arXiv:2601.01396v1 [math.CV] 4 Jan 2026

奇异点处赋值插值的存在性

Shijie Ba O、关启安、米志通和郑 YUAN

Abstract. 本文研究不可约解析子簇在奇异点处的局部环上赋值插值的存在性。我们首先发展了不可约解析子簇奇异点附近周权重和 Tian 函数的概念与方法。运用这些工具，我们建立了奇异点处全纯函数芽环和弱全纯函数芽环上赋值插值存在的充要条件。

作为应用，我们刻画了实变量收敛幂级数环的商环上赋值插值的存在性。我们还分别给出了复系数多项式环和实系数多项式环的商环上赋值插值存在的必要条件和充分条件。此外，我们证明，在给定多项式的零点集满足某些条件时，这些条件同时成为必要条件和充分条件。

Contents

1. 引言 2 1.1. 奇异点附近的周权重与周估值 2 1.2. 插值问题 5 2. 准备 7 2.1. 基础知识 7 2.2. 凹性 10 2.3. Tian 函数与周数 11 2.4. 相对型与赋值之间的关系 14 2.5. 奇异情形下的跳跃数 25 2.6. 赋值与相对型的收敛结果 31 3. 注 1.3 的证明 32 4. 定理 1.6 的证明 33 5. 定理 1.8 的证明 35 6. 定理 1.9、定理 1.10 及其推论的证明 36 附录A. 代数簇的通用分母 39 参考文献 42

Date:2026年1月6日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 13A18、14B05、32U05。*Key words and phrases.* 奇异点、赋值、相对型、插值。

1. Introduction

赋值理论与多复变函数中的奇点理论以及复代数几何密切相关（例如参见 [11, 12, 13, 8, 21, 2]）。设 X 为一个解析子簇，x 为 X 中的一点。记 x 处 X 上的全纯函数芽环为 $\mathcal{O}_{X,\,x}$，并记 $\mathcal{O}^*_{X,\,x} := \mathcal{O}_{X,\,x} \setminus \{0\}$。回顾一下，$\mathcal{O}_X$ 上的赋值 x 是一个非常数映射 $\nu\colon \mathcal{O}^*_{X,\,x} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，满足以下条件：

(1) $\nu(fg) = \nu(f) + \nu(g)$; (2) $\nu(f+g) \geq \min\{\nu$
$(f)\ \nu(g)\}$; (3) $\nu(c) = 0$，其中 $c \neq 0$ 是常函数。

类似地，我们可以在多项式环 $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]/I$ 上定义赋值，其中 I 是 $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]$ 的真理想。

一个自然的问题是如何刻画赋值插值的存在性：

问题 1.1. 给定任意正整数 m、$\mathcal{O}_{X,x}$（或 $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]/I$）中的有限个元素 $\{f_j\}_{1\leq j\leq m}$，以及任意有限个非负实数 $\{a_j\}_{1\leq j\leq m}$，能否找到在 $\mathcal{O}_{X,x}$（或在 $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]/I$）上存在赋值$\nu$的充要条件，使得对所有 $j\in\{1,\ldots,m\}$，都有 $\nu(f_j) = a_j$？

当 x 是正则点时，我们 [3] 确立了在 $O_{X,x}$ 上存在赋值插值的充要条件。[3] 中的证明严重依赖于 Zhou 权重和 Tian 函数的性质；作者在 [2]中确立了光滑情形下 Zhou 权重和 Tian 函数的概念及其性质。作为应用，我们还在 [3] 中确立了多项式环情形和实数情形下存在赋值插值的刻画。

本文研究 x 是不可约解析子簇 X 的奇异点时的赋值插值问题。为此，我们将光滑情形（见 [2]）下 Zhou 权重、Zhou 赋值和 Tian 函数的概念及性质推广到奇异情形。我们还研究了奇异情形下跳跃数和相对型的性质。基于这些准备，我们给出了在不可约解析子簇 X 的奇异点 x 处，全纯函数芽环和弱全纯函数芽环上存在赋值插值的充要条件。作为应用，我们还分别给出了在复系数多项式环的商环上存在赋值插值的充要条件，并证明当给定多项式的零点集的交集是包含于 X 中的原点 o 时，这些条件均为充要条件。作为进一步的应用，我们推导了实数情形下赋值插值问题的充要条件。

1.1. 奇异点附近的 Zhou 权重和周估值。

设 X 是 $\Omega\in\mathbb{C}^n$ 的解析子集，其纯维数为 d。设

$$dV_X := \frac{1}{2^d d!}\bigwedge^d\Big(\sum_{1\leq j\leq n}\sqrt{-1}dz_j\wedge d\bar{z}_j\Big)$$

为由 $\mathbb{C}^n$ 上的标准体积形式在 X 上诱导的体积形式。

我们称 Lebesgue 函数 φ 在解析集 X 上为<styled id='3'>多重次调和函数，如果 φ 在 X_{reg} 上是多重次调和的，并且在任意 $z\in X_{\mathrm{sing}}$附近有上界。在这篇

文章中，当我们考察解析集上的多重次调和函数的值时，会忽略它们在奇异点上的值。

设 $(X,\ z_0)$ 是一个解析集的不可约芽。设 $f_0=(f_{0,\ 1},\ \cdots,\ f_{0,\ m})$ 是一个向量，其中 $f_{0,\ 1},\ \cdots,\ f_{0,\ m}$ 是在 z_0 附近的全纯函数。记 $|f_0|^2=|f_{0,\ 1}|^2+\cdots+|f_{0,\ m}|^2$。设 φ_0 是在 z_0 附近的多重次调和函数，且 $|f_0|^2e^{-2\varphi_0}$ 在 z_0 附近可积。

定义 1.2。如果多重次调和函数 $\Phi^{f_0,\ z_0}{}^{\varphi_0,\ \text{最大}}(\Phi_{z_0,\ \text{简称最大}})$ 在 z_0 附近的 X 上是一个与 $|f_0|^2e^{-2\varphi_0}$ 在 z_0 附近相关的局部 ***Zhou*** 权重，并且满足以下三个陈述，我们就称其为局部 *Zhou* 权重

(1) $|f_0|^2e^{-2\varphi_0}|z|^{2N_0}e^{-2\Phi_{z_0,\ \max}}$ 在 z_0 附近对足够大的 $N_0\gg 0$可积，其中 $|z|^2:=\sum_{1\leq j\leq n}|z_j|^2$;(2) $|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-2\Phi_{z_0,\ \max}}$ 在 z_0附近不可积；(3) 对于任意多重次调和函数$\varphi'\geq\Phi_{z_0,\ \text{若}}+O(1)$ 在 z_0 附近成立，且$|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-2\varphi'}$ 在 z_0附近不可积，则 $\varphi'=\Phi_{z_0,\ \text{有}}+O(1)$ 成立。

设 φ 是 z_0附近的一个多重次调和函数。局部 Zhou 权重的存在性由乘子理想层的强开性 [17]推出。

注 1.3. 假设$|f_0|^2e^{-2\varphi_0}|z|^{2N_0}e^{-2\varphi}$ 在 o 附近对足够大的 $N_0\gg 0$可积，而 $|f_0|^2e^{-2\varphi_0-2\varphi}$ 在 z_0附近不可积。

那么，存在一个局部 *Zhou* 权重$\Phi_{z_0,\ \text{最大}}$，它与 $|f_0|^2e^{-2\varphi_0}$ 相关，且在 z_0 附近满足$\Phi_{z_0,\ \text{最大}}\geq\varphi$。

此外，对于任意局部 *Zhou* 权重$\Phi_{z_0,\ \text{最大}}$，在 z_0附近，对某个 $N\gg 0$，有$\Phi_{z_0,\ \text{最大}}\geq N$ 对数$|z|+O(1)$ 成立。

我们回顾复空间上弱全纯函数的定义。

定义 1.4 (参见 [10, 定义 7。1])。设 X 是一个复空间。X 上的弱全纯函数 f 是 X_{reg} 上的全纯函数，并且 X_{sing} 的每一点都有一个邻域 V，使得 f 在 $X_{\text{reg}}\cap V$上有界。我们用$\mathcal{O}^w_{X,\ x}$ 表示 x 的邻域上的弱全纯函数芽环，并用$\mathcal{O}^w_X$ 表示相应层。

当 X 在某点 x处正规时，我们知道$\mathcal{O}^w_{X,\ x}=\mathcal{O}_{X,\ x}$。一般而言，我们只能得到$\mathcal{O}_{X,\ x}\subset\mathcal{O}^w_{X,\ x}$。

当 $f_{0,i}(i=1,\ldots,m)$ 在 z_0 附近是弱全纯函数时，我们也可以定义与 $|f_0|^2e^{-2\varphi_0}$ 相关的局部 Zhou 权重。

注 1.5. 设 $f_{0,i}(i=1,\ldots,m)$ 在 z_0 附近是弱全纯函数，且 φ_0 是 z_0 附近的多重次调和函数，并满足 $|f_0|^2e^{-2\varphi_0}$ 在 z_0 附近可积。由定理 *2.15* 可知，存在一个 δ 在 o 附近的全纯函数，使得 $g_{0,i}:=\delta f_{0,i}(i=1,\ldots,m)$ 在 z_0 附近全纯。于是，我们定义：Φ 在 o 附近是与 $|f_0|^2e^{-2\varphi_0}$ 相关的局部 *Zhou* 权重，当且仅当 Φ 是与 $|g_0|^2e^{-2\log|\delta|-2\varphi_0}$ 相关的局部 *Zhou* 权重。

因此，根据注 *1.3*，弱全纯函数的局部周权重存在。

当 z_0 是 X 的光滑点时，为了研究 z_0 附近多重次调和函数的奇点，Rashkovskii [27] 引入了**相对型**的概念

$$\sigma(\psi,\varphi):=\sup\{c\geq 0\colon \psi\leq c\varphi+O(1)\ \text{near}\ o\},$$

其中， ψ 是 z_0 附近的多重次调和函数，且 φ 是在 z_0 处具有孤立奇点的极大权函数。相对型的记号推广了经典勒隆数 [25] 和基塞尔曼数 [23]。

当 z_0 是 X的奇异点时，我们可以将相对型的定义推广到奇异情形。设 ψ， φ 是定义在z_0附近的任意多重次调和函数。定义**相对型** 为

$$\sigma(\psi,\varphi) \coloneqq \sup\{c\geq 0\colon \psi \leq c\varphi + O(1) \text{ holds on } U\backslash X_{\text{sing}} \\ \text{for some open neighborhood } U \text{ of } z_0 \text{ in } X\}.$$

当$\varphi = \Phi_{z_0,\ \max}$ 是局部 Zhou 权重时，我们称相对型 $\sigma(\cdot,\ \Phi_{z_0,\ \max})$为**周数**。

注意，对于任意 $b < \sigma(\psi,\ \Phi_{z_0,\ \max})$， $|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-2\max\{\Phi_{z_0,\max},\frac{1}{b}\psi\}}$ 在 z_0附近不可积。于是，由乘子理想层的强开性 （定理 2.7）可知， $|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-2\max\left\{\Phi_{z_0,\max},\frac{1}{\sigma(\psi,\Phi_{z_0,\max})}\psi\right\}}$ 在 z_0附近不可积。注意

$$\max\left\{\Phi_{z_0,\max},\frac{1}{\sigma(\psi,\Phi_{z_0,\max})}\psi\right\}\geq \Phi_{z_0,\max}.$$

Then

$$\max\left\{\Phi_{z_0,\max},\frac{1}{\sigma(\psi,\Phi_{z_0,\max})}\psi\right\} = \Phi_{z_0,\max}+O(1),$$

这意味着

$$\Phi_{z_0,\max}\geq \frac{1}{\sigma(\psi,\Phi_{z_0,\max})}\psi + O(1),$$

即,

$$\psi \leq \sigma(\psi,\Phi_{z_0,\max})\Phi_{z_0,\max}+O(1).$$

对于勒隆数和基塞尔曼数，都有积分形式的表达式（见 [10]）。现在我们证明，周数也有积分形式的表达式。

定理 1.6. 设 $\Phi_{z_0,\text{最大}}$ 是与 $|f_0|^2e^{-2\varphi_0}$ 相关的局部 *Zhou* 权重，定义在 z_0 附近。那么，对于定义在 z_0 附近并满足 $\psi\leq c$对数 $|z|+O(1)$（在 z_0 附近，对某个 $c>0$）的任意多重次调和函数 ψ，我们有

$$\sigma(\psi,\Phi_{z_0,\max}) = \lim_{t\to+\infty}\frac{\int_{\{\Phi_{z_0,\max}<-t\}}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}(-\psi)}{t\int_{\{\Phi_{z_0,\max}<-t\}}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}}.$$

记为

$$\nu(f,\Phi_{z_0,\max}) \coloneqq \sigma(\log|f|,\Phi_{z_0,\max})$$

对任意 $(f,z_0)\in\mathcal{O}_{X,z_0}$ 由定理 1.6 和 $\nu(\cdot,\Phi_{z_0,\text{最大}})$ 的定义可知，对于任意局部 Zhou 权重 $\Phi_{z_0,\text{最大}}$， $\nu(\cdot,\Phi_{z_0,\text{最大}})$ 是 $\mathcal{O}_{X,z_0}$ 的一个赋值，我们称之为**周估值**。

推论 1.7。 对于任意局部 *Zhou* 权重 $\Phi_{z_0,\ \max}$ 在 o, $\nu(\cdot,\Phi_{z_0,\ \max})\colon\mathcal{O}_{X,\ z_0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 满足以下条件:

(1) $\nu(fg,\Phi_{z_0},\max) = \nu(f,\Phi_{z_0},\max)+\nu(g,\Phi_{z_0},\max)$; (2) $\nu(f+g,\Phi_{z_0},\max)\geq$最小 $\{\nu(f,\Phi_{z_0},\max)\ \nu(g,\Phi_{z_0},\max)\}$; (3) $\nu(f,\Phi_{z_0},\max) = 0$当且仅当 $f(z_0)\neq 0$。

设 G 是 z_0 附近的全纯函数。我们回顾跳跃数的定义（见 [21, 22]）。

$$c_{z_0}^G(\Phi_{z_0,\max}) \coloneqq \sup\{c : |G|^2 e^{-2c\Phi_{z_0,\max}} \text{ is integrable near } z_0\}.$$

当 $G = 1$ 时，跳跃数也被称为复奇点指数，并记作 $c_{z_0}(\Phi_{z_0,\max}) \coloneqq c_{z_0}^1(\Phi_{z_0,\max})$（见 [29, 9]）。

定理 1.8。设 $\Phi_{z_0,\max}$ 是 z_0 附近的局部 *Zhou* 权重。对于任意在 z_0 附近的全纯函数 G，我们有 $c_{z_0}^G(\Phi_{z_0,\max})$ 与 $\sigma(G, \Phi_{z_0,\max})$ 之间的如下关系，

$$\begin{aligned}\nu(G, \Phi_{z_0,\text{最大}}) + c_{z_0}(\Phi_{z_0,\text{最大}}) &\le c_{z_0}^G(\Phi_{z_0,\text{最大}}) \\ &\le \nu(G,\Phi_{z_0,\text{最大值}}) - \sigma(\text{对数 } |f_0|,\Phi_{z_0,\text{最大值}}) + 1 + \sigma(\varphi_0,\Phi_{z_0,\text{最大值}})。\end{aligned}$$

特别地，如果 $|f_0|^2 e^{-2\varphi_0} \equiv 1$，我们有

$$\nu(G, \Phi_{z_0,\max}) + 1 = c_{z_0}^G(\Phi_{z_0,\max}).$$

1.2. 插值问题。设 X 是一个纯维数为d、包含于 $\mathbb{C}^n$ 中的解析簇。假设原点 $o \in X_{\text{sing}}$ 且 (X, o) 是一个解析集的不可约芽。下面的定理给出了 $\mathcal{O}_{X,o}$ 上赋值插值问题的判据。

定理 1.9。设$f_j \in \mathcal{O}_{X,o}^*$，其中 $0 \le j \le m$。设 $a_0 = 0$和 $\{a_j\}_{1\le j\le m}$ 为正数。以下两个命题等价：

(1) 存在一个定义在 $\mathcal{O}_{X,o}$ 上的赋值 ν，使得对于所有 $0 \le j \le m$，都有 $\nu(f_j) = a_j$；(2) $\sigma(\text{对数 } |F|,\varphi) = \sum_{1\le j\le m} a_j$，其中

$$F \coloneqq \prod_{0\le j\le m} f_j, \quad \varphi \coloneqq \log\Big(\sum_{1\le j\le m} |f_j|^{\frac{1}{a_j}}\Big).$$

注意，$\nu(f_1 f_2) = 0$ 当且仅当 $\nu(f_1) = 0$ 且 $\nu(f_2) = 0$。因此，在上述定理中，只需考虑仅有一个函数 f_0 满足 $\nu(f_0) = 0.$ 的情形。由于对于任意赋值 ν，$\nu(1) = 0$ 都成立，因此在上述定理中，取 $f_0 \equiv 1$ 时实际上可以忽略f_0。

对于弱全纯函数芽 $\mathcal{O}_{X,o}^w$ 上的赋值，我们也有以下插值结果。

定理 1.10. 设 $\{f_j\}_{0\le j\le m}$ 是 o 附近的弱全纯函数。设 $a_0 = 0$ 和 $\{a_j\}_{1\le j\le m}$ 为正数。以下两个陈述等价：

(1) 存在一个定义在 $\mathcal{O}_{X\text{上的}o}^w$ 赋值 ν，使得对于所有 $0 \le j \le m$，$\nu(f_j) = a_j$；

(2) $\sigma(\log |F|,\varphi) = \sum_{1\le j\le m} a_j$，其中

$$F \coloneqq \prod_{0\le j\le m} f_j, \quad \varphi \coloneqq \log\Big(\sum_{1\le j\le m} |f_j|^{\frac{1}{a_j}}\Big).$$

考虑多项式环$\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]/I$上的赋值插值问题，其中 I是 $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]$中的素理想。令 $X \coloneqq V(I)$为由 I 和 $o \in X$定义的仿射簇。将集合 X 在 o 处的芽记为(X, o)，并假设(X, o)作为解析集芽是不可约的。

注 1.11. 由 [32] 中的主定理可知，当仿射簇 X 在 o处正规时，(X, o) 作为解析集芽是不可约的。因此，存在许多仿射簇 X，使得 (X, o) 作为解析集芽是不可约的。

令 $\{f_j\}_{0\le j\le m}$ 是 $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]/I$、 $a_0=0$ 中的多项式，且 $\{a_j\}_{1\le j\le m}$ 是 m 个正数。记 $F:=\prod_{0\le j\le m} f_j$ 和 $\varphi:=\log(\sum_{1\le j\le m}|f_j|^{a_j})$。

推论 1.12. 若 $\sigma(\log|F|,\varphi)=\sum_{1\le j\le m}a_j$，则存在一个赋值 ν *on* $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]/I$，使得对于每个 $1\le j\le m$，都有 $\nu(f_j)=a_j$。

反过来，若存在一个赋值 ν *on* $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]/I$，满足对于每个 $1\le j\le m$ 都有 $\nu(f_j)=a_j$，且对于每个 $1\le l\le n$都有 $\nu(z_l)>0$，那么我们有$\sigma(\log|F|,\varphi)=\sum_{1\le j\le m}a_j$。

当 $\cap_{1\le j\le m}\{f_j=0\}=\{o\}$ 时，定理 1.12 给出了在 $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]$ 上存在赋值插值的充要条件。

推论 1.13。如果 $\cap_{1\le j\le m}\{f_j=0\}=\{o\}$，那么存在一个赋值 ν 在$\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]/I$ 上，使得对于每个 j， $\nu(f_j)=a_j$，当且仅当 $\sigma(\log|F|,\varphi)=\sum_{1\le j\le m}a_j$。

下面的例子（见 [3]）表明，条件“$\cap_{1\le j\le m}\{f_j=0\}=\{o\}$”不能省略。

例 1.14。设 $I=(z_1^3-z_2^2)$。记 $X:=\mathbb{C}[z_1,z_2]/I$。那么 o和 (1,1)是 X 中的点，其中 o 是一个奇异点，而 (1,1) 是一个光滑点。注意，$z_1^3-z_2^2$ 在 $\mathbb{C}[z_1,z_2]$, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,o}$ 和 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,(1,1)}$中是不可约的。我们知道，$I$ 是 $\mathbb{C}[z_1,z_2]$ 中的一个素理想，并且 (X,o), $(X,(1,1))$ 作为解析集芽是不可约的。

设 $h_1=[z_1]$ $h_2=[z_2]$, $h_3=[z_1z_2]$, $g_1=[z_1-1]$ 和 $g_2=[z_2-1]$ 在 X上。取 $\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\}=\{h_1g_1,h_1g_2,h_2g_1,h_2g_2,h_3g_1,h_3g_2\}$ 和 $a_1=\ldots=a_6=1$。显然，

$$\cap_{1\le l\le 6}\{f_l=0\}=\{o,(1,1)\}.$$

设 $t\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 和 $z_1=t^2$ 以及 $z_2=t^3$。那么 t 是 X_{reg}上的一个坐标。注意，点 *(1,1)* $\in X$ 对应于 $t=1$。由于在 *(1, 1)* 附近，*log* $F=$*log*$(\prod_{1\le l\le 6}f_l)=$*1 3 log*$(|z_1-1||z_2-1|)+$*O(1)*，且 $\varphi=$*log*$(\sum_{1\le l\le 6}|f_l|^{a_l})=$*log*$(|z_1-1|+|z_2-1|)+$*O(1)*，因此我们知道在 $t=1$ 附近，*log* $|F|=6$*log* $|t-1|+$*O(1)*，且 $\varphi=$*log* $|t-1|+$*O(1)*。于是有

$$\sigma_{(1,1)}(\log|F|,\varphi)=6=\sum_{1\le l\le 6}a_l$$

在 X 附近的(1,1)上成立。

根据定理 *1.12*，存在一个赋值 ν，定义在 $\mathbb{C}[z_1,z_2]/I$ 上，使得 $\nu(f_l)=a_l$对每个 $1\le l\le 6$ 都成立。由于 $F=4\log|z_1z_2|+O(1)$ 在 o附近，以及 $\varphi=\log(|z_1|+|z_2|+|z_1z_2|)+O(1)$ 在 o 附近（在 $\mathbb{C}^2$中），我们知道

$$\sup\{c:\ \log|F|\le c\varphi+O(1)\ near\ o\ on\ \mathbb{C}^2\}>6=\sum_{1\le l\le 6}a_l.$$

请注意，限制后相对型可能会增大。我们有

$$\sigma_o(\log|F|,\varphi)>6=\sum_{1\le l\le 6}a_l.$$

因此，定理 *1.13* 中的条件“$\cap_{1\le j\le m}\{f_j=0\}=\{o\}$”不能被删除。

将原点附近所有实解析函数芽的集合记为 $o' \in \mathbb{R}^n$ by$C^{\mathrm{an}}_{o'}$。存在一个单射环同态 $P\colon C^{\mathrm{an}}_{o'} \to \mathcal{O}_o$，满足

$$P\Big(\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} a_\alpha x^\alpha\Big) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} a_\alpha z^\alpha,$$

其中 $(x_1, \ldots, x_n)$ 和 $(z_1, \ldots, z_n)$ 分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$ 上的标准坐标，而 $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} a_\alpha x^\alpha$ 是任意给定的实解析函数在 o' 附近的幂级数展开。显然，对于任意的 $(h, o) \in \mathcal{O}_o$，存在唯一一对实解析函数 (h_1, h_2)，定义在 o' 附近，使得

$$h = P(h_1) + \mathrm{i}P(h_2) \quad \text{near } o.$$

假设 I 是 $C^{\mathrm{an}}_{o'}$ 中的一个理想。记 $\big(P(I)\big)$ 为 $\mathcal{O}_o$ 中由 $P(I)$ 生成的理想。假设 $\big(P(I)\big)$ 是 $\mathcal{O}_o$ 中的素理想。注意，若 $\big(P(I)\big)$ 是 $\mathcal{O}_o$ 中的素理想，则 I 是 $C^{\mathrm{an}}_{o'}$ 中的素理想（见注 2.24）。于是有一个诱导环同态 $\widetilde{P}\colon C^{\mathrm{an}}_{o'}/I \to \mathcal{O}_o/\big(P(I)\big)$，由 $\widetilde{P}([f]) = [P(f)]$ 定义。容易验证 $\widetilde{P}$ 定义良好。令 X 为由 $\big(P(I)\big)$ 定义的零点簇。

推论 1.15。设 $f_j \in C^{an}_{o'}/I$ $(0 \leq j \leq m)$ 在 o' 附近定义。给定 $a_0 = 0$ 和m 正数 $\{a_j\}_{1\leq j\leq m}$，以下两个陈述等价：

(1) 存在一个赋值 ν 定义在 $C^{an}_{o'}$ 上，使得对所有 $0 \leq j \leq m$，$\nu(f_j) = a_j$；

(2) $\sigma(\log |F|, \varphi) = \sum_{1\leq j\leq m} a_j$，其中

$$F := \prod_{0\leq j\leq m} \widetilde{P}(f_j), \quad \varphi := \log\Big(\sum_{1\leq j\leq m} |\widetilde{P}(f_j)|^{\frac{1}{a_j}}\Big).$$

注 1.16。定理 *1.9* 和推论 *1.15* 表明，对于任意定义在 $C^{an}_{o'}/I$ 上的赋值 ν，以及在 o' 附近满足对所有 j 均有 $\sim$ $\sim\nu(f_j) > 0$ 的任意有限集实解析函数 $\{f_j\}_{0\leq j\leq m}$，存在定义在 $\mathcal{O}_o/(P(I))$ 上的赋值 $\tilde{\nu}$，使得对所有 j，$\tilde{\nu}(P(f_j)) = \nu(f_j)$。

设 I 是 $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 中的一个理想。将 P 在 $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 上的限制也记为 P，并将 $\widetilde{P}$ 在 $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]/I$ 上的限制也记为 $\widetilde{P}$。假设 $\big(P(I)\big)$ 是 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 中的一个素理想。注意，$\big(P(I)\big)$ 是 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ 中的一个素理想，这意味着 I 是 $\mathbb{R}[z_1, \ldots, z_n]$ 中的一个素理想（见注记 2.28）。记 X 为由 $\big(P(I)\big)$ 定义的仿射簇。假设 $o \in X$ 和 (X, o) 作为解析集芽是不可约的。设 $\{f_j\}_{0\leq j\leq m} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]/I$、$a_0 = 0$ 和 $\{a_j\}_{1\leq j\leq m}$ 为 m $\sim$ $\sim$ $_1$正数。令 $F := \prod_{0\leq j\leq m} P(f_j)$，并令 $\varphi := \log(\sum_{1\leq j\leq m} |P(f_j)|^{a_j})$。

推论 1.17. 如果 σ(对数 $|F|, \varphi) = \sum_{1\leq j\leq m} a_j$，那么存在一个赋值 ν 在 $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]/I$ 上，使得对于所有 $0 \leq j \leq m$，都有 $\nu(f_j) = a_j$。

反过来，如果存在一个赋值 ν 在 $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]/I$ 上满足：对于所有 $0 \leq j \leq m$，都有 $\nu(f_j) = a_j$；并且对于每个 $1 \leq l \leq n$，都有 $\nu(x_l) > 0$，那么我们就有 σ(对数 $|F|, \varphi) = \sum_{1\leq j\leq m} a_j$。

2. Preparation

2.1. 基础知识。本小节回顾一些基础结果，以便我们讨论奇异点附近的 Zhou 权重。

设 X 是 $\Omega \in \mathbb{C}^n$ 的一个纯维数为 d 的解析子集。设

$$dV_X := \frac{1}{2^d d!} \bigwedge^d \Big(\sum_{1 \le j \le n} \sqrt{-1} dz_j \wedge d\bar{z}_j \Big)$$

是由 $\mathbb{C}^n$ 上的标准体积形式在 X 上诱导的体积形式。

设 (u_α) 是定义在 X 的开子集上的一族多重次调和函数，并假设函数族 (u_α) 局部一致有上界。我们回顾以下 Choquet引理。

引理 *2.1*（见 [10]）。每个函数族 (u_α) 都有一个可数子族 $(v_j) = (u_{\alpha(j)})$，使得其上包络 $v = \sup_j v_j$ 满足 $v \le u \le u^* = v^*$，其中 $u = \sup_\alpha u_\alpha$, $u^*(z) := \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{U_{z,\varepsilon}} u$ 以及 $v^*(z) := \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{U_{z,\varepsilon}} v$ 是 u 和 v的正则化，其中 $U_{z,\varepsilon} := X \cap \mathbb{B}^n(z,\varepsilon)$。

此外，上正则化 u^* 是多重次调和函数，且几乎处处等于 u。

注2.2。请注意，引理 *2.1* 的原始版本针对光滑的 X陈述。当 X 有奇点时，由于我们忽略多重次调和函数在奇点处的取值，且(u_α)在局部一致有上界，因此我们对 X_{reg} 应用上半连续正则化；与光滑情形相同的论证表明，引理 *2.1* 在奇异情形下仍然成立。

设 $z \in X$ 是一个光滑点。设 φ 和 φ_0 是定义在 X上的多重次调和函数，且在 z 附近有定义；设 f 是定义在 X 上的全纯函数，且在 z附近有定义。下面的结果考察多重次调和函数次水平集的体积增长。

引理 2.3（见 [18]）。假设 $|f_0|^2 e^{-2(\varphi+\varphi_0)}$ 在 z附近不可积，且$|f_0|^2 e^{-2\varphi_0}$ 在 z附近可积。那么，对于 z的任意充分小邻域 U，存在 $C > 0$ 使得

$$e^{2t} \int_{\{\varphi < -t\} \cap U} |f_0|^2 e^{-2\varphi_0} > C$$

对于任意 $t \ge 0$。

我们回顾平冈提出的以下消解定理。

定理 2.4 ([20], 另见 [5])。设 Y 是一个复流形，且 M 是 Y 中的一个解析子簇。则存在一个局部有限的膨胀序列 μ_j: $Y_{j+1} \to Y_j (Y_1 := Y, j = 1,2,\dots)$，其光滑中心为 S_j，使得:

(1) S_j 的每个分支要么包含于 $(M_j)^{\mathrm{sing}}$ 中，要么包含于 $M_j \cap E_j$中，其中 $M_1 := M$表示 M_j 经 μ_j作严格变换所得的结果，$(M_j)^{\mathrm{sing}}$ 表示 M_j的奇异集，而 E_{j+1} 表示例外除子 $\mu_j^{-1}(S_j \cup E_j)$；(2) 设 M' 和 E' 分别表示 M 的最终严格变换和例外除子。那么：*(a)* 底层点集 $|M'|$ 光滑；*(b)* $|M'|$和 E' 同时仅具有正规交叉；

上述定理中的（*b*）意味着，在局部范围内，存在一个坐标系，使得 E' 是若干坐标超平面的并集，而 $|M'|$ 是一个坐标子空间。

我们回顾一下，每个局部有界的多重次调和函数都可以延拓到闭多极集上。

引理 2.5 (参见 [10, 定理 5。24])。 设 φ 是Ω $\setminus E$ 上的多重次调和函数，其中 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个域， E 是Ω 中的闭多极集。若 φ 在 E 附近局部有上界，则 φ 可唯一延拓为Ω 上的多重次调和函数。

回顾一下， X 是 Ω $\in \mathbb{C}^n$ 中的一个解析子集，具有纯维数 d。设 $z_0 \in X$是一个奇异点。设 φ和 φ_0 是定义在 X 上、于z_0 附近的多重次调和函数， f 是定义在 X 上、于 z_0附近的全纯函数。回顾一下，

$$dV_X := \frac{1}{2^d d!} \bigwedge^d \Big(\sum_{1\le j\le n} \sqrt{-1} dz_j \wedge d\bar{z}_j \Big)$$

为由 $\mathbb{C}^n$上的标准体积形式诱导的 X 上的体积形式。

利用引理 2.3、引理 2.5 和定理 2.4，我们可以将引理 2.3 推广到奇异情形。

引理 2.6. 假设 $|f_0|^2 e^{-2(\varphi+\varphi_0)}$ 在 z_0附近不可积，而 $|f_0|^2 e^{-2\varphi_0}$在 z_0附近可积。那么对于任意足够小的 z_0邻域 $U \subset X$ ，存在 $C > 0$ 使得

$$e^{2t} \int_{\{\varphi<-t\}\cap U} |f_0|^2 e^{-2\varphi_0} > C$$

对于任意 $t \ge 0$。

证明。 我们在 Ω 上应用定理 2.4 来消解 X的奇点，并将相应的真修改 μ记为$\widetilde{\ }$： Ω $\to$ Ω。将 $X\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$的严格变换记为 X ，并将 $Z_0 := X \cap \mu^{-1}(\{z_0\})$记为 Z_0 。

由于 $|f_0|^2 e^{-2(\varphi+\varphi_0)}$ 在 z_0附近不可积，存在 $\tilde{z}_0 \in Z_0$ 使得

$$\int_U \mu^*(|f_0|^2 e^{-2(\varphi+\varphi_0)} dV_X) = +\infty$$

$\widetilde{\ }$对于 $\tilde{z}_0$的任意邻域 $U \subset X$。注意， $\varphi\circ\mu$和 $\varphi_0\circ\mu$是 X 上的多重次调和函数$\widetilde{\ }$（此处可以应用引理 2.5，将 $\varphi \circ \mu$ 和 $\varphi_0 \circ \mu$ 从$\sim$ $\sim X \setminus \mu^{-1}(X_{\mathrm{sing}})$延拓到 X），并且存在 $\tilde{z}_0$附近的全纯函数 f_1、.....、 f_s，使得 $\mu^*(|f_0|^2 dV_X) = \sum_{1\le j\le s} |\widetilde{f_j}|^2 dV_{\widetilde{X}}$，其中 $dV_{\widetilde{X}}$是 $\widetilde{X}$上的体积形式。根据引理 2.3，对于 $\tilde{z}_0$的任意小邻域 $U' \subset X$ ，存在 $C > 0$ 使得

$$e^{2t} \int_{\{\mu^{-1}(\varphi)<-t\}\cap U'} \mu^*(|f_0|^2 e^{-2\varphi_0} dV_X) > C$$

对于任意 $t \ge 0$，这证明了引理 2.6。 □

以下结果是 Guan–Zhou 关于带有 [18] 中乘子理想的多重次调和函数的下半连续性性质的推论。

定理 2.7 ([18])。 设 f 是 z_0 附近的一个全纯函数，且 $\{\varphi_j\}$ 是定义在 $V \subset X$ 的一个邻域上的多重次调和函数序列，其中 z_0。假设 $\{\varphi_j\}$ 几乎处处（相对于勒贝格测度）递增收敛于多重次调和函数 φ 。如果对于任意 j， $|f_0|^2 e^{-2\varphi_j}$ 在 z_0 附近均不可积，那么 $|f_0|^2 e^{-2\varphi}$ 在 z_0 附近也不可积。

设 φ 和 φ_0 是 $z_0 \in X$ 附近的多重次调和函数，且 $|f_0|^2 e^{-2\varphi_0}$在 z_0附近可积。假设对于足够大的 $N \gg 0$， $\varphi \ge N \log|z| + O(1)$ 在 z_0 附近成立。

引理 2.8. 假设 $(f_0, z_0) \notin \mathcal{I}(\varphi+\varphi_0)_{z_0}$，且 $(f_0, z_0) \in \mathcal{I}\big((1-\varepsilon)\varphi+\varphi_0\big)_{z_0}$对任意 $\varepsilon \in (0,1)$均成立。那么对 z_0的任意邻域 $U \subset X$，

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{-\log \int_{\{\varphi<-t\}\cap U} |f_0|^2 e^{-2\varphi_0}}{2t} = 1.$$

证明。由于 $(f_0, z_0) \notin \mathcal{I}(\varphi+\varphi_0)_{z_0}$，我们有

$$\liminf_{t\to+\infty} e^{2t} \int_{\{\varphi<-t\}\cap U} |f_0|^2 e^{-2\varphi_0} > 0$$

（见引理 2.6），这意味着

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{-\log \int_{\{\varphi<-t\}\cap U} |f_0|^2 e^{-2\varphi_0}}{2t} \leq 1.$$

由于对于足够大的 $N \gg 0$，$\varphi \geq N\log|z| + O(1)$，且 $(f_0, o) \in \mathcal{I}((1-\epsilon)\varphi+\varphi_0)_o$ 对任意 $\epsilon > 0$ 都成立，我们有

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to+\infty} e^{2(1-\epsilon)t} \int_{\{\varphi<-t\}\cap U} |f_0|^2 e^{-2\varphi_0} \\
\leq\ &\limsup_{t\to+\infty} \int_{\{\varphi<-t\}\cap U} |f_0|^2 e^{-2\varphi_0-2(1-\epsilon)\varphi} \\
=\ &0,
\end{aligned}$$

这意味着

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{-\log \int_{\{\varphi<-t\}\cap U} |f_0|^2 e^{-2\varphi_0}}{2t} \geq 1-\epsilon.$$

于是我们有

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{-\log \int_{\{\varphi<-t\}\cap U} |f_0|^2 e^{-2\varphi_0}}{2t} = 1.$$

□

2.2. **凹性**。设 (X, z_0) 是一个解析集的不可约芽。设 u 和 v 是定义在 X 上的 Lebesgue 可测函数，且在 z_0附近有上界。设 g 是定义在 X上的非负 Lebesgue 可测函数。

下面的引理 2.9 和 2.10 来自实分析。当 z_0 是 X的奇异点时，引理 2.9 和 2.10 的证明与光滑情形下的原始证明相同，因此我们省略证明。

引理 2.9 (见 [9])。假设 $g^2 e^{2(l_1 v - (1+l_2)u)}$ 在 z_0附近可积，其中$l_1, l_2 > 0$。那么，$g^2 e^{-2u} - g^2 e^{-2}$ 最大值 $\left\{u, \frac{l_1}{l_2} v\right\}$ 在足够小的 z_0邻域内可积。

记作

$$A_{u,v}(t) := \sup\left\{c\colon g^2 e^{2(tv-cu)} \text{ is integrable near } z_0\right\}.$$

注意到$A_{u,\,v}(t)$关于 t（也许是 $+\infty$或 $-\infty$）递增。假设$A_{u,\,v}(t) \in (0,\ +\infty]$在（$t_0-\delta$, $t_0+\delta$）上。由 Hölder 不等式可知，$A_{u,\,v}(t)$ 在（$t_0-\delta$，$t_0+\delta$）上是凹函数。我们回顾 $A_{u,\,v}(t)$ 的以下基本性质。

引理 2.10 (见 [2, 引理 2.14])。 假设 $A_{u,\ v}(t)$ 在$(t_0-\delta, t_0+\delta)$上严格递增。那么对于任意 $b>0$,

当且仅当 $b \in \left(0, \lim_{\Delta t\to 0-0} \frac{A_{\max\{u,\frac{1}{b}v\},v}(t_0)=A_{u,v}(t_0)}{\Delta t}\right]$ 时成立。

2.3. 田函数与周数。 设 φ, ψ, φ_0 是 z_0 附近的多重次调和函数，并设 $f_0=(f_{0,\ 1},\ \ldots,\ f_{0,\ m})$ 是一个向量，其中 $f_{0,\ 1},\ \ldots,\ f_{0,\ m}$ 是 z_0 附近的全纯函数。

记为

$$c_{z_0}(\varphi, t\psi) \coloneqq \sup\left\{c\colon |f_0|^2 e^{-2\varphi_0} e^{2t\psi} e^{-2c\varphi} \text{ is integrable near } z_0\right\},$$

它是跳跃数（见 [21, 22]）的一种推广。定义*Tian* 函数

$$\mathrm{Tn}(t) \coloneqq c_{z_0}(\varphi, t\psi)$$

对于任意 $t\in\mathbb{R}$。H¨older 不等式表明，Tn(*t*) 关于$t\in(-\infty,\ +\infty)$是凹的。

在下面的引理中，假设以下三个陈述成立

(1) $|f_0|^2 e^{-2\varphi_0}$ 在 z_0 附近可积；(2) 存在整数 $N_0\gg 0$ ，使得 $|f_0|^2 e^{-2\varphi_0}|z|^{2N_0} e^{-2\mathrm{Tn}(0)\varphi}$ 在 z_0 附近可积；(3) 存在 $s_0>0$，使得 $\psi\le s_0\log|z|+O$在 $z_0\in X$ 附近为 (1)。本小节讨论 Tian 函数 Tn(*t*) 的导数。我们在下面的引理中给出 Tian 函数严格递增的性质。

引理 2.11. $\mathrm{Tn}(t)$在0附近严格递增。

证明。 由定理 2.7 可知，存在 $\varepsilon_0>0$ 使得

$$|f_0|^2 e^{-2\varphi_0}|z|^{2N_0} e^{-2(1+\varepsilon_0)\mathrm{Tn}(0)\varphi}$$

在 z_0附近可积。引理 2.9 表明

$$|f_0|^2 e^{-2\varphi_0} e^{-2\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\mathrm{Tn}(0)\varphi} - |f_0|^2 e^{-2\varphi_0} e^{-2\max\left\{\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\mathrm{Tn}(0)\varphi,\ \frac{2+\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\log|z|^{N_0}\right\}}$$

在 z_0附近可积。注意，对于任意 $t>0$,

$$|f_0|^2 e^{-2\varphi_0}\left(e^{2t\psi} e^{-2\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\mathrm{Tn}(0)\varphi} - e^{2t\psi} e^{-2\max\left\{\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\mathrm{Tn}(0)\varphi,\ \frac{2+\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\log|z|^{N_0}\right\}}\right)$$

在 z_0 附近可积，并且

$$\begin{aligned}
&|f_0|^2 e^{-2\varphi_0} e^{2t\psi} e^{-2\max\left\{\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\mathrm{Tn}(0)\varphi,\ \frac{2+\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\log|z|^{N_0}\right\}}\\
\le& C|f_0|^2 e^{-2\varphi_0}|z|^{2s_0 t} e^{-2\max\left\{\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\mathrm{Tn}(0)\varphi,\ \frac{2+\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\log|z|^{N_0}\right\}}\\
\le& C|f_0|^2 e^{-2\varphi_0}|z|^{2s_0 t} e^{-2\frac{(2+\varepsilon_0)N_0}{\varepsilon_0}\log|z|}
\end{aligned}$$

在 z_0附近。因此显然，对于任意$t>\frac{2+\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\frac{N_0}{s_0}$, —

$$|f_0|^2 e^{-2\varphi_0} e^{2t\psi} e^{-2(1+\frac{\varepsilon_0}{2})\mathrm{Tn}(0)\varphi}$$

在 z_0 附近可积，这说明对于任意 $t>\frac{2+\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\frac{N_0}{s_0}$, ~~Tn(*t*) > $(1+\frac{\varepsilon_0}{2})$Tn(0)。因此~~, Tn(*t*) 的凹性意味着 Tn(*t*) 在 0 附近严格递增。□

定理 1.6 的证明将用到田函数 Tn(*t*) 的以下性质。

命题 2.12. 假设存在 $N \gg 0$，使得 $\varphi \geq N\log|z|$ 在o附近。则下列不等式成立

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathrm{Tn}(0)}\lim_{t\to 0+0}\frac{\mathrm{Tn}(0)-\mathrm{Tn}(t)}{-t}\\
\leq\ &\liminf_{t_1\to+\infty}\frac{1}{2t_1}\frac{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}(-2\psi)}{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}}\\
\leq\ &\limsup_{t_1\to+\infty}\frac{1}{2t_1}\frac{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}(-2\psi)}{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}}\\
\leq\ &\frac{1}{\mathrm{Tn}(0)}\lim_{t\to 0+0}\frac{\mathrm{Tn}(0)-\mathrm{Tn}(-t)}{t}.
\end{aligned}$$

证明. 我们分两步证明命题 2.12。

步骤 1. 定理 2.7 表明，对于足够小的常数 $t>0$（t 取决于 $|f_0|^2e^{-2\varphi_0}$ 和 ψ），$|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-2t\psi}$ 在 z_0附近可积。由于$e^{-2t\psi}\geq(-2t\psi)$，我们有

$$|f_0|^2e^{-2\varphi_0}(-2\psi)=\frac{1}{t}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}(-2t\psi)\leq\frac{1}{t}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-2t\psi}$$

在 z_0附近可积。注意，存在 $N\gg 0$，使得 $\varphi\geq N\log|z|$ 在z_0附近。存在 z_0 的一个邻域 U，使得对于任意足够小的 $t>0$ 和$\varepsilon>0$（ϵ 取决于 t），

$$\limsup_{t_1\to+\infty}\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-2\left(t\psi+(1-\varepsilon)\mathrm{Tn}(-t)\varphi\right)}=0,$$

这意味着

$$\limsup_{t_1\to+\infty}e^{2t_1}\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-2\left(t\psi+(1-\varepsilon)\mathrm{Tn}(-t)\varphi+t_1\right)}=0.$$

那么，当 $t_1>0$ 足够大时，

$$\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-2\left(t\psi+(1-\varepsilon)\mathrm{Tn}(-t)\varphi+t_1\right)}<e^{-2t_1},$$

即，

$$\log\left(\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-2\left(t\psi+(1-\varepsilon)\mathrm{Tn}(-t)\varphi+t_1\right)}\right)<-2t_1.$$

结合引理 2.8，我们得到

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t_1\to+\infty}\frac{1}{2t_1}\log\frac{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-2\left(t\psi+(1-\varepsilon)\mathrm{Tn}(-t)\varphi+t_1\right)}}{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}}\\
=\ &\limsup_{t_1\to+\infty}\frac{1}{2t_1}\log\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-2\left(t\psi+(1-\varepsilon)\mathrm{Tn}(-t)\varphi+t_1\right)}\\
&-\lim_{t_1\to+\infty}\frac{1}{2t_1}\log\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}\\
\leq\ &1-1=0.
\end{aligned}\tag{2.1}$$

由詹森不等式和对数函数的凹性可得

$$\begin{aligned}
&\log\frac{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-2\left(t\psi+(1-\varepsilon)\mathrm{Tn}(-t)\varphi+t_1\right)}}{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}}\\
\geq&\frac{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}\log\left(e^{-2(t\psi+(1-\varepsilon)\mathrm{Tn}(-t)\varphi)+t_1}\right)}{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}}\\
=&\frac{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}\big(-2(t\psi+(1-\varepsilon)\mathrm{Tn}(-t)\varphi+t_1)\big)}{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}}\\
\geq&\frac{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}\big(-2(t\psi+(1-\varepsilon)\mathrm{Tn}(-t)(-t_1)\frac{1}{\mathrm{Tn}(0)}+t_1)\big)}{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}}.
\end{aligned}$$

结合不等式 (2.1)，我们得到

$$\limsup_{t_1\to+\infty}\frac{1}{2t_1}\frac{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}\big(-2(t\psi+(1-\varepsilon)\mathrm{Tn}(-t)(-t_1)\frac{1}{\mathrm{Tn}(0)}+t_1)\big)}{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}}\leq 0.$$

令 $\varepsilon\to 0+0$ 和 $t\to 0+0$，我们得到

(2.2)
$$\limsup_{t_1\to+\infty}\frac{1}{2t_1}\frac{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}(-2\psi)}{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}}\leq\frac{1}{\mathrm{Tn}(0)}\lim_{t\to0+0}\frac{\mathrm{Tn}(0)-\mathrm{Tn}(-t)}{t}.$$

步骤 2. 通过与步骤 1 中类似的讨论（仅将 t 替换为 $-t$），我们得到

$$\limsup_{t_1\to+\infty}\frac{1}{2t_1}\frac{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}\big(-2(-t\psi+(1-\varepsilon)\mathrm{Tn}(t)(-t_1)\frac{1}{\mathrm{Tn}(0)}+t_1)\big)}{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}}\leq 0.$$

令 $\varepsilon\to 0+0$ 和 $t\to 0+0$，我们得到

(2.3)
$$\frac{1}{\mathrm{Tn}(0)}\lim_{t\to0+0}\frac{\mathrm{Tn}(0)-\mathrm{Tn}(t)}{-t}\leq\liminf_{t_1\to+\infty}\frac{1}{2t_1}\frac{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}(-2\psi)}{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi<-t_1\}\cap U}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}}.$$

结合不等式 (2.3) 和不等式 (2.2)，得到命题 2.12。 □

设 $\Phi_{z_0,\text{ 最大为}}$与 $|f_0|^2e^{-2\varphi_0}$ 相关的局部 Zhou 权重，且定义在 z_0附近。取 $\varphi=\Phi_{z_0,\text{ 最大值}}$，则有 $\mathrm{Tn}(0)=1$。

命题 2.13。 对于任意满足 $\psi\ \leq s_0$对数 $|z|+O(1)$ 的多重次调和函数 ψ ，其在某个 $s_0>0$的 $z_0\in X$附近成立，则 ***Tian*** 函数在$t=0$处可微，并且

$$\mathrm{Tn}(t)=\mathrm{Tn}(0)+\sigma(\psi,\Phi_{z_0,\max})t$$

对于任意 $t\geq 0$. 特别是，

$$\sigma(\psi,\Phi_{z_0,\max})=\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{Tn}(t)-\mathrm{Tn}(0)}{t}.$$

证明。 由于在 z_0 附近 $\psi\leq s_0\log|z|+O(1)$，并且，$\max$ 对于某个 N，在 z_0 附近 $\geq N\log|z|+O(1)$，我们有 $\sigma(\psi,\ \Phi_{z_0,\ \max})>0$。引理 2.10 和强开性（定理 2.7）表明，当且仅当 $b\leq\lim_{t\to0+0}\frac{\mathrm{Tn}(0)-\mathrm{Tn}(-t)}{t}$ 时，$|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-2\max\{\Phi_{z_0,\max},\frac{1}{b}\psi\}}$ 在 z_0 附近不可积。

若 $b<\sigma(\psi,\Phi_{z_0},\max)$，则由 $\psi\le b\Phi_{z_0},\max+O(1)$ 可得 $\max\{\frac{1}{b}\psi,\Phi_{z_0},\max\}=\Phi_{z_0},\max+O(1)$。于是 $|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-2}\max^{\{\Phi_{z_0,\max},\frac{1}{b}\psi\}}$ 在 z_0 附近不可积。若$b>\sigma(\psi,\Phi_{z_0},\max)$，根据 $\sigma(\psi,\Phi_{z_0},\max)$ 的定义，我们有 $\max\{\frac{1}{b}\psi,\Phi_{z_0},\max\}\neq\Phi_{z_0},\max+O(1)$，且在 z_0 附近 $\max\{\frac{1}{b}\psi,\Phi_{z_0},\max\}\ge\Phi_{z_0},\max+O(1)$。根据局部 Zhou 权重的定义，我们知道 $|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-2}\max^{\{\Phi_{z_0,\max},\frac{1}{b}\psi\}}$ 在 z_0 附近可积。因此我们有

$$\sigma(\psi,\Phi_{z_0,\max})=\lim_{t\to0+0}\frac{\mathrm{Tn}(0)-\mathrm{Tn}(-t)}{t}. \tag{2.4}$$

由此可知，对于任意 $b<\sigma(\psi,\Phi_{z_0},max)$，在 z_0 附近有 $\psi\le b\Phi_{z_0},max+O(1)$，从而对于任意 $t\ge0$，$Tn(t)\ge Tn(0)+\sigma(\psi,\Phi_{z_0},max)t$。根据等式 (2.4) 以及 $Tn(t)$ 的凹性，我们得到对于任意 $t\ge0$，$Tn(t)=Tn(0)+\sigma(\psi,\Phi_{z_0},max)t$，且 $\lim_{t\to0}Tn(t)-Tn(0)_t=\sigma(\psi,\Phi_{z_0},max)$。

因此，命题 2.13 成立。 □

2.4. 相对型与赋值之间的关系。 在本小节中，我们讨论全纯函数和多重次调和函数的相对型与赋值之间的关系。

我们回顾 Skoda 除法定理。

定理 2.14 (见 [9])。设 Ω 是一个维数为 n 的弱伪凸 *K¨ahler* 流形，且 φ 是 Ω 上的多重次调和函数。令 $m=\min\{n,r-1\}$。那么，对于 Ω 上满足以下条件的任意全纯函数 f

$$I:=\int_\Omega|f|^2|g|^{-2(m+1+\epsilon)}e^{-\varphi}<+\infty,$$

存在全纯函数 $(h_1,\dots,h_r)$ 定义在 Ω 上，使得 $f=\sum_{1\le j\le r}g_jh_j$ 且

$$\int_\Omega|h|^2|g|^{-2(m+\epsilon)}e^{-\varphi}\le\Big(1+\frac{m}{\epsilon}\Big)I.$$

回顾一下，X 是一个包含于 $\mathbb{C}^n$ 中的纯维数为 d 的解析簇。令$z=(z_1,\dots,z_n)$ 为 $\mathbb{C}^n$ 上的坐标。设原点 $o\in X_{\mathrm{sing}}$，且 (X,o) 是一个解析集的不可约芽。

记$\mathcal{O}^w_{X,x}$ 为定义在X 上且在 x 附近的弱全纯函数芽环，记 $\mathfrak{M}_{X,x}$ 为定义在 X 上且在 x 附近的亚纯函数芽环。

定理 2.15 (见 [10])。对于任意点 $x\in X$，存在 x 的一个邻域 V 和 $h\in\mathcal{O}_X(V)$，使得 $h^{-1}(0)$ 在 V 中处处稠密性不成立，且对所有 $y\in V$，都有 $h_y\mathcal{O}^w_{X,y}\subseteq\mathcal{O}_{X,y}$；这样的函数 h 称为 V 上的通用分母。特别地$\mathcal{O}^w_{X,x}$ 包含于环 $\mathfrak{M}_{X,x}$ 中。

利用定理 2.15，我们得到以下引理。

引理 2.16。设 ν 是 $\mathcal{O}_{X,x}$ 上的一个赋值，并自然延拓为商域 $\mathfrak{M}_{X,x}$ 上的一个赋值。对于任意 $s\in\mathcal{O}^w_{X,x}\subset\mathfrak{M}_{X,x}$，值 $\nu(s)$ 有一个通用下界 $-\nu(h)$，其中 h 是 $\mathcal{O}^w_{X,x}$ 在 x 附近的通用分母。

证明。设 $s\in\mathcal{O}^w_{X,x}$ 是在 x 附近定义的任意弱全纯函数的芽。由定理 2.15 可知，我们可以找到一个 $h_x\in\mathcal{O}_{X,x}$，使得 $h_xs_x\in\mathcal{O}_{X,x_0}$。注意 $\nu|_{\mathcal{O}_{X,x}}\ge0$。于是 $\nu(s)=\nu(hs)-\nu(h)\ge-\nu(h)$。

引理 2.16 已证。 □

引理 2.17. 对于定义在$\mathcal{O}_{X,o}$ 上的任意赋值 ν，其中 $o \in X_{\mathrm{sing}}$，且全纯函数 $f_0, f_1, \ldots, f_r$ 属于 $\mathcal{O}_{X,o}$，满足 $\nu(f_j) > 0$ 对于 $1 \le j \le r$，我们有$\sigma(\log|f_0|, \varphi) \le \nu(f_0)$，其中 $\varphi := \log\left(\sum_{1\le j\le r}|f_j|^{\frac{1}{\nu(f_j)}}\right)$。

证明。我们用矛盾法证明这个引理：若不然，则存在 $\delta_1 > 0$，使得在 o 附近有 $\log|f_0| \le (\nu(f_0)+\delta_1)\varphi + O(1)$。于是我们可以找到某个 $\delta_2 > 0$ 和一个正整数集合 $\{m_0, \ldots, m_r\}$，使得

$$\log|f_0| \le \frac{\nu(f_0)+\delta_2}{m_0}\tilde{\varphi} + O(1) \quad \text{near } o,$$

其中 $\tilde{\varphi} := \log\left(\sum_{1\le j\le r}|f_j^{m_j}|\right)$，且对 $1 \le j \le r$，$\nu(f_j^{m_j}) \ge m_0$。对于任意正整数 l，我们有

$$\log|f_0^l| \le \frac{\nu(f_0^l)+l\delta_2}{m_0}\tilde{\varphi} + O(1)$$

在 $(U\cap X)\backslash X_{\mathrm{sing}}$ 上成立，其中 $U := \{x \in \mathbb{C}^n : \log|z| < \delta\}$。

我们在 Ω 上应用定理 2.4 来消解 X的奇点，并将相应的真修改记为 $\mu: \Omega \to \Omega$。将 X 的严格变换记为 $\tilde{X}$，并记 $Z_0 := \tilde{\Omega} \cap \mu^{-1}(\{o\})$。那么 $\mu^{-1}(U) \cap \tilde{X}$ 包含 $Z_0 \cap \tilde{X}$，且

$$\log|f_0^l \circ \mu| \le \frac{\nu(f_0^l)+l\delta_2}{m_0}\tilde{\varphi}\circ\mu + O(1) \tag{2.5}$$

在 $\mu^{-1}(U) \cap \tilde{X}$上成立。注意到 $Z_o \cap \tilde{X}$ 在 $\tilde{X}$中是紧的，取 δ 充分小，我们可以假设 $\mu^{-1}(U) \cap \tilde{X}$ 在 $\tilde{X}$中相对紧。不等式 (2.5) 以及 $\mu^{-1}(U) \cap \tilde{X}$ 的相对紧性表明，存在一个小的 $\epsilon > 0$（与 l无关），使得

$$\int_{\mu^{-1}(U)\cap\tilde{X}} |f_0^l \circ \mu|^2 e^{-2\frac{\nu(f_0^l)+l\delta_2+\epsilon}{m_0}\tilde{\varphi}\circ\mu} < +\infty. \tag{2.6}$$

令 $|F| := \sum_{1\le j\le r}|f_j^{m_j} \circ \mu|$，$\epsilon_0 := \frac{\epsilon}{m_0}$，且 $m := \min\{n, r-1\}$。由不等式 (2.6)，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mu^{-1}(U)\cap\tilde{X}} |f_0^l \circ \mu|^2 |F|^{-2(m+1)-2\epsilon_0} |F|^{-2\left(\frac{\nu(f_0^l)+l\delta_2}{m_0}-(n+1)\right)} \\
\le & C\int_{\mu^{-1}(U)\cap\tilde{X}} |f_0^l \circ \mu|^2 |F|^{-2(n+1)-2\epsilon_0} |F|^{-2\left(\frac{\nu(f_0^l)+l\delta_2}{m_0}-(n+1)\right)} \\
= & C\int_{\mu^{-1}(U)\cap\tilde{X}} |f_0^l \circ \mu|^2 e^{-2\frac{\nu(f_0^l)+l\delta_2+\epsilon}{m_0}\tilde{\varphi}\circ\mu} < +\infty.
\end{aligned}$$

注意，$(\log|z\circ\mu|)|_{\tilde{X}}$是定义在 $\tilde{X}$上的光滑多重次调和函数，并且 $\mu^{-1}(U)\cap\tilde{X} = \{x \in \tilde{X} : (\log|z\circ\mu|)|_{\tilde{X}} < \delta\}$。我们知道，$\mu^{-1}(U) \cap \tilde{X}$是一个弱伪凸 Kähler 流形。

根据定理 2.14，在 $\mu^{-1}(U)\cap\tilde{X}$上存在全纯函数 $(h_1, \ldots, h_r)$ 使得 $f_0^l \circ \mu = \sum_{1\le j\le r}(f_j \circ \mu)^{m_j} h_j$ 在 $\mu^{-1}(U) \cap \tilde{X}$上成立，并且

$$\begin{aligned}
&\int_{\mu^{-1}(U)\cap\tilde{X}} |h|^2 |F|^{-2(m+1)-2\epsilon_0} |F|^{-2\left(\frac{\nu(f_0^l)+l\delta_2}{m_0}-1-(n+1)\right)} \\
= &\int_{\mu^{-1}(U)\cap\tilde{X}} |h|^2 |F|^{-2m-2\epsilon_0} |F|^{-2\left(\frac{\nu(f_0^l)+l\delta_2}{m_0}-(n+1)\right)} < +\infty.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

由估计式 (2.7) 可知，对每个 $h_j\,(1\le j\le r)$，利用定理 2.14，存在定义在 $\mu^{-1}(U)\cap X$ 上的全纯函数 $(h_{j,\,1},\ \ldots\ldots,\ h_{j,\,r})$，使得 $h_j=\sum_{1\le k\le r}h_{j,\,k}(f_k\circ\mu)^{m_k}$ 在 $\mu^{-1}(U)\cap\widetilde{X}$ 上成立，并且

$$\int_{\mu^{-1}(U)\cap\widetilde{X}}\sum_{1\le k\le r}|h_{j,k}|^2|F|^{-2m-2\epsilon_0}|F|^{-2\left(\frac{\nu(f_0^l)+l\delta_2}{m_0}-1-(n+1)\right)}<+\infty.$$

由于 $f_0^l\circ\mu=\sum_{1\le j\le r}(f_j\circ\mu)^{m_j}h_j$ 和 $h_j=\sum_{1\le k\le r}h_{j,\,k}(f_k\circ\mu)^{m_k}$ 在 $\mu^{-1}(U)\cap X$ 上成立，我们有

$$f_0^l\circ\mu=\sum_{1\le j,k\le r}(f_j\circ\mu)^{m_j}(f_k\circ\mu)^{m_k}h_{j,k}$$

在 $\mu^{-1}(U)\cap\widetilde{X}$ 上成立。

记 $k:=\left\lfloor\frac{\nu(f_0^l)+l\delta_2}{m_0}\right\rfloor-n-1$。使用定理 2.14 k 次，我们有

$$f_0^l\circ\mu=\sum_{1\le j_1,j_2,\ldots,j_k\le r}(f_{j_1}\circ\mu)^{m_{j_1}}(f_{j_2}\circ\mu)^{m_{j_2}}\cdots(f_{j_k}\circ\mu)^{m_{j_k}}h_J\tag{2.8}$$

在 $\mu^{-1}(U)\cap\widetilde{X}$ 上成立，其中 $J=(j_1,\ j_2,\ \ldots\ldots,\ j_k)$ 是一个多重指标，且 h_J 是一个 L^2 可积全纯函数（依赖于 l），它在 $\mu^{-1}(U)\cap\widetilde{X}$ 上对任意 J 均成立。由于 h_J 在 $\mu^{-1}(U)\cap\widetilde{X}$ 上 L^2 可积，我们知道 $|h_J|$ 在 $Z_0\cap\widetilde{X}$ 附近有界。因此，$\mu_*(h_J)$ 是定义在 $U\cap X$ 上的弱全纯函数。由分解（2.8）可知，我们有

$$f_0^l=\sum_{1\le j_1,j_2,\ldots,j_k\le r}(f_{j_1})^{m_{j_1}}(f_{j_2})^{m_{j_2}}\cdots(f_{j_k})^{m_{j_k}}\mu_*(h_J)$$

在 $U\cap X$ 上成立。因此，在芽层面上，我们知道

$$\left(f_0^l\right)_o=\sum_{1\le j_1,j_2,\ldots,j_k\le r}\left(f_{j_1}^{m_{j_1}}\right)_o\left(f_{j_2}^{m_{j_2}}\right)_o\cdots\left(f_{j_m}^{m_{j_m}}\right)_o\left(\mu_*(h_J)\right)_o$$

holds in $\mathcal{O}_{X,\,o}^w$ 附近。引理 2.16 表明，对于任意芽 h，$\nu(h)\ge -C$，其中某个常数 $C>0$（与 f_0 和 l 无关）。注意，对于 $1\le j\le r$ 和 k：$\nu(f_j^{m_j})\ge m_0=\left\lfloor\frac{\nu(f_0^l)}{m_0}+l\delta_2\right\rfloor-n-1$。我们有

$$\begin{aligned}\nu(f_0^l)&\ge\min_{1\le j_1,j_2,\ldots,j_k\le r}\left\{\nu\left(f_{j_1}^{m_{j_1}}f_{j_2}^{m_{j_2}}\cdots f_{j_m}^{m_{j_m}}\mu_*(h_J)\right)\right\}\\&\ge m_0k-C\\&\ge m_0\left(\frac{\nu(f_0^l)+l\delta_2}{m_0}-n-2\right)-C\\&=\nu(f_0^l)+l\delta_2-m_0(n+2)-C,\end{aligned}$$

这意味着 $l\le\frac{m_0(n+2)}{\delta_2}+C$。这是一个矛盾，因为我们可以任意选取足够大的 l。因此，我们必有 $\sigma(\log|f_0|,\ \varphi)\le\nu(f_0)$。□

当我们考虑弱全纯函数芽环上的赋值时，可以得到与引理 2.17 类似的结果。

引理 2.18。对于 $\mathcal{O}_X^w$ 上的任意赋值，o 其中 $o\in X_{\mathrm{sing}}$，且全纯函数 f_0、f_1、…、f_r 属于 $\mathcal{O}_{X,\,o}$ 满足 $\nu(f_j)>0$，对于 $1\le j\le r$，有 $\sigma(\log|f_0|,\ \varphi)\le\nu(f_0)$，其中 $\varphi:=\log\left(\sum_{1\le j\le r}|f_j|^{\nu(f_j)}\right)$。

证明。引理 2.18 的证明与引理 2.17 的证明几乎相同。我们只给出概要；若有差异之处，将详细讨论。

我们通过矛盾证明引理 2.18。假设结论不成立。则存在 $\delta_1 > 0$ 使得在 o 附近，$\log|f_0| \le (\nu(f_0) + \delta_1)\varphi + O(1)$。于是我们可以找到某个 $\delta_2 > 0$ 以及一个正整数集合 $\{m_0, \dots, m_r\}$，使得

$$\log|f_0| \le \frac{\nu(f_0) + \delta_2}{m_0}\tilde{\varphi} + O(1) \quad \text{near } o,$$

其中 $\tilde{\varphi} := \log\big(\sum_{1\le j\le r}|f_j^{m_j}|\big)$，且对于 $1 \le j \le r$，$\nu(f_j^{m_j}) \ge m_0$。对于任意正整数 l，我们有

$$\log|f_0^l| \le \frac{\nu(f_0^l) + l\delta_2}{m_0}\tilde{\varphi} + O(1)$$

在 $\big(U \cap X\big)\backslash X_{\mathrm{sing}}$ 上成立，其中 $U := \{x \in \mathbb{C}^n : \log|z| < \delta\}$。使用与引理 2.17 的证明相同的论证和记号，当 l 足够大时，并记 $k := \big\lfloor \frac{\nu(f_0^l)}{m_0} + \frac{l\delta_2}{m_0} \big\rfloor - n - 1$，我们得到如下分解

$$f_0^l \circ \mu = \sum_{1\le j_1, j_2, \dots, j_k \le r} (f_{j_1} \circ \mu)^{m_{j_1}} (f_{j_2} \circ \mu)^{m_{j_2}} \cdots (f_{j_k} \circ \mu)^{m_{j_k}} h_J \tag{2.9}$$

对任意 J，在 $\mu^{-1}(U) \cap \widetilde{X}$ 上成立，其中 $J = (j_1, j_2, \dots\dots, j_k)$ 是一个多重指标，而 h_J 是 $\mu^{-1}(U) \cap \widetilde{X}$ 上依赖于 l 的 L^2可积全纯函数。由于 h_J 在 $\mu^{-1}(U) \cap \widetilde{X}$ 上是 L^2可积的，我们知道 $|h_J|$ 在 $Z_0 \cap \widetilde{X}$ 附近有界。因此，$\mu_*(h_J)$ 是定义在 $U \cap X$ 上的弱全纯函数。由分解 (2.9) 可得

$$f_0^l = \sum_{1\le j_1, j_2, \dots, j_k \le r} (f_{j_1})^{m_{j_1}} (f_{j_2})^{m_{j_2}} \cdots (f_{j_k})^{m_{j_k}} \mu_*(h_J)$$

在 $U \cap X$ 上成立。因此，对于芽层面，我们知道

$$\big(f_0^l\big)_o = \sum_{1\le j_1, j_2, \dots, j_k \le r} \big(f_{j_1}^{m_{j_1}}\big)_o \big(f_{j_2}^{m_{j_2}}\big)_o \cdots \big(f_{j_k}^{m_{j_k}}\big)_o \big(\mu_*(h_J)\big)_o$$

在 $\mathcal{O}^w_{X,\,o}$ 中成立。

注意，对于 $1 \le j \le r$ 和 k：$\nu(f_j^{m_j}) \ge m_0 = \big\lfloor \frac{\nu(f_0^l)}{m_0} + \frac{l\delta_2}{m_0} \big\rfloor - n - 1$。我们有

$$\begin{aligned}
\nu(f_0^l) &\ge \min_{1\le j_1, j_2, \dots, j_k \le r} \big\{\nu\big(f_{j_1}^{m_{j_1}} f_{j_2}^{m_{j_2}} \cdots f_{j_k}^{m_{j_k}} \mu_*(h_J)\big)\big\} \\
&\ge m_0 k \\
&\ge m_0\Big(\frac{\nu(f_0^l) + l\delta_2}{m_0} - n - 2\Big) \\
&= \nu(f_0^l) + l\delta_2 - m_0(n+2),
\end{aligned}$$

这意味着 $l \le \frac{m_0(n+2)}{\delta_2}$。这是一个矛盾，因为我们可以任意增大 l。于是必有 $\sigma(\log|f_0|, \varphi) \le \nu(f_0)$。□

现在我们转而讨论多项式环的商环上的赋值，其中 I 是 $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ 中的一个素理想。

令 $X := V(I)$ 为由 I 和 $o \in X$定义的仿射簇，其中 o 是 $\mathbb{C}^n$中的原点。将集合 X 在 x 处的芽记为 (X, x)。我们首先回顾以下基本结果

注记 2.19。 $\mathbb{C}[z_1,...,z_n]/I$ 是 $\mathcal{O}_{X,\ o}:=\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,\ o}/\big(I\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,\ o}\big)$的子环。

证明。 注意到 $\mathbb{C}[z_1,...,z_n]$ 可以自然地嵌入$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,\ o}$。于是我们得到一个诱导态射

$$\begin{aligned}\Phi\colon \mathbb{C}[z_1,...,z_n]/I &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,o}/\big(I\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,o}\big)\\ f+I &\longmapsto f+\big(I\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,o}\big).\end{aligned}$$

现在证明 Φ 是单射。假设 $\Phi(f_1+I)=0+\big(I\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,\ o}\big)$，其中$f_1\in\mathbb{C}[z_1,...,z_n]$。我们希望证明 $f_1\in I$，从而 $f_1+I=0$属于$\mathbb{C}[z_1,...,z_n]/I$。设 $\{g_j\}_{j=1}^m$是 I在 $\mathbb{C}[z_1,...,z_n]$中的生成元。于是我们知道，$\{g_j\}_{j=1}^m$ 也生成$\big(I\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,\ o}\big)$ 在$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,\ o}$中。根据定义以及 $\Phi(f_1+I)=0+\big(I\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,\ o}\big)$，存在$h_j\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,\ o}$，其中 $j=1,\ \cdots,\ m$，使得

$$f_1=\sum_{j=1}^m h_k g_k$$

在$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,\ o}$中。因此，存在 U 的一个开邻域，使得对于每个 $k=1$、2、.....、m，h_k 在 U 上有定义。回忆一下，$X=V(I)$和 $\{g_j\}_{j=1}^m$ 是 I的生成元。我们知道，对于任意 $x\in X$，$g_k(x)=0$，因此对于任意 $x\in X\cap U$，$f_1(x)=0$。由 I 是一个素理想以及希尔伯特零点定理可知，X 是不可约的，即 X 不能写成两个解析簇 X_1、$X_2\subset\mathbb{C}^n$ 的并，其中 X_1、$X_2\neq V$。因此，X_{reg} 是连通的（见 [14]的第 0 章）。由于对于任意 $x\in X\cap U$，$f_1(x)=0$，且 X_{reg} 是连通的，我们知道 $f_1|_X\equiv 0$。因此，$f_1\in\mathbb{I}(X)$，其中 $\mathbb{I}(X):=\{f\in\mathbb{C}[z_1,...,z_n]:$ 对于所有 $x\in X\}$，$f(x)=0$。由希尔伯特零点定理、$X=V(I)$ 以及 I 是一个素理想可知，$\mathbb{I}(X)=\sqrt{I}=I$。因此，$f\in I$。□

令$\mathcal{O}^w_{X,x}$ 为定义在 x附近的弱全纯函数芽环。当 X 是代数的，且(X,o)作为解析集芽不可约时，我们证明，对于任意$x\in V$，$\mathcal{O}^w_{X,x}$ 的通用分母可以取为多项式，其中 V是 o的一个邻域。

定理 2.20 (=附录中的定理 A.12)。 假设 X 是代数的，且(X,o) 作为解析集芽不可约。令 V 为 o在 X中的一个邻域。存在一个多项式 $\delta\in\mathbb{C}[z_1,\dots,z_d]$，其中 $d=$维数 X，使得$\delta_x\mathcal{O}^w_{X,x}\subset\mathcal{O}_{X,x}$ 对任意 $x\in V$均成立。这样的 δ 称为 V上弱全纯函数的通用分母。

证明。 参见附录中定理 A.12 的证明。 □

引理 2.21。 令 ν为 $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]/I$上的一个赋值，使得对任意$i=1,\dots,n$，都有 $\nu(z_i)>0$。对于满足 $f_j(o)=0$的任意元素 $f_0,f_1,\dots,f_r\in\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]/I$，当 $0\le j\le r$时，我们有 $\sigma(\log|f_0|,\varphi)\le\nu(f_0)$，其中 $\varphi:=\log\big(\sum_{1\le j\le r}|f_j|^{\nu(f_j)}\big)$ 是定义在 X上的多重次调和函数。

证明。 我们也通过反证法证明引理 2.21。假设结论不成立。那么存在 $\delta_1>0$，使得 $\log|f_0|\le(\nu(f_0)+\delta_1)\varphi+O(1)$ 在 o 附近成立。于是我们可以找到某个 $\delta_2>0$ 和一个正整数集合 $\{m_0,\dots,m_r\}$，使得

$$\log|f_0|\le\frac{\nu(f_0)+\delta_2}{m_0}\tilde{\varphi}+O(1)\quad\text{near } o,$$

其中 $\tilde{\varphi}:=\log\left(\sum_{1\le j\le r}|f_j^{m_j}|\right)$，且 $\nu(f_j^{m_j})\ge m_0$，对任意 $1\le j\le r$ 成立。对于任意正整数 l，有

$$\log|f_0^l|\le\frac{\nu(f_0^l)+l\delta_2}{m_0}\tilde{\varphi}+O(1)$$

在 $\big(U\cap X\big)\backslash X_{\mathrm{sing}}$ 上成立，其中 $U:=\{x\in\mathbb{C}^n:\log|z|<\delta\}$。使用与引理 2.17 的证明相同的论证和记号，当 l 足够大时，并记 $k:=\big\lfloor\frac{\nu(f_0^l)+l\delta_2}{m_0}\big\rfloor-n-1$，我们有如下分解

$$f_0^l\circ\mu=\sum_{1\le j_1,j_2,\ldots,j_k\le r}(f_{j_1}\circ\mu)^{m_{j_1}}(f_{j_2}\circ\mu)^{m_{j_2}}\cdots(f_{j_k}\circ\mu)^{m_{j_k}}h_J\tag{2.10}$$

在 $p\in\mu^{-1}(o)\Subset\widetilde{X}$ 的某个邻域 U 上成立，其中 $J=(j_1,\ j_2,\ \ldots\ldots,\ j_k)$ 是一个多重指标，而 h_J 是在 U 上的 L^2 可积全纯函数（取决于 l），对任意 J 都成立。由于 h_J 在 $\mu^{-1}(U)\cap\widetilde{X}$ 上 L^2 可积，我们知道 $|h_J|$ 在 $Z_0\cap X$ 附近有界。于是，$\mu_*(h_J)$ 是定义在 $U\cap X$ 上的弱全纯函数。由分解式 (2.10) 可得

$$f_0^l=\sum_{1\le j_1,j_2,\ldots,j_k\le r}(f_{j_1})^{m_{j_1}}(f_{j_2})^{m_{j_2}}\cdots(f_{j_k})^{m_{j_k}}\mu_*(h_J)\tag{2.11}$$

在 $U\cap X$ 上成立，其中 $\mu_*(h_J)$ 是定义在 $U\cap X$ 上的弱全纯函数。

由定理 2.15 和定理 2.20 可知，对于任意 J，存在一个定义在 $U\cap X$ 上的全纯函数 g_J，使得 $\mu_*(h_J)=\frac{g_J}{\delta}$，其中 δ 是一个多项式。因此，我们有

$$\delta f_0^l=\sum_{1\le j_1,j_2,\ldots,j_k\le r}(f_{j_1})^{m_{j_1}}(f_{j_2})^{m_{j_2}}\cdots(f_{j_k})^{m_{j_k}}g_J\tag{2.12}$$

在 $U\cap X$ 上成立。

设 $\widetilde{m}=(z_1,\ldots,z_n)$ 是由 $z_1,\ldots,z_n$ 在 $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]/I$ 中生成的理想，并设 $\widehat{m}=(z_1,\ldots,z_n)$ 是由 $z_1,\ldots,z_n$ 在 $\mathcal{O}_{X,o}=\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,o}/I$ 中生成的理想。对于任意整数 $N>0$，令 $g_{J,N}$ 为 g_J 的泰勒展开的有限项，使得 $[g_{J,N}]=[g_J]$ 属于 $\mathcal{O}_{X,o}/\widehat{m}^N$。注意，$g_{J,N}$ 可视为 $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]/I$ 中的一个元素。记

$$R_N:=\delta f_0^l-\sum_{1\le j_1,j_2,\ldots,j_k\le r}(f_{j_1})^{m_{j_1}}(f_{j_2})^{m_{j_2}}\cdots(f_{j_k})^{m_{j_k}}g_{J,N}.$$

那么，R_N 是关于 $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]/I$ 的多项式。由等式 (2.12) 以及 $\mathcal{O}_{X,\ x}/\widehat{m}^N$ 中的 $[g_{J,N}]=[g_J]$ 可知，$R_N\in\widehat{m}^N$。由于 R_N 是多项式，我们知道 R_N 实际上属于 $\widetilde{m}^N$。而且我们还知道

$$\delta f_0^l=\sum_{1\le j_1,j_2,\ldots,j_k\le r}(f_{j_1})^{m_{j_1}}(f_{j_2})^{m_{j_2}}\cdots(f_{j_k})^{m_{j_k}}g_{J,N}+R_N$$

在 $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]/I$ 中成立。注意，对于 $1\le j\le r$， $\nu(f_j^{m_j})\ge m_0$， $v(\widetilde{m})>0$，以及 $k:=\Big\lfloor \frac{\nu(f_0^l)+l\delta_2}{m_0}\Big\rfloor - n-1$。当 N 足够大时，我们有

$$\begin{aligned}\nu(\delta)+\nu(f_0^l)&\ge \big\{\min_{1\le j_1,j_2,\dots,j_k\le r}\nu\big(f_{j_1}^{m_{j_1}}f_{j_2}^{m_{j_2}}\cdots f_{j_k}^{m_{j_k}}g_{J,N}\big),R_N\big\}\\&\ge \big\{\min_{1\le j_1,j_2,\dots,j_k\le r}\nu\big(f_{j_1}^{m_{j_1}}f_{j_2}^{m_{j_2}}\cdots f_{j_k}^{m_{j_k}}\big),R_N\big\}\\&\ge \min_{1\le j_1,j_2,\dots,j_k\le r}\nu\big(f_{j_1}^{m_{j_1}}f_{j_2}^{m_{j_2}}\cdots f_{j_k}^{m_{j_k}}\big)\\&\ge m_0k\\&\ge m_0\Big(\frac{\nu(f_0^l)+l\delta_2}{m_0}-n-2\Big)\\&=\nu(f_0^l)+l\delta_2-m_0(n+2),\end{aligned}$$

这意味着 $l\le \frac{m_0(n+2)+\nu(\delta)\delta_2}{\delta_2}$。这是一个矛盾，因为我们可以任意增大 l。于是必有 $\sigma(\log|f_0|,\varphi)\le\nu(f_0)$。□

为了证明推论 1.13，我们还要回顾以下关于有限生成 $\mathbb{C}$-代数的希尔伯特零点定理。例如，以下引理可参见 [26] 中的定理 5.5。

引理 2.22（见 [26]）。设 A 是有限生成的 $\mathbb{C}$-代数，且 $J\subset A$ 是真理想。那么有 $\sqrt{J}=\bigcap_{J\subset m}m$，其中交集取遍所有包含 J 的极大理想 m。

设 $A=\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]/I$，其中 I 是 $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]$ 中的理想。记 $X=V(I)$ 为 I 的零点集。设 $J\subset A$ 是真理想。定义 $V_X(J):=\{x\in X\mid P(x)=0,\text{ 对任意 }P\in J\}$。对于任意子集 $Y\subset X$，记 $I(Y):=\{P\in A\mid P(x)=0,\text{ 对任意 }x\in Y\}$。

由引理 2.22，我们立即得到

引理 2.23。设 $A=\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]/I$，其中 I 是 $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]$ 中的一个理想，且 $J\subset A$ 是一个真理想。则有 $I\big(V_X(J)\big)=\sqrt{J}$.

为方便读者，我们回顾一下引理 2.23 的证明。

引理 *2.23* 的证明。显然，$\sqrt{J}\subset I\big(V_X(J)\big)$。若 m 是 A中的一个极大理想，则 $m=\sqrt{m}\subset I\big(V(\overline{m})\big)=m$，其中最后一个“ $=$ ”成立是因为 m 是极大的。

注意， $J\subset\sqrt{J}=\bigcap_{J\subset m}m$。对于任意包含 J的极大理想 m， 有$V(J)\supset V(m)$。因此 $I\big(V_X(J)\big)\subset I\big(V(m)\big)=m$。由 m 的任意性及引理 2.22，得到 $I\big(V_X(J)\big)=\bigcap_{J\subset m}m=\sqrt{J}$。证明完毕。□

记原点附近所有实解析函数芽的集合为 $o'\in\mathbb{R}^n$ $C^{\mathrm{an}}_{o'}$。存在一个单射环同态 P: $C^{\mathrm{an}}_{o'}\to\mathcal{O}_o$，满足

$$P\Big(\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\ge0}}a_\alpha x^\alpha\Big)=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\ge0}}a_\alpha z^\alpha,$$

其中（x_1，.....， x_n）和（z_1，.....， z_n）分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$ 中的标准坐标，$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\ge0}}a_\alpha x^\alpha$ 是任意实解析函数在 o'附近的幂级数展开。假设 I 是 $C^{\mathrm{an}}_{o'}$中的一个理想。记 $\big(P(I)\big)$ 为 $\mathcal{O}_o$中由 $P(I)$生成的理想。注意到 P 显然是单射。因此我们有

注 2.24. 如果 $\big(P(I)\big)$ 是 $\mathcal{O}_o$中的素理想，那么 I 是 $C^{an}_{o'}$中的素理想。

证明。设 $ab \in I$。那么 $P(ab) = P(a)P(b) \in \big(P(I)\big)$。由于 $\big(P(I)\big)$是素理想，我们可以假设 $P(a) \in \big(P(I)\big)$。由于 P是单射，我们知道 $a \in I$。□

对于任意 $f \in C^{\mathrm{an}}_{o'}$ 和 $\sim g \in \mathcal{O}_o$，分别将 $C^{\mathrm{an}}_{o'}/I$ 和 $\mathcal{O}_o/\big(P(I)\big)$ 中的元素记为 $[f]$ 和 $\widetilde{g}$。那么我们有一个诱导环同态 $P\colon C^{\mathrm{an}}_{o'}/I \to \mathcal{O}_o/\big(P(I)\big)$，定义为 $\widetilde{P}([f]) = \widetilde{P}(f)$。容易验证 $\widetilde{P}$是良定义的。记 X 为由 $\big(P(I)\big)$定义的零点簇。

~我们有态射 P 的以下性质。

~**注 2.25**。 P 是单射。

证明。假设 $[F_1]$，$[F_2] \in C^{\mathrm{an}}_{o'}/I$使得 $\widetilde{P}([F_1]) = \widetilde{P}([F_2])$ 位于 $\mathcal{O}_o/\big(P(I)\big)$中。那么存在 $g_k \in \mathcal{O}_o$ $(k = 1、\ldots\ldots、 m)$，使得 $P(F_1) - P(F_2) = \sum_{k=1}^{m} g_k P(f_k)$。对于任意 $g \in \mathcal{O}_o$， g都可以写成收敛幂级数 $g = \sum_{\alpha} a_\alpha z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$，其中 α 是多重指标， $a_\alpha \in \mathbb{C}$，而 $(z_1、\ldots\ldots、 z_n)$ 是 o 附近的坐标。我们定义

$$g_{1,\mathrm{Re}} \coloneqq \sum_{\alpha} \mathrm{Re}(a_\alpha) z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$$

and

$$g_{1,\mathrm{Im}} \coloneqq \sum_{\alpha} \mathrm{Im}(a_\alpha) z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}.$$

因此，我们有

$$P(F_1) - P(F_2) = \sum_{k=1}^{m} \big(P(g_{k,\mathrm{Re}}) + \mathrm{i}P(g_{k,\mathrm{Im}})\big) P(f_k),$$

这意味着

$$P(F_1) - P(F_2) = \sum_{k=1}^{m} P(g_{k,\mathrm{Re}}) P(f_k).$$

由于 P是单射，因此有 $F_1 - F_2 \in I$，进而 $[F_1] = [F_2]$ 属于 $C^{\mathrm{an}}_{o'}/I$。这意味着$\sim P$是单射。□

注 2.26。 对于任意 $\widetilde{g} \in \mathcal{O}_o/\big(P(I)\big)$，存在唯一的一对 $[g_{Re}]$、 $[g_{Im}] \in C^{an}_{o'}/I$ 使得

$$\widetilde{g} = \widetilde{P}([g_{Re}]) + \mathrm{i}\widetilde{P}([g_{Im}])$$

证明。设 g_1, g_2 属于 $\mathcal{O}_o$，使得 $g_1 - g_2 \in \big(P(I)\big)$ 且 $\widetilde{g} = \widetilde{g_1} = \widetilde{g_2}$ 属于 $\mathcal{O}_o/\big(P(I)\big)$。设 $\{f_k\}_{i=1}^{m}$ 是 I 在 $C^{\mathrm{an}}_{o'}$ 中的生成元。那么 $\big(P(I)\big)$ 由 $P(f_k)$ 生成。我们知道，存在 $h_k \in \mathcal{O}_o (k = 1, \ldots, m)$，使得 $g_1 - g_2 = \sum_{k=1}^{m} h_k P(f_k)$。于是有

$$g_{1,\mathrm{Re}} + \mathrm{i}g_{1,\mathrm{Im}} - g_{2,\mathrm{Re}} - \mathrm{i}g_{2,\mathrm{Im}} = \sum_{k=1}^{m} (h_{k,\mathrm{Re}} + \mathrm{i}h_{k,\mathrm{Im}}) P(f_k). \tag{2.13}$$

注意， $P(f_k)$ 作为关于 $z_1,\ldots,z_n$ 的幂级数具有实系数。等式 (2.13) 表明

$$
\begin{aligned}
g_{1,\mathrm{Re}}-g_{2,\mathrm{Re}}&=\sum_{k=1}^{m}h_{k,\mathrm{Re}}P(f_k)\\
g_{1,\mathrm{Im}}-g_{2,\mathrm{Im}}&=\sum_{k=1}^{m}h_{k,\mathrm{Im}}P(f_k)
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

因此，我们有 $g_{1,\mathrm{Re}}-g_{2,\mathrm{Re}}\in\big(P(I)\big)$ 以及 $g_{1,\mathrm{Im}}-g_{2,\mathrm{Im}}\in\big(P(I)\big)$ 成立。由 P 是单射以及等式 (2.14) 可知， $[P^{-1}(g_{1,\mathrm{Re}})]=[P^{-1}(g_{2,\mathrm{Re}})]\in C^{\mathrm{an}}_{o'}/I$，并且 $[P^{-1}(g_{1,\mathrm{Im}})]=[P^{-1}(g_{2,\mathrm{Im}})]\in C^{\mathrm{an}}_{o'}/I$。记 $[g_{\mathrm{Re}}]=[P^{-1}(g_{1,\mathrm{Re}})]$ 以及 $[g_{\mathrm{Im}}]=[P^{-1}(g_{1,\mathrm{Im}})]$。因此，我们知道存在一对 $[g_{\mathrm{Re}}],[g_{\mathrm{Im}}]\in C^{\mathrm{an}}_{o'}/I$，使得 $\widetilde{g}=\widetilde{P}(g_{\mathrm{Re}})+\mathrm{i}P(g_{\mathrm{Im}})$。

这一对单射，见注 2.25。$[g_{\mathrm{Re}}]$ 源于这样一个事实

记 X 为由 $\big(P(I)\big)$定义的零点簇。假设 $\big(P(I)\big)$ 是 $\mathcal{O}_o$中的一个素理想。

引理 2.27。 设 ν是 $C^{an}_{o'}/I$上的一个赋值。对于任意 $[f_0],[f_1],\ldots,[f_r]$ 属于 $C^{an}_{o'}/I$.，若满足 $\nu([f_j])>0$对 $1\le j\le r$成立，则 $\sigma(\log|f_0|,\varphi)\le\nu([f_0])$ 在$o\in X$附近成立，其中 $\varphi:=\log\big(\sum_{1\le j\le r}|\widetilde{f}_j|^{\frac{1}{\nu([f_j])}}\big)$，且 $\widetilde{f}_j:=\widetilde{P}([f_j])$ 对 $0\le j\le r$成立。

证明。 我们用反证法证明引理 2.27。反设结论不成立。存在 $\delta_1>0$，使得 $\log|f_0|\le(\nu([f_0])+\delta_1)\varphi+O(1)$ 在 o 附近成立。于是我们可以找到某个 $\delta_2>0$ 以及一个正整数集合$\{m_0,\ldots,m_r\}$，使得

$$\log|\widetilde{f}_0|\le\frac{\nu([f_0])+\delta_2}{m_0}\widetilde{\varphi}+O(1)\quad\text{near } o,$$

其中 $\widetilde{\varphi}:=\log\big(\sum_{1\le j\le r}|\widetilde{f}_j^{m_j}|\big)$，且 $\nu([f_j]^{m_j})\ge m_0$，对 $1\le j\le r$ 成立。对于任意正整数 l，有

$$\log|\widetilde{f}_0^l|\le\frac{\nu(\widetilde{f}_0^l)+l\delta_2}{m_0}\widetilde{\varphi}+O(1)$$

在 $\big(U\cap X\big)\backslash X_{\mathrm{sing}}$ 上成立，其中 $U:=\{x\in\mathbb{C}^n:\log|z|<\delta\}$。

沿用引理 2.17 中的论证和记号，我们看到，对充分大的 l，通过定义 $k:=\lfloor\frac{\nu(f_0^l)+l\delta_2}{m_0}\rfloor-n-1$，可得如下分解

$$\widetilde{f}_0^{\,l}=\sum_{1\le j_1,j_2,\ldots,j_k\le r}(\widetilde{f}_{j_1})^{m_{j_1}}(\widetilde{f}_{j_2})^{m_{j_2}}\cdots(\widetilde{f}_{j_k})^{m_{j_k}}\frac{g_J}{\delta}\tag{2.15}$$

在 U 上成立，其中 U 是 X 中 o 的一个开邻域，且 g_J（依赖于 l）和 δ 属于$\mathcal{O}_{X,\,o}=\mathcal{O}_o/\big(P(I)\big)$。因此我们有

$$\delta\widetilde{f}_0^l=\sum_{1\le j_1,j_2,\ldots,j_k\le r}(\widetilde{f}_{j_1})^{m_{j_1}}(\widetilde{f}_{j_2})^{m_{j_2}}\cdots(\widetilde{f}_{j_k})^{m_{j_k}}g_J.\tag{2.16}$$

结合注 2.26，我们有

$$\begin{aligned}&\big(\widetilde{P}([\delta_{\mathrm{Re}}])+\mathrm{i}\widetilde{P}([\delta_{\mathrm{Im}}])\big)\widetilde{P}([f_0]^l)\\&=\sum_{1\le j_1,j_2,\dots,j_k\le r}\widetilde{P}([f_{j_1}]^{m_{j_1}})\widetilde{P}([f_{j_2}]^{m_{j_2}})\cdots\widetilde{P}([f_{j_k}]^{m_{j_k}})\big(\widetilde{P}([g_{J,\mathrm{Re}}])+\mathrm{i}\widetilde{P}([g_{J,\mathrm{Im}}])\big).\end{aligned}$$

因此我们有

$$[\delta_{\mathrm{Re}}][f_0]^l=\sum_{1\le j_1,j_2,\dots,j_k\le r}[f_{j_1}]^{m_{j_1}}[f_{j_2}]^{m_{j_2}}\cdots[f_{j_k}]^{m_{j_k}}[g_{J,\mathrm{Re}}]$$

在 $C^{\mathrm{an}}_{o'}/I$ 中成立。由于 $\nu([f_j]^{m_j})\ge m_0$ 对于 $1\le j\le r$，我们得到

$$\begin{aligned}\nu([f_0]^l)&\ge m_0\Big(\Big\lfloor\frac{\nu(f_0^l)+l\delta_2}{m_0}\Big\rfloor-n-1\Big)-\nu([\delta_{\mathrm{Re}}])\\&\ge m_0\Big(\frac{\nu(f_0^l)+l\delta_2}{m_0}-n-2\Big)-\nu([\delta_{\mathrm{Re}}])\\&=\nu(f_0^l)+l\delta_2-m_0(n+2)-\nu([\delta_{\mathrm{Re}}]),\end{aligned}$$

这意味着 $l\le {}^{m_0}\!\!\!

证明。我们用矛盾法证明此引理。反设结论不成立。存在 $\delta_1 > 0$，使得在 o 附近 $\log|f_0| \le (\nu([f_0]) + \delta_1)\varphi + O(1)$。于是我们可以找到某个 $\delta_2 > 0$ 和一个正整数集合$\{m_0, \dots, m_r\}$，使得

$$\log|\widetilde{f}_0| \le \frac{\nu([f_0]) + \delta_2}{m_0}\widetilde{\varphi} + O(1) \quad \text{near } o,$$

其中 $\widetilde{\varphi} \coloneqq \log\big(\sum_{1\le j\le r}|\widetilde{f}_j^{m_j}|\big)$ and $\nu([f_j]^{m_j}) \ge m_0$当 $1 \le j \le r$。对于任意正整数 l，我们有

$$\log|\widetilde{f}_0^l| \le \frac{\nu(\widetilde{f}_0^l) + l\delta_2}{m_0}\widetilde{\varphi} + O(1)$$

在 $\big(U \cap X\big)\backslash X_{\mathrm{sing}}$ 上成立，其中 $U \coloneqq \{x \in \mathbb{C}^n : \log|z| < \delta\}$。

按照引理 2.17 的论证和记号，我们看到，对于充分大的 l，通过定义 $k \coloneqq \big\lfloor \frac{\nu(f_0^l)_{m_0} + l\delta_2}{} \big\rfloor - n - 1$，可得如下分解

$$\delta\widetilde{f}_0^l = \sum_{1\le j_1,j_2,\dots,j_k\le r}(\widetilde{f}_{j_1})^{m_{j_1}}(\tilde{f}_{j_2})^{m_{j_2}}\cdots(\widetilde{f}_{j_k})^{m_{j_k}}g_J. \tag{2.17}$$

在 U 上成立，其中 U 是 X 中 o 的一个开邻域，δ 是一个复系数多项式，而 g_J（依赖于 l）属于$\mathcal{O}_{X,\,o} = \mathcal{O}_o/\big(P(I)\big)$。

结合等式 (2.17) 和注记 2.29，我们得到

$$\begin{aligned}&\big(\widetilde{P}([\delta_{\mathrm{Re}}]) + \mathrm{i}\widetilde{P}([\delta_{\mathrm{Im}}])\big)\widetilde{P}([f_0]^l)\\ &= \sum_{1\le j_1,j_2,\dots,j_k\le r}\widetilde{P}([f_{j_1}]^{m_{j_1}})\widetilde{P}([f_{j_2}]^{m_{j_2}})\cdots\widetilde{P}([f_{j_k}]^{m_{j_k}})\big(\widetilde{P}([g_{J,\mathrm{Re}}]) + \mathrm{i}\widetilde{P}([g_{J,\mathrm{Im}}])\big)\end{aligned}$$

因此我们有

$$[\delta_{\mathrm{Re}}][f_0]^l = \sum_{1\le j_1,j_2,\dots,j_k\le r}[f_{j_1}]^{m_{j_1}}[f_{j_2}]^{m_{j_2}}\cdots[f_{j_k}]^{m_{j_k}}[g_{J,\mathrm{Re}}] \tag{2.18}$$

在 $C^{\mathrm{an}}_{o'}/I$ 中成立。

令 $m_P = (x_1, \dots, x_n)$ 为由 $x_1, \dots, x_n$ 在 $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/I$ 中生成的理想，令 $\widehat{m} = (x_1, \dots, x_n)$ 为由 $x_1, \dots, x_n$ 在 $C^{\mathrm{an}}_{o'}/I$ 中生成的理想。对于任意整数 $N > 0$，令 $g_{J,N}$ 为 $g_{J,\mathrm{Re}}$ 的泰勒展开的有限项，使得 $[g_{J,N}] = [g_{J,\mathrm{Re}}]$ 在 $C^{\mathrm{an}}_{o'}/\widehat{m}^N$ 中。注意，$g_{J,N}$ 可以视为 $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/I$ 中的一个元素。记

$$R_N \coloneqq [\delta_{\mathrm{Re}}][f_0]^l - \sum_{1\le j_1,j_2,\dots,j_k\le r}[f_{j_1}]^{m_{j_1}}[f_{j_2}]^{m_{j_2}}\cdots[f_{j_k}]^{m_{j_k}}[g_{J,N}].$$

那么，R_N是关于 $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/I$的多项式。由等式 (2.18) 以及 $C^{\mathrm{an}}_{o'}/\widehat{m}^N$中的 $[g_{J,N}] = [g_J]$可得 $R_N \in \widehat{m}^N$。由于 R_N是多项式，我们知道 R_N实际上属于 $(m_P)^N$。而且我们还知道

$$[\delta_{\mathrm{Re}}][f_0]^l = \sum_{1\le j_1,j_2,\dots,j_k\le r}[f_{j_1}]^{m_{j_1}}[f_{j_2}]^{m_{j_2}}\cdots[f_{j_k}]^{m_{j_k}}[g_{J,N}] + R_N$$

在 $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]/I$中成立。注意，对于 $1\le j\le r$， $\nu([f_j]^{m_j})\ge m_0$； $v(m_P)>0$，并且$k\coloneqq\lfloor\frac{\nu(f_0^l)}{m_0})^{+l\delta_2}\rfloor-n-1$。当 N 足够大时，我们有

$$\begin{aligned}\nu([\delta_{\mathrm{Re}}])+\nu([f_0]^l)&\ge\Big\{\min_{1\le j_1,j_2,\dots,j_k\le r}\nu\big([f_{j_1}]^{m_{j_1}}[f_{j_2}]^{m_{j_2}}\cdots[f_{j_k}]^{m_{j_k}}[g_{J,N}]\big),R_N\Big\}\\&\ge\Big\{\min_{1\le j_1,j_2,\dots,j_k\le r}\nu\big([f_{j_1}]^{m_{j_1}}[f_{j_2}]^{m_{j_2}}\cdots[f_{j_k}]^{m_{j_k}}\big),R_N\Big\}\\&\ge\min_{1\le j_1,j_2,\dots,j_k\le r}\nu\big([f_{j_1}]^{m_{j_1}}[f_{j_2}]^{m_{j_2}}\cdots[f_{j_k}]^{m_{j_k}}\big)\\&\ge m_0k\\&\ge m_0\Big(\frac{\nu(f_0^l)+l\delta_2}{m_0}-n-2\Big)\\&=\nu(f_0^l)+l\delta_2-m_0(n+2),\end{aligned}$$

这意味着 $l\le{}^{m_0}{}_{(n+2)+\nu([\delta_{\mathrm{Re}}])\ \delta_2\ o}$ 这是一个矛盾，因为我们可以任意增大 l。于是必有 $\sigma(\log|f_0|,\varphi)\le\nu(f_0)$。□

我们还指出，下面有一个基本结果。

注记 2.31。 $\mathbb{R}[z_1,...,z_n]/I$是 $C_{o'}^{an}/\big(I\cdot C_{o'}^{an}\big)$的一个子环。

证明。 注记 2.31 的证明与注记 2.19 的证明几乎相同。因此我们略去证明。□

2.5. **奇异情形下的跳跃数**。 本节讨论跳跃数 $c_o^f(\varphi)$的性质，其中 $o\in X$ 可以是一个不可约解析集 X的奇异点。

定义 2.32. 设 $X\subset\mathbb{C}^n$ 是一个解析集， $K\subset X$ 是一个紧子集。对于定义在 K 上的任意多重次调和函数 φ，以及定义在 K 上的任意弱全纯函数 f，将跳跃数 $c_K^f(\varphi)$记为

$$c_K^f(\varphi)\coloneqq\sup\Big\{c>0\colon\int_{U\cap X_{\mathrm{reg}}}|f|^2e^{-2c\varphi}dV_X<+\infty,\\ \textit{for some open neighborhood } U \textit{ of } K \textit{ in } X\Big\}.$$

当 $K=\{o\}$ 是 X 的一个奇异点时， $c_o^f(\varphi)$ 将通常跳跃数推广到了奇异情形。我们消解 (X,o) 的奇点，并在经过一系列膨胀后考察跳跃数 $c_o^f(\varphi)$。

注记 *2.33*。利用定理 *2.4*，我们可以消解 X 的奇点，并将相应的真修改 $\mu\colon\Omega\to\Omega$ 记为 $\widetilde{\ }$，其中 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 开$\widetilde{\ }$，满足 $o\in X\cap\Omega$。将 X 的严格变换记为 X，并将 $Z_0\coloneqq\widetilde{X}\cap\mu^{-1}(\{o\})$ 记为 Z_0。注意，对于 o 在 X 中的任意开邻域 U， $f\circ\mu$ 和 $\varphi\circ\mu$ 分别是在 $\pi^{-1}(U)\cap\widetilde{X}$ 上定义良好的全纯函数和多重次调和函数。由于 μ 是真映射， Z_0 在 X 中是紧的。注意， μ 在一个解析子集之外是双全纯的，因此我们知道 $c_o^f(\varphi)=c_{Z_0}^{\det\mu\cdot f\circ\mu}(\varphi\circ\mu)$，其中 $\det\mu$ 是修改 μ 的雅可比行列式（它是 $\widetilde{\ }\Omega$ 上的全纯函数），而 $c_{Z_0}^{\det\mu\cdot f\circ\mu}(\varphi\circ\mu)$ 是正则情形下紧集上的通常跳跃数。

回忆一下， X 是 $\Omega \in \mathbb{C}^n$ 的一个解析子集，且具有纯维数 d，并记 $|z|^2 := \sum_{1\le j\le n}|z_j|^2$。假设 (X, o) 是奇异的，则我们有如下关于跳跃数的逼近结果。

引理 2.34. 设 φ 是 o 附近的一个多重次调和函数，其中 $c > 0$ 是一个常数，且 $f_j \in \mathcal{O}^w_{X,o}$ 对于 $1 \le j \le m$ 成立。那么

$$\lim_{N\to+\infty} c^f_o\big(\max\{\varphi, N\log|z|\}\big) = c^f_o(\varphi)$$

对于任意全纯函数 $f \in \mathcal{O}^*_{X,o}$。

证明。根据定义，我们有 $c^f_o\big(\max\{\varphi, N\log|z|\}\big) \ge c^f_o(\varphi)$。

利用定理 2.4，我们可以消解 X 的奇点，并得到一个真全纯映射 $\mu\colon \Omega \to \Omega$，其中 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个开子集，满足 $o \in X \cap \Omega$。备注

$$c^f_o\ \varphi \qquad \varphi\circ\mu \qquad c^f_o(\quad \{\varphi, N \quad |z|\}) =. \text{表明}() = c^{\det\mu\cdot f\circ\mu}_{Z_0}(),$$

$$c^{\det\mu\cdot f\circ\mu}_{Z_0}(\quad \{\varphi\circ\mu, N \quad |z\circ\mu|\}) \qquad (N \quad |z\circ\mu|)|_{\widetilde{X}}$$

且 max log max log。注意，log 是一个多重次调和函数，且 $\{(N\log|z\circ\mu|)|_{\widetilde{X}} = -\infty\} = Z_0$。

$$\varphi\circ\mu \qquad \varphi\circ\mu = \qquad \varphi\circ$$

假设 $c^{\det\mu\cdot f\circ\mu}_{Z_0}(\mu \qquad p \in Z_0 \qquad c^{\det\mu\cdot f\circ\mu}_p\ \varphi\circ\mu\ < 1 \qquad \widetilde{X}\ p\ ) < 1$。

注意 $c^{\det\mu\cdot f\circ\mu}_{Z_0}() \inf_{z\in Z_0} c^{\det\mu\cdot f\circ\mu}_z()$。我们知道存在一点，使得 ()。由于 (,) 是正则的，我们可以找到一个以 p 为中心的局部坐标邻域 (W_p, w)，使得存在一个 $A > 0$，满足在 W_p 上 $(\log|z\circ\mu|)|_{\widetilde{X}} \le A\log|w| + O(1)$。于是 $c^{\det\mu\cdot f\circ\mu}_p\big(\max\{\varphi\circ\mu, N\log|z\circ\mu|\}\big) \le c^{\det\mu\cdot f\circ\mu}_p\big(\max\{\varphi\circ\mu, NA\log|w|\}\big)$。

光滑情形下的证明（见 [2]）表明， $c^{\det\mu\cdot f\circ\mu}_p(\varphi\circ\mu) < 1$ 意味着存在 $N \gg 0$，使得

$$c^{\det\mu\cdot f\circ\mu}_p\big(\max\{\varphi\circ\mu, NA\log|w|\}\big) \le 1.$$

因此 $c^{\det\mu\cdot f\circ\mu}_p\big(\max\{\varphi\circ\mu, N\log|z\circ\mu|\}\big) \le 1$，这意味着

$$c^{\det\mu\cdot f\circ\mu}_{Z_0}\big(\max\{\varphi\circ\mu, N\log|z\circ\mu|\}\big) \le 1.$$

由此我们知道 $\lim_{N\to+\infty} c^{\det\mu\cdot f\circ\mu}_{Z_0}\big(\max\{\varphi\circ\mu, N\log|z\circ\mu|\}\big) \le c^{\det\mu\cdot f\circ\mu_1}_{Z_0}(\varphi\circ\mu)$，这意味着 $\lim_{N\to+\infty} c^f_o\big(\max\{\varphi, N\log|z|\}\big) \le c^f_o(\varphi)$. □

我们还需要以下关于复子簇紧子集上的相对型的定义。

定义 2.35. 对于定义在紧子集 $K \subset X$ 的某个邻域上的多重次调和函数 ψ、φ，定义 K 上的相对型为

$$\sigma_K(\psi,\varphi) := \sup\{c \ge 0\colon \psi \le c\varphi + O(1) \text{ holds on } U\backslash X_{\mathrm{sing}} \text{ for some open neighborhood } U \text{ of } K \text{ in } X\}.$$

若不会引起混淆，我们可以省略 K。

注 2.36. 当 $K = \{z_0\}$ 是单点时，我们有点 z_0 处的相对型 $\sigma_{z_0}(\psi,\varphi)$。此外，我们有 $\sigma_K(\psi,\varphi) = \inf_{p\in K}\sigma_p(\psi,\varphi)$。

证明。根据定义，容易验证 $\sigma_K(\psi,\varphi) \le \inf_{p\in K}\sigma_p(\psi,\varphi)$。

记 $c_1 = \inf_{p\in K}\sigma_p(\psi,\varphi)$。令 $\delta > 0$ 为任意小的实数。于是，对于任意 $p \in K$，存在 U_p 的一个开邻域，使得在 $U_p \setminus X_{\mathrm{sing}}$ 上有 $\psi \le (c_1-\delta)\varphi + O(1)$。由 K 的紧致性可知，存在有限个点 $\{p_i\}_{i=1}^k$，使得 $\cup_{i=1}^k U_{p_i}$ 覆盖 K。因此，在 $\cup_{i=1}^k U_{p_i}\setminus X_{\mathrm{sing}}$ 上有 $\psi \le (c_1-\delta)\varphi + O(1)$。由 δ 的任意性，得到 $\sigma_K(\psi,\varphi) \ge \inf_{p\in K}\sigma_p(\psi,\varphi)$。

因此，我们知道 $\sigma_K(\psi,\varphi) = \inf_{p\in K}\sigma_p(\psi,\varphi)$。 □

设 f_j, h_k 是定义在开集 $U \subset X$ 上的全纯函数，适用于任意 $1 \leq j \leq m$ 和任意 $1 \leq k \leq q$。设 $\varphi_N := c\log\Big(\sum_{1\leq j\leq m}|f_j|^{\frac{1}{a_j}} + \sum_{1\leq k\leq q}|h_k|^N\Big)$，其中 $c > 0$, N 为正整数，$\{a_j\}_{1\leq j\leq m}$ 为正数。设$K \subset U \subset X$ 是 X 的紧子集。对于相对型 $\sigma(\cdot,\varphi_N)$，有如下结果。

引理 2.37。设 f 和 g 是定义在 K 上的全纯函数。设 $z_0 \in K$ 是满足 $z_0 \in \{\varphi_N = -\infty\}$ 的任意点。那么存在一个常数 $C > 0$ （取决于 g、$\{f_j\}$ 和 $\{h_k\}$，且独立于 N、f 和 z_0），使得

$$\sigma_{z_0}(\log|fg|,\varphi_N) \leq \sigma_{z_0}(\log|f|,\varphi_N) + C.$$

证明。利用定理 2.4 和膨胀，我们可以消解 $\big(\cup_{i=1}^m\{f_j = 0\}\big)\cup\big(\cup_{k=1}^q\{h_k = 0\}\big)$ 的奇点，并将相应的真修改记为 $\mu\colon \tilde{X} \to X$。记 $Z_0 := \mu^{-1}(z_0)$。注意，对于任意 $f \in \mathcal{O}_{X,o}$，都有 $\sigma_{z_0}(\log|f|,\varphi_N) = \sigma_{Z_0}(\log|f\circ\mu|,\varphi_N\circ\mu)$。注 2.36 告诉我们，$\sigma_{Z_0}(\log|f\circ\mu|,\varphi_N\circ\mu) = \inf_{p\in Z_0}\sigma_p(\log|f\circ\mu|,\varphi_N\circ\mu)$。

对于任意 $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq q$，记 $\{f_j\circ\mu = 0\}\cap\mu^{-1}(K) = \sum_{\alpha_j} a_{j,\alpha_j}D_{j,\alpha_j}$ 以及 $\{h_k\circ\mu = 0\}\cap\mu^{-1}(K) = \sum_{\beta_k} b_{k,\beta_k}D_{k,\beta_k}$，其中 $a_{j,\alpha_j}, b_{k,\beta_k}$ 为正整数。注意，除子 D_{j,α_j} 与 D_{k,β_k} 可以是相同的素因子。根据 μ 的构造可知，所有 D_{j,α_j} 和 D_{k,β_k} 都是 $\tilde{X}$ 上的简单正规交叉除子。记 $D = \big(\cup_{i=1}^m\{f_j\circ\mu = 0\}\big)\cup\big(\cup_{k=1}^q\{h_k\circ\mu = 0\}\big)$ 为出现在 $\{f_j\circ\mu = 0\}$ 和 $\{h_k\circ\mu = 0\}$ 中的所有除子的支集。

设 $p \in Z_0$。设 U 是 p 的一个小邻域，使得 $U\cap D = \cup_{1\leq l\leq n_p}\{w_l = 0\} = \cup_{1\leq l\leq n_p}D_l$，其中 $w = (w_1, \ldots\ldots, w_n)$ 是以 p 为中心的 U 上的坐标，且 $n_p \leq n$ 是一个正整数。由 μ 的构造可知

$$\begin{aligned}\varphi_N\circ\mu &= c\log\Big(\sum_{1\leq j\leq m}|f_j\circ\mu|^{\frac{1}{a_j}} + \sum_{1\leq k\leq q}|h_k\circ\mu|^N\Big)\\ &= c\log\Big(\sum_{1\leq j\leq m}|w_{j,\alpha_j}|^{\frac{a_{j,\alpha_j}}{a_j}} + \sum_{1\leq k\leq q}|w_{k,\beta_k}|^{Nb_{k,\beta_k}}\Big)\\ &= c\log\Big(\prod_{1\leq l\leq n_p}|w_l|^{\tau_{l,N}}\Big) + O(1),\end{aligned}$$

其中 $\tau_{l,N} = \min_{(j,\alpha_j),(k,\beta_k)}\{\frac{a_{j,\alpha_j}}{a_j}, Nb_{k,\beta_k}\}$ 而最小值取自所有满足条件 $D_l = D_{j,\alpha_j}$ 和 $D_l = D_{b_k,\beta_k}$ 的指标对（j, α_j）和（k, β_k）。对于任意 $F \in \mathcal{O}_{\tilde{X},p}$，我们有

$$\sigma_p(\log|F|,\varphi_N) = \min_{1\leq l\leq n_p}\Big\{\frac{\mathrm{ord}_{D_l}(F)}{c\tau_{l,N}}\Big\}.$$

因此

$$\begin{aligned}\sigma_p(\log|fg\circ\mu|,\varphi_N) &= \min_{1\le l\le n_p}\Big\{\frac{\mathrm{ord}_{D_l}(fg\circ\mu)}{c\tau_{l,N}}\Big\}\\ &= \min_{1\le l\le n_p}\Big\{\frac{\mathrm{ord}_{D_l}(f\circ\mu)+\mathrm{ord}_{D_l}(g\circ\mu)}{c\tau_{l,N}}\Big\}\\ &\le \min_{1\le l\le n_p}\Big\{\frac{\mathrm{ord}_{D_l}(f\circ\mu)}{c\tau_{l,N}}\Big\}+\max_{1\le l\le n_p}\Big\{\frac{\mathrm{ord}_{D_l}(g\circ\mu)}{c\tau_{l,N}}\Big\}\\ &= \sigma_p(\log|f\circ\mu|,\varphi_N)+\max_{1\le l\le n_p}\Big\{\frac{\mathrm{ord}_{D_l}(g\circ\mu)}{c\tau_{l,N}}\Big\}\end{aligned} \tag{2.19}$$

注意到 $\tau_{l,N}$ 关于 N 递增，因此 $\max_{1\le l\le n_p}\Big\{\frac{\mathrm{ord}_{D_l}(g\circ\mu)}{c\tau_{l,N}}\Big\}$ 关于 N 递减。结合估计式 (2.19)，可得

$$\begin{aligned}\sigma_p(\log|fg\circ\mu|,\varphi_N) &= \sigma_p(\log|f\circ\mu|,\varphi_N)+\max_{1\le l\le n_p}\Big\{\frac{\mathrm{ord}_{D_l}(g\circ\mu)}{c\tau_{l,N}}\Big\}\\ &\le \sigma_p(\log|f\circ\mu|,\varphi_N)+\max_{1\le l\le n_p}\Big\{\frac{\mathrm{ord}_{D_l}(g\circ\mu)}{c\tau_{l,1}}\Big\}\end{aligned} \tag{2.20}$$

设 $C:=\max_{D_\gamma\subset D}\Big\{\frac{\mathrm{ord}_{D_\gamma}(g\circ\mu)}{c\tau_{\gamma,1}}\Big\}$，其中 D_γ 是包含在 D 中的任意素因子。注意到 D 包含有限个素因子（取决于 $\{f_j\}$ 和 $\{h_k\}$），因此 C 是一个有限数，仅取决于 g、$\{f_j\}$ 和 $\{h_k\}$，而与 N、f、p 和 $z_0\in K$ 无关。由不等式 (2.20) 及 C 的定义可得

$$\inf_{p\in Z_0}\sigma_p(\log|(f\circ\mu)\cdot(g\circ\mu)|,\varphi_N\circ\mu)\le\inf_{p\in Z_0}\sigma_p(\log|f\circ\mu|,\varphi_N\circ\mu)+C.$$

因此我们知道，存在一个常数 $C>0$（与 N 和 K 无关），使得

$$\sigma_{z_0}(\log|fg|,\varphi_N)\le\sigma_{z_0}(\log|f|,\varphi_N)+C$$

对任意正的 N 和 $z_0\in K$，均成立。 □

当 o 是 X 的光滑点时，对于 H¨older 连续的多重次调和函数，跳跃数与相对型之间有如下关系。

引理 2.38（见 [8]）。设 φ 是 $o\in\mathbb{C}^n$ 附近的一个多重次调和函数，且 e^φ 是 α-*H¨older* 连续的，其中 $\alpha>0$ 为某个值。则对于任意 $(f,o)\in\mathcal{O}_o^*$，有

$$c_o^f(\varphi)\le\sigma(\log|f|,\varphi)+\frac{n}{\alpha}.$$

回顾一下，X 是 $\Omega\in\mathbb{C}^n$ 中的一个纯维数为 d 的解析子集，并记 $|z|^2:=\sum_{1\le j\le n}|z_j|^2$。假设 (X,o) 是奇异的，则当 φ 具有解析奇点时，跳跃数与相对型之间有如下关系。

引理 2.39。设在 o 附近有 $\varphi_0:=c\log\Big(\sum_{1\le j\le m}|f_j|^{\frac{1}{a_j}}\Big)$ 和 $\varphi_N:=c\log\Big(\sum_{1\le j\le m}|f_j|^{\frac{1}{a_j}}+|z|^{2N}\Big)$，其中 $c>0$ 是常数，$\{a_j\}_{1\le j\le m}$ 是正数，且对于 $1\le j\le m$，$f_j\in\mathcal{O}_{X,o}^w$。那么存在常数 C（与 N 无关），使得对于任意 $(f,o)\in\mathcal{O}_{X,o}^w\backslash\{0\}$ 和 $N\ge0$，我们有

$$c_o^f(\varphi_N)\le\sigma_o(\log|f|,\varphi_N)+C.$$

证明。利用定理 2.4，我们可以消解 X 的奇点，并将相应的真修改记为 $\widetilde{\mu}\colon \Omega \to \Omega$，其中 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 使得 $o \in X \cap \Omega$。$\widetilde{X}$ 将 X 的严格变换记为 $\widetilde{X}$，并记 $Z_0 := X \cap \mu^{-1}(\{o\})$。注意，对于 $\widetilde{X}$ 中 o 的任意开邻域 U，$f \circ \mu$ 和 $\varphi_N \circ \mu$ 分别是在 $\pi^{-1}(U)$ 上定义良好的全纯函数和多重次调和函数。由于 μ 是真映射，Z_0 在 X 中是紧的。注意，μ 在某个解析子集之外是全纯且双全纯的。我们知道 $c_o^f(\varphi_N) = c_{Z_0}^{\det \mu \cdot f \circ \mu}(\varphi \circ \mu)$，并且 $\sigma_o(\log |f|, \varphi_N) = \sigma_{Z_0}(\log |f \circ \mu_1|, \varphi \circ \mu_1)$。

通过调整 c，我们可以假设所有 $\frac{1}{a_j} \geq 2$，且 e^{φ_N} 是 1-H¨older 连续的。对于任意 $p \in Z_0$，引理 2.38 告诉我们

$$c_p^{\det \mu \cdot f \circ \mu}(\varphi_N \circ \mu) \leq \sigma_p(\log |\det \mu \cdot f \circ \mu_1|, \varphi_N \circ \mu) + C_1,$$

其中 C_1 是一个常数，仅依赖于 c，而与 p 和 N 无关。引理 2.37 告诉我们，对于任意 $p \in Z_0$，存在一个常数 $C_2 > 0$，它仅依赖于 $\{f_j \circ \mu\}$、$\{z \circ \mu\}$ 和 μ，而与 p 和 N 无关，使得对于任意 $N > 0$,

$$\sigma_p(\log |\det \mu \cdot f \circ \mu|, \varphi_N \circ \mu) \leq \sigma_p(\log |f \circ \mu|, \varphi_N \circ \mu) + C_2.$$

因此，对于任意 $p \in Z_0$ 和 $N > 0$，我们有

$$c_p^{\det \mu \cdot f \circ \mu}(\varphi_N \circ \mu) \leq \sigma_p(\log |f \circ \mu|, \varphi_N \circ \mu) + C,$$

其中 $C := C_1 + C_2 > 0$ 是一个与 p 和 N 无关的常数。$\varphi_N \circ \mu$　　σ_{Z_0}　　$\varphi_N \circ$
回顾 $c_{Z_0}^{\det \mu \cdot f \circ \mu}(\mu = \inf_{p \in Z_0} \sigma_p |f \circ \mu|\ \varphi_N \circ \mu$　　$c_o^f\ \varphi_N = c_{Z_0}^{\det \mu \cdot f \circ \mu}\ \varphi \circ \mu$　　)

$\inf_{p \in Z_0} c_p^{\det \mu \cdot f \circ \mu}(\ )$ 和 $(\log |f \circ \mu|, \ )\ \inf\ (\log , \ )$。注意 $(\ )\ (\ )$ 且 $\sigma_o(\log |f|, \ \varphi_N) = \sigma_{Z_0}(\log |f \circ \mu_1|, \varphi \circ \mu_1)$。我们知道存在一个常数 C（与 N无关），使得对于任意 $(f, \ o) \in \mathcal{O}^w_{X, \ o} \backslash \{0\}$ 和 $N \geq 0$,

$$\begin{aligned} c_o^f(\varphi_N) &= c_{Z_0}^{\det \mu \cdot f \circ \mu}(\varphi_N \circ \mu) \\ &\leq \sigma_{Z_0}(\log |f \circ \mu|, \varphi_N \circ \mu) + C \\ &= \sigma_o(\log |f|, \varphi_N) + C \end{aligned}$$

证明完毕。 □

注 2.40. 设 φ 是在 o 附近的一个多重次调和函数，满足

$$\sup_{(f,o) \in \mathcal{O}^w_{X,o} \backslash \{0\}} \left(c_o^f(\varphi) - \sigma(\log |f|, \varphi) \right) < +\infty.$$

那么，对于任意 $(f, o) \in \mathcal{O}^w_{X,o} \backslash \{0\}$，若 $c_o^f(\varphi) < +\infty$，考虑到 *Tian* 函数 $\mathrm{Tn}(t) := \{c \in \mathbb{R} : |f|^{2t} e^{-2c\varphi}$ 在 $o\}$ 附近可积，我们有

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\mathrm{Tn}(t)}{t} = \mathrm{Tn}'_-(t) = \mathrm{Tn}'_+(t) = \sigma(\log |f|, \varphi),$$

其中，$\mathrm{Tn}'_-(t)$ 和 $\mathrm{Tn}'_+(t)$ 分别是函数 $\mathrm{Tn}(t)$ 的左导数和右导数。

证明。根据 Tn(t) 和 σ(log $|f|$, φ) 的定义，我们有 $\mathrm{Tn}'_+(t) \geq \sigma(\log |f|, \varphi)$。由 Tn($t$) 的凹性可知，$\mathrm{Tn}(t)\ t$、$\mathrm{Tn}'_-(t)$ 和 $\mathrm{Tn}'_+(t)$ 均为递减的，且

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\mathrm{Tn}(t)}{t} = \lim_{t \to +\infty} \mathrm{Tn}'_-(t) = \lim_{t \to +\infty} \mathrm{Tn}'_+(t).$$

由于 $\sup_{(f,o)\in\mathcal{O}_o^*}(c_o^f(\varphi)-\sigma(\log|f|,\varphi))<+\infty$，存在 $C>0$，使得对于任意 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$，$\mathrm{Tn}(m)=c_o^{f^m}(\varphi)\leq m\sigma(\log|f|,\varphi)+C$，这意味着 $\lim_{m\to+\infty}\frac{\mathrm{Tn}(m)}{m}\leq\sigma(\log|f|,\varphi)$。由于对于任意 $t\geq 0$，$\mathrm{Tn}(t)_t\geq\sigma(\log|f|,\varphi)$，且 $\lim_{t\to+\infty}\mathrm{Tn}(t)_t$ 存在，因此 $\lim_{t\to+\infty}\mathrm{Tn}(t)_t=\sigma(\log|f|,\varphi)$。□

我们回顾全纯函数的以下基本性质。

引理 2.41. 设 X 是一个连通复流形。设 $f\not\equiv 0$ 是定义在紧集 $K\subset X$的某个开邻域上的全纯函数。那么$\sup_{p\in K}\mathrm{ord}_p f<+\infty$。

证明。否则，则 $\sup\mathrm{ord}_p f=+\infty$。存在一列点 $\{p_m\}_{m=1}^{+\infty}{}_{p\in K}$包含于 K，使得 $\lim_{m\to+\infty}\mathrm{ord}_{p_m}f=+\infty$。由于 K 是紧的，存在一点 $p\in K$，使得 $\{p_m\}$ 的某个子序列（仍记为 $\{p_m\}$）收敛到 p。

设 $(U;\ z_1,\ z_2、\ldots\ldots、\ z_n)$ 是 p 附近的一个小局部坐标邻域。当 $\lim_{m\to+\infty}\mathrm{ord}_{p_m}f=+\infty$ 时，对于任意多重指标 $\alpha=(\alpha_1、\ldots\ldots、\alpha_n)$，当 m 足够大时，有$\frac{\partial^\alpha f}{\partial z^\alpha}(p_m)=0$。由 $\frac{\partial^\alpha f}{\partial z^\alpha}$ 的连续性以及 p_m 收敛到 p，可知对于任意多重指标 $\alpha=(\alpha_1、\ldots\ldots、\alpha_n)$，$\frac{\partial^\alpha f}{\partial z^\alpha}(p)=0$。因此，根据全纯函数的刚性，我们知道 f 恒等于零，这就产生了矛盾。□

我们回顾 Skoda 的以下结果。

引理 2.42（[28]；另见 [9]）。对于 o 附近的任意多重次调和函数 φ，如果勒隆数 $\nu_o(\varphi)<1$，则 $e^{-2\varphi}$ 在 o 附近局部可积。

利用引理 2.42，我们给出以下引理。

引理 2.43. 设(X,o) 是一个解析集的不可约芽。设 $C>0$，且φ 是在(X,o) 附近定义的多重次调和函数，使得 $c_o(\varphi)<C$。那么，对于任意全纯函数 $f\in\mathcal{O}_{X,o}^w$，存在一个常数 $C_f\geq 0$（取决于f，但与 φ 无关），使得

$$\sigma_o(\log|f|,\varphi)\leq CC_f.$$

证明. 利用定理 2.4，我们可以消解 X 的奇点，并将相应的真修改记为 $\mu:\widetilde{\Omega}\to\Omega$，其中 $\Omega\subset\mathbb{C}^{n+l}$ 使得 $o\in\sim X\cap\Omega$。将 X 的严格变换记为 $\widetilde{X}$，并记 $Z_0:=\Omega\cap\mu^{-1}(\{o\})$。注意，$c_o(\varphi)=c^{\det\mu}_{Z_0\cap\widetilde{X}}(\varphi\circ\mu)$。因此，$c_o(\varphi)<C$意味着

$$c^{\det\mu}_{Z_0\cap\widetilde{X}}(\varphi\circ\mu)<C.$$

回忆一下，$c^{\det\mu}_{Z_0\cap\widetilde{X}}(\varphi\circ\mu)=\inf_{p\in Z_0\cap\widetilde{X}}c_p^{\det\mu}(\varphi\circ\mu)$。存在一点 $p\in Z_0\cap\widetilde{X}$使得 $c_p^{\det\mu}(\varphi\circ\mu)<C$。由于 $c_p^{\det\mu}(\varphi\circ\mu)\geq c_p(\varphi\circ\mu)$，我们知道 $c_p(\varphi\circ\mu)<C$。由引理 2.42 可知，$\varphi\circ\mu$ 在 p处的勒隆数

$$\nu_p(\varphi\circ\mu)>\frac{1}{C},$$

这意味着 $\sigma_p(\log|f\circ\mu|,\varphi\circ\mu)\leq C\,\mathrm{ord}_p(f)$。

回顾一下，$\sigma_o(\log|f|,\varphi)=\sigma_{Z_0\cap\tilde{X}}(\log|f\circ\mu|,\varphi\circ\mu)$，并且$\sigma_{Z_0\cap\tilde{X}}(\log|f\circ\mu|,\varphi\circ\mu)=\inf_{p\in Z_0\cap\tilde{X}}\sigma(\log|f\circ\mu|,\varphi\circ\mu)$。因此我们知道

$$\sigma_o(\log|f|,\varphi)\le\sigma_p(\log|f\circ\mu|,\varphi\circ\mu)\le C\operatorname{ord}_p(f\circ\mu)\le C\sup_{p\in Z_0\cap\tilde{X}}\operatorname{ord}_p(f\circ\mu).$$

注意到 $Z_0\cap X$ 在 X中是紧的，引理 2.41 告诉我们，$C_f:=\sup_{p\in Z_0\cap X}\operatorname{ord}_p(f\circ\mu)<+\infty$。因此我们知道 $\sigma_o(\log|f|,\varphi)\le CC_f$。□

2.6. **赋值与相对型的收敛结果**。

设 $\{\nu_j\}_{j\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是 $\mathcal{O}_o$上的一列赋值。我们需要以下关于赋值的收敛结果，它将用于证明主定理。

命题 2.44. 假设对于任意在 o 附近的全纯函数g，都有$\sup_j\nu_j(g)<+\infty$。存在 $\{\nu_j\}$ 的一个子序列，记为 $\{\nu_{j_l}\}$，使得 $\{\nu_{j_l}\}$收敛到 $\mathcal{O}_o$ 上的一个赋值 ν_0。

证明. 对每个 $j,k\in\mathbb{Z}_{>0}$，记 $I_k^j:=\{(f,o)\in\mathcal{O}_o:\ \nu_j(f)\ge k\}$。

步骤 *1.* 找出 I_k^j 的一个子序列$\{I_k^{j_l}\}$，使得对于任意 k，$\cup_{l_1\ge1}\big(\cap_{l\ge l_1}I_k^{j_l}\big)$ 都是最大的。这意味着，对于 $\{I_k^{j_l}\}$的任意子序列 $\{I_k^{j'_l}\}$，都有 $\cup_{l_1\ge1}\big(\cap_{l\ge l_1}I_k^{j'_l}\big)=\cup_{l_1\ge1}\big(\cap_{l\ge l_1}I_k^{j_l}\big)$。

注意到

$$\cup_{j_1\ge1}\big(\cap_{j\ge j_1}I_k^j\big)=\{(f,o)\in\mathcal{O}_o:\exists\, j_1\text{ s.t. }\nu_j(f)\ge k\text{ holds for any }j\ge j_1\}.$$

由于 $\mathcal{O}_o$ 是诺特环，存在 I_1^j 的一个子序列 $\{I^{j^{(1)}(l)}{}_1\}$，使得 $\cup_{l_1\ge1}\big(\cap_{l\ge l_1}I^{j^{(1)}(l)}{}_1\big)$ 是极大的。类似地，存在$I^{j^{(1)}(l)}1$ 的一个子序列 $\{I^{j^{(2)}(l)}{}_1\}$，使得 $\cup_{l_1\ge1}\big(\cap_{l\ge l_1}I^{j^{(2)}(l)}{}_2\big)$ 是极大的。通过归纳，对任意 $r\in\mathbb{Z}_{\ge1}$，存在一个序列 $\{I^{j^{(r)}(l)}{}_1\}$，使得 $\cup_{l_1\ge1}\big(\cap_{l\ge l_1}I^{j^{(r)}(l)}{}_r\big)$ 是极大的，并且 $\{I^{j^{(r+1)}(l)}{}_1\}$ 是 $\{I^{j^{(r)}(l)}{}_1\}$的子序列。利用对角线方法，我们得到 I_k^j 的一个子序列 $\{I_k^{j_l}\}$，使得对任意 k，$\cup_{l_1\ge1}\big(\cap_{l\ge l_1}I_k^{j_l}\big)$ 都是极大的。

步骤 *2.* 我们证明，对于任意（f，o）$\in\mathcal{O}_o$，$\lim_{l\to+\infty}\nu_{j_l}(f)$ 存在。

我们通过反证法证明：如果结论不成立，则存在 $\{\nu_{j_l}\}$ 的两个赋值子序列$\{\nu_{j'_l}\}$和 $\{\nu_{j''_l}\}$，使得

$$\lim_{l\to+\infty}\nu_{j'_l}(f)=a_1<a_2=\lim_{l\to+\infty}\nu_{j''_l}(f).$$

注意到 $\nu_j(f^m)=m\nu_j(f)$。于是，不妨设存在一个正整数 $k_0\in(a_1,\ a_2)$。因此我们有

$$(f,o)\in\cup_{l_1\ge1}\big(\cap_{l\ge l_1}I_{k_0}^{j'_l}\big)$$

and

$$(f,o)\notin\cup_{l_1\ge1}\big(\cap_{l\ge l_1}I_{k_0}^{j_l}\big),$$

这与 $\cup_{l_1\ge1}\big(\cap_{l\ge l_1}I_{k_0}^{j_l}\big)$的极大性相矛盾。因此，对于任意（$f$，$o$）$\in\mathcal{O}_o$，$\lim_{l\to+\infty}\nu_{j_l}(f)$ 存在。

对任意 $(f,o)\in\mathcal{O}_o$，记 $\nu_0(f):=\lim_{l\to+\infty}\nu_{j_l}(f)$。由每个 ν_j都是 $\mathcal{O}_o$ 上的赋值可知，ν_0 是 $\mathcal{O}_o$上的赋值。命题 2.44 得证。□

我们来考察弱全纯函数芽环上的赋值。回顾该环的以下基本性质。

引理 2.45 (参见 [31])。 弱全纯函数芽环 $\mathcal{O}_o^w$ 是诺特的。

由于 $\mathcal{O}_o^w$是诺特的，采用与命题 2.44 相同的证明，我们还可以得到以下收敛结果。

命题 2.46。 设 $\{\nu_j\}_{j\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是 $\mathcal{O}_o^w$上的一列赋值。假设对于 o附近的任意弱全纯函数 g，都有$\sup_j \nu_j(g) < +\infty$。那么，存在 $\{\nu_j\}$ 的一个子序列 $\{\nu_{j_l}\}$，它收敛到 $\mathcal{O}_o^w$上的一个赋值 ν_0。

3. Proof of Remark 1.3

注 *1.3* 的证明。 定理 2.7 表明存在 $\varepsilon > 0$，使得

$$|f_0|^2 e^{-2\varphi_0}|z|^{2N_0}e^{-2(1+\varepsilon)\varphi}$$

在 z_0 附近可积。我们有

$$\begin{aligned}
&\int_U |f_0|^2 e^{-2\varphi_0}e^{-2\varphi} - |f_0|^2 e^{-2\varphi_0}e^{-2\max\left\{\varphi, \frac{N_0}{\varepsilon}\log|z|\right\}}\\
\leq &\int_{U\cap\left\{\frac{N_0}{\varepsilon}\log|z|\geq\varphi\right\}} |f_0|^2 e^{-2\varphi_0}e^{-2\varphi}\\
\leq &\int_{U\cap\left\{\frac{N_0}{\varepsilon}\log|z|\geq\varphi\right\}} |f_0|^2 e^{-2\varphi_0}|z|^{2N_0}e^{-2(1+\varepsilon)\varphi}\\
< &+\infty,
\end{aligned}$$

其中 $U \subset X$ 是 z_0 的一个邻域。于是，只需考虑存在足够大的 N，使得

$$N\log|z| \leq \varphi$$

在 z_0 附近。通过类似的讨论，对于任意局部 Zhou 权重 $\Phi_{z_0,\ \max}\ \Phi_{z_0,\ \max}\ \geq N_1\log|z| + O(1)$ 在某个 $N_1 \gg 0$ 的 o 附近成立。

设 $V \subset X$ 是 z_0 的一个小邻域，使得 $e^{-\varphi}$ 在任意 $z \in V\setminus\{z_0\}$ 附近可积，且 $\varphi < 0$ 在 V 上可积。令 $(u_\alpha)_\alpha$ 为 V 上满足 $u_\alpha \geq \varphi + O(1)$ 在 z_0 附近成立且 $|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-2u_\alpha}$ 在 z_0 附近不可积的负多重次调和函数。

佐恩引理 表明，存在 Γ，它是一个极大集，且对于任意 α，$\alpha' \in \Gamma$，在 o 附近，$u_\alpha \leq u_{\alpha'} + O(1)$ 或 $u_{\alpha'} \leq u_\alpha + O(1)$ 成立，其中 (u_α) 是 V 上的负多重次调和函数。

设 $u(z) := \sup_{\alpha\in\Gamma} u_\alpha(z)$ 于 V，并设 $u^*(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{U_{z,\ \varepsilon}} u$，其中 $U_{z,\ \varepsilon} := X \cap \mathbb{B}^{n+l}(z,\ \varepsilon)$。引理 2.1 表明，存在 (u_α) 的一个子序列 (v_j)，使得 $(\max_j v_j)^* = u^*$。此外，可以选取关于 j 单调递增的 $v_j(:= \sup_{j'\leq j} v_j)$，使得 $|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-2v_j}$ 在 z_0 附近不可积。

引理 2.1 表明，(v_j) 关于 j 几乎处处收敛到 v^*，这里的「几乎处处」是指相对于勒贝格测度而言，并且 v^* 是 V 上的多重次调和函数。定理 2.7 表明，$|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-2v^*}$ 在 z_0 附近不可积。

在接下来的部分，我们通过反证法证明，v^* 是与 $|f_0|^2e^{-2\varphi_0}$相关的局部 Zhou 权重，且定义在 z_0 附近。假设结论不成立，则存在一个多重次调和函数 $\tilde{v}$

定义在 z_0 附近，使得 $\tilde{v} \geq v^*$, $|f_0|^2 e^{-2\varphi_0} e^{-2\tilde{v}}$ 在 z_0附近不可积，并且

$$\limsup_{z \to z_0} \left(\tilde{v}(z) - v^*(z)\right) = +\infty.$$

由 $\varphi < 0$ 在 V上，根据 v^*的定义，我们有 $v^* \geq \varphi$，这表明 $v^* \geq N \log |z|$。于是，对于$U_{z_0,\ \varepsilon} := \mathbb{B}(z_0,\ \varepsilon) \cap X$（$\varepsilon$足够小），存在 $M \ll 0$，使得 $\tilde{v} + M < N \log |z| \leq v^*$ 在$U_{z_0,\ \varepsilon}$的边界附近成立，这意味着 $\max\{\tilde{v} + M, v^*\} = v^*$ 在$U_{z_0,\ \varepsilon}$的边界附近成立。令

$$\tilde{\varphi} := \begin{cases} \max\{\tilde{v} + M, v^*\} & \text{on } U_{z_0,\varepsilon}, \\ v^* & \text{on } V \setminus U_{z_0,\varepsilon}. \end{cases}$$

$\tilde{v} \geq v^*$ 意味着 $\tilde{\varphi} = \tilde{v} + O(1)$ 在 z_0 附近成立。于是，$\tilde{\varphi}$ 是定义在 V 上的多重次调和函数，使得

$$\limsup_{z \to z_0}(\tilde{\varphi}(z) - u^*(z)) = \limsup_{z \to z_0}(\tilde{\varphi}(z) - v^*(z)) \geq \limsup_{z \to z_0}(\tilde{v}(z) + M - v^*(z)) = +\infty,$$

并且$|f_0|^2 e^{-2\varphi_0} e^{-2\tilde{\varphi}}$ 在 z_0 附近不可积，这与 u^*的定义矛盾。这就证明了注 1.3。□

4. Proof of Theorem 1.6

定理 *1.6* 的证明。 注 1.3 表明，$\Phi_{z_0,\ \text{最大值}} \geq N \log |z| + O(1)$ 在 z_0附近，对某个 $N > 0$成立。根据命题 2.12 和 2.13，我们知道，对于任意满足条件 $\psi \leq s_0 \log |z| + O(1)$ 在 $z_0 \in X$ 附近对某个 $s_0 > 0$成立的多重次调和函数 ψ，极限 $\lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{2t_1} \frac{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi < -t_1\} \cap U} |f_0|^2 e^{-2\varphi_0}}{(-2\psi)} \overline{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi < -t_1\} \cap U} |f_0|^2 e^{-2\varphi_0}}$存在，且

$$\lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{2t_1} \frac{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi < -t_1\} \cap U} |f_0|^2 e^{-2\varphi_0}(-2\psi)}{\int_{\{\mathrm{Tn}(0)\varphi < -t_1\} \cap U} |f_0|^2 e^{-2\varphi_0}} = \sigma(\psi, \Phi_{z_0,\max}).$$

因此，定理 1.6 得证。 □

推论 *1.7* 的证明。 如果 $f(z_0) = 0$，显然 $\log |f| \leq C_1 \log |z| + O(1)$ 在z_0附近对某个 $C_1 > 0$成立。因此，$\nu(f,\ \Phi_{z_0,\ \text{最大值}}) > 0$，因为 $\Phi_{z_0,\ \text{最大值}} \geq C_2 \log |z| + O(1)$ 在z_0附近。

若 $f(z_0) \neq 0$，则存在一个邻域 U使得 $\inf_U |f| > 0$。由于$|f_0|^2 e^{-2\varphi_0 - 2\Phi_{z_0,\ \max}}$ 在 z_0 附近不可积，而 $|f_0|^2 e^{-2\varphi_0}$ 在 z_0附近可积，因此我们知道 $\liminf_{X_{\mathrm{reg}} \ni z \to z_0} \Phi_{z_0,\ \text{最大值}} = -\infty$。于是 $\nu(f,\ \Phi_{z_0,\ \text{最大值}}) = 0$。陈述 (3) 成立。

注意，$\log |fg| = \log |f| + \log |g|$。由定理 1.6 和陈述 (3) 可得 $\nu(fg,\ \Phi_{z_0,\ \text{最大值}}) = \nu(f,\ \Phi_{z_0,\ \text{最大值}}) + \nu(g,\ \Phi_{z_0,\ \text{最大值}})$。陈述 (1) 成立。由于 $\log |f + g| \leq \log(|f| + |g|) = \max\{\log |f|, \log |g|\} + O(1)$，我们有

$$\nu(f + g, \Phi_{z_0,\max}) \geq \sigma(\max\{\log |f|, \log |g|\}, \Phi_{z_0,\max}).$$

对于任意正数 $c < \min\{\nu(f, \Phi_{z_0,\max}),\ \nu(g, \Phi_{z_0,\max})\}$，根据定义，在 z_0 附近有 $\log |f| \leq c\Phi_{z_0,\max} + O(1)$ 和 $\log |g| \leq c\Phi_{z_0,\max} + O(1)$，这说明在 z_0 附近有 $\max\{\log |f|, \log |g|\} \log c\Phi_{z_0,\max} + O(1)$。因此，$\nu(f + g, \Phi_{z_0,\max}) \geq \sigma(\max\{\log |f|, \log |g|\}, \Phi_{z_0,\max}) \geq \min\{\nu(f, \Phi_{z_0,\max}),\ \nu(g, \Phi_{z_0,\max})\}$。命题 (2) 成立。

因此，推论 1.7 成立。 □

命题 4.1. 设 $f=(f_1,\cdots,f_{m'})$ 为一个向量，其中 $f_1,\cdots,f_{m'}$ 是 z_0 附近的全纯函数。记 $|f|:=(|f_1|^2+\cdots+|f_{m'}|^2)^{1/2}$。设 $\Phi_{z_0,\text{最大值}}$ 是与 $|f_0|^2e^{-2\varphi_0}$ 相关的 z_0 附近的局部 *Zhou* 权重。那么以下两个陈述成立：

(1) 对于任意 $\alpha>0$, $\big(1+\alpha\sigma(\log|f|,\Phi_{z_0,\max})\big)\Phi_{z_0,\max}$ 是一个与 $|f|^{2\alpha}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}$ 在 z_0 附近相关的局部 *Zhou* 权重；

(2) $\big(1+\sigma(\varphi_0,\Phi_{z_0,\max})\big)\Phi_{z_0,\max}$ 是一个与 $|f_0|^2$ 相关的局部 *Zhou* 权重。

证明。 首先，我们证明命题 4.1 中的陈述 (1)。

记

$$\mathrm{Tn}(t):=\sup\big\{c:|f_0|^2|f|^{2t}e^{-2\varphi_0-2c\Phi_{z_0,\max}}\text{ is integrable near }o\big\}.$$

由命题 2.13，我们有 $\mathrm{Tn}(\alpha)=1+\sigma(\log|f|,\ \Phi_{z_0,\text{最大值}})\alpha$，这意味着

$$|f_0|^2|f|^{2\alpha}e^{-2\varphi_0-2(1+\alpha\sigma(\log|f|,\Phi_{z_0,\max}))\Phi_{z_0,\max}}$$

根据定理 2.7，它在 z_0 附近不可积。由于 $\log|f|\le\sigma(\log|f|,\ \Phi_{z_0,\text{最大值}})\Phi_{z_0,\text{最大值}}+O(1)$，且存在 $N\gg0$ 使得 $|f_0|^2|z|^{2N}e^{-2\varphi_0-2\Phi_{z_0,\max}}$ 在 z_0 附近可积，我们知道

$$|f_0|^2|f|^{2\alpha}|z|^{2N}e^{-2\varphi_0-2\left(1+\alpha\sigma(\log|f|,\Phi_{z_0,\max})\right)\Phi_{z_0,\max}}$$

在 z_0 附近可积。

设 $\tilde\varphi$ 是 z_0 附近的一个多重次调和函数，满足

$$\tilde\varphi\ge\big(1+\alpha\sigma(\log|f|,\Phi_{z_0,\max})\big)\Phi_{z_0,\max}+O(1)$$

且 $|f|^{2\alpha}|f_0|^2e^{-2\varphi_0-2\tilde\varphi}$ 在 z_0 附近不可积。注意

$$\log|f|\le\sigma(\log|f|,\Phi_{z_0,\max})\Phi_{z_0,\max}+O(1),$$

then

$$\tilde\varphi\ge\frac{1+\alpha\sigma(\log|f|,\Phi_{z_0,\max})}{\sigma(\log|f|,\Phi_{z_0,\max})}\log|f|+O(1)$$

and

$$|f|^{2\alpha}|f_0|^2e^{-2\varphi_0-2\tilde\varphi}\le C|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-\frac{2}{1+\alpha\sigma(\log|f|,\Phi_{z_0,\max})}\tilde\varphi}.$$

由于 $|f|^{2\alpha}|f_0|^2e^{-2\varphi_0-2\tilde\varphi}$ 在 z_0 附近不可积，我们知道

$$|f_0|^2e^{-2\varphi_0-\frac{2}{1+\alpha\sigma(\log|f|,\Phi_{z_0,\max})}\tilde\varphi}$$

在 z_0 附近不可积。注意，$\Phi_{z_0,\ \max}$ 是与$|f_0|^2e^{-2\varphi_0}$相关的局部 Zhou 权重。于是我们得到

$$\tilde\varphi=(1+\alpha\sigma(\log|f|,\Phi_{z_0,\max}))\Phi_{z_0,\max}+O(1),$$

这说明 $\big(1+\alpha\sigma(\log|f|,\ \Phi_{z_0,\ \max})\big)\Phi_{z_0,\ \max}$ 是与 $|f|^{2\alpha}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}$ 相关的局部 Zhou 权重。

接下来，我们给出陈述 (2) 的证明，这与陈述 (1) 的证明类似。

记为

$$\mathrm{Tn}(t):=\sup\big\{c:|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{2t\varphi_0}e^{-2c\Phi_{z_0,\max}}\text{ is integrable near }o\big\}.$$

根据命题 2.13，我们有 $\mathrm{Tn}(1)=1+\sigma(\varphi_0,\ \Phi_{z_0,\ \text{最大值}})$，这意味着

$$|f_0|^2e^{-2\left(1+\sigma(\varphi_0,\Phi_{z_0,\max})\right)\Phi_{z_0,\max}}$$

在 z_0 附近不可积。由于 $\varphi_0 \le \sigma(\varphi_0,\ \Phi_{z_0,\ \text{最大值}})\Phi_{z_0,\ \text{最大值}} + O(1)$，并且存在 $N \gg 0$ 使得 $|f_0|^2|z|^{2N}e^{-2\varphi_0-2\Phi_{z_0,\ \max}}$ 在 z_0 附近可积，因此我们知道 $|f_0|^2|z|^{2N}e^{-2\left(1+\sigma(\varphi_0,\ \Phi_{z_0,\ \max})\right)\Phi_{z_0,\ \max}}$ 在 z_0 附近可积。

设 $\tilde{\varphi}$ 是 z_0 附近的一个多重次调和函数，满足

$$\tilde{\varphi} \ge \big(1+\sigma(\varphi_0,\Phi_{z_0,\max})\big)\Phi_{z_0,\max} + O(1)$$

且 $|f_0|^2e^{-2\tilde{\varphi}}$ 在 z_0 附近不可积。由 $\varphi_0 \le \sigma(\varphi_0,\ \Phi_{z_0,\ \text{最大值}})\Phi_{z_0,\ \text{最大值}}+O(1)$ 可得

$$\begin{aligned}
|f_0|^2e^{-2\tilde{\varphi}} &= e^{2\varphi_0}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-2\tilde{\varphi}}\\
&\le Ce^{2\sigma(\varphi_0,\Phi_{z_0,\max})\Phi_{z_0,\max}}|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-2\tilde{\varphi}}\\
&\le C_1|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{2\frac{\sigma(\varphi_0,\Phi_{z_0,\max})}{1+\sigma(\varphi_0,\Phi_{z_0,\max})}\tilde{\varphi}}e^{-2\tilde{\varphi}}\\
&= C_1|f_0|^2e^{-2\varphi_0}e^{-\frac{2}{1+\sigma(\varphi_0,\Phi_{z_0,\max})}\tilde{\varphi}}.
\end{aligned}$$

由于 $|f_0|^2e^{-2\tilde{\varphi}}$ 在 z_0 附近不可积，我们知道 $|f_0|^2e^{-2\varphi_0-\frac{2}{1+\sigma(\varphi_0,\ \Phi_{z_0,\ \text{最大值}})}\tilde{\varphi}}$ 在 z_0 附近不可积。注意，$\Phi_{z_0,\ \text{最大值}}$ 是与 $|f_0|^2e^{-2\varphi_0}$ 相关的局部 Zhou 权重。于是我们得到

$$\tilde{\varphi} = \big(1+\sigma(\varphi_0,\Phi_{z_0,\max})\big)\Phi_{z_0,\max} + O(1),$$

这表明 $\big(1+\sigma(\varphi_0,\Phi_{z_0,\max})\big)\Phi_{z_0,\max}$ 是与 $|f_0|^2$ 相关的局部 Zhou 权重。□

5. Proof of Theorem 1.8

显然，

$$\sigma\Big(\log|G|,\big(1+\sigma(\varphi_0,\Phi_{z_0,\max})\big)\Phi_{z_0,\max}\Big) = \frac{\nu(G,\Phi_{z_0,\max})}{1+\sigma(\varphi_0,\Phi_{z_0,\max})}$$

and

$$c_{z_0}^G\Big(\big(1+\sigma(\varphi_0,\Phi_{z_0,\max})\big)\Phi_{z_0,\max}\Big) = \frac{c_{z_0}^G(\Phi_{z_0,\max})}{1+\sigma(\varphi_0,\Phi_{z_0,\max})}.$$

命题 4.1 表明，只需考虑 $\varphi_0 \equiv 0$ 的情形。我们来考虑一个混合 Tian 函数

$$\mathrm{Tn}(s,t) := \sup\big\{c : |G|^{2s}|f_0|^{2t}e^{-2c\Phi_{z_0,\max}} \text{ is integrable near } z_0\big\}.$$

根据 $\mathrm{Tn}(s,t)$ 和周数的定义，我们有

$$\mathrm{Tn}(1,0) = c_{z_0}^G(\Phi_{z_0,\max}) \ge c_{z_0}(\Phi_{z_0,\max}) + \nu(G,\Phi_{z_0,\max})$$

并且 $\mathrm{Tn}(1,1) \ge \mathrm{Tn}(1,0) + \sigma(\log|f_0|,\Phi_{z_0,\max})$。由于 $\Phi_{z_0,\max}$ 是在 z_0 附近与 $|f_0|^2$ 相关的局部 Zhou 权重，我们有 $\mathrm{Tn}(0,1) = 1$ 且 $\mathrm{Tn}(1,1) = \mathrm{Tn}(0,1)+\nu(G,\Phi_{z_0,\max})$（由命题 4.1）。于是我们有

$$\begin{aligned}
c_{z_0}^G(\Phi_{z_0,\max}) = \mathrm{Tn}(1,0) &\le \mathrm{Tn}(1,1) - \sigma(\log|f_0|,\Phi_{z_0,\max})\\
&= \mathrm{Tn}(0,1) + \nu(G,\Phi_{z_0,\max}) - \sigma(\log|f_0|,\Phi_{z_0,\max})\\
&= \nu(G,\Phi_{z_0,\max}) - \sigma(\log|f_0|,\Phi_{z_0,\max}) + 1.
\end{aligned}$$

因此，定理 1.8 成立。

6. Proofs of Theorem 1.9, Theorem 1.10 and their Corollaries

我们首先证明定理 1.9。

证明。 我们分两步证明此定理。

步骤 *1*。 (1) $\Rightarrow$(2)。

注意， $F \coloneqq \prod_{0\le j\le m} f_j$。 如果存在赋值 ν 使得 $\nu(f_j) = a_j$对任意 j成立，那么根据引理 2.17 和 $a_0 = 0$,

$$\sigma(\log|F|,\varphi) \le \nu(F) = \sum_{0\le j\le m} \nu(f_j) = \sum_{1\le j\le m} a_j.$$

另一方面，根据相对型的定义，显然我们也有

$$\sigma(\log|F|,\varphi) \ge \sum_{0\le j\le m} \sigma(\log|f_j|,\varphi) \ge \sum_{1\le j\le m} a_j.$$

因此， $\sigma(\log|F|,\varphi) = \sum_{1\le j\le m} a_j$成立。

步骤 *2*. (2) $\Rightarrow$(1)。

回忆一下， X 是 $\Omega \in \mathbb{C}^n$ 的解析子集，且纯维数为 n ，并记$|z|^2 \coloneqq \sum_{1\le j\le n} |z_j|^2$

由于 $\sigma(\log|F|,\varphi) < +\infty$，对于任意 $1 \le j \le m.$，我们有 $f_j(o) = 0$。记 $\varphi_N \coloneqq \max\{\varphi, N\log|z|\}$，其中 $N > 0$ 为任意值。于是，对于所有 $0 \le j \le m$，我们有 $\sigma(\log|f_j|,\varphi_N) \ge \sigma(\log|f_j|,\varphi) \ge a_j$。由引理 2.39 可知，存在 $C > 0$ ，使得对于任意 $(f,o)\in\mathcal{O}_{X,o}$，有$c_o^f(\varphi) \le \sigma(\log|f|,\varphi) + C$。因此，对于任意 $k > 0$，存在N_k ，使得

$$\begin{aligned}
\sigma(\log|F|,\varphi) &\ge \frac{c_o^{F^k}(\varphi) - C}{k} \\
&\ge \frac{c_o^{F^k}(\varphi_{N_k}) - 1 - C}{k} \\
&\ge \frac{k\sigma(\log|F|,\varphi_{N_k}) - 1 - C}{k} \\
&\ge \lim_{N\to+\infty} \sigma(\log|F|,\varphi_N) - \frac{1+C}{k},
\end{aligned}$$

其中第二个“$\ge$”由引理 2.34 得出。于是我们有

$$\lim_{N\to+\infty} \sigma(\log|F|,\varphi_N) = \sigma(\log|F|,\varphi).$$

考虑 Tian 函数

$$\mathrm{Tn}(t) \coloneqq \sup\big\{c \ge 0\colon |F|^{2t}e^{-2c\varphi_N} \text{ is integrable near } o\big\}.$$

由引理 2.39 和注 2.40 可知

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{Tn}'_-(t) = \lim_{t\to+\infty} \mathrm{Tn}'_+(t) = \sigma(\log|F|,\varphi_N). \tag{6.1}$$

于是，对于每个正整数 s， $|F|^{2s}e^{-2\,\mathrm{Tn}(s)\varphi_N}$ 在 o 附近不可积（由于乘子理想层 [17]的强开性），根据定理 1.3，存在一个与 $|F|^{2s}$ 相关的局部 Zhou 权重 $\Phi_{N,s}$ ，其位于 o 附近，使得

$$\Phi_{N,s} \ge \mathrm{Tn}(s)\varphi_N.$$

考虑 Tian 函数

$$\widetilde{\mathrm{Tn}}(t) \coloneqq \sup\Big\{c \ge 0\colon |F|^{2t}e^{-2c\frac{\Phi_{N,s}}{\mathrm{Tn}(s)}} \text{ is integrable near } o\Big\}.$$

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$因此，对于任意 $t \geq 0$，我们有 $\mathrm{Tn}(s) = \mathrm{Tn}(s)$ 和 $\mathrm{Tn}(t) \geq \mathrm{Tn}(t)$。由命题 2.13 可知，$\widetilde{\mathrm{Tn}}(s) = \sigma\Big(\log|F|, \frac{\Phi_{N,s}}{\mathrm{Tn}(s)}\Big)$。于是我们有

$$\mathrm{Tn}'_+(s) \leq \sigma\Big(\log|F|, \frac{\Phi_{N,s}}{\mathrm{Tn}(s)}\Big) \leq \mathrm{Tn}'_-(s). \tag{6.2}$$

记对应于 $\Phi_{N,\,s}$ 的周估值为 $\nu_{N,\,s}$。于是我们有

$$\mathrm{Tn}(s)\nu_{N,s}(f_j) = \mathrm{Tn}(s)\sigma(\log|f_j|, \Phi_{N,s}) \geq \sigma(\log|f_j|, \varphi_N) \geq a_j$$

对所有 $1 \leq j \leq m$ 和

$$\mathrm{Tn}(s)\nu_{N,s}(F) = \mathrm{Tn}(s)\sigma(\log|F|, \Phi_{N,s}) = \sigma\Big(\log|F|, \frac{\Phi_{N,s}}{\mathrm{Tn}(s)}\Big).$$

注意到

$$\varphi_N = \log\Big(\sum_{1\leq j\leq m} |f_j|^{\frac{1}{a_j}} + \sum_{1\leq k\leq n} |z_k|^N\Big) + O(1)$$

在 o 附近。由引理 2.39，存在一个常数 C（与 N 无关），使得 $\sup_{(f,o)\in\mathcal{O}_o^*}(c_o^f(\varphi_N) - \sigma(\log|f|, \varphi_N)) < C$。由于 $\widetilde{\mathrm{Tn}}(t)$ 是一个凹函数，我们有

$$c_o\Big(\frac{\Phi_{N,s}}{\mathrm{Tn}(s)}\Big) = \widetilde{\mathrm{Tn}}(0) \leq \mathrm{Tn}(s) - s\,\mathrm{Tn}'_+(s). \tag{6.3}$$

由 $\mathrm{Tn}(t)$ 的凹性和等式 (6.1) 可知，$\mathrm{Tn}(s) - s\mathrm{Tn}'_+(s) \leq c_o^{F^s}(\varphi_N) - \sigma(\log|F^s|, \varphi_N) < C$。然后，不等式 (6.3) 意味着，对于任意 N 和 s，$c_o\big(\frac{\Phi_{N,\,s}}{\mathrm{Tn}(s)}\big) < C$。由引理 2.43 可知，对于任意 $(f,\ o)$，

$$\mathrm{Tn}(s)\nu_{N,s}(f) = \sigma\Big(\log|f|, \frac{\Phi_{N,s}}{\mathrm{Tn}(s)}\Big) \tag{6.4}$$

关于 N 和 s 一致有界。

由等式 (6.1)、不等式 (6.2)、(6.4) 以及命题 2.44 可知，赋值 $\{\mathrm{Tn}(s)\nu_{N,\,s}\}_s$ 存在一个子序列（也记为 $\{\mathrm{Tn}(s)\nu_{N,\,s}\}_s$），该子序列收敛到一个赋值 ν_N。于是我们有

$$\nu_N(f_j) \geq a_j, \quad j = 0, \ldots, m,$$

and

$$\nu_N(F) = \sigma(\log|F|, \varphi_N).$$

同理，赋值 $\{\nu_N\}_N$ 存在一个子序列（也记为 $\{\nu_N\}_N$），该子序列收敛到一个赋值 ν。于是，对于任意 $0 \leq j \leq m$ 和，我们有 $\nu(f_j) \geq a_j$

$$\sum_{0\leq j\leq m} \nu(f_j) = \nu(F) = \lim_{N\to+\infty} \sigma(\log|F|, \varphi_N) = \sigma(\log|F|, \varphi) = \sum_{1\leq j\leq m} a_j.$$

结合上面的等式和 $a_0 = 0$，我们得到

$$\nu(f_j) = a_j, \quad j = 0, \ldots, m.$$

□

现在我们证明定理 1.10。

证明。定理 1.10 的证明思路与定理 1.9 的证明相同。我们只列出两个证明中使用的不同引理或命题，并省略定理 1.10 的逐步证明。

我们分两步证明这个定理。

第 *1* 步。(1) ⇒(2)。

将引理 2.17 替换为引理 2.18。根据定理 1.9 证明中 (1) ⇒(2) 的相同论证，我们知道定理 1.10 中的 (1) ⇒ (2) 成立。

第 *2* 步。(2) ⇒(1)。

将定理 1.3 替换为定理 1.3 和定理 1.5，将命题 2.44 替换为命题 2.46。使用定理 1.9 的证明中 (2) ⇒(1) 的相同论证，我们知道定理 1.10 的 (2) ⇒(1) 成立。□

现在我们证明推论 1.12。

推论 *1.12* 的证明。若 $\sigma(\log|F|,\varphi) = \sum_{1\le j\le m} a_j$，定理 1.9 表明存在一个定义在 $\mathcal{O}_{X,o} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,o}/\big(I\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,o}\big)$ 上的赋值 ν，使得对于任意$0 \le j \le m$，$\nu(f_j) = a_j$。注记 2.19 告诉我们，$\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]/I$是$\mathcal{O}_{X,o}$的子环。因此，$\nu$也是定义在 $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]/I$上的赋值。

反之，若存在定义在 ν上的赋值 $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]/I$，满足对于任意 $0 \le j \le m$，$\nu(f_j)$ $=a_j$，且对于任意 $1 \le l \le n$，$\nu(z_l) > 0$，则根据引理 2.21以及 $\sigma(\log|F|,\varphi)$ 的定义，我们有 $\sigma(\log|F|,\varphi) = \sum_{1\le j\le m} a_j$。□

推论 *1.13* 的证明。充分性由推论 1.12 得出，因此只需证明必要性。若存在定义在 $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]/I$上的赋值 ν，满足对于任意 $1 \le j \le m$，$\nu(f_0) = 0$ 且 $\nu(f_j)$ $= a_j > 0$。令 J为 $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]/I$中由 $\{f_j\}_{1\le j\le m}$生成的理想。由于 $\cap_{1\le j\le m}\{f_j = 0\} = \{o\}$，由希尔伯特零点定理（见引理 2.23）可知，对于较大的 N 以及任意$1 \le k \le n$，有 $z_k^N \in J$，这意味着对于任意 k，$\nu(z_k) > 0$。因此，根据推论 1.12，我们有 $\sigma(\log|F|,\varphi)$ $=\sum_{1\le j\le m} a_j$。□

现在我们证明推论 1.15。

推论 *1.15* 的证明。如果 $\sigma(\log|F|,\varphi) = \sum_{1\le j\le m} a_j$，定理 1.9 表明，存在一个赋值 $\widetilde{\nu}$ on $\mathcal{O}_{X,o} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,o}/\big(\widetilde{P}(I)\big)$，使得对于任意 $0 \le j \le m$，都有 $\widetilde{\nu}(\widetilde{P}(f_j))$ $= a_j$。注 2.25 告诉我们：$C^{\mathrm{an}}_{o'}/I \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,o}/\big(\widetilde{P}(I)\big)$ 是一个单射环同态。于是存在一个赋值 ν on $C^{\mathrm{an}}_{o'}/I$，使得对于任意 j，都有 $\nu(f_j) = a_j$。

反过来，若存在一个赋值 ν on $C^{\mathrm{an}}_{o'}/I$，使得对于任意 j，都有 $\nu(f_j) = a_j$，则由引理 2.27 以及 $\sigma(\log|F|,\varphi)$ 的定义可得 $\sigma(\log|F|,\varphi)$ $=\sum_{1\le j\le m} a_j$。□

现在我们证明推论 1.17。

推论 *1.17* 的证明。如果 $\sigma(\log|F|,\varphi) = \sum_{1\le j\le m} a_j$，推论 1.12 表明，存在一个定义在 $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]/\big(P(I)\big)$ 上的赋值 $\widetilde{\nu}$，使得对于任意$0 \le j \le m$都有 $\widetilde{\nu}(\widetilde{P}(f_j)) = a_j$。注记 2.29 告诉我们：$\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]/I \to \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/\big(P(I)\big)$ 是一个单射环同态。于是存在一个定义在 $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]/I$上的赋值 ν，使得对于任意 j都有 $\nu(f_j) = a_j$。

反之，若存在 ν 于 $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]/I$ 上的赋值，满足对于任意 $1 \le j \le m$，$\nu(f_j) = a_j$，且对于任意 $1 \le l \le n$，$\nu(x_l) > 0$，则由引理 2.30 及 $\sigma(\log|F|,\ \varphi)$ 的定义可知，$\sigma(\log|F|,\ \varphi) = \sum_{1\le j\le m} a_j$。□

致谢。第一作者在访问北京大学数学科学学院期间完成了本工作的部分内容，并感谢该学院的热情接待与支持。第二作者受到国家重点研发计划项目 2021YFA1003100 和国家自然科学基金委员会项目 12425101 的资助。第三作者受到国家自然科学基金委员会项目 12401099 和北京交通大学人才基金项目 2024-004 的资助。第四作者受到国家自然科学基金委员会项目 12501106 的资助。

AppendixA. The universal denominators for algebraic varieties

已知（见 [10]; 另见定理 A.11），对于任意复解析子簇 X 和 $x \in X$，局部存在一个全纯函数 $\delta_{X,x}$ 使得$\delta_{X,x}\mathcal{O}^w_{X,x} \subset \mathcal{O}_{X,x}$，其中 $\mathcal{O}^w_{X,x}$ 是弱全纯函数的芽环。这样的 $\delta_{X,x}$ 称为弱全纯函数的通用分母。

现在转向代数情形。设 I 是 $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]$中的一个素理想。设$X := V(I)$ 是由 I 和 $o \in X$ 定义的仿射簇，其中 o 是 $\mathbb{C}^n$中的原点。将集合 X 在 o处的芽记为 (X, o)，并假设 (X, o) 作为解析集芽是不可约的。在本附录中，我们证明，当 (X, o) 作为解析集芽不可约时，可以将通用分母选为一个多项式，见定理 A.12。

我们首先回顾一些基本结果。

引理 A.1 （诺特正规化引理，参见 [1]）。设 k 是一个域，$A \neq 0$ 是由 $x_1,\dots,x_n$生成的有限生成 k-代数。那么存在元素 $y_1,\dots,y_r \in A$，它们在 k 上代数独立，且 A 在 $k[y_1,\dots,y_r]$上是整的。此外，可以选择 $y_1,\dots,y_r$ 使其为 $x_1,\dots,x_n$的线性组合。

证明。为方便读者，我们回顾引理 A.1 的证明；证明可参见 [1]的第 5 节。

由于在我们的情形下 $k = \mathbb{C}$，我们可以假设 k是无限的。因为 $x_1, x_2,\dots,x_n$ 生成了作为 k-代数的 A。我们可以对 $\{x_i\}_{i=1}^n$重新编号，使得 $\{x_1,\dots,x_r\}$ 是 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 在 k上的极大代数独立组。若 $r = n$，则无需证明。我们可以假设 $r < n$。现在我们对 n进行归纳，以证明引理 A.1。假设当有限生成的 k-代数有 $n-1$ 个生成元时，引理 A.1 成立。

由于 $r < n$，因此 x_n 在 $k[x_1,\dots,x_{n-1}]$ 上代数，即存在一个多项式 $f \in k[T_1,\dots,T_n]$，使得 $f(x_1, x_2,\dots,x_n) = 0$ 属于 A。将 f 分解为齐次多项式之和，并令 F 为 f 的分解中最高次数的齐次部分。记 $\deg F = m$。由于 k 是无限集，我们可以找到 $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n-1},1)$，使得 $F(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n-1},1) \neq 0$ 属于 k。令 $w_i = x_i - \lambda_i x_n$，其中 $i = 1,\dots,n-1$。那么记

$$\tilde{f}(T) = f(w_1 + \lambda_1 T, w_2 + \lambda_2 T,\dots,w_{n-1} + \lambda_{n-1} T, T) \in k[w_1,\dots,w_{n-1}][T].$$

~　　~　　~我们知道，$f = m$和 $f(x_n) = 0$在 A中的次数为 T^m在 f中的系数恰为 $F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, 1) \neq 0$。于是，$F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, 1)^{-1}\tilde{f}$是湮灭 x_n的首一多项式。因此，x_n在 $A' = k[w_1,\dots,w_{n-1}]$ 上整，进而A在 $A' = k[w_1,\dots,w_{n-1}]$上整。注意，$w_1, \dots, w_{n-1}$可以写成 $x_1, \dots, x_n$的线性组合。现在将归纳假设应用于

$A' = k[w_1, \ldots, w_{n-1}]$，我们知道存在 y_1，……，$y_r \in A'$，它们在 k 上代数独立，且 A' 在 $k[y_1, \ldots, y_r]$上整。此外，y_1，……，y_r 可以选为 w_1，……，w_{n-1}的线性组合。根据整依赖的传递性（见 [1, 推论 5.4]），可得 A 在 $k[y_1, \ldots, y_r]$ 上整，并且 y_1，……，y_r 可以选为x_1，……，x_n的线性组合。□

引理 A.2 (高斯引理)。设 R 是唯一分解整环，F 是其分式域。$R[x]$ 中的任意 $f \neq 0$ 在 $R[x]$ 中不可约，当且仅当它在 $F[x]$ 中不可约且在 $R[x]$ 中本原。

根据诺特正规化引理 A.1，经过线性坐标变换后，我们可以假设存在一个整数 $d > 0$，使得 $A := \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]/I$ 是 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 的有限整扩张。

˜回忆一下，$X = V(I)$ 和 $o \in X$。用 f 表示 $A = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]/I$ 中任意 $f \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ 的等价类。对于任意 $d+1 \leq k \leq n$，存在一个首一多项式$Q_k(z', T) \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d][T]$，使得 $Q_k(z', z_k) = 0$ 属于 A，这意味着 $Q_k(z', z_k) \in I$ 是 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d][z_k] \subset \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$的一个元素。综上，我们有

命题 A.3。存在一个整数 d、一组坐标 $(z_1$、…、$z_n)$，满足以下性质：$\mathcal{I}_d := I \cap \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d] = \{0\}$ 并且对于每个整数 $k = d+1$、…、n，存在一个形如以下形式的魏尔斯特拉斯多项式 $Q_k \in \mathcal{I}_k := I \cap \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d][z_k]$

$$Q_k(z', z_k) = z_k^{s_k} + \sum_{1 \leq j \leq s_k} a_{k,j}(z') z_k^{s_k - j}, \quad a_{j,k}(z') \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d].$$

设 π：$\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^d$ 是将（z_1、…、z_n）映射为（z_1、…、z_d）的映射。

引理 A.4。设 π_X：$X \to \mathbb{C}^d$ 是 π 在 X 上的限制。则 π_X 是真且满射的。

证明。注意到 π_X 是连续的。为了证明 π_X 是真映射，只需证明：对于任意 $K \subset \mathbb{C}^d$ 有界集合，$\pi_X^{-1}(K)$ 在 $\mathbb{C}^n$ 中是有界的。注意到 $X \subset \cap_{k=d+1}^{n} \{Q_k = 0\}$ 和 $Q_k \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d][z_k]$。如果 $z' \in \mathbb{C}^d$ 有界，我们知道每个 Q_k 的根都是有界的。因此，$\pi_X^{-1}(K)$ 在 $\mathbb{C}^n$ 中是有界的。

要证明 π_X 是满射，不妨证明 $o' \in \mathbb{C}^d$属于 $\pi_X(X)$。记 $m' = (z_1$，……，$z_d)$为 $\mathbb{C}_d$中的极大理想：$= \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$。由 A是 $\mathbb{C}_d$的有限整扩张以及 [1,推论 5.2] 可知，$\mathbb{C}_d$ 是 A 的子环，且 A 是有限生成的 $\mathbb{C}_d$-模。

我们断言 $A/m'A \neq 0$，其中 $m'A$是 A中由 m' 生成的理想。若$A/m'A = 0$，则 $m'A = A$。由 A 是有限生成的 $\mathbb{C}_d$-模以及中山引理（参见 [1, 推论 2.5]）可知，存在一个 $r \in \mathbb{C}_d$，使得 $r \equiv 1$（模 m'）于 $\mathbb{C}_d$ 中且 $rA = 0$。将 r 视为 $\mathbb{C}^d$上的函数，则 $r \equiv 1$（模 m'）于 $\mathbb{C}_d$ 中意味着 $r(o') = 1$，从而 $r \neq 0$ 属于 $\mathbb{C}_d$。$rA = 0$ 意味着 $r \cdot 1 = 0$ 属于 A，因此 $r \in I$。于是 $r \in I \cap \mathbb{C}_d = \{0\}$。这与 $r \neq 0$ 属于$\mathbb{C}_d$相矛盾。因此必须有 $A/m'A \neq 0$。

注意到 $A/m'A \cong \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]/(I + m'\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n])$。由 $A/m'A \neq 0$ 可得 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]/(I + m'\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]) \neq 0$，因此 $I + m'\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n] \neq (1)$。于是 $V(I) \cap V(m'\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]) = V(I + m'\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n])$ 非空。这意味着 $o' \in \pi_X(X)$。□

记 $\mathcal{O}_n$ 和 $\mathcal{O}_d$ 分别为 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{C}^d$ 在原点处的全纯函数芽。根据引理 A.4，我们有

引理 A.5。$(I \cdot \mathcal{O}_n) \cap \mathcal{O}_d = 0$。

证明。我们通过矛盾证明引理 A.5。假设存在一个非零全纯函数 $f \in (I \cdot \mathcal{O}_n) \cap \mathcal{O}_d$。由 $f \in (I \cdot \mathcal{O}_n) \cap \mathcal{O}_d$ 可知，$\pi_X(X) \subset \{f = 0\}$ 是 $\mathbb{C}^d$ 的子集。然而，引理 A.4 告诉我们，π_X 是满射，这就产生了矛盾。□

˜将 $A = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]/I$ 中任意 $f \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ 的类记为 f。分别将 A 和 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 的商域记为 $\mathfrak{R}_A$ 和 $\mathfrak{R}_d$。则 $\mathfrak{R}_A$ =$\mathfrak{R}_d[\tilde{z}_{d+1}, \ldots, \tilde{z}_n]$ 是 $\mathfrak{R}_d$ 的有限代数扩张。本原元定理告诉我们，存在 $c_i \in \mathbb{C}(i = d+1, \ldots\ldots, n)$，使得 $\tilde{u} = \sum_{i=d+1}^{n} c_i \tilde{z}_i$ 和$\mathfrak{R}_A = \mathfrak{R}_d[\tilde{u}]$。因此，$\tilde{u}$ 属于 A。

引理 A.6。设 R 是唯一分解整环，F 是其分式域。假设 $R \subset A$ 且 A 是一个环。对于任意在 $R[T]$ 上整的 $f \in A$，记 f 在 R 上的最小多项式为 $W_f(z', T)$。则 $W_f(z', T)$ 也是 f 在 F 上的最小˜多项式。

证明。由于 R 是唯一分解整环，且 $f \in A$ 在 $R[T]$ 上整，我们知道 $R[T]$ 是唯一分解整环，并且存在一个首一不可约多项式 $W_f(T) \in R[T]$，使得 $W_f(f)$ =0。记 F 在 F 上的最小多项式为 $M_f(T) \in F[T]$。由高斯引理 A.2，$W_f(z', T)$ 在 $F[T]$ 中也是不可约的。于是根据最小多项式的定义以及 $W_f(T)$ 在 $F[T]$ 中不可约，我们有$M_f(T) \mid W_f(T)$，因此 $M_f(T) = W_f(T) \in R[T]$。□

注 A.7. 在本附录中，我们将在以下情形中使用引理 *A.6*

(1) $R = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$、$A = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]/I$和 $F = \mathfrak{R}_d$；(2) $R = \mathcal{O}_d$、$A = \mathcal{O}_n/(I \cdot \mathcal{O}_n)$ 和 $F = \mathfrak{M}_d$，其中 $\mathfrak{M}_d$ 是$R = \mathcal{O}_d$的商域。

记 $\tilde{u}$ 在 $\mathfrak{R}_d$ 上的最小多项式为 $W_u(z', T)$。由引理 A.6 和注 A.7 可知，$W_u(z', T)$的判别式 $\delta(z_1, \ldots, z_d)$属于 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$。

引理 A.8. 存在一个元素 $\tilde{u} \in A$，使得 $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{R}_d[\tilde{u}]$。记 $\tilde{u}$ 在 $\mathfrak{R}_d$ 上的最小多项式为 $W_u(z', T)$。那么 $W_u(z', T) \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d][T]$，且 $W_u(z', T)$ 的判别式 $\delta(z_1, \ldots, z_d)$ 属于 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$。

令 $q := [\mathfrak{R}_A : \mathfrak{R}_d]$为域扩张的次数。由于 $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{R}_d[\tilde{u}]$，我们知道 $W_u(z', T)$ 的次数为 q。

记 $\mathfrak{M}_A$ 为 $A = \mathcal{O}_n/(I \cdot \mathcal{O}_n)$ 的商域，记 $\mathfrak{M}_d$ 为 $R = \mathcal{O}_d$ 的商域。由 [10,第 93] 页中的命题 A.3、引理 A.5、命题 4.13（及其证明）以及 [10, 第 93–94] 页中的论证可知

(1) $\mathcal{O}_n/I$ 是 $\mathcal{O}_d$ 的有限整扩张；(2) 存在线性形式 $u_1 = \sum_{d+1 \le k \le n} c'_k z_k$，其中 $c'_k \in \mathbb{C}$，使得$\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_d[u_1]$。

回忆一下，$\mathfrak{R}_A$ 和 $\mathfrak{R}_d$ 分别是 X 和 $\mathbb{C}_d$ 的有理函数域，可以自然地视为 $\mathfrak{M}_A$ 和 $\mathfrak{M}_d$ 的子集。注意，$\mathfrak{R}_A = \mathfrak{R}_d[\tilde{u}]$。

注 A.9. 我们有 $\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_d[\tilde{u}]$。

证明。由于每个 $\tilde{z}_k$ 都属于 $\mathfrak{R}_A$ 和 $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{R}_d[\tilde{u}]$，我们知道，对于 $d+1 \leq k \leq n$，$\tilde{z}_k$ 可以表示为 $\tilde{u}^j$ $(0 \leq j \leq q-1)$ 的线性组合，且系数属于 $\mathfrak{R}_d$。由于 $u_1 = \sum_{d+1 \leq k \leq n} c'_k z_k$，其中 $c'_k \in \mathbb{C}$，我们知道 u_1 也可以表示为 $\tilde{u}^j$ $(0 \leq j \leq q-1)$ 的线性组合，且系数属于 $\mathfrak{R}_d \subset \mathfrak{M}_d$。因此我们有 $\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_d[\tilde{u}]$。□

记 $H_u(z', T) \in \mathcal{O}_d[T]$ 为 $\mathcal{O}_d$ 上 $\tilde{u} \in \mathcal{O}_n/I$ 的最小多项式。由引理 A.6 和注 A.7 可知，$H_u(z', T)$ 也是 $\mathfrak{M}_d$ 上 $\tilde{u}$ 的最小多项式。回顾一下，$W_u(z', T) \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d][T] \subset \mathcal{O}_d[T]$ 是 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 上 $\tilde{u}$ 的最小多项式，而 $H_u(z', T) \in \mathcal{O}_d[T]$ 是 $\mathcal{O}_d$ 上 $\tilde{u}$ 的最小多项式。分别记 $W_u(z', T)$ 和$H_u(z', T)$ 的判别式为 $\delta_{\mathfrak{R}}(z') \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d] \subset \mathcal{O}_d$ 和 $\delta_{\mathfrak{M}}(z') \in \mathcal{O}_d$。我们有 $\delta_{\mathfrak{R}}(z')$ 与 $\delta_{\mathfrak{M}}(z')$ 之间的如下关系。

引理 A.10. $\delta_{\mathfrak{M}}(z') \mid \delta_{\mathfrak{R}}(z')$ 在 $\mathcal{O}_d$。

证明。由于 $H_u(z', T) \in \mathcal{O}_d[T]$ 是 $\tilde{u} \in \mathcal{O}_n/I$ 在 $\mathcal{O}_d$ 上的最小多项式，且$W_u(z', T) \in \mathcal{O}_d[T]$ 湮灭 $\tilde{u}$，因此有 $H_u(z', T) \mid W_u(z', T)$ 属于 $\mathcal{O}_d[T]$，即存在多项式 $P_u(z', T) \in \mathcal{O}_d[T]$ 使得 $W_u(z', T) = H_u(z', T)P_u(z', T)$。记 $R_{H,P}$ 为多项式 H 和 P的结式，并记 $\delta_p(z')$ 为 $P_u(z', T)$的判别式。

回忆一下，两个多项式的结式是这两个多项式的西尔维斯特矩阵的行列式。由 $H_u(z', T)$ $P_u(z', T) \in \mathcal{O}_d[T]$可知，$R_{H,P}$ 和 $\delta_P(z')$ 属于 $\mathcal{O}_d$。根据判别式的定义，我们知道 $\delta_{\mathfrak{R}}(z') = \delta_{\mathfrak{M}}(z')\delta_P(z')R^2_{H,P}$。因此，$\delta_{\mathfrak{M}}(z') \mid \delta_{\mathfrak{R}}$属于 $\mathcal{O}_d$。□

现在我们回顾不可约复簇上弱全纯函数的以下“通用分母”存在性 X。

定理 A.11 （见 [10]）。对于每个点 $x \in X$，存在 X 中 x 的一个邻域 V，使得 $\delta_{\mathfrak{M},\, y}\mathcal{O}^w_{X,\, y} \subset \mathcal{O}_{X,\, y}$ 对所有 $y \in V$ 均成立，其中 $\delta_{\mathfrak{M}}$（z'）是最小多项式 H_u（z', T）的判别式，该最小多项式是 $\tilde{u}$ 在 $\mathcal{O}_d$ 上的最小多项式，而 $\delta_{\mathfrak{M}}$（z'）称为 V 上的通用分母。

利用引理 A.10 和定理 A.11，我们可以证明，$\mathcal{O}^w_X$ 的通用分母可以取为一个多项式。

定理 A.12。假设 X 是不可约且代数的。设 V 是 X 中 o 的一个邻域，并且 $y \in V$。那么对于任意 $f \in \mathcal{O}^w_{X,\, y}$，都有 $\delta_{\mathfrak{R},\, y}$（$z'$）$f \in \mathcal{O}_{X,\, y}$，其中 $\delta_{\mathfrak{R}}$（z'）$\in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 是最小多项式 W_u（z', T）的判别式，该最小多项式是 $\tilde{u}$ 在 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 上的最小多项式。

证明。由定理 A.11 可知，对任意 $f \in \mathcal{O}^w_{X,y}$，有 $\delta_{\mathfrak{M},y} f \subset \mathcal{O}_{X,y_o}$。引理 A.10 告诉我们 $\delta_{\mathfrak{R}}(z') = \delta_{\mathfrak{M}}(z')\delta_P(z')R_{H,P}$，其中 $\delta_P(z')\, R_{H,P} \in \mathcal{O}_d$。因此我们知道 $\delta_{\mathfrak{R},y}(z')f = \delta_P(z')R_{H,P}\delta_{\mathfrak{M}}(z')$ $f \in \mathcal{O}_{X,y_o}$

定理 A.12 得证。□

References

[1] M.F. Atiyah 和 I.G. Macdonald，《交换代数导论》，阿迪生-韦斯利出版公司，雷丁（1969）。
[2] S.J. Bao、Q.A. Guan、Z.T. Mi 和 Z. Yuan，温和极大权重、相对型与赋值，《数学进展》477（2025），论文编号 110364。

[3] S.J. Bao、Q.A. Guan、Z.T. Mi 和 Z. Yuan，赋值插值的存在性，预印本。[4] E. Bedford 和 B.A. Taylor，复 Monge-Amp`ère 算子的狄利克雷问题，《数学发明》37（1976），1–44。[5] E. Bierstone 和 P.D. Milman，奇点规范消解的一个简单构造性证明，载于《代数几何中的有效方法》（卡斯蒂利翁切洛，1990），第 11–30 页，T. Mora 和 C. Traverso 编，《数学进展》94，Birkh¨auser，波士顿，1991。[6] Z. Blocki，复 Monge-Amp`ère 算子的估计，《波兰科学院数学公报》41（1993），第 2 期，151–157（1994）。[7] Z. Blocki，多复势理论中的复 Monge-Amp`ère 算子，电子版可通过 http://gamma.im.uj.edu.pl/~blocki/publ/ln/index.html 获取。[8] S. Boucksom、C. Favre 和 M. Jonsson，赋值与多重次调和奇点，《数学科学研究所出版物》44（2008），第 2 期，449–494。[9] J.-P. Demailly，《代数几何中的解析方法》，高等教育出版社，北京，2010。[10] J.-P. Demailly，《复解析几何与微分几何》，电子版可通过 https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf 获取。[11] C. Favre 和 M. Jonsson，《赋值树》，《数学讲义》1853，Springer，柏林，2004。[12] C. Favre 和 M. Jonsson，赋值与乘子理想，《美国数学会杂志》18（2005），第 3 期，655–684。[13] C. Favre 和 M. Jonsson，平面多重次调和函数的赋值分析，《数学发明》162（2005），第 2 期，271–311。[14] P. Griffiths 和 J. Harris，《代数几何原理》，John Wiley，2011。[15] Q.A. Guan，Demailly 强开性猜想的尖锐的有效性结果，《数学进展》348（2019），51–80。[16] Q.A. Guan，具有解析奇点的递减等奇异逼近，《几何分析杂志》30（2020），第 1 期，484–492。[17] Q.A. Guan 和 X.Y. Zhou，Demailly 强开性猜想的一个证明，《数学年刊》（第 2 辑）182（2015），第 2 期，605–616。另见 arXiv:1311.3781。[18] Q.A. Guan 和 X.Y. Zhou，Demailly 强开性猜想的有效性及相关问题，《数学发明》202（2015），第 2 期，635–676。[19] P.H. Hiep，加权对数正则阈值，《巴黎科学院数学报告》352（2014），第 4 期，283–288。[20] H. 平岡。特征零域上代数簇的奇点消解。I、II。《数学年刊》79（1964），109–203；同上，205–326。[21] M. Jonsson 和 M. Mustaţă，理想序列的赋值与渐近不变量，《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）62（2012），第 6 期，2145–2209。[22] M. Jonsson 和 M. Mustaţă，关于 Demailly 和 Koll´ar 开性猜想的代数方法，《朱西厄数学研究所杂志》13（2014），第 1 期，119–144。[23] C.O. Kiselman，多复变数中的多重次调和函数与位势理论，载于《数学发展》，Birkh¨auser，巴塞尔，1950–2000，第 655–714 页。[24] L. Lempert，平方可积全纯芽模。《分析与几何交汇》，311–333，《数学趋势》，Birkh¨auser/Springer，查姆，2017。[25] P. Lelong，复解析集上的积分（法文），《法国数学会公报》85（1957），239–262。[26] H. Matsumura，《交换环论》。M. Reid 译。剑桥大学出版社；1987。[27] A. Rashkovskii，多重次调和函数的相对型与极值问题，《国际数学研究通知》2006，文章编号 76283，26 页。[28] H. Skoda，有限阶或无限阶解析子集，载于 $\mathbb{C}^n$，（法文），《法国数学会公报》100（1972），353–408。[29] G. Tian，关于某些 K¨ahler 流形上的 K¨ahler-Einstein 度量，满足 $C_1(M) > 0$，《数学发明》89（1987），第 2 期，225–246。[30] G. Tian，关于正第一陈类复曲面上的 Calabi 猜想，《数学发明》101（1990），第 1 期，101–172。[31] H. Whitney，《复解析簇》，Addison–Wesley 出版公司，1972。[32] O. Zariski，正规簇的解析不可约性，《数学年刊》（第 2 辑）49（1948），352–361。

Shijie Bao: Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China.
Email address: bsjie@amss.ac.cn

Qi'an Guan: School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing, 100871,China.

Email address: guanqian@math.pku.edu.cn
Zhitong Mi: School of Mathematics and Statistics, Beijing Jiaotong University, Beijing, 100044, China.*Email address*: zhitongmi@amss.ac.cn
Zheng Yuan: State Key Laboratory of Mathematical Sciences, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China.
Email address: yuanzheng@amss.ac.cn