arXiv:2601.01394v1 [quant-ph] 4 Jan 2026

磁振子介导的混合系统中磁振子与超导量子比特之间的远距离纠缠生成

Guosen Liu[1*]和 Pei Pei[1]

[1]大连海事大学理学院，中国大连，116026。

*通讯作者。电子邮箱：lgs0866@dlmu.edu.cn；共同作者：peipei@dlmu.edu.cn；

摘要

我们提出了一种高效的两阶段协议，用于在磁振子介导的混合量子系统中生成远程纠缠，其中磁振子兼具相互作用介质和量子比特的双重作用。这种集成设计减少了物理组件的数量，同时利用了磁振子的固有优势，例如通过磁偶极相互作用实现强耦合、低耗散和高可集成性。在我们的方案中，超导谐振器连接局域超导量子比特（SQ）与局域磁振子系统（QM1），后者通过波导与远程磁振子系统（QM2）耦合。该协议包含两个阶段：（i）利用绝热捷径在 SQ 与 QM1 之间确定性地生成贝尔态；（ii）通过精心设计的哈密顿量动力学将相干态传输至 QM2。这种绝热特性增强了系统抵御环境耗散的能力。在现实噪声条件下进行的数值模拟证实，该方案对退相干具有很强的鲁棒性，可实现保真度 $\boldsymbol{F > 0.90}$和负性 $\mathbf{N_2 > 0.40}$。这些结果表明，该协议可作为分布式量子网络中可扩展且实用的构建模块。

关键词：量子纠缠、绝热捷径（STA）、磁振子介导的混合系统、远距离纠缠

1 引言

量子信息科学的基础在于对纠缠进行可控生成与相干操纵，这对于实现先进的

量子技术，例如量子计算[1, 2]，量子计量学[3, 4],和量子通信[5, 6]。量子纠缠是一种非经典关联，它赋予量子系统超越经典物理学局限的能力[7–9]。然而，传统的纠缠生成方法主要依赖缓慢的绝热演化，不仅耗时，而且极易受到环境噪声的影响，导致其在实际应用中的效率和可靠性有限。为克服这些局限，人们提出了包括绝热捷径（STA）方案[10–12] 和混合量子系统[13–17]等替代策略，以应对这些挑战。

通过利用不同物理平台各自互补的优势，可以提升量子纠缠在量子信息处理中的实用性。例如，超导量子比特具有高精度控制和可集成性，而超导电路谐振器则能够提供强耦合和更长的相干时间[18]。作为一种新兴平台，磁振子凭借低耗散、由磁偶极相互作用介导的强量子耦合，以及与多种量子系统发生非线性相互作用的能力，可充当高效的量子比特[19–23]。此外，磁振子还可充当介质，高效连接不同的量子系统；例如，在混合系统中，磁振子器件可以在功能上取代将超导谐振器耦合到波导所需的纳米机械谐振器和光学腔，从而减少组件数量并提高集成度[24]。磁振子与光子的耦合能够实现量子态的远程传输，为量子通信网络提供支持[25–27]。将磁振子与超导系统集成，还能进一步提高量子信息处理的速度和保真度，为量子计算和通信开辟新的可能。近期，磁振子介导的混合系统已展示了磁振子与超导量子比特[28, 29],、磁振子与光子[30], 、光子对[31], 之间的纠缠，以及微波腔系统中的双磁振子纠缠[32–37]。这些进展凸显了混合系统在高效量子信息处理方面的潜力。

除了选择物理系统之外，提高纠缠生成的效率同样至关重要。尽管传统的绝热演化方法能够生成高保真纠缠，但其缓慢的演化速度限制了实际应用。STA 方法已被广泛用作一种有效的优化策略，能够在不同物理系统中实现更快速、保真度更高的纠缠生成。在各种 STA 方法中，基于不变量的方法尤为有效[12, 38, 39], ，为纠缠生成带来了突破。例如，STA 已成功应用于使超导量子比特与磁振子纠缠[40]。基于不变量的快捷绝热演化方法通过优化驱动参数[41],，显著提高了纠缠生成的效率和精度。在这些进展的基础上，本研究还采用约化密度矩阵方法来简化多玻色模系统的处理[25]。尽管近期已有多项研究展示了磁振子介导的混合系统中的远程纠缠生成[33, 37, 42–44], ，我们提出了一种适用于混合量子系统的新型基于绝热捷径的方案，可在不同物理平台之间实现高保真远程纠缠。

本文内容安排如下。第2 节介绍一种基于磁振子的五体混合量子系统，为本研究提供物理平台。在此系统的基础上，第3 节提出一种分阶段实现本地到远程纠缠的方法。随后，第4节通过数值计算验证该方案的可行性，重点考察如何实现具有较高纠缠度量的高保真纠缠 $\mathcal{N}_2$。最后，第5 节总结本文，探讨潜在应用，并展望未来研究方向。

2 磁振子介导的混合系统

所提出的混合量子系统（图1）由五个组件构成，可实现超导平台与磁振子平台之间的相干信息传输：(i) 超导电荷量子比特（SQ）——一种基于约瑟夫森结的量子系统，通过超导岛上的库珀对电荷态编码信息，通常由栅极电压控制，并在低温下运行[17, 45]；(ii) 超导电路谐振器（SC），由两个平行接地平面和夹在其间的一根超导线构成，用作腔[17,45]；(iii) 本地量子磁振子系统（QM1），由一个支持集体自旋波激发的钇铁石榴石（YIG）球实现[13, 17]；(iv) 远程量子磁振子系统（QM2），由另一个YIG球实现；以及 (v) 波导（WG），用于介导QM1与QM2之间的相干耦合。SQ和QM1集成在SC平台上，其中SQ与SC电容耦合，而SC通过磁偶极耦合与QM1相互作用[13, 16]。波导光子与YIG球中的回音壁模（WGMs）相互作用，从而由WG介导两个量子磁振子系统（QM1和QM2）之间的相干耦合[13, 20], ，详见图2。

超导量子比特被建模为一个二能级系统，其中基态和激发态分别记为 $|\tilde{g}\rangle$ 和 $|\tilde{e}\rangle$。超导电路谐振器模和钇铁石榴石球中的回音壁模的量子态由福克光子态 $|0\rangle_{c,\ a,\ b}$ 和 $|1\rangle_{c,\ a,\ b}$描述。磁振子的量子态由数态 $|0\rangle_m$ 和 $|1\rangle_m$描述。

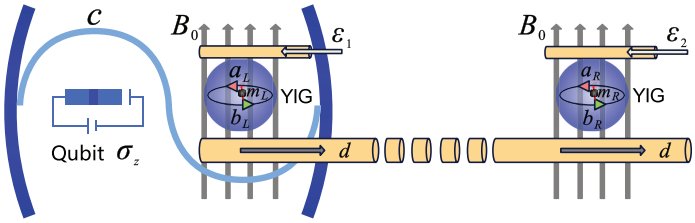

图 1 基于磁振子的五部分混合量子系统示意图。

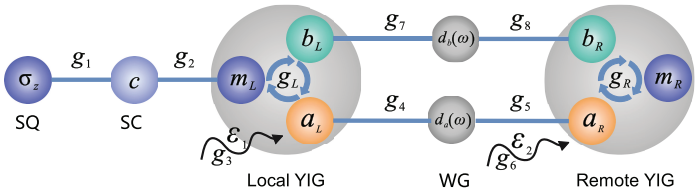

图 2 基于磁振子的五部分混合量子系统耦合示意图。SC 模式（c）和 WG 模式（$d_{a(b)}(\omega)$）分别源自微波腔和波导中的量子化电磁场。磁振子模式（m_L 和 m_R）是钇铁石榴石球中的自旋波激发，其频率可通过外场 B_0 进行调谐。每个钇铁石榴石球中的回音壁模（WGMs）由低能光子模式（a_L 和 a_R）和高能光子模式（b_L 和 b_R）组成，这些模式源于材料的高折射率和球形几何结构所形成的受限光子态。

在这项工作中，总哈密顿量 H_{Total} 被划分为本地分量和远程分量，如下所示：

$$H_{\text{Total}} = H_{\text{Local}} + H_{\text{Remote}} \tag{1}$$

在旋波近似下，总哈密顿量的局域分量可写为：

$$\begin{aligned} H_{\text{Local}} = &\frac{\omega_q}{2}\sigma_z + \omega_c c^\dagger c + \omega_{m_L} {m_L}^\dagger m_L \\ &+ g_1(\sigma_- c^\dagger + \sigma_+ c) + g_2(c m_L^\dagger + c^\dagger m_L) \end{aligned} \tag{2}$$

这里 c （$c^\dagger$）和 m_L （$m_L^\dagger$）分别表示 SC 模式和局域磁振子模的湮灭（产生）算符，其频率分别为 ω_c 和 ω_{m_L}。此外， $\sigma_\pm$ 是超导量子比特的跃迁算符，其能级间隔频率为 ω_q。项 $g_1(\sigma_- c^\dagger + \sigma_+ c)$ 描述了超导量子比特与 SC 之间的相互作用，耦合强度为 g_1。磁偶极相互作用项 $g_2(c m_L^\dagger + c^\dagger m_L)$ 表示 SC 模式 c 与局域磁振子模 m_L 之间的耦合，耦合强度为 g_2[16, 17, 45]。

总哈密顿量的远程分量由四个不同的贡献组成：

$$H_{\text{Remote}} = H_{\text{QM1}} + H_{\text{WG}} + H_{\text{Int}} + H_{\text{QM2}} \tag{3}$$

其中， H_{QM1} 和 H_{QM2} 分别描述两个钇铁石榴石球中的布里渊散射过程：

$$\begin{aligned} H_{\text{QM1}} = &\omega_{a_L} a_L^\dagger a_L + \omega_{b_L} b_L^\dagger b_L \\ &+ \left(g_L a_L b_L^\dagger m_L + \sqrt{g_3}\varepsilon_1^* a_L e^{i\omega_d t} + \text{H.c.}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} H_{\text{QM2}} = &\omega_{a_R} a_R^\dagger a_R + \omega_{b_R} b_R^\dagger b_R + \omega_{m_R} m_R^\dagger m_R \\ &+ \left(g_R a_R b_R^\dagger m_R + \sqrt{g_6}\varepsilon_2^* a_R e^{i\omega_d t} + \text{H.c.}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

这里， a_L ($a_L^\dagger$) 和 b_L ($b_L^\dagger$) 表示本地钇铁石榴石球中回音壁模光子的湮灭（产生）算符。算符 a_R ($a_R^\dagger$) 和 b_R ($b_R^\dagger$) 表示远程钇铁石榴石球中的对应算符，而 m_R ($m_R^\dagger$) 描述远程钇铁石榴石球中的磁振子模式。相干泵浦场 ε_1 和 ε_2 （频率为ω_d）通过波导引入，其耦合率分别为 g_3 和 g_6。g_L (g_R) 表示本地（远程）钇铁石榴石球中的磁振子-光子耦合强度[20, 46, 47]。项 H。c。 表示前述相互作用的厄米共轭。

哈密顿量 H_{WG} 表示波导光子的自由哈密顿量，而 H_{Int} 描述波导光子模式与钇铁石榴石球体的回音壁模之间的相互作用。它们的具体形式为：

$$H_{\mathrm{WG}} = \int \omega \left[d_a^\dagger(\omega) d_a(\omega) + d_b^\dagger(\omega) d_b(\omega) \right] d\omega \tag{6}$$

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{Int}} = & i \int d\omega \sqrt{\frac{g_4}{2\pi}} \left(d_a^\dagger(\omega) a_L e^{-i\omega\tau - i\omega_d t} - a_L^\dagger d_a(\omega) e^{i\omega\tau + i\omega_d t} \right) \\ & + i \int d\omega \sqrt{\frac{g_5}{2\pi}} \left(d_a^\dagger(\omega) a_R e^{-i\omega\tau - i\omega_d t} - a_R^\dagger d_a(\omega) e^{i\omega\tau + i\omega_d t} \right) \\ & + i \int d\omega \sqrt{\frac{g_7}{2\pi}} \left(d_b^\dagger(\omega) b_L e^{-i\omega\tau} - b_L^\dagger d_b(\omega) e^{i\omega\tau} \right) \\ & + i \int d\omega \sqrt{\frac{g_8}{2\pi}} \left(d_b^\dagger(\omega) b_R e^{-i\omega\tau} - b_R^\dagger d_b(\omega) e^{i\omega\tau} \right) \end{aligned} \tag{7}$$

这里， $d_a(\omega)$（$d_a^\dagger(\omega)$）和 $d_b(\omega)$（$d_b^\dagger(\omega)$）分别表示频率为 ω的波导模式中光子的湮灭（产生）算符，它们分别与$a_{L/R}$ （此处，记号$a_{L/R}$ 表示本地（a_L）或远程（a_R）模式，本文中其他下标的含义与 L/R 相同）和 $b_{L/R}$ 回音壁模耦合。参数 τ 对应于光子在连接本地和远程钇铁石榴石球体的波导中传播时的传播时间。耦合强度 g_4和 g_5（g_7 和 g_8）分别介导波导模式与本地和远程钇铁石榴石球体中的回音壁模 a_L 和 a_R（b_L 和 b_R）之间的相互作用。包含 $e^{\pm i\omega_d t}$ 的项描述频率为 ω_d的相干驱动，其中相位因子 $e^{\pm i\omega\tau}$ 体现了光子传播过程中的时延效应。前两项描述波导光子与$a_{L/R}$模式之间的相互作用，而后两项对应于与 $b_{L/R}$ 模式的相互作用。

3 远距离 SQ-QM2 纠缠生成的两阶段协议

为在SQ与QM2之间生成远程纠缠，我们采用两阶段协议。在初始化阶段，将超导腔制备于激发态，同时使SQ和QM1均处于基态。通过绝热捷径（STA）协议，可确定性地生成SQ与QM1之间的纠缠；该协议通过精确调制二者的耦合强度，将

系统驱动至最大纠缠贝尔态。随后，在第二阶段，我们推导出描述本地QM1与远程QM2之间相互作用的有效哈密顿量。利用这一有效相互作用，我们实施受控的动力学演化，将纠缠从SQ-QM1相干地转移至SQ-QM2。这种两阶段方法能够高效地在本地与远程量子平台之间生成远程纠缠。

3.1 阶段 1：生成局域 SQ-QM1 纠缠

3.1.1 基于不变量的 STA

首先，简要介绍基于不变量的 STA 理论[10–12]。假设量子系统的演化可由含时哈密顿量$H(t)$描述，且存在满足以下条件的不变量 $I(t)$： $i\hbar\frac{\partial I(t)}{\partial t} - [H(t)\ I(t)] = 0$。$I(t)$的本征态可用于表示含时薛定谔方程的任意解 $|\Psi(t)\rangle$ 。具体而言，通解可表示为哈密顿量本征态的叠加：$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n |\psi_n(t)\rangle$，其中 $|\psi_n(t)\rangle$ 是 $H(t)$的本征态，而 c_n 是与时间无关的概率振幅。根据刘维尔-里森菲尔德不变量理论， $I(t)$的本征态与$H(t)$的本征态仅相差一个相位因子：

$$|\psi_n(t)\rangle = e^{i\alpha_n(t)} |\varphi_n(t)\rangle \tag{8}$$

其中， $|\varphi_n(t)\rangle$ 是 $I(t)$的本征态。 $\alpha_n(t)$称为刘易斯-里森菲尔德相位，其定义为：

$$\alpha_n(t) = \frac{1}{\hbar}\int_0^t \left\langle \varphi_n(t') \left| i\hbar\frac{\partial}{\partial t'} - H(t') \right| \varphi_n(t') \right\rangle dt' \tag{9}$$

总之， $I(t)$的本征态可用于表示含时薛定谔方程¨ $|\Psi(t)\rangle$的任意解：

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{i\alpha_n(t)} |\varphi_n(t)\rangle \tag{10}$$

上述表达式表明，薛定谔方程的任意解 $|\Psi(t)\rangle$ 都可以表示为本征态 $|\varphi_n(t)\rangle$ 的叠加，其中本征态属于 $I(t)$。在实际应用中，初态和末态由本征态 $|\varphi_n(t)\rangle$表示。由 $I(t)$的本征态构造的非绝热演化路径替代了原有的绝热演化路径，从而加快了量子态动力学。

3.1.2 通过 STA 生成纠缠

本节介绍如何应用基于不变量的 STA 方法，在局域 SQ 与 QM 之间生成纠缠1[40, 41]。描述这一过程的哈密顿量为 H_{Local}。为明确展示这种相互作用，我们进一步分析三逻辑态系统中的动力学，如图3所示。

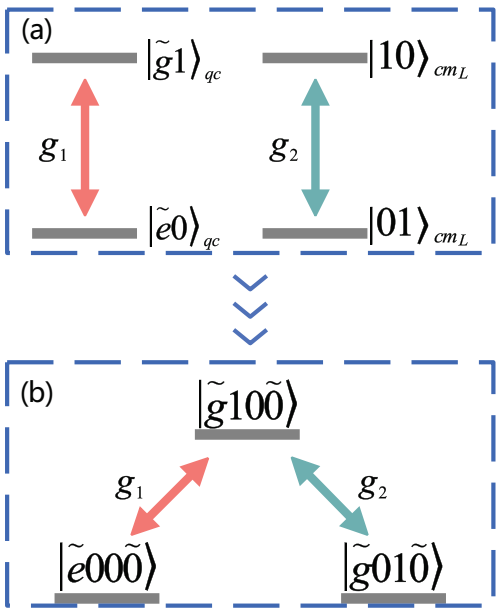

图 3 (a) SC 与 SQ 和 QM1 之间的相互作用，以及态耦合 $|\tilde{g}1\rangle_{qc} \leftrightarrow |\tilde{e}0\rangle_{qc}$ 和 $|10\rangle_{cm_L} \leftrightarrow |01\rangle_{cm_L}$。(b) 在逻辑态基中：$|\tilde{e}00\tilde{0}\rangle$、$|\tilde{g}10\tilde{0}\rangle$和 $|\tilde{g}01\tilde{0}\rangle$，$|\tilde{e}00\tilde{0}\rangle$ 和 $|\tilde{g}01\tilde{0}\rangle$ 通过中间态 $|\tilde{g}10\tilde{0}\rangle$耦合。

˜相互作用哈密顿量 H_1 用三个逻辑态表示为：$|\tilde{e}000\rangle$、˜ ˜|$\tilde{g}100\rangle$和 $|\tilde{g}010\rangle$，如下所示：

$$H_1 = g_1 |\tilde{e}00\tilde{0}\rangle \langle\tilde{g}10\tilde{0}| + g_2 |\tilde{g}10\tilde{0}\rangle \langle\tilde{g}01\tilde{0}| + \text{H.c.} \tag{11}$$

狄拉克括号 $|\tilde{q}cm_L\tilde{m}_R\rangle$ 分别表示超导量子比特模式 $\tilde{q}$、超导腔模c、局域磁振子模 m_L 和远程磁振子模 $\tilde{m}_R$。利用三个逻辑态表示的 H_1 矩阵形式如下：

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & 0 \\ g_1^* & 0 & g_2 \\ 0 & g_2^* & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

不变量 $I(t)$ 满足方程 $i\hbar\frac{\partial I(t)}{\partial t} - [H(t)\ I(t)] = 0$，其表达式如下：

$$I(t) = \Omega_0 \begin{pmatrix} 0 & \cos\gamma\sin\theta & -i\sin\gamma \\ \cos\gamma\sin\theta & 0 & \cos\gamma\cos\theta \\ i\sin\gamma & \cos\gamma\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$I(t)$ 的本征态如下式所示：

$$|\varphi_0(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\theta \\ -i\sin\gamma \\ -\cos\gamma\sin\theta \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$|\varphi_\pm(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin\gamma\cos\theta \pm i\sin\theta \\ i\cos\gamma \\ -\sin\gamma\sin\theta \pm i\cos\theta \end{pmatrix} \tag{15}$$

本征态 $|\varphi_0(t)\rangle$ 和 $|\varphi_\pm(t)\rangle$ 分别对应本征值 0 和 $\pm\Omega_0$。将不变量的形式代入方程 $i\hbar\frac{\partial I(t)}{\partial t} - [H(t)\ I(t)] = 0$，可得耦合强度 g_1 和 g_2 的辅助方程：

$$\begin{aligned} g_1 &= \dot{\theta}\cot\gamma\sin\theta + \dot{\gamma}\cos\theta, \\ g_2 &= \dot{\theta}\cot\gamma\cos\theta - \dot{\gamma}\sin\theta. \end{aligned} \tag{16}$$

这里，$\gamma(t)$ 和 $\theta(t)$ 是时间依赖参数，$\dot{\gamma}$ 和 θ 分别表示它们的时间导数。为实现超导量子比特与 QM1 之间的纠缠生成，在时间区间 $[0, T_1)$ 内，参数 γ 和 θ 定义为：

$$\gamma = \frac{\pi}{2T_1}t - \frac{\pi}{2}; \quad \theta = \frac{\pi}{4} \tag{17}$$

辅助方程可化简为：

$$g_1 = \frac{\sqrt{2}\pi}{4T_1}; \quad g_2 = -\frac{\sqrt{2}\pi}{4T_1}. \tag{18}$$

本研究的目标是使量子态从$\tilde{}$ $\tilde{}$初态 $|\tilde{g}100\rangle$ 演化为由 $|\tilde{e}000\rangle$ 和 $|\tilde{g}010\rangle$构成的纠缠叠加态。因此，我们将理想初态$|\psi_{1_初态}\rangle$ 和目标末态$|\psi_{1_末态}\rangle$ 定义如下：

$$|\psi_{1_\mathrm{initial}}\rangle = |\tilde{g}10\tilde{0}\rangle \tag{19}$$

$$|\psi_{1_\mathrm{final}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\tilde{e}00\tilde{0}\rangle + |\tilde{g}01\tilde{0}\rangle) \tag{20}$$

在初始时刻 $t = 0$，得到与时间无关的概率振幅 c_0 和 $c_\pm$。通过积分，计算出 $\alpha_n(T_1)$的值。将结果代入 $|\Psi(T_1)\rangle = \sum_n c_n e^{i\alpha_n(T_1)}|\varphi_n(T_1)\rangle$。在不存在耗散的情况下，可以得到目标态$|\psi_{1_最终}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\tilde{e}00\tilde{0}\rangle + |\tilde{g}01\tilde{0}\rangle)$。通过提取超导腔模和远程磁振子模的真空态$|0\tilde{0}\rangle_{cm_R}$，具体而言是 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\tilde{e}0\rangle_{qm_L} + |\tilde{g}1\rangle_{qm_L}) \otimes |0\tilde{0}\rangle_{cm_R}$，在超导量子比特与 QM1 之间生成最大纠缠贝尔态$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\tilde{e}0\rangle_{qm_L} + |\tilde{g}1\rangle_{qm_L})$。

3.2 阶段2：向远程QM2进行相干纠缠传输

3.2.1 磁振子模式的有效哈密顿量

为增强光学模式 $b_{L/R}$ 与磁振子模式$m_{L/R}$之间的耦合强度，本方案利用泵浦场$a_{L/R}$驱动光学模式$\varepsilon_{1,\ 2}$。考虑到$a_{L/R}$ 模式与波导光子模式之间的耦合，并计入泵浦场$\varepsilon_{1,\ 2}$ 以及光学模式$a_{L/R}$的本征耗散，$\langle a_{L/R}\rangle$ 的动力学方程为 [25, 48]:

$$\begin{aligned}\langle \dot{a}_{L/R}\rangle = &\left(-i\Delta_a - \frac{\kappa_{L/R}}{2}\right)\langle a_{L/R}\rangle \\ &- ig_{L/R}\langle b_{L/R}m_{L/R}^{\dagger}\rangle - i\sqrt{g_{3,6}}\varepsilon_{\mathrm{eff},L/R}\end{aligned} \tag{21}$$

这里，$\Delta_a = \omega_a - \omega_d$ 是光学模式频率（$\omega_a = \omega_{a_L} = \omega_{a_R}$）与驱动频率（$\omega_d$）之间的失谐。总衰减率$\kappa_{L/R}$ 为：$\kappa_{L/R} = \kappa_{a_{L/R}} + g_{3,\ 6} + g_{4,\ 5}$，其中$\kappa_{a_{L/R}}$ 为本征衰减率，而$\varepsilon_{\mathrm{eff},\ L/R}$ 表示有效驱动[49]。推导中，我们假设波导初始处于真空态，并忽略迟滞效应（马尔可夫近似）。在强泵浦场极限下，高阶光磁相互作用项（$-ig_{L/R}\langle b_{L/R}m_{L/R}^{\dagger}\rangle$）可以忽略不计（鉴于$g_{L/R}$ 的量级为 Hz）[50, 51]。因此，算符 $a_{L/R}$ 可以用其稳态期望值 $\langle a_{L/R}\rangle_{ss} = \frac{i\sqrt{g_{3,\ 6}}\varepsilon_{\mathrm{eff},\ L/R}}{-i\Delta_a - \kappa_{L/R}/2}$ 替代。在由$\sum_{j=L,\ R}\omega_d(a_j^{\dagger}a_j + b_j^{\dagger}b_j)$ 定义的旋转参考系中，哈密顿量 H_{QM1} 和H_{QM2} 可表示为:

$$\begin{aligned}H'_{\mathrm{QM1}} = &\Delta_b b_L^{\dagger}b_L + \omega_m m_L^{\dagger}m_L \\ &+ G_L b_L^{\dagger}m_L + G_L^{*}b_L m_L^{\dagger}, \\ H'_{\mathrm{QM2}} = &\Delta_b b_R^{\dagger}b_R + \omega_m m_R^{\dagger}m_R \\ &+ G_R b_R^{\dagger}m_R + G_R^{*}b_R m_R^{\dagger}.\end{aligned} \tag{22}$$

其中，$\Delta_b = \omega_b - \omega_d$ 表示光学模式频率（$\omega_b = \omega_{b_L} = \omega_{b_R}$）与驱动频率（$\omega_d$）之间的失谐，$\omega_m = \omega_{m_L} = \omega_{m_R}$ 表示磁振子模式的频率，$G_{L/R}$ 表示有效耦合强度。有效耦合强度 $G_{L/R}$ 与有效泵浦场$\varepsilon_{\mathrm{eff},L/R}$成正比，因此可以通过调节$\varepsilon_{\mathrm{eff},L/R}$[49, 52]来改变它。考虑 $b_{L/R}$模式与波导光子模式之间的耦合，我们推导出描述本地节点和远程节点之间间接相互作用的主方程 [25]:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_b = &-i[H'_{\mathrm{node}},\rho_b] + g_7\mathcal{L}[b_L]\rho_b + g_8\mathcal{L}[b_R]\rho_b \\ &- \sqrt{g_7 g_8}\left(e^{-ikx}[\rho_b b_L^{\dagger}, b_R] + e^{ikx}[b_R^{\dagger}, b_L\rho_b]\right)\end{aligned} \tag{23}$$

其中，$H'_{\mathrm{node}} = H'_{\mathrm{QM1}} + H'_{\mathrm{QM2}}$、$\mathcal{L}[\Theta]\rho = \Theta\rho\Theta^{\dagger} - \frac{1}{2}\{\Theta^{\dagger}\Theta, \rho\}$ 表示林德布拉德耗散超算符，而 e^{-ikx} 表示光子

从本地节点传播到远程节点时累积的相位延迟，其中 k 表示波导中的波数， x 表示节点间的距离。第一项描述系统的相干演化。第二项和第三项描述各个节点的能量耗散，而第四项则表示节点间的光子传输。

为推导有效磁振子哈密顿量，我们消去光学模式 $b_{L/R}$，并假设光学模式 $b_{L/R}$ 达到稳态所需的时间尺度远短于光学模式与磁振子模式之间相互作用的时间尺度。通过采用 Nakajima-Zwanzig 投影算符技术，我们推导出磁振子密度矩阵的林德布拉德形式主方程$\mu = \mathrm{Tr}_b[\rho]$[25, 53]:

$$\begin{aligned}\dot{\mu} = & -i[H^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{Remote}}, \mu] \\ & + \widetilde{S}_{LL}\left(2m_L\mu m_L^\dagger - m_L^\dagger m_L\mu - \mu m_L^\dagger m_L\right) \\ & + \widetilde{S}_{LR}\left(2m_R\mu m_L^\dagger - m_L^\dagger m_R\mu - \mu m_L^\dagger m_R\right) \\ & + \widetilde{S}_{RL}\left(2m_L\mu m_R^\dagger - m_R^\dagger m_L\mu - \mu m_R^\dagger m_L\right) \\ & + \widetilde{S}_{RR}\left(2m_R\mu m_R^\dagger - m_R^\dagger m_R\mu - \mu m_R^\dagger m_R\right)\end{aligned} \tag{24}$$

其中 $\widetilde{S}_{jk} = \frac{G_j^* G_k}{2}\left[S_{jk}(\omega_m) + S_{kj}^*(\omega_m)\right]$，且 $S_{jk}(\omega) = \int_0^\infty \langle c_j(\tau)c_k^\dagger(0)\rangle e^{i\omega\tau}d\tau$(j， $k = L$， R)。假设 $\omega_{m_{L/R}} = \Delta_b = \omega_m$、 $g_7 = g_8 = g$、 $kx = 2n\pi$ （n 为整数）以及有效耦合 $G_{L/R}$ 均为实数，我们可以计算系数 $S_{jj}(\omega_m) = \frac{2}{g}$ (j =L， R) $S_{RL}(\omega_m) = -\frac{4}{g}$， $S_{LR}(\omega_m) = 0$。有效哈密顿量 $H^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{Remote}}$在旋转参考系 $\omega_m m_L^\dagger m_L + \omega_m m_R^\dagger m_R$ 中可写为:

$$H^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{Remote}} = g_{\mathrm{eff}} m_R^\dagger m_L + g_{\mathrm{eff}}^* m_L^\dagger m_R \tag{25}$$

其中， $g_{\mathrm{eff}} = \frac{2i}{g}G_L G_R$ 表示磁振子之间的有效耦合强度。

3.2.2 纠缠转移的动力学演化

基于上一节推导出的磁振子模之间的有效哈密顿量，本节通过动力学演化，将纠缠从 SQ-QM1 系统（第一阶段结束后获得）转移到 SQ-QM2 系统。为清晰展示子系统之间的相互作用，我们将耦合示意图简化为图4。

生成局域 SQ-QM1 纠缠并得到状态$|\psi_{1\text{最终}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tilde{e}00\tilde{0}\rangle + |\tilde{g}01\tilde{0}\rangle\right)$后，我们在时间区间 $[T_1, T_2)$ 内实施纠缠转移协议。在 $t = T_1$ 时，我们通过设置$g_1 = g_2 = 0$ 消除本地耦合，同时激活有效耦合 g_{eff}。为实现从 SQ-QM1 到 SQ-QM2 的高效纠缠转移，我们按照 [25] 中所述的方法设计有效耦合强度。耦合参数 G_L 和 G_R

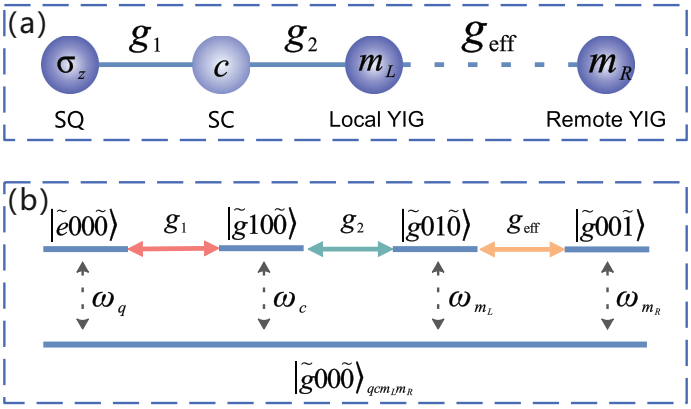

图4（a）简化的耦合示意图。（b）我们使用五个逻辑态来描述四个子系统之间的耦合，其中 g_{eff} 表示 m_L 与m_R之间的有效耦合强度。 $|\tilde{g}00\tilde{0}\rangle_{qcm_Lm_R}$ 表示所有子系统均处于其基态的状态。

设计如下：

$$G_L(t)=\Omega\sqrt{\frac{1-\left\{\frac{1-\exp\left[\frac{4\Omega^2}{g}(t-T_1)-10\right]}{1+\exp\left[\frac{4\Omega^2}{g}(t-T_1)-10\right]}\right\}}{2}}$$
$$G_R(t)=\Omega\sqrt{\frac{1+\left\{\frac{1-\exp\left[\frac{4\Omega^2}{g}(t-T_1)-10\right]}{1+\exp\left[\frac{4\Omega^2}{g}(t-T_1)-10\right]}\right\}}{2}} \tag{26}$$

其中 $\Omega=\sqrt{G_L^2(t)+G_R^2(t)}=0.15g$ 保持恒定。图5 给出了 $G_L(t)$ 与 $G_R(t)$ 的时间演化曲线。我们精确控制这些耦合，以维持有效哈密顿量方程（25），从而实现相干纠缠传输，同时抑制非期望跃迁。在无耗散的情况下，系统在 $g_{\text{eff}}(t)$ 的作用下演化至如下态：

$$|\psi_{\text{target}}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tilde{e}00\tilde{0}\rangle+|\tilde{g}00\tilde{1}\rangle\right) \tag{27}$$

通过提取超导腔模与局域磁振子模的真空态 $|00\rangle_{cm_L}$ ，即 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\tilde{e}\tilde{0}\rangle_{qm_R}+|\tilde{g}\tilde{1}\rangle_{qm_R})\otimes|00\rangle_{cm_L}$，在超导量子比特与QM2之间生成了最大纠缠贝尔态$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\tilde{e}\tilde{0}\rangle_{qm_R}+|\tilde{g}\tilde{1}\rangle_{qm_R})$。

这一最终态证实，纠缠已完全转移至 SQ-QM2系统。该协议要求对耦合强度进行精确的时间控制。最终，这使本地（SQ）与远程（QM2）量子系统之间的纠缠得以确定性生成。接下来的章节将探讨耗散对整个过程的影响。

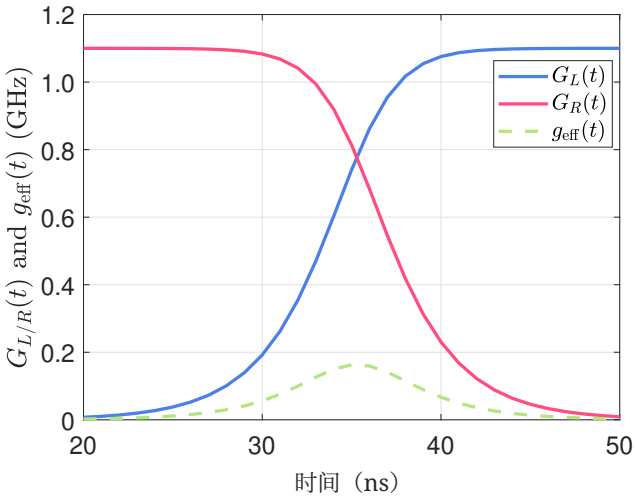

图5 设计的有效耦合强度 $G_{L/R}(t)$和 $g_{\text{eff}}(t)$的时间演化曲线。

4 数值模拟

为展示所提出的两阶段协议在本地（SQ）与远程（QM2）量子系统之间生成高保真纠缠方面的优势，我们进行了详细的数值模拟。该协议包含两个不同阶段：（i）在通过基于不变量的快捷绝热演化方法设计的耦合强度下进行演化，随后（ii）在预先设定的有效耦合强度下进行演化。至关重要的是，我们在两个阶段中都考虑了退相干效应，以评估该协议在现实条件下的稳健性。我们通过两个关键指标对由此产生的 SQ-QM2 纠缠态进行定量表征：态保真度和负性，后者是一种广为认可的纠缠度量。此外，我们系统地分析了系统在不同退相干区域下的性能，展示了这一纠缠生成方案的实际优势。

4.1 本地系统与远程系统之间的纠缠生成

基于图4所示的简化耦合方案，我们在张量积空间中构建了一个由四个二维子系统组成的复合系统。在初始阶段 $[0, T_1)$，我们通过采用根据方程（18）设计的耦合强度，生成 SQ-QM1 纠缠。值得注意的是，在此阶段，有效耦合强度始终保持为零。在后续阶段 $[T_1, T_2)$，纠缠从 SQ-QM1 系统转移至 SQ-QM2 系统。此处，我们设置 $g_1 = g_2 = 0$，使纠缠转移仅在有效耦合 $g_{\text{eff}}(t$的作用下进行。为充分刻画系统在这些受控耦合下的演化，我们采用林德布拉德

主方程:

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho} = & i[\rho, H'_{\text{Total}}] \\
& + \widetilde{S}_{LL}\left(2m_L\mu m_L^\dagger - m_L^\dagger m_L\mu - \mu m_L^\dagger m_L\right) \\
& + \widetilde{S}_{LR}\left(2m_R\mu m_L^\dagger - m_L^\dagger m_R\mu - \mu m_L^\dagger m_R\right) \\
& + \widetilde{S}_{RL}\left(2m_L\mu m_R^\dagger - m_R^\dagger m_L\mu - \mu m_R^\dagger m_L\right) \\
& + \widetilde{S}_{RR}\left(2m_R\mu m_R^\dagger - m_R^\dagger m_R\mu - \mu m_R^\dagger m_R\right) \\
& + \gamma_q\mathcal{L}[\sigma_-]\rho + \frac{\gamma_\phi}{2}\mathcal{L}[\sigma_z]\rho \\
& + \kappa_c(\bar{n}_c+1)\mathcal{L}[c]\rho + \kappa_c\bar{n}_c\mathcal{L}[c^\dagger]\rho \\
& + \kappa_{m_L}(\bar{n}_{m_L}+1)\mathcal{L}[m_L]\rho + \kappa_{m_L}\bar{n}_{m_L}\mathcal{L}[m_L^\dagger]\rho \\
& + \kappa_{m_R}(\bar{n}_{m_R}+1)\mathcal{L}[m_R]\rho + \kappa_{m_R}\bar{n}_{m_R}\mathcal{L}[m_R^\dagger]\rho
\end{aligned}
\tag{28}
$$

其中， γ_q 和 γ_ϕ 分别表示超导量子比特的弛豫率和退相干率，而 κ_c， κ_{m_L}和 κ_{m_R} 分别对应腔模、局域磁振子模和远程磁振子模的衰减率[54]。平均热光子数和磁振子数， $\bar{n}_c$、 $\bar{n}_{m_L}$和 $\bar{n}_{m_R}$ 服从玻色-爱因斯坦分布： $\bar{n}_i = \left(\exp\left[\frac{\hbar\omega_i}{\mathrm{k_B}T_{\text{th}}}\right]-1\right)$ 其中 $i \in \{c, m_L, m_R\}$， $\hbar$ 为约化普朗克常数， ω_i 为相应模式的特征频率， $\mathrm{k_B}$ 为玻尔兹曼常数，而 T_{th} 为热平衡温度。

˜ ˜系统初始处于纯态 $\rho(0) = |\tilde{g}100\rangle\langle\tilde{g}100|$，激发仅局域于超导电路谐振器中。我们通过数值求解林德布拉德主方程，得到随时间变化的密度矩阵$\rho(t)$，从而分析量子关联。关键指标包括：(i) 保真度$F = \langle\psi_{\text{target}}|\rho(T_2)|\psi_{\text{target}}\rangle$，用于量化系统与目标态 $|\psi_{\text{target}}\rangle$的重叠；(ii) 通过负性表征的双体纠缠，具体而言， $\mathcal{N}_1$ 超导量子比特与 QM1 之间，以及 $\mathcal{N}_2$ 超导量子比特与 QM2 之间的纠缠。相应的纠缠动力学 $\mathcal{N}_1(t)$ 和 $\mathcal{N}_2(t)$ 展示于图 6(a)，呈现了整个过程中的演化。图 6(b) 展示了基矢 ˜ ˜ ˜ ˜态 $|\tilde{e}000\rangle$、 $|\tilde{g}100\rangle$、 $|\tilde{g}010\rangle$ 和 $|\tilde{g}001\rangle$的布居动力学，揭示了相干激发转移。

如图6所示，我们的方案在现实退相干条件下，实现了局域 SQ 与远程QM2之间的高保真度（$F = 0.90$）远程纠缠，负性达到 $\mathcal{N}_2(t)$ =0.40。

4.2 远距离纠缠生成方案的鲁棒性

耗散是量子信息处理中的固有挑战，尤其是在量子通信和计算中，稳健的纠缠生成至关重要。在本节中，我们分析保真度 F和最大纠缠度量 $\mathcal{N}_2(t)$ 对耗散系数的依赖关系，以评估所提出方案的稳健性。

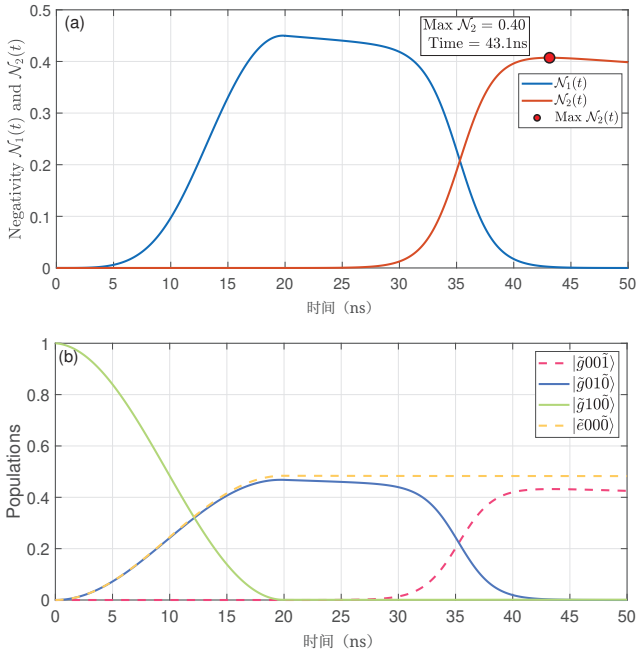

图 6 通过两阶段协议实现超导量子比特与 QM2 之间的远程纠缠生成。(a) 二体纠缠 $\mathcal{N}_1(t)$ 和 $\mathcal{N}_2(t)$ 随时间的演化。(b) 两个阶段中各布居数随时间的演化。在时间区间 $[0, T_1)$ 内，模拟中采用的弛豫率和退相干率分别为 $\gamma_q/2\pi = 0.01$ $\gamma_\phi/2\pi = 0.1$ $\omega_c/2\pi =$MHz 和 10 $\omega_{m_L}/2\pi = 5$ $T_{\text{th}} = 50$ MHz。系统频率设为 GHz、GHz。热平衡温度为 mK，子系统的耗散为 $\kappa_c = \kappa_{m_L} = 0.5$MHz。在时间区间 $[T_1, T_2)$ 内，模拟中采用的子系统耗散为 $\kappa_c = \kappa_{m_L} = \kappa_{m_R} = 0.5$MHz。系统频率设为 $\omega_{m_L}/2\pi = \omega_{m_R}/2\pi = 5$GHz。热平衡温度为 $T_{\text{th}} = 50$mK。

图 7 通过二维密度图展示了多种耗散机制在远程纠缠生成全过程中对保真度的影响 F，并阐明了影响保真度的主要耗散机制。如图7(a)所示，退相干率 γ_ϕ 导致的 F 降低幅度大于弛豫率 γ_q，因为 γ_ϕ 会直接抑制量子态的相位相干性，而相位相干性是影响量子态与理想态之间保真度的关键因素。图7(b)表明，弛豫率γ_q 对保真度的影响超过了衰减率 κ_c。图7(c)显示，腔衰减率 κ_c 与 κ_{m_L}的影响程度相近但有所不同，后者对保真度的削弱略强。图7(d)进一步表明，衰减率 κ_{m_L} 对保真度的抑制作用明显强于远程磁振子衰减率 κ_{m_R}。这种耗散关系表明，直接耦合的玻色模——具体而言，腔模 c 和局域磁振子模 m_L——其衰减率对保真度的影响，比单个间接耦合的玻色模，即远程磁振子模 m_R的衰减率更大。

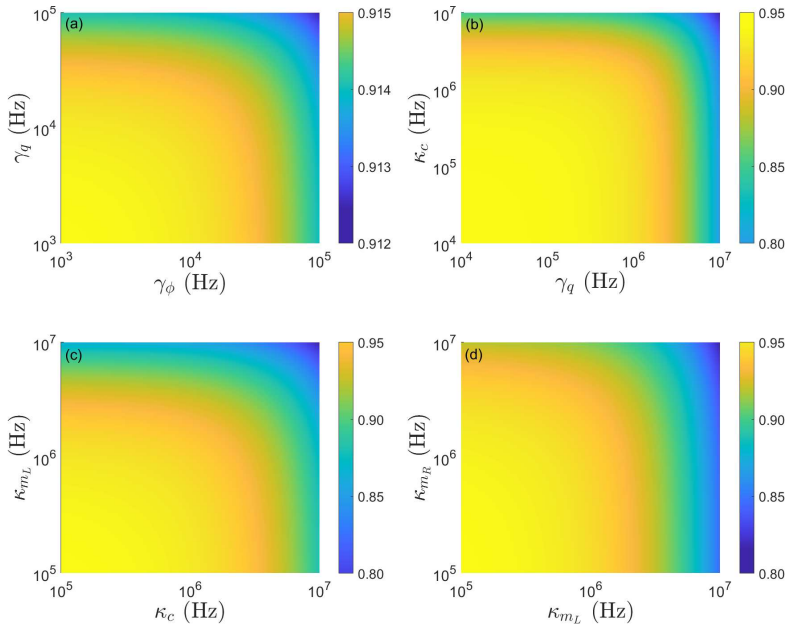

图 7 纠缠度量 F对弛豫率 γ_q、退相干率 γ_ϕ 以及衰减率 κ_c、 κ_{m_L}和 κ_{m_R}的依赖关系。（a）弛豫率 γ_q 和退相干率 γ_ϕ 对纠缠度量 F的影响。（b）衰减率 κ_c和弛豫率 γ_q对纠缠度量 F的影响。（c）衰减率 κ_c和退相干率 κ_{m_L}对纠缠度量 F的影响。（d）衰减率κ_{m_R}和退相干率 κ_{m_L}对纠缠度量 F的影响。

图 8 展示了表征不同耗散通道对纠缠度量 $\mathcal{N}_2$ 在纠缠生成动力学过程中的影响的密度图。对这些图的分析表明，不同衰减率对 $\mathcal{N}_2$ 的相对影响与保真度 F 在图 7中呈现的规律完全一致。具体而言，图 8（a）表明，退相干率 γ_ϕ 导致的 $\mathcal{N}_2$ 退化程度显著高于弛豫率 γ_q。此外，图8（b）显示，γ_q 在抑制纠缠度量方面的作用强于腔衰减率 κ_c 。图8（c）揭示，局域磁振子衰减率 κ_{m_L} 对 $\mathcal{N}_2$ 的有害影响略强于 κ_c。最后，图8表明， κ_{m_L}对纠缠度量的抑制作用明显强于远程磁振子衰减率 κ_{m_R}。

这些结果表明，在所研究的参数范围内，弛豫和退相干过程是限制保真度 F 和纠缠度量 $\mathcal{N}_2$的主要因素，而各个玻色模的衰减率对这两个量的影响相对较弱。尤为重要的是，该方案成功实现了局域 SQ 与远程 QM2 之间的远距离纠缠生成，展现出对这些主要退相干通道的抵抗能力，同时保持了稳健的动力学性能。这表明该方案在大规模量子网络中的实际应用具有巨大潜力。

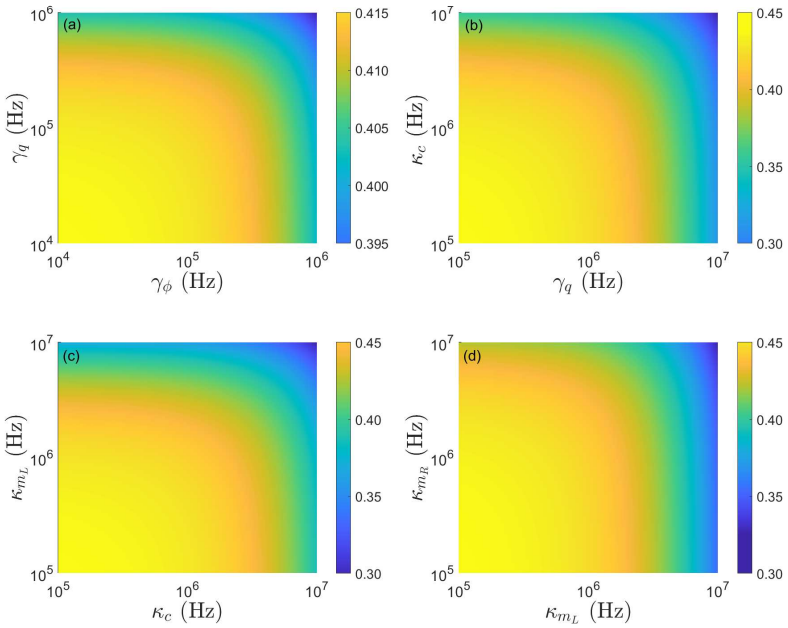

图8 纠缠度量 $\mathcal{N}_2$ 对弛豫率 γ_q、退相干率 γ_ϕ 和衰减率 κ_c、 κ_{m_L}及 κ_{m_R}的依赖关系。(a)弛豫率 γ_q 和退相干率 γ_ϕ 对纠缠度量 $\mathcal{N}_2$的影响。(b)衰减率 κ_c 和弛豫率 γ_q 对纠缠度量 $\mathcal{N}_2$的影响。(c)衰减率 κ_c 和退相干率 κ_{m_L} 对纠缠度量 $\mathcal{N}_2$的影响。(d)衰减率 κ_{m_R} 和退相干率 κ_{m_L} 对纠缠度量 $\mathcal{N}_2$的影响。

5 结论

我们提出了一种高效的两阶段纠缠生成方案，用于磁振子介导的混合物理系统中的远距离量子系统。该方案利用超导电路谐振器（SC）介导局域超导量子比特（SQ）与量子磁振子系统（QM1）之间的相互作用，其中 QM1 通过波导与远程量子磁振子系统（QM2）耦合。该方案建立了一个确定性纠缠生成框架：首先通过绝热捷径（STA）协议在 SQ 与 QM1 之间生成贝尔态纠缠，随后通过精心设计的有效哈密顿动力学将纠缠相干转移至 QM2。该方案巧妙地利用磁振子，使其既充当功能性量子比特，又充当媒介，从而显著简化了整体系统设计。随着实验材料与技术的不断进步，耦合强度有望进一步提高[55], ，从而提升保真度和负性。这些改进将使该方案能够应用于前景广阔的领域，并为实现高效长距离量子通信提供可靠途径。此外，所提出的方案还可轻松扩展至多节点系统，展现出构建可扩展量子网络的潜力。

声明

- 资金 作者声明，在准备本稿件期间未获得任何资金、资助或其他支持。

- 利益冲突 作者无须披露任何相关的财务或非财务利益。

- 伦理审批和参与同意 不适用。

- 发表同意 所有作者均已阅读并批准稿件的最终版本，确认稿件内容准确且完整，并同意将其提交至国际理论物理学杂志。

- 数据可用性 由于本研究期间未生成或分析任何数据集，数据共享不适用于本文。

- 材料可用性 不适用。

- 代码可用性 不适用。

- 作者贡献 所有作者均参与了本研究的构思与设计。所有方法学工作，包括模型构建、研究方案制定和数值模拟，均由 Guosen Liu 和 Pei Pei 完成。论文初稿由 Guosen Liu 撰写，所有作者均对论文的先前版本提出了意见。所有作者均已阅读并批准最终稿。

参考文献

[1] Graham, T.M., Song, Y., Scott, J., Poole, C., Phuttitarn, L., Jooya, K., Eichler, P., Jiang, X., Marra, A., Grinkemeyer, B., Kwon, M., Ebert, M., Cherek, J., Lichtman, M.T., Gillette, M., Gilbert, J., Bowman, D., Ballance, T., Campbell, C., Dahl, E.D., Crawford, O., Blunt, N.S., Rogers, B., Noel, T., Saffman, M.：中性原子量子计算机上的多量子比特纠缠与算法。《自然》**604**(7906), 457–462 (2022年) https://doi.org/10.1038/s41586-022-04603-6

[2] Bartolucci、S.，Birchall、P.，Bomb´ın、H.，Cable、H.，Dawson、C.，Gimeno-Segovia、M.，Johnston、E.，Kieling、K.，Nickerson、N.，Pant、M.，Pastawski、F.，Rudolph、T.，Sparrow、C.：基于融合的量子计算。《自然·通讯》**14**（1），912（2023年）https://doi.org/10.1038/s41467-023-36493-1

[3] Pezz`e、L.，Smerzi、A.，Oberthaler、M.K.，Schmied、R.，Treutlein、P.：利用原子系综的非经典态进行量子计量学。《现代物理评论》**90**，035005（2018年）https://doi.org/10.1103/RevModPhys.90.035005

[4] Zhang, Z., Mouradian, S., Wong, F.N.C., Shapiro, J.H.：纠缠增强

有损和噪声环境中的传感。《物理评论快报》114, 110506 (2015)https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.110506

[5] Ursin, R., Tiefenbacher, F., Schmitt-Manderbach,T., Weier, H., Scheidl, T., Lin-¨denthal, M., Blauensteiner, B., Jennewein, T., Perdigues,J., Trojek, P., Omer,B., F¨urst, M., Meyenburg,M., Rarity, J., Sodnik, Z., Barbieri, C., Weinfurter, H., Zeilinger, A.: 基于纠缠的量子通信，传输距离达144公里。《自然·物理》**3**(7), 481–486 (2007年) https://doi.org/10.1038/nphys629

[6]Piveteau, A., Pauwels, J., H˚akansson, E., Muhammad, S., Bourennane, M., Tavakoli, A.: 通过简单测量实现纠缠辅助量子通信。《自然·通讯》**13**(1), 7878 (2022年)https://doi.org/10.1038/s41467-022-33922-5

[7]Horodecki, R., Horodecki, P., Horodecki, M., Horodecki, K：量子纠缠。《现代物理评论》**81**，865–942（2009）https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.865

[8] Haroche, S.：纠缠、退相干与量子/经典边界。《今日物理》**51**(7), 36–42（1998）https://doi.org/10.1063/1.882326

[9]Friis, N., Vitagliano, G., Malik, M., Huber, M.：纠缠认证：从理论到实验。《自然综述：物理》**1**(1), 72–87（2019）https://doi.org/10.1038/s42254-018-0003-5

[10]Gu´ery-Odelin, D., Ruschhaupt, A., Kiely, A., Torrontegui, E.,Mart´ınez-Garaot, S., Muga, J.G.：绝热捷径：概念、方法与应用。《现代物理评论》**91**，045001（2019）https://doi.org/10.1103/RevModPhys.91.045001[11] Baksic, A., Ribeiro, H., Clerk, A.A.：利用缀饰态加速绝热量子态转移。《物理评论快报》**116**，230503（2016）https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.230503[12] Takahashi, K.：绝热捷径的动力学不变量形式。《英国皇家学会哲学汇刊A辑》**380**（2223），20220301（2022年）https://doi.org/10.1098/rsta.2022.0301[13] Lachance-Quirion,D., Tabuchi, Y., Gloppe, A., Usami, K., Nakamura, Y.：基于磁振子学的混合量子系统。《应用物理快报》**12**（7），070101（2019）https://doi.org/10.7567/1882-0786/ab248d[14] Kurizki, G., Bertet, P., Kubo, Y., Mølmer, K., Petrosyan, D., Rabl, P., Schmied- mayer, J.：混合系统中的量子技术。《美国国家科学院院刊》**112**（13），3866–3873（2015）https://doi.org/10.1073/pnas.1419326112[15]Schleier-Smith, M.：编者按：量子物理混合化

与工程。《物理评论快报》**117**，100001（2016）
https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.100001

[16] Xiang, Z.-L., Ashhab, S., You, J.Q., Nori, F.：混合量子电路：与其他量子系统相互作用的超导电路。《现代物理评论》**85**，623–653（2013）
https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623

[17] Clerk, A.A., Lehnert, K.W., Bertet, P., Petta,J.R., Nakamura, Y.：采用电路量子电动力学的混合量子系统。《自然·物理》**16**（3），257–267（2020）
https://doi.org/10.1038/s41567-020-0797-9

[18] Zhang,F.-Y., He, S.-W., Liu, T., Wu, Q.-C., Yang, C.-P.：跨量子比特与磁振子之间的可调强耦合。物理评论A **109**，022442（2024年）
https://doi.org/10.1103/PhysRevA.109.022442

[19] Sohail, A., Ahmed, R., Shahzad, A., Khan, M.A.：磁振子-声子-光子纠缠通过磁弹耦合在磁振子力学系统中实现。《国际理论物理学杂志》**61**(6), 174 (2022年)
https://doi.org/10.1007/s10773-022-05152-4

[20]Zheng, S., Wang, Z., Wang, Y., Sun, F., He, Q., Yan, P., Yuan, H.Y：教程：非线性磁振子学。《应用物理学杂志》**134**(15), 151101（2023年）
https://doi.org/10.1063/5.0152543[21] Chumak, A.V., Vasyuchka, V.I., Serga, A.A., Hillebrands, B.：磁振子自旋电子学。《自然·物理》**11**(6), 453–461（2015）
https://doi.org/10.1038/nphys3347[22] Yuan, H.Y., Cao, Y., Kamra, A., Duine, R.A., Yan, P.：量子磁振子学：磁振子自旋电子学与量子信息科学的交汇。《物理报告》**965**，1–74（2022年）https://doi.org/10.1016/j.physrep.2022.03.002[23]Zare Rameshti, B., Viola Kusminskiy, S., Haigh, J.A., Usami, K., Lachance-Quirion, D., Nakamura, Y., Hu, C.-M., Tang, H.X., Bauer, G.E.W., Blanter, Y.M.：腔磁振子学。《物理报告》**979**，1–61（2022年）
https://doi.org/10.1016/j.physrep.2022.06.001[24]Xi, H., Pei, P.：通过绝热捷径实现远距离光力学接口之间的量子态转移。物理评论A **104**，052421（2021）
https://doi.org/10.1103/PhysRevA.104.052421[25] Zhao, C., Yang, Z., Wang, D., Yan, Y., Li, C., Wang, Z., Zhou, L.：光磁振子系统中由暗模辅助的量子网络。物理评论A **108**，043703（2023年）https://doi.org/10.1103/PhysRevA.108.043703[26] Xie, H., Shi, Z.-G., He, L.-W., Chen, X., Liao, C.-G., Lin, X.-M.：腔光磁学贝尔检验方案。物理评论A **105**，023701（2022年）
https://doi.org/10.1103/PhysRevA.105.023701

[27]Sharma, S., Blanter, Y.M., Bauer, G.E.W.：回音壁模式腔中的磁振子光散射。物理评论B **96**，094412（2017年）https://doi.org/10.1103/PhysRevB.96.094412

[28] Li, J.-M., Fei, S.-M.：微波腔辅助磁振子与超导量子比特耦合系统中的量子纠缠生成。物理前沿 **18**(4), 41301（2023年）https://doi.org/10.1007/s11467-022-1253-3

[29]He, S., Xin, X., Wang, Z., Zhang, F.-Y., Li, C.：各向异性铁磁体-超导体耦合系统中压缩薛定谔猫态的生成。《物理评论A》110，053710（2024）https://doi.org/10.1103/PhysRevA.110.053710[30]Cong, L.-J., Luo, Y.-X., Zheng, Z.-G., Liu, H.-Y., Ming, Y., Yang, R.- C.：双腔-磁振子混合系统中的纠缠生成与导引实现。光学快报 31(21)，34021–34033（2023）https://doi.org/10.1364/OE.499066[31] Xie, H., He, L.-W., Liao, C.-G., Chen, Z.-H., Lin, X.-M.：腔光磁学中鲁棒光学纠缠的生成。光学快报 31(5)，7994–8004（2023）https://doi.org/10.1364/OE.478963[32] Benrass,N., Hidki, A., Hmouch, J., Lakhfif, A., Habiballah, N.：双腔-磁振子系统中的磁振子压缩与纠缠。《国际理论物理学杂志》64(9)，247（2025）https://doi.org/10.1007/s10773-025-06137-9 [33] Zhao, D., Zhong, W., Cheng, G., Chen, A.：利用两个级联腔实现可控的磁振子-磁振子纠缠与单向EPR导引。量子信息处理 21(12)，384（2022）https://doi.org/10.1007/s11128-022-03731-2[34]Zheng, Q., Zhong, W., Cheng, G., Chen, A.：基于压缩储库工程的腔电磁振子系统中真实的磁振子-光子-磁振子三体纠缠。量子信息处理 22(3)，140（2023）https://doi.org/10.1007/s11128-023-03880-y[35] Zheng, L.-L., Shi, W., Shen, K., Kong, D., Wang, F.：通过原子相干性控制磁振子-磁振子纠缠与导引。光学快报 31(20)，32953–32967（2023）https://doi.org/10.1364/OE.493946[36] Golkar, S., Ghasemian, E., Setodeh Kheirabady, M., Tavassoly, M.K.：通过光学贝尔态测量，在两个远程、无相互作用的光磁系统之间生成磁振子-磁振子纠缠。《物理学快报》99(1)，015101（2023）https://doi.org/10.1088/1402-4896/ad0d8d[37]Luo, D.-W., Qian, X.-F., Yu, T.：磁振子-腔系统中的光学介导远程纠缠生成。物理评论A 109，012611（2024）https://doi.org/10.1103/PhysRevA.109.012611

[38] Lai, Y.-Z., Liang, J.-Q., M¨uller-Kirsten, H.J.W., Zhou, J.-G.：含时量子系统与不变量厄米算符。物理评论A **53**，3691– 3693(1996) https://doi.org/10.1103/PhysRevA.53.3691

[39]Torrontegui, E., Mart´ınez-Garaot, S., Muga, J.G.：通过不变量和动力学代数进行哈密顿量工程。物理评论A **89**，043408（2014）https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.043408

[40]Yan, R.-Y., Feng, Z.-B.: 基于捷径生成跨量子比特-磁振子纠缠态。《物理学快报》**99**(2), 025108 (2024年)https://doi.org/10.1088/1402-4896/ad195a[41]Yan, R.-Y., Li, M., Dong, X.-P., Yang, F., Feng, Z.-B.: 通过优化驱动对氮空位自旋量子比特和微波光子实施基于捷径的操作。《物理学E》**140**, 115199 (2022年) https://doi.org/10.1016/j.physe.2022.115199[42] Sun, F.-X., Zheng, S.-S., Xiao, Y., Gong, Q., He, Q., Xia, K.: 通过磁振子-光子纠缠远程生成磁振子薛定谔猫态。《物理评论快报》**127**, 087203 (2021) https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.127.087203 [43] Dilawaiz, Qamar, S., Irfan, M.: 耦合微波腔中的纠缠原子系综与钇铁石榴石球体。物理评论A **109**, 043708 (2024年) https://doi.org/10.1103/PhysRevA.109.043708[44] Wu, W.-J., Wang, Y.-P., Wu, J.-Z., Li, J., You, J.Q.: 通过腔光磁学实现两个大型亚铁磁球体之间的远程磁振子纠缠。物理评论A **104**, 023711 (2021) https://doi.org/10.1103/PhysRevA.104.023711[45] Blais, A., Grimsmo, A.L., Girvin, S.M., Wallraff, A.: 电路量子电动力学。《现代物理评论》**93**, 025005 (2021)https://doi.org/10.1103/RevModPhys.93.025005[46] Wettling, W., Cottam, M.G., Sandercock,J.R.: 单磁振子光散射与钇铁石榴石中的复磁光效应之间的关系。《物理学杂志C：固体物理》**8**(2), 211 (1975)https://doi.org/10.1088/0022-3719/8/2/014[47] Camley, R.E., Rahman, T.S., Mills, D.L.: 层状介质中的磁激发：自旋波与光散射谱。物理评论B **27**, 261–277 (1983)https://doi.org/10.1103/PhysRevB.27.261[48]Pichler, H., Ramos, T., Daley, A.J., Zoller, P.: 手性自旋网络的量子光学。物理评论A **91**, 042116 (2015)https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.042116[49] Stannigel, K., Rabl, P., Sørensen, A.S., Lukin, M.D., Zoller, P.: 用于量子信息处理的光机械换能器。物理评论A **84**, 042341 (2011)

https://doi.org/10.1103/PhysRevA.84.042341

[50]Zhang, X., Zhu, N., Zou, C.-L., Tang, H.X.：光磁腔回音廊微谐振器。《物理评论快报》**117**，123605（2016）https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.123605[51] Osada, A., Hisatomi, R., Noguchi, A., Tabuchi, Y., Yamazaki, R., Usami, K., Sadgrove, M., Yalla, R., Nomura, M., Nakamura, Y.：利用自旋轨道耦合光子的腔光磁学。《物理评论快报》**116**，223601（2016）https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.223601[52]Bittencourt, V.A.S.V., Feulner, V., Kusminskiy, S.V.：腔光磁学中的磁振子预示。《物理评论A》**100**，013810（2019）https://doi.org/10.1103/PhysRevA.100.013810[53] Zeng, Y.-X., Shen, J., Gebremariam, T., Li, C.：全局耦合量子网络中的干涉效应研究。量子信息处理**18**（7），205（2019）https://doi.org/10.1007/s11128-019-2325-3[54]Wang, F., Liu, J., Kong, D., L¨u, X.-Y.：腔磁振子学中的多体磁振子纠缠与集体导引。《物理评论A》**111**，033712（2025年）https://doi.org/10.1103/PhysRevA.111.033712[55]Wang, N., Li, S.-Y., Yu, L., Zhu, A.-D.：通过磁振子诱导的布里渊光散射实现长距离纠缠。《物理评论B》**110**，144424（2024年）https://doi.org/10.1103/PhysRevB.110.144424