化。

证明。 (a) 由于零列不会对活跃子群或半活跃子群产生贡献，因此我们有 $A(w') \geq A(w)$ 和 $S(w') \geq S(w)$。如果其中一个不等式是严格的，或者 w 是 v- 软的，那么 w' 是 v- 软的，因此 $w' < v$。否则， c 是 v-有用的，并且我们有$A(w') = A(w) = A(v)$ 和 $S(w') = S(w) = S(v)$，由此可知 c 也是 w'-有用的。因此， w' 比 w有更多有用列，所以再次有 $w' < w$ ，从而 $w' < v$。

(b) 直接由 (a) 得出。 □

现在我们可以证明命题 5.30 了。

命题 *5.30* 的证明。 由于 Λ 不是 $(k-1)$-幺模的，因此对于某个 $w \in V(\Lambda)$， $A(w) \neq \mathbb{Z}^{k-1}$ 。由于 v 是 Λ 的一个极大顶点，根据步骤 2 序的定义，我们必须有 $A(v) \neq \mathbb{Z}^{k-1}$。

我们将考虑 4 种情形。引理 5.32 和 5.33 仅在技术上要求最高的情形 4 中使用。回忆一下， C 是一个固定常数，具有如下性质：对于任意长度为 ≤ 3 的廊道 Δ ，都有 $|supp(\Delta)| \leq C$。

情形 *1*： $SA(v) = \mathbb{Z}^k$。由于 $A(v) \neq \mathbb{Z}^{k-1}$ ，并且 $SA(v)$ 由 $A(v)$以及 v 的频繁类的代表元生成，因此至少存在两个频繁类。回忆一下，每个频繁类都至少包含 $C+1$ 列。这意味着，对于从 v 出发、长度为 $\min(3, \deg(v))$ 的任意廊道 $\mathcal{G}$，我们可以找到互不相同的指标 i， $j \notin supp(\mathcal{G})$，使得 $col_i(v)$ 和 $col_j(v)$ 是 v 的不同频繁类的代表元。

回想一下，根据假设， $\|row_k(v)\| = 1$ 。 $col_i(v)$ 和 $col_j(v)$ 的深度都恰好为 k （因为它们属于频繁类），所以 v_{ki} 和 v_{kj} （ v 中的 (k, i) 和 (k, j) 项）都等于 ± 1。如有需要，将 $col_i(v)$ 或 $col_j(v)$ 乘以 -1 ，我们可以假设 $v_{ki} = v_{kj}$。

令 $\varphi = C_{\mathcal{G}}(R_{ij})$ 或 $C_{\mathcal{G}}(R_{ji}^{-1})$，具体取决于 $H = \widetilde{\mathrm{IAR}_{n,\,d}}$ 或 $\widetilde{\mathrm{IAC}_{n,\,d}}$。于是， φ 的每个新顶点都以 $col_i(v) - col_j(v)$ 作为其 i^{th} 列（并且在其余各列中与某个旧顶点重合）。根据构造， $col_i(v) - col_j(v)$ 是一个不属于 $A(v)$ 的 $(k-1)$ 列，因此 φ 的所有新顶点的活跃子群都大于 $A(v)$，从而 φ 是一个约化（相对于步骤 2 序）。同样容易验证， φ 是 k-安全的。由于 φ 也会降低 v 的度，我们可以通过有限次重复此操作消去 v 。这就完成了情形 1 的证明。

现在假设 $SA(v) \neq \mathbb{Z}^k$。由于 v 是 k-幺模的（因为 Λ 是 k-幺模的），这意味着 v 至少有一列有用。由于 $def_k(v) \leq n - (C^2 + 3C + k + 3)$，以下情况之一必然成立：

(ii) v 至少有 $C + k$ 列，其深度介于 1 和 $k-1$ 之间；(iii) v 至少有 $C^2 + C + 4$ 列，其深度为 k；(iv) v 至少有 $C + 1$ 个零列。

我们分别考虑这 3 种情况。

情形 *2*： $SA(v) \neq \mathbb{Z}^k$ 以及 v 至少有 $C+k$ 个深度介于 1 和 $k-1$之间的列。此情形下我们不会用到条件 $SA(v) \neq \mathbb{Z}^k$ 。与情形 1 一样，取 v 处任意一条长度为 $\min(3, \deg(v))$ 的廊道 $\mathcal{G}$。根据此情形的假设条件，存在互不相同的$i,\ j \notin supp(G)$，使得 $col_i(v)$ 和 $col_j(v)$ 具有相同的深度 m，且满足 $1 \leq m \leq k-1$。

令 φ 为 4 个交换映射 $C_{\mathcal{G}}(R_{ij}^{\pm 1})$ 或 $C_{\mathcal{G}}(R_{ji}^{\pm 1})$ 之一。φ 的每个新顶点 w' 均由一个旧顶点 w 通过将 i^{th} 列或 j^{th} 列替换为 $col_i(w) \pm col_j(w)$ 或 $col_j(w) \pm col_i(w)$ 得到。在所有情形中，根据步骤 2 序中的判据 (1)-(5)， w 与 w' 不可比较；并且对于某个 $\varphi \in \{C_{\mathcal{G}}(R_{ij}^{\pm 1})\ C_{\mathcal{G}}(R_{ji}^{\pm 1})\}$ （其选取与 w无关），我们有$\|row_m((w')^{\text{ur}})\|_1 < \|row_m(w^{\text{ur}})\|_1$，由此可得 $w' < w$，因此 φ 是一次约化；而且不难验证 φ 是 k-安全的。由于 φ 降低了 v的度，我们便可像情形 1 那样完成证明。

情形 *3*： $SA(v) \neq \mathbb{Z}^k$和 v至少有 C^2+C+4 个深度（恰好）为 k 的列。如果深度为 k 的列至少有 2 个频繁类，或者至少有 $C+2$ 个不同的类（模 $A(v)$），则存在不同的指标 $i,\ j \notin supp(\mathcal{G})$，使得 $col_i(v)$ 和 $col_j(v)$ 的深度均为 k，且属于不同的类；我们可以完全按照情形 1 的方法进行论证。

因此，我们可以假设深度为k的列至多有 $C+1$ 个不同的类，其中至多有一个频繁类。由于非频繁类至多有 C 个代表元，而 v 至少有 C^2+C+4 个深度为 k 的列，因此其中一个类（特别地，该类必定是频繁类）必须至少有 $C+4$ 个代表元。我们将这个类记为 $\mathcal{C}$。

给定一条长度为 $\min(3, \deg(v))$ 的廊道 $\mathcal{G}$ at v，我们可以找到互不相同的 $i,\ j \notin supp(\mathcal{G})$，使得 $col_i(v)$ 和 $col_j(v)$ 属于 $\mathcal{C}$。与前面一样，交换映射 $\psi = C_{\mathcal{G}}(R_{ij}^{\pm 1})$ 中有一个具有如下性质：每个新顶点 w' 都是由旧顶点 w 将深度为 k 的一列（等于 $col_i(w) = col_i(v)$ 或 $col_j(v) = col_j(v)$）替换为一列 $(k-1)$- 得到的。与前面的情形类似，这样的 ψ 是 k-安全的。不失一般性，我们可以假设被替换的是列 $col_i(w) = col_i(v)$。我们断言，对于每个新顶点 w'，都有 $w' < v$，因此 ψ 是一次约化。我们考虑两种子情形：

子情形 *1*： $A(w) > A(v)$（其中 w 如上所述）。由于 w' 是通过从 w 中移除一列深度为 k 的列（该列不对活跃子群作出贡献）得到的，因此我们有 $A(w') \geq A(w) > A(v)$，所以 $w' < v$。

子情形 *2*： $A(w) = A(v)$。如果 $A(w') > A(w)$，则问题已解决，因此从现在起假设$A(w') = A(w) = A(v)$。这意味着，定义 k-列等价类的等价关系对于 $v,\ w$ 和 w'是相同的。

我们首先断言 $SA(w') \geq SA(w)$。由于 w' 和 w 仅在 i^{th} 列上不同，只需证明 $col_i(v)$ 的等价类对于 w' 也频繁出现。后者成立，因为w' 与 w 至多相差 3 列，并且根据假设， $col_i(v)$ 的等价类对于 v有 $C+4$个代表元。

同样的论证表明， w 的 i^{th} 列没有用，因此要么 $SA(w') > SA(w)$（这种情况下问题已解决），要么 $SA(w') = SA(w)$，并且 w' 和 w 具有相同数量的有用列。在后一种情况下， w' 和 w 无法依据步骤 2 序的前三项标准区分，但 w'有更多（$k-1$）-列，因此 $w' < w$，进而 $w' < v$。

情形 *4*： $SA(v) \neq \mathbb{Z}^k$ 和 v 至少有 $C+1$ 0列。在这种情形下，我们将使用与步骤 1 的情形 4 中相同的映射，但良好列的作用将由 v-有用列来承担（回想一下， v 至少有一列有用列）。我们已经从步骤 1 知道

这些映射是 k-安全的。证明它们也是约化（现在相对于步骤 2 序）需要新的证明，不过大多数胞腔类型的论证都相当相似。下面我们明确考虑步骤 1 中的例外类型，即 1ZA、2ZA、2ZB、3ZB 和 5ZB。对于其余类型，步骤 1 中的论证主要依赖于这样一个事实： Δ-优列构成了非受限列群中的一个子群的补集，而 v-有用列集合也具有后一性质。

与步骤 1 的情形 4 一样，我们固定一个包含 v 的胞腔 $\mathcal{F}$，并对各列重新排列，使得 $col_1(v)$ 有利（尤其是非受限的）， $col_4(v) = 0$ 以及 $4 \notin supp(\mathcal{F})$。

1ZA 类型。回想一下， $I = \{1, 2, 4\}$ 和 $\mathcal{F}_I$ 的顶点为 $(a, b, 0)$、$(a+b, b, 0)$、$(a+b, b+c, 0)$、$(a+b+c, b+c, 0)$ 和 $(a, b+c, 0)$。首先我们证明 a、 b 和 c 必须是非受限的。若 $v_I = (*, b+c, 0)$，由引理 5.32(a)（取 $J = \{1\}$ ）可知 a、 $a+b$ 和 $a+b+c$ 是非受限的，因此 b 和 c 也非受限。若 $v_I = (*, b, 0)$，我们仍可由引理 5.32(a) 推得 a 和 b 是非受限的。若 c 受限，则 $b+c$ 也受限，于是 $(a, b+c, 0) > (a, b, 0)$，且 $(a+b, b+c, 0) > (a+b, b, 0)$，这与 $v_I = (*, b, 0)$ 的假设矛盾。

如果 c 对 v 有利，那么根据引理5.33(b)，交换映射 $C_{\mathcal{F}}(R_{34})$ 是一个约化，因此从现在起，我们可以假设 c 对 v 不有利，从而有 $c \in S(v)$（因为 c 是非受限的）。我们将证明，如果 φ 是图 16 中的映射，那么 φ^* 是一个约化。

子情形 1： $col_2(v) \in S(v)$。由于 $col_2(v)$ 等于 b 和 $b+c$ 以及 $c \in S(v)$，所以无论哪种情况，都必须有 b， $c \in S(v)$。这意味着 a， $a+b$ 和 $a+b+c$ 要么全都对 v 有利，要么全都对 v 不利；后一种情况不可能，因为根据假设， $col_1(v)$ 是有利的。因此， $Sub_4(\varphi^*)$ 中的所有 $= \{a, a+b, a+b+c\}$ 元素都对 v 有利，所以根据引理 5.33(b)， φ^* 是一个约化。

子情形 2： $col_2(v) \notin S(v)$。由于 b 和 c 是非受限的，这意味着 $col_2(v)$ 是有利的，因此 v 的前两列是有利的。由于 v 是极大的，并且 $\mathcal{F}$ 的每个顶点与 v 的差异都只可能出现在前两列，使用 $J = \{1, 2\}$ 应用引理 5.32(b)，我们推得，对于 $\mathcal{F}$ 的任意顶点 w，要么

$$(5.1) \quad \text{(a) } w \text{ is } v\text{-soft} \quad \text{or} \quad \text{(b) } S(v) = S(w) \text{ and } col_1(w) \text{ and } col_2(w) \text{ are } v\text{-helpful.}$$

以下断言可以通过简单的逐情况验证得到。设 w' 是 φ^* 的一个新顶点。那么对于任意 $i \in I = \{1, 2, 4\}$，存在 $\mathcal{F}$ 的一个顶点 w_i，使得 w' 可由 w_i 通过将一个零列替换为另一个向量得到，之后还可以进行列置换；此外， $col_i(w')$ 等于 w_i 的前两列之一。

如果对于某个 i， w_i 是 v-软的，那么根据引理 5.33(a)(i)， $w' < v$。根据 (5.1)，唯一的另一种可能是，对于每个 $i \in I$， w_i 的前两列都是 v-有利的。但这意味着，对于所有 $i \in I$， $col_i(w')$ 都是 v-有利的，因此根据引理 5.33(a)(ii)， $w' < v$。

2ZA 类型。回想一下， $I = \{1, 2, 4\}$ 以及 $\mathcal{F}_I$ 的顶点为 $(a, b, 0)$、$(a+c, b, 0)$、$(a, a+b, 0)$、$(a+c, a+b, 0)$ 和 $(a+c, a+b+c, 0)$。

首先，若 $v_I \neq (a+c, \ a+b+c, \ 0)$，则由引理 5.32(a) 应用于 $J = \{1\}$ 可知，a 和 $a+c$ 均为非受限。现在假设 $v_I = (a+c, \ a+b+c, \ 0)$，此时$a+c$仍为非受限。若 a 受限，则 $(a, \ b, \ 0)$ 或 $(a, \ a+b, \ 0)$ 的前两列受限，因此由引理 5.32(a) 应用于 $J = \{1, 2\}$ 可知， v也受限，矛盾。

因此，我们证明了 a 和 $a+c$ 均为非受限，故 c 也为非受限。若c 是 v-有利的，则映射 $C_{\mathcal{F}}$(R_{43}) 是一个约化。若 c 不是 v-有利的，则 $c \in SA(v)$。由于向量 a，$a+c$ 中至少有一个是 v-有利的，因此二者都是 v-有利的。因此，若按图17定义 φ，则 φ^* 是一个 ZS_4-映射，且 $Sub_4(\varphi^*) = \{a, a+c\}$的所有向量都是 v-有利的，所以由引理5.33(b)，φ^* 是一个约化。

2ZB 型。回顾一下，$I = \{1,3,4\}$ 以及 $\mathcal{F}_I$的顶点为 $(a,c,0)$、$(a+b,c,0)$、$(a,a+b+c,0)$、$(a+b, a+b+c,0)$ 和 $(a,b+c,0)$。与步骤 1 类似，如果 b是 v-有利的，那么根据引理5.33(b)，$C_{\mathcal{F}}(L_{24})$ 是一次约化。在其余情况下，我们将使用映射 φ^*，其中 φ 由图31给出。回顾一下，$Sub_4(\varphi^*) = \{a, a+b\}$。

如果 $b \in S(v)$，那么 a 和 $a+b$ 都是 v-有利的（因为其中一个必定是 v-有利的），因此根据引理5.33(b)即可得证。因此，我们可以假设 b 是受限的，此时 $v_I = (a, b+c, 0)$（否则会与引理 5.32(a)矛盾），所以特别地，a是非受限的。如果 $b+c$是非受限的，那么 c是受限的，因此 $(a, b+c, 0) < (a, c, 0)$，矛盾。若 $b+c$是受限的，那么 $a+b$和 $a+b+c$都受限，因此 $(a, b+c, 0) < (a+b, a+b+c, 0)$，再次得到矛盾。

3ZB 型。回忆一下，$I = \{1,2,4\}$ 以及 $\mathcal{F}_I$的顶点为 $(a-c, b, 0)$、$(a, b, 0)$、$(a+b, b, 0)$、$(a+b, b+c, 0)$ 和 $(a-c, b+c, 0)$。

首先我们断言，$a, a+b$ 和 $a-c$ 均为非受限（因此 b 和 c 也为非受限）。若 $v_I = (*, b, 0)$，由引理 5.32(a)可立即得出这一点。现在假设$v_I = (*, b+c, 0)$。引理 5.32(a)仍可推出 $a+b$和 $a-c$ 均为非受限，因此 $b+c = (a+b)-(a-c)$也为非受限。于是，v 的前两列均为非受限，因此（由 v的极大性）$\mathcal{F}$ 的每个顶点在前两列中至少有一列是非受限的；特别地，$w = (a, b, 0, *)$也满足这一点。若 a是受限的，则$b = (a+b)-a$也受限，这就产生了矛盾。因此，a 是非受限的，证毕。

如果 c 是 v-有利的，那么 $C_{\mathcal{F}}(L_{34})$ 是一次约化，因此从现在起我们假设 $c \in S(v)$。我们将使用图映射 φ^*，其中 φ 由图32给出。

子情形 *1*：$b \in S(v)$。由于 $c \in S(v)$ 也成立，向量 a、$a-c$ 和 $a+b$ 模 $S(v)$ 同余；又因为其中一个是 v-有利的，所以它们全都是 v-有利的，因此根据引理5.33(b)，φ^* 是一次约化。

子情形 *2*：$b \notin S(v)$。在这个子情形中，b 和 $b+c$ 都是 v-有利的。因此，v 的前两列是有利的，我们可以完全按照 1ZA 类型的子情形 2 来完成证明。

类型 *5ZB*。回想一下，$I = \{2,3,4\}$ 中的 $\mathcal{F}$ 的所有顶点都有相同的第一列 a（因此该列必定是 v-有利的），$v_I = (b,\ c,\ 0)$，而 $\mathcal{F}_I$ 的其他 3 个顶点分别是 $(b-a,\ c,\ 0)$、$(b,\ c-a,\ 0)$ 和 $(b-a,\ c-a,\ 0)$。与步骤 1 一样，我们将使用图37中的两个映射之一。

首先，假设 $c-a$ 或 $b-a$ 是 v-有利的。根据对称性，不妨设 $c-a$ 是 v-有利的。在这种情况下，图 37 中的第一个映射根据引理5.33(b)是一个约化。

因此，从现在起，我们可以假设向量 $c-a$ 和 $b-a$ 各自要么位于 $S(v)$ 中，要么是受限的。我们考虑几种子情形。

子情形 *1*：$c-a,\ b-a \in S(v)$。由于 a 是 v-有利的，b 和 c 也必定是 v-有利的。由于 $v = (a,\ b,\ c,\ 0,\ *)$ 是极大的，v 与 $\mathcal{F}$ 的其他顶点的差异仅在于 2nd 列和 3rd 列，并且这些顶点各自都有一个非 v-有利的 2nd 列或 3rd 列，因此 $\mathcal{F}$ 中其余的顶点都必须是 v-软的。因此，图 37 中的第一个映射根据引理 5.33(a)(i)是一个约化。

子情况 *2*：$c-a \in S(v)$ 而 $b-a$ 是受限的，反之亦然。不失一般性，我们可以假设 $c-a \in S(v)$ 且 $b-a$ 是受限的（此时 b 也受限）。

在这种情况下，$(a,\ b-a,\ c,\ 0,\ *)$ 也是一个极大顶点，而 $(a,\ b,\ c-a,\ 0,\ *)$ 和 $(a,\ b-a,\ c-a,\ 0,\ *)$ 根据与子情形 1 相同的论证，都是 v-软的。因此，若 φ^* 是图 37 中的第二个映射，则 φ^* 中带有 4th 列 a 的四个新顶点根据引理 5.33(a)(ii) 是 $< v$，而其余两个新顶点是 v- 软的，所以 φ^* 是一次约化。

子情形*3*: $c-a$ 和 $b-a$ 均受限。 在这种情况下， $\mathcal{F}$ 是一个纯极大胞腔；根据我们在步骤 1 中处理 5GA、5GB 和 5ZB 类型时所用的论证，图 37 中的第二个映射是一次约化。

这就完成了情形 4 的证明。 □

5.4. **步骤 3**。 这最后一步的目标是在保持图的 $(k-1)$-幺模性质的同时，减少其 $(k-1)$-亏损。遗憾的是，为了实现后者，我们必须允许图中最后 $d-k+1$ 行的范数增加；不过，这些范数仍将保持一致有界，这对我们的目的已经足够。更确切地说，这一步的目标是证明以下结果。

定理 5.34. 存在自然数 $1=M_{d+1}\le M_d\le M_{d-1}\le\cdots\le M_1$，具有如下性质。假设对于某个 $1\le k\le d$，给定了一个图 Λ，满足 $\|bot_{d-k+1}(\Lambda)\|\le M_{k+1}$。那么存在一个图映射 $\Lambda\to\Lambda'$，使得

(a) $def_{k-1}(\Lambda')\le d-k+C+1$; (b) $\|bot_{d-k+1}(\Lambda')\|\le M_k$; (c) 如果 Λ 是$(k-1)$-幺模的，那么 Λ' 也是。

在证明定理 5.34 之前，让我们根据步骤 1、2 和 3 的主要结果（分别为定理 5.11、5.26 和 5.34）推导出定理 5.8。

定理 *5.8* 的证明。 我们将证明，定理 5.8 的断言对于与定理 5.34 中相同的$\{M_i\}$ 成立。令 Ω 为满足定理 5.8 假设条件的任意图，即

(a) Ω 是 k幺模的; (b) def_k(Ω) $\le d-k+C$; (c) 如果 $k<d$，则 $\|bot_{d-k}\Omega\|\le M_{k+1}$; (d) Ω 具有小边界。

设 Ω $\to$Ω′ 和 Ω′ $\to$ Ω″ 分别是步骤 1（定理 5.11）和步骤 2（定理 5.26）得到的约化。由定理 5.11 可知 $\|row_k(\Omega')\|=1$。由于这两种约化都是k-安全的，我们有 $\|row_k(\Omega'')\|\le\|row_k(\Omega')\|=1$，并且若$k<d$，则 $\|bot_{d-k}\Omega''\|\le\|bot_{d-k}\Omega\|\le M_{k+1}$。我们有

$$\|bot_{d-k+1}\Omega''\|=\max\{\|bot_{d-k}\Omega''\|,\|row_k\Omega''\|\}\le\max\{M_{k+1},1\}=M_{k+1}\qquad\text{if } k<d$$
$$\|bot_{d-k+1}\Omega''\|=\|bot_1\Omega''\|=\|row_d\Omega''\|=1=M_{d+1}\qquad\text{if } k=d.$$

因此，无论 k 的值如何， $\|bot_{d-k+1}\Omega''\|\le M_{k+1}$，所以我们可以对 Ω″应用定理 5.34。由于 Ω″是 $(k-1)$-幺模的，定理 5.34 给出了一个图映射 Ω″ $\to$ Ω‴，使得

(a) def_{k-1}(Ω‴) $\le d-k+C+1$; (b) $\|bot_{d-k+1}$(Ω‴)$\|\le M_k$。(c) Ω‴ 是（$k-1$）-幺模的，

这就证明了定理 5.8。 □

定理 *5.34* 的证明。 我们将通过倒序归纳定义这些数 M_i 。回想一下，我们已经设定了 $M_{d+1}=1$。

在这个证明中，我们将采用一种完全不同的次序。它只考虑底部 $d-k+1$ 行的ℓ^1-范数，但对不同的行赋予不同的权重，越靠下的行权重越大。此外，与步骤 1 和 2 不同，我们将明确地定义一个用于确定次序的范数函数。

归纳地定义函数序列 $f_d(x_d)$, $f_{d-1}(x_d,x_{d-1}),\ldots,f_k(x_d,\ldots,x_k)$，使得 $f_d(x_d)=x_d$并且 $f_i(x_d,\ldots,x_i)=3^{f_{i+1}(x_d,\ldots,x_{i+1})}\cdot x_i$，其中 $k\le i\le d-1$。现在，给定一个矩阵 $v\in Mat_{d\times n}(\mathbb{Z})$，定义 $N(v)=f_k(x_d,\ldots,x_k)$，其中 $x_i=\|row_i v\|_1$。最后，给定$v,v'\in Mat_{d\times n}(\mathbb{Z})$，当且仅当 $N(v)<N(v')$ 时，令 $v<v'$。

下面我们将证明：如果一个图 Σ 包含一个满足 $def_{k-1}(v)>(d-k+1)+C$ 的顶点 v，那么存在一种约化（相对于上述次序） $\Sigma\to\Sigma'$，它消去 v 并保持 $(k-1)$-幺模性。若此结论成立，那么根据引理 2.14，从 Λ 开始有限次应用这种约化后，我们将得到一个 $(k-1)$-幺模图 Λ'，使得 $def_{k-1}(\Lambda')\le(d-k+1)+C$，因此命题 5.34 中的条件 (a) 和 (c) 成立。此外，我们有 $\|bot_{d-k+1}(\Lambda')\|\le N(\Lambda')\le N(\Lambda)\le f_k(M_{k+1},\ldots\ldots,M_{k+1})$，所以若令 $M_k=f_k(M_{k+1},\ldots\ldots,M_{k+1})$，则 (b) 也成立，证明完毕。

现在我们说明如何构造所需的约化。固定一个满足 $def_{k-1}(v)>(d-k+1)+C$的顶点 v。不失一般性，我们可以假设 v 在所有顶点中具有最大的（$k-1$）亏损。任选一条位于 v 处、长度为 $\min(3,\deg(v))$ 的廊道 $\mathcal{G}$。与之前一样，只需在 v处构造一个 $\mathcal{G}$-约化。根据假设，v 至少有 $d-k+C+2$列的深度不小于 k，也就是说，深度介于 k 和 d之间。由于 k 和 d 之间有 $d-k+1$个整数，且 $|supp(\mathcal{G})|\le C$，因此存在互不相同的 $i,j\notin supp(\mathcal{G})$，使得$col_i(v)$和 $col_j(v)$具有相同的深度 $m\ge k$。不失一般性，我们可以假设 $v_{mi}\ge v_{mj}>0$。

若 $H=$，令 φ 为交换映射 $C_{\mathcal{G}}(R_{ij})$ $\widetilde{\text{IAR}_{n,\,d}}$ 且 $C_{\mathcal{G}}(R_{ji}^{-1})$，如果 $H=\widetilde{\text{IAC}_{n,\,d}}$。我们断言 φ 具有所需的性质。由于 φ 不会修改任何$(k-1)$-列，因此它自动保持$(k-1)$-幺模性。

还需证明 φ 是一个约化。由 φ 得到的任一新顶点 u，都是通过将 $\mathcal{G}$ 的一个顶点 w 中的 $col_i(w)=col_i(v)$替换为 $col_i(v)-col_j(v)$而获得的。显然，$def_{k-1}(u)\le def_{k-1}(w)\le def_{k-1}(v)$。此外，若令 $x_t=\|row_t(u)\|_1$ 和 $y_t=\|row_t(w)\|$，则根据构造，对于 $t>m$有 $x_t=y_t$，对于 $k\le t<m$有 $x_t\le 2y_t$。

我们用关于 t的下降归纳法证明，对所有 $1\le t\le m$，$f_t(x_d,\ldots,x_t)\le f_t(y_d,\ldots,y_t)-1$。当 $t=m$时结论显然。现在假设对某个 $1<t\le m$，$f_t(x_d,\ldots,x_t)\le f_t(y_d,\ldots,y_t)-1$。那么

$$\begin{aligned}f_{t-1}(x_d,\ldots,x_{t-1})&=3^{f_t(x_d,\ldots,x_t)}x_{t-1}\le 3^{f_t(y_d,\ldots,y_t)-1}\cdot 2y_{t-1}\\&=\frac{2}{3}\cdot 3^{f_t(y_d,\ldots,y_t)}y_{t-1}=\frac{2}{3}\cdot f_{t-1}(y_d,\ldots,y_{t-1})\le f_{t-1}(y_d,\ldots,y_{t-1})-1,\end{aligned}$$

其中最后一个不等式成立，因为显然对于所有 $s<d$，$f_s(y_d,\ldots\ldots,y_s)\ge 3$。

将上述不等式应用于 $t=k$，我们推得，对于任意新顶点 w，$N(w)<N(v)$，因此 φ 确实是一个约化，正如所需。□

5.5. **命题 5.6 的证明**。我们先回顾命题 5.6 的陈述，以及小子集的定义（定义 5.5），并将二者合并为以下陈述：

命题 5.35。存在一个有限子集 $A \subset G/H$，使得 A 在 G 中的原像在 $Cay(G, \mathcal{X})$ 中是连通的，并且 A 很小，即每个 $v \in A$ 都满足以下条件：

（i） $\|v\| = 1$；（ii） v 与矩阵 $\left(I_{d\times d} \mid 0_{d\times(n-d)}\right)$ 至多相差 8 列；（iii） v 对所有 $k \leq d$ 都是 k-幺模的。

证明。如前所述，令 $\rho\colon G \to G/H$ 和 $\theta\colon F(\mathcal{X}) \to G/H$ 表示自然投影。回顾一下，我们通过引理 2.26 中的映射将 G/H 与 $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 视为相同。

将 θ 视为从 $F(\mathcal{X})$ 到 $Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 的映射，其显式公式如下。

引理 5.36. 给定 $w \in F(\mathcal{X})$，令 $[w]$ 为其在 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$上的投影。则

(i) $\theta(g)$ 由 $[g]^{-1}$ 的前 d 行组成，若 $H = IAR_{n,d}$；且 (ii) $\theta(g)$ 由 $[g]^T$ 的前 d 行组成，若 $H = IAC_{n,d}$。

我们将证明命题 5.35 对于 $H = \mathrm{IAR}_{n,d}$成立；对于 $H = \mathrm{IAC}_{n,d}$ 的证明也相当类似。

正如我们在命题 2.3 的证明中所述，若给定 G/H 的一个显式有限子集A，使得 $\rho^{-1}(A)$ 在 $Cay(G, \mathcal{X})$ 中连通，那么很容易根据 A 构造出 H 的有限生成集。在这个证明中，我们将反向进行，从 H 的一个有限生成集出发，并利用以下观察构造具有上述性质的 A。

观察 5.37。设 S_H 是 H 的有限生成集。对每个 $s \in S_H^{\pm 1}$ 选择一个提升 $\widetilde{s} \in F(\mathcal{X})$，令 E 为这些提升的所有后缀的集合，并令 $A = \theta(E)$。则 $\rho^{-1}(A)$ 在 $Cay(G, \mathcal{X})$ 中是连通的。

鉴于观察 5.37，要证明命题 5.35，我们只需为 H 找到一个具有以下性质的有限生成集 S_H：每个 $s \in S_H^{\pm 1}$ 都有一个提升 $\widetilde{s} \in F(\mathcal{X})$，使得

(*) 对任意 $\widetilde{s}$ 的后缀 w，$\theta(w)$ 都是小的。

我们首先描述将要使用的 H 的有限生成集 S_H。回顾一下，$H = \mathrm{IAR}_{n,\,d}$ 被定义为子群 $\mathrm{Row}_{n,\,d}$ 在 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 中的原像；该子群由首 d 行与单位矩阵相同的矩阵组成。因此，如果我们用 IA_n 表示投影 $G = \mathrm{SAut}(F_n) \to \mathrm{SAut}(\mathbb{Z}^n)$ 的核，就可以通过取 IA_n 的一个生成集与 $\mathrm{SAut}(F_n)$ 的任意子集之并来构造 H 的一个生成集，其中该子集映射到 $\mathrm{Row}_{n,\,d}$ 的一个生成集上。

Magnus [Ma35] 证明，IA_n 由自同构 $K_{ij} = (x_i \mapsto x_j^{-1} x_i x_j)$（其中 $i \neq j$）以及 $K_{ijk} = (x_i \mapsto x_i[x_j, x_k])$（其中 i、j、k 彼此不同）生成。群 IA_n 由这些元素的（选定的）原像生成，例如 $R_{ij}L_{ij}^{-1}$ 和 $[R_{ij}, R_{ik}]$；此外，w_{12}^4 生成了映射 $\mathrm{SAut}(F_n) \to \mathrm{SAut}(F_n)$ 的核。

群 $\mathrm{Row}_{n,d}$ 由初等矩阵 E_{ji}, $i \neq j$生成，其中 $1 \leq i \leq n$和 $d+1 \leq 1 \leq j \leq n$。我们可以使用具有相同限制条件的元素 R_{ij} 作为它们的原像

对 i 和 j的限制。因此，集合 $\{R_{ij}L_{ij}^{-1}\}\cup\{[R_{ij},R_{ik}]\}\cup\{R_{ij}\colon\ j\geq d+1\}\cup\{w_{12}^4\}$生成 H，从而集合

$$S_H=\{R_{ij}L_{ij}^{-1},[R_{ij},R_{ik}]:j\leq d\}\cup\{L_{ij},R_{ij}:j\geq d+1\}\cup\{w_{12}^4\}\qquad(***)$$

也生成 H。

确保矩阵 $v\in Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 对所有 $k\leq d$ 都是 k-幺模的一个简单方法是要求 $\mathbb{Z}^d$ 的标准基中的每个元素（下文记为 e_1，$\ldots$，e_d）都在 v 的列中出现（至多相差一个符号）。因此，要证明命题 5.35，只需证明每个 $s\in S_H^{\pm1}$ 都有一个提升 $\widetilde{s}$，使得 $\widetilde{s}$ 的每个后缀 w 都满足以下两个条件：

(1) 对每个 $1\leq i\leq d$，$\theta(w)$ 的某一列等于 e_i 或 $-e_i$；(2) $\theta(w)$ 的每个条目都等于 0 或 ±1，并且 $\theta(w)$ 与 $\left(I_{d\times d}\mid 0_{d\times(n-d)}\right)$ 至多有 8 列不同。

显然，我们只需考虑形如 $R_{ij}L_{ij}^{-1}$and $[R_{ij},R_{ik}]$ with $j\leq d$ 的生成元及其逆元。

我们先考虑 $s=R_{ij}L_{ij}^{-1}$。如果令 $\widetilde{s}$ 为“自然”的提升（即，将 $\widetilde{s}=R_{ij}L_{ij}^{-1}$ 中的 L_{ij} 和 R_{ij} 视为 $F(\mathcal{X})$ 的元素），很容易看出，对于 $i>d$，(1) 和 (2) 均成立；此时，对于 $\widetilde{s}$ 的每个后缀 w，矩阵 $\theta(w)$ 都具有分块形式 $(I_d|0_{d\times(n-d)})$。

如果 $i\leq d$，后缀 L_{ij}^{-1} 仍满足 (2)，但不满足 (1)，不过也相差不远。事实上，由引理 5.36，矩阵 $\theta(L_{ij}^{-1})\in Um_{d\times n}(\mathbb{Z})$ 具有分块形式 $(E_{ji}|0)$，其中 E_{ji} 是在 (j,i)-条目处为 1 的 $d\times d$ 初等矩阵。因此，除了 e_i 之外，$\mathbb{Z}^d$ 的所有标准基元素都出现在 $\theta(L_{ij})$ 的列中。为了解决这个问题，我们用 $F(\mathcal{X})$ 中一个更复杂的字替换 $R_{ij}L_{ij}^{-1}$，该字在 G 上具有相同的投影。

断言 5.38. 取满足 $d<k<m\leq n$ 的整数 k,m（回想一下，$i\neq j$ 都是 $\leq d$，因此 i,j,k 和 m 两两不同）。以下关系在 G 中成立：

$$R_{ij}L_{ij}^{-1}=R_{ki}^{-1}L_{mj}L_{mi}^{-1}L_{mj}^{-1}R_{ij}R_{ki}R_{kj}^{-1}L_{ij}^{-1}L_{mi}.\qquad(5.2)$$

证明. 根据假设，i,j,k 和 m 两两不同，且不失一般性，我们可以假设 $i=1,j=2$，$k=3$ 和 $m=4$（这样写只是为了更易读；并无数学上的简化）。

利用基本关系 $R_{31}^{-1}R_{12}R_{31}=R_{12}R_{32}$ 和 $L_{41}^{-1}L_{12}L_{41}=L_{12}L_{42}$（见观察 2.23），可得 $R_{12}=R_{31}^{-1}R_{12}R_{31}R_{32}^{-1}$ 和 $L_{12}=L_{41}^{-1}L_{12}L_{41}L_{42}^{-1}$，由此推出 $L_{12}^{-1}=L_{42}L_{41}^{-1}L_{12}^{-1}L_{41}$，进而得到 $R_{12}L_{12}^{-1}=R_{31}^{-1}R_{12}R_{31}R_{32}^{-1}L_{42}L_{41}^{-1}L_{12}^{-1}L_{41}$。由于 L_{42} 与 R_{12},R_{31} 可交换，且 R_{32} 和 L_{41} 与 R_{31} 和 R_{32} 可交换，因此

$$R_{12}L_{12}^{-1}=R_{31}^{-1}L_{42}R_{12}L_{41}^{-1}R_{31}R_{32}^{-1}L_{12}^{-1}L_{41}.\qquad(***)$$

由关系 $L_{41}R_{12}L_{41}^{-1}=L_{42}^{-1}R_{12}$，我们得到 $R_{12}L_{41}^{-1}=L_{41}^{-1}L_{42}^{-1}R_{12}$，从而

$$R_{12}L_{12}^{-1}=R_{31}^{-1}L_{42}(L_{41}^{-1}L_{42}^{-1}R_{12})R_{31}R_{32}^{-1}L_{12}^{-1}L_{41}\text{ in }G,$$

得证。□

我们断言，(5.2) 右侧的字是一个具有所需性质的 $s=R_{ij}L_{ij}^{-1}$ 提升，也就是说，它的所有后缀都满足 (1) 和 (2)。下表展示了后者；同样，我们假设 $i=1$，$j=2$，$k=3$ 和 $m=4$，这次还假设 $d=2$，$n=4$。

w	$w_0 = 1$	$w_1 = L_{41}$	$w_2 = L_{12}^{-1}w_1$	$w_3 = R_{32}^{-1}w_2$	$w_4 = R_{31}w_3$
$\theta(w)$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$
w	$w_5 = R_{12}w_4$	$w_6 = L_{42}^{-1}w_5$	$w_7 = L_{41}^{-1}w_6$	$w_8 = L_{42}w_7$	$w_9 = R_{31}^{-1}w_8$
$\theta(w)$	$\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$

类似地，也可以构造 $(R_{ij}L_{ij}^{-1})^{-1} = L_{ij}R_{ij}^{-1}$ 的所需提升。

为 $s = [R_{ij}, R_{ik}]$ 构造提升稍微容易一些。和之前一样，当 $i > d$ 时，自然的提升可行，因此假设 $i \le d$，并固定一个 $m > d$，它与 j 和 k 不同。

利用关系 $R_{ij}^{R_{mi}} = R_{ij}R_{mj}$ 和 $R_{ik}^{R_{mi}} = R_{ik}R_{mk}$，我们得到 $[R_{ij}, R_{ik}]^{R_{mi}} = [R_{ij}R_{mj}, R_{ik}R_{mk}]$。由于 R_{ij} 和 R_{ik} 都与 R_{mj} 和 R_{mk} 可交换，因此我们有

$$[R_{ij}R_{mj}, R_{ik}R_{mk}] = [R_{ij}, R_{ik}][R_{mj}, R_{mk}],$$

因此

$$[R_{ij}, R_{ik}] = R_{mi}^{-1}[R_{ij}, R_{ik}]R_{mi}[R_{mk}, R_{mj}]. \tag{5.3}$$

容易验证，(5.3) 右侧字的所有后缀都满足 (1) 和 (2)，证明至此完成。□

6. Additional diagrams for the ZB case

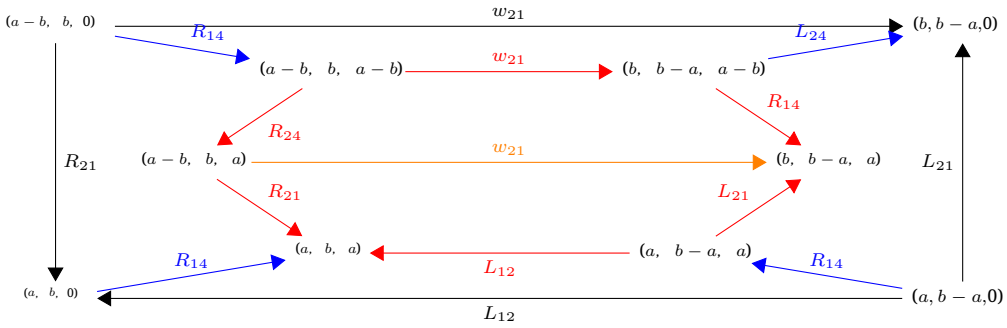
在本节中，我们将描述整数集 Z 坐标为零情形（ZB 情形）下，群 $\mathrm{IAC}_{n,1}$ 中类型 8–11 的单胞约化。如第 4 节所述，约化图与 GA 情形完全相同。对于每种类型，下文所述的映射都是一种约化，因为每个新顶点都是通过将图 Ω 的某个旧顶点的零坐标替换为 Ω-良好坐标而得到的（这是引理3.9(a)的一个特例）。但为了说明引理3.9(a)适用，我们需要验证某些顶点坐标是良好的，下文将完成这项验证。我们沿用第 3、4 节中的所有记号。特别地，$\mathcal{F}$ 表示执行约化的胞腔，v 表示 $\mathcal{F}$的一个选定极大元。

类型 9：$l(\partial\mathcal{F}) = (L_{21}L_{12}^{-1}R_{21} = w_{21})$，$I = \{1, 2, 4\}$。$\mathcal{F}_I$的顶点为$(a, b, 0)$、$(a, b-a, 0)$、$(b, b-a, 0)$、$(a-b, b, 0)$。我们考虑两种情形。若 $v_I = (a, b, 0)$或$(a-b, b, 0)$，则由引理3.9(b)，a和 $a-b$均为良好，因此图 38 中的第一个映射是由引理3.9(a)给出的约化。同理，若 $v_I = (a, b-a, 0)$或$(b, b-a, 0)$，则 a和 b均为良好，因此图 38 中的第二个映射是一个约化。

类型 8：$l(\partial\mathcal{F}) = (L_{12}L_{21}^{-1}R_{12} = w_{12})$，$I = \{1, 2, 4\}$。$\mathcal{F}_I$的顶点为$(a, b, 0)$、$(a-b, b, 0)$、$(a-b, a, 0)$、$(a, b-a, 0)$。如果 $v_I = (a, b, 0)$或$(a-b, b, 0)$，那么 a和 $a-b$都是良好的，因此图 39 中的第一个映射是一个约化。如果 $v_I = (a-b, a, 0)$或$(a, b-a, 0)$，那么 $\mathcal{F}$ 有一个第二坐标良好的极大顶点，因此交换指标 1 和 2 的角色后，我们就约化为类型 8。

类型 *10*：$l(\partial\mathcal{F}) = (w_{12}^{-1}R_{12}w_{12} = L_{21}^{-1})$，$I = \{1, 2\}$。$\mathcal{F}_I$的顶点为$(a, b, 0)$，$(b, -a, 0)$，$(b-a, -a, 0)$以及$(a, b-a, 0)$。如果 $v_I = (*, -a, 0)$，那么 b和 $b-a$都是良好的，因此图 40 中的第一个映射是一个约化。如果 $v_I = (a, *, 0)$，那么 a是良好的，因此图 40 中的第二个映射是一个约化。

类型 9，ZB： $l(\partial\mathcal{F}) = (L_{21}L_{12}^{-1}R_{21} = w_{21})$ 情形 1：$v_I = (*,\ b,\ 0)$，a 和 $a-b$ 是良好的



情形 2：$v_I = (*,\ b-a,\ 0)$，a 和 b 均良好

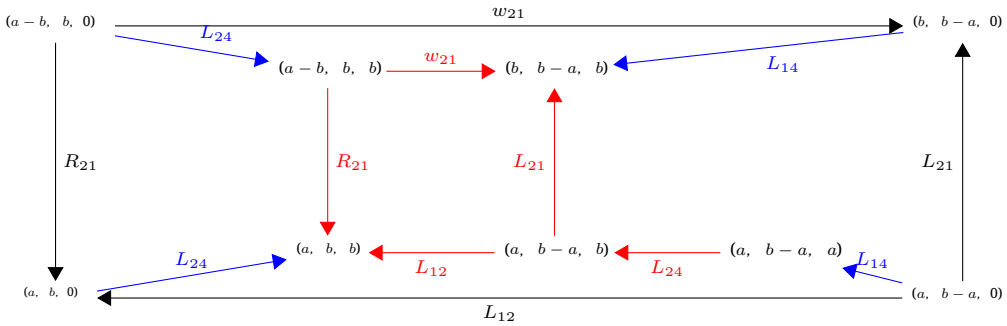


FIGURE 38. 坐标 1，2 和 4 已列出

类型 8，ZB： $l(\partial\mathcal{F}) = (L_{12}L_{21}^{-1}R_{12} = w_{12}),\ v_I = (*, b, 0)$

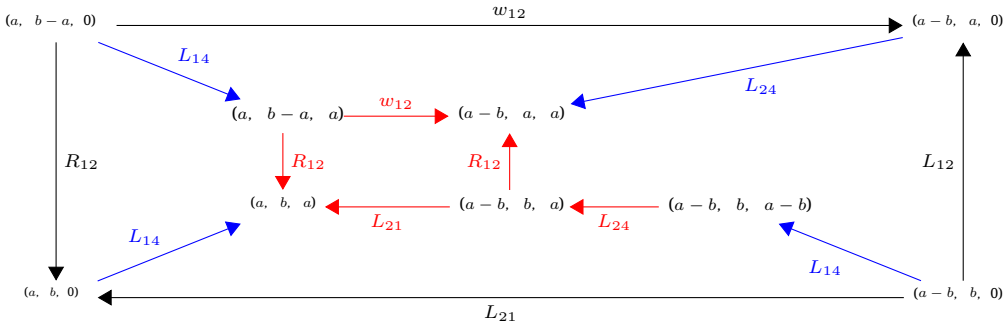
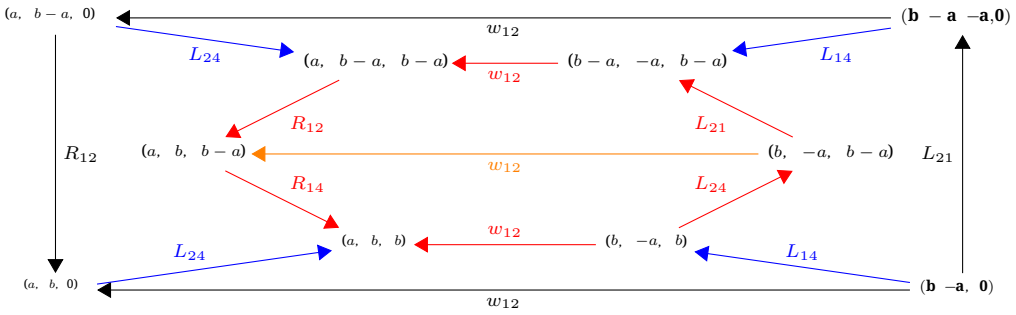


FIGURE 39. 坐标 1、2 和 4 已列出

*11R*型：$l(\partial\mathcal{F}) = (w_{12}^{-1}R_{13}w_{12} = R_{23})$，$I = \{1,2,3,4\}$。与 11A 型一样，我们假设由 w_{12} 标记的边在 v处为入射边，因此必须根据 v处另一条边的支撑集，考虑不同的边界标记代表元。两种情况下的映射均见图 41。根据假设，第一种情况下 a 是良好的，第二种情况下 b是良好的，因此两种情况下该映射都是约化引理3.9(a)。

类型 10，ZB： $l(\partial\mathcal{F}) = (w_{12}^{-1}L_{21}w_{12} = R_{12}^{-1})$，

情形 1： $v_I = (b, -a, 0)$ 或 $(b-a, -a, 0)$，　b 和 $b-a$ 是良好的



情形 2： $v_I = (a, b, 0)$ 或 $(a, b-a, 0)$，　a 良好

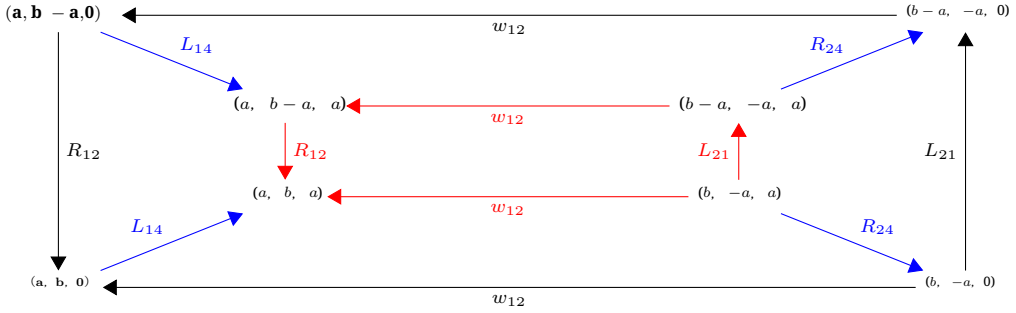


FIGURE 40. 坐标 1、2 和 4 已列出

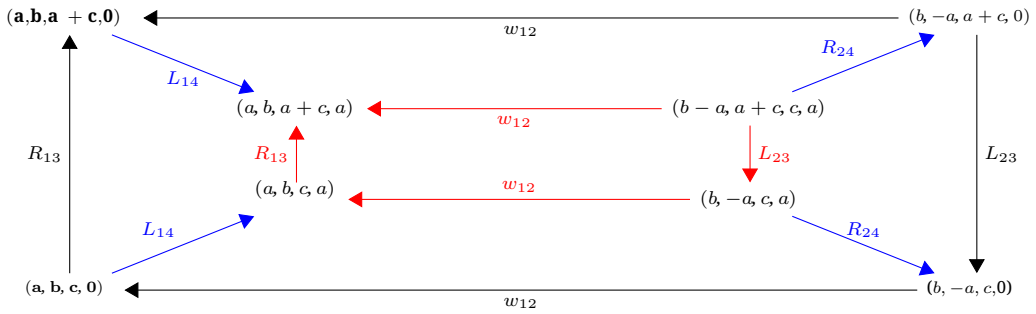
REFERENCES

[BNS87] Robert Bieri、Walter D. Neumann 和 Ralph Strebel, *A geometric invariant of discrete groups.* 《数学发明》90 (1987)，第 3 期，451–477 页。[BR88] Robert Bieri 和 Burkhardt Renz, *Valuations on free resolutions and higher geometric invariants of groups.* 63 1988 3, 464 497 《赫尔维数学评论》

（），第 – 期。[Br84] Kenneth S. Brown, *Presentations for groups acting on simply-connected complexes.* 《纯粹与应用代数杂志》32 (1984)，第 1 期，1–10 页。[Br87] Kenneth S. Brown, *Finiteness properties of groups.* 西北大学群上同调会议论文集（伊利诺伊州埃文斯顿，1985）。《纯粹与应用代数杂志》44 (1987)，第 1–3 期，45–75 页。[D09] Matthew Day, *Artin groups.* 13 2009 2, 817 855

《几何与拓扑》（），第 – 期。[D14] Matthew Day, *Full-featured peak reduction in right-angled Artin groups.* 《代数与几何拓扑》14 (2014)，第 3 期，1677–1743 页。[DP17] Matthew Day 和 Andrew Putman, *On the second homology group of the Torelli subgroup of* Aut(F_n)，《几何与拓扑》21 (2017)，第 5 期，2851–2896 页。[EF23] Mikhail Ershov 和 Daniel Franz, *Effective finite generation for [n n] and the Johnson kernel* 17 2023 4, 1149 1192 IA、IA、《群、几何与动力学》（），第 – 期。[Ge84] Stephen M. Gersten, *A presentation for the special automorphism group of a free group.* 《纯粹与应用代数杂志》33 (1984)，第 3 期，269–279 页。[HL74] P. J. Higgins 和 Roger C. Lyndon, *Equivalence of elements under automorphisims of a free group* 1962 8，油印讲义，（玛丽女王学院，伦敦，），《伦敦数学学会杂志》，(1974)，254–258 页。[KM97] Sava Krsti´c 和 James McCool, *The non-finite presentability of* IA(F_3) *and* $GL_2(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$。《数学发明》129 (1997)，第 3 期，595–606 页

11R.1 型，ZB： $l(\partial\mathcal{F}) = (w_{12}^{-1}R_{13}w_{12} = L_{23}^{-1}),\ v_I = (a, b, *, 0)$



11R.2 型，ZB： $\partial\mathcal{F} = (w_{12}^{-1}R_{13}w_{12} = L_{23}^{-1}),\quad v_I = (-b, *, c, 0)$

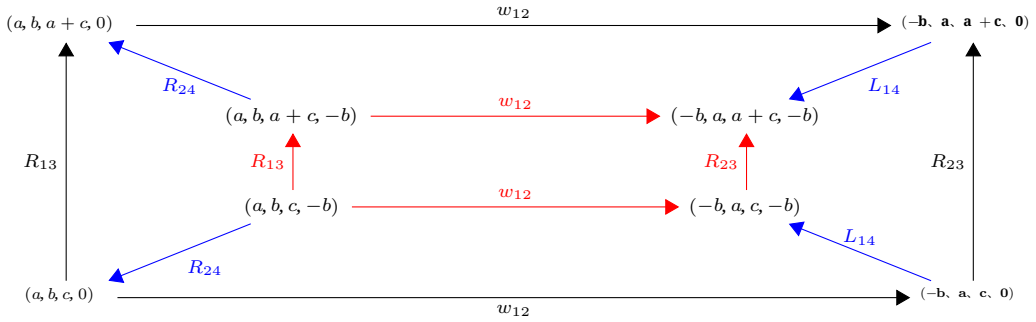


FIGURE 41. 前 4 个坐标已列出

[Ma35] Wilhelm Magnus, *Über n-dimensionale Gittertransformationen.* （德文）《数学学报》64 (1935), 第 1 期，353–367 页。[Mc74a] James McCool, *A presentation for the automorphism group of a free group of finite rank.* 伦敦数学学会，8 (1974)，259–266 页。[Mc74b] James McCool, *On Nielsen's presentation of the automorphism group of a free group.* 《伦敦数学学会杂志》（2）10 (1975)，265–270 页。[Mc75] James McCool, *Some finitely presented subgroups of the automorphism group of a free group.* 《代数学杂志》35 (1975), 205–213 页。[Mi23a] Daniel Minahan, *The acyclicity of the complex of homologous curves* 预印本（2023），arXiv:2305.12548。[Mi23b] Daniel Minahan, *The second rational homology of the Torelli group is finitely generated.* 预印本（2023），arXiv:2307.07082。[MP25a] Daniel Minahan 和 Andrew Putman, *The second rational homology group of the Torelli group,* 预印本（2025），arXiv:2504.00211。[MP25b] Daniel Minahan 和 Andrew Putman, *Abelian covers of surfaces and the homology of the Torelli group* 2025 2504 00215 ，预印本（），arXiv: 。[MP25c]Daniel Minahan 和 Andrew Putman, *Presentations for representations,* 预印本（2025），arXiv:2504.00224。[Ni21] Jakob Nielsen, *Om regning med ikke-kommutative faktorer og dens anvendelse i gruppeteorien,* 《数学杂志 B》（1921），77–94 页。[Ni24] Jakob Nielsen, *Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen. (German)* 《数学年刊》91 (1924)，第 3–4 期，169–209 页。[Ol91] Alexander Ol'shanskii, *Geometry of defining relations in groups.* 莫斯科：科学出版社，1989 年（俄文）；英文译本收录于《数学及其应用（苏联系列）》第 70 卷。克卢维尔学术出版集团，多德雷赫特，1991 年。

[Pu23] Andrew Putman, *Partial Torelli groups and homological stability,* 《代数与几何拓扑》23（2023），3417–3496。[Ra58] E.S. Rapaport, *On free groups and their automorphisms,* 《数学学报》99（1958），139–163。[Re88] Burkhardt Renz,
Geometrische Invarianten und Endlichkeitseigenschaften von Gruppen, 博士论文，法兰克福歌德大学，1988年。[Re89] Burkhardt Renz, *Geometric invariants and HNN-extensions.* 群论（新加坡，1987），465–484，德格鲁伊特出版社，柏林，1989年。[Str12] Raplh Strebel, *Notes on the Sigma invariants,* 预印本（2012），arXiv:1204.0214。[Wh36] J.H.C. Whitehead,
On equivalent sets of elements in a free group. 数学年刊（2）37（1936），第4期，782–800。

University of Virginia*Email address*:
ershov@virginia.edu