通过不定因果序纠错实现抗噪海森堡极限量子传感

许航，[1]邓晓阳，[1]郑泽，[1]肖泰龙，[1, 2, 3, *]和曾桂华[1, 2, 3, †][1]光子学与通信国家重点实验室、量子传感与信息处理研究所，上海交通大学，中华人民共和国上海市*200240*[2]合肥国家实验室，中华人民共和国合肥市*230088*[3]上海量子科学研究中心，中华人民共和国上海市*201315*（2026年1月6日）

原则上，量子资源能够实现海森堡极限（HL）传感，但不可能定理表明，在现实的噪声设备中，通常无法达到海森堡极限标度。尽管量子纠错（QEC）能够抑制噪声，但其在量子传感中的应用受到严格要求的限制，包括需要预先进行噪声表征、严格的信号—噪声兼容条件，以及采用全局控制进行基于测量的综合征提取。在此，我们提出一种基于ICO的量子纠错协议，这是不定因果序（ICO）首次应用于量子纠错。通过将辅助控制与含噪演化相干地置于不定因果序中，由此产生的非对易干涉使辅助系统能够实时预警并纠正错误，从而克服传统量子纠错的局限，恢复海森堡极限标度。我们严格确立了该协议在单噪声和多噪声情形下的有效性，并展示了其在单量子比特、多体和连续变量平台上的性能。我们还确定了无需测量、完全通过幺正控制实现纠错的适用条件。我们的研究揭示了不定因果序是计量学量子纠错的一种强大量子资源，并为抗噪量子信息处理提供了广泛适用的框架。

arXiv:2601.01404v1 [quant-ph] 4 Jan 2026

引言。——相干性和纠缠等量子资源，使量子传感器能够达到海森堡极限（HL） [1–6]。然而，在实际应用中，环境噪声不可避免[7–11]。严格的不可能定理指出，即使使用最大纠缠态，含噪传感器也无法维持海森堡极限标度[12, 13]。尽管量子纠错（QEC）为绕过这一不可能定理提供了一条途径 [14–22], ，现有方案仍面临重大的实施障碍。例如，重复码[17], 需要空间并行传感通道——而这类资源往往并不具备。另一种方案是采用无噪声辅助比特的稳定子码，它们无需在辅助量子比特上直接进行信号编码，但严格要求预先了解噪声类型，并满足哈密顿量不在林德布拉德张成空间内（HNLS）条件[18]。对于单量子比特传感器，这意味着一项严苛的限制：至多只能存在一个与信号哈密顿量正交的噪声通道。此外，如果实验能力仅限于局域泡利测量，这些方案中的综合征提取便会破坏信号编码。

量子引力理论 [23–26] 表明，时空几何可能处于叠加态，这意味着事件的因果顺序可能是不确定的。这一概念已被形式化为不定因果序（ICO） [27–29], ，而量子 SWITCH 则是其典型实现 [30, 31]。尽管 ICO 在量子计算[32–34] 和通信 [35, 36], 方面具有公认的优势，但将其应用于计量学时，情况却错综复杂。在连续变量系统中，ICO 可实现对时间依赖的几何相位进行超海森堡精度估计 [23; 相反，对于时间无关的幺正信道，精度仍严格受限于海森堡极限（HL）[39–41]。这种二分局面引出了一个关键问题：能否利用 ICO 来减轻噪声——使其有效发挥量子纠错机制的作用——从而提高开放量子系统中的估计精度?

在本文中，我们提出一种不定因果量子纠错（IQEC）协议，可绕过噪声量子传感器的不可能定理，开创了将 ICO 用于量子纠错设计的先河。该协议采用一组辅助门，其与含噪传感信道之间的因果顺序由量子 SWITCH 相干控制。由此产生的非对易干涉会使辅助系统进入彼此正交的状态，从而仅通过对辅助空间进行测量即可提取错误综合征。我们阐述了如何构造不定因果信道、刻画辅助门的许可集合，并证明对于所有泡利噪声模型，都存在合适的选择。我们还在具有代表性的物理系统中验证了该协议的性能。值得注意的是，对于相位协变噪声 [42], ，综合征测量并非必需：仅凭幺正控制便已足够。总之，这些结果凸显了我们方法的四项优势：无需先验信息即可纠正所有泡利噪声；错误诊断只需测量辅助空间；信号哈密顿量不受噪声带来的结构约束；在某些情形下，该协议完全无需测量和实时反馈。

有噪量子传感。——在量子传感中，

参数 ω 的估计精度由其估计量 $\hat{\omega}$ 的方差 Var($\hat{\omega}$) 给出，而方差的下界由量子克拉美-罗界 [43, 44] 定义

$$\mathrm{Var}(\hat{\omega}) \geq M^{-1}\mathcal{F}_Q^{-1}, \tag{1}$$

其中，M 是测量次数，$\mathcal{F}_Q$ 是量子费 Fisher 信息（QFI）。通过对称对数导数 [43]，QFI 给出了估计方差的极限下界。

对于封闭系统，传感精度可达到海森堡极限（$\mathcal{F}_Q \propto t^2$）。然而，实际传感器不可避免地受到环境噪声的困扰，量子优势也严格受限于相干时间。超过这一时段后，灵敏度便会退化至标准量子极限（$\mathcal{F}_Q \propto t$）。尽管量子纠错对量子计算至关重要，但将其应用于传感领域却因错误抑制与信号累积之间固有的矛盾而变得复杂。考虑一个哈密顿量为 $\omega\sigma_z^P$、与辅助量子比特耦合的探针量子比特。标准稳定子码可将码空间定义为$\mathscr{C} = \mathrm{span}\{|0\rangle_A|0\rangle_P, |1\rangle_A|1\rangle_P\}$，将错误空间定义为$\mathscr{E} = \mathrm{span}\{|0\rangle_A|1\rangle_P, |1\rangle_A|0\rangle_P\}$。在这种情况下，稳定子测量能够检测横向噪声 σ_x^P，而不会干扰信号累积。然而，平行噪声 σ_z^P仍无法检测。

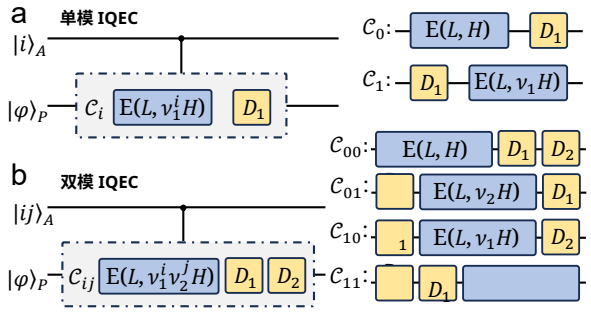


图1. IQEC协议示意图。探针的演化顺序$\mathcal{C}_{ij}$ 由辅助量子比特的计算基控制。

*IQEC*协议。——我们在短时区域内进行研究，并用一阶时间精度的有效量子信道描述探针的演化。具体而言，对于较短的探测时间 t，我们将约化动力学近似为一个完全正迹保持映射

$$\mathcal{E}_{L,H} \circ \rho_P = K_0(t)\rho_P K_0^\dagger(t) + \sum_i K_i(t)\rho_P K_i^\dagger(t) + O(t^2), \tag{2}$$

其中 $U(t) = e^{-iHt}$ 和

$$K_i(t) = \sqrt{q_i(t)}\, L_i U(t),\ K_0(t) = \left(\mathbb{I} - \frac{1}{2}\sum_i q_i(t)\, L_i^\dagger L_i\right) U(t). \tag{3}$$

这里 $q_i(t)$ 是 $O(t)$ 由底层约化动力学决定的系数（例如，$q_i(t) = \int_0^t \kappa_i(s)\, ds$ 当时间局域生成元存在时）。我们将 $L = \{L_1, L_2, \cdots\}$记为噪声集合。式（2）忽略了 $O(t^2)$ 修正项，包括混合酉贡献和耗散贡献的高阶项。

首先，我们将基于不定因果序的量子纠错应用于跳跃算符为 $L = L_1$ [45]的单噪声情形。我们引入一个辅助量子比特 A，并将复合系统$S = A \otimes P$初始化为 $|+\rangle_A|\varphi\rangle_P$。接着，我们施加一个无噪声辅助门 D_1。在不定因果序协议中，辅助态相干地控制因果顺序：若条件为$|0\rangle_A$，探针便先经历传感演化，再经历 D_1；若条件为 $|1\rangle_A$，则顺序相反。我们先假设 $[D_1, H] = 0$。在无跳跃轨迹中，最终态为

$$\begin{aligned}|f\rangle_S &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle_A D_1 e^{-iHt}|\varphi\rangle_P + |1\rangle_A e^{-iHt} D_1|\varphi\rangle_P\right] \\ &= |+\rangle_A \otimes D_1 e^{-iHt}|\varphi\rangle_P .\end{aligned} \tag{4}$$

相反，如果发生量子跃迁（由 L_1 产生），状态将变为

$$|f\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle_A D_1 L_1 e^{-iHt}|\varphi\rangle_P + |1\rangle_A L_1 e^{-iHt} D_1|\varphi\rangle_P\right]. \tag{5}$$

选择满足与噪声反对易的 D_1，$\{D_1, L_1\} = 0$，可得到带错误标记的状态

$$|f\rangle_S = |-\rangle_A \otimes D_1 L_1 e^{-iHt}|\varphi\rangle_P . \tag{6}$$

因此，在 σ_x 基底下测量辅助量子比特，即可标记出跃迁而不抹除累积的信号，从而实现完美纠错。

通过引入不定时间方向（ITD） [46–51]，这一概念受到量子引力框架的启发，对 D_1 的限制还可以进一步放宽。这里我们考虑 $\{D_1, H\} = 0$ 的情况。此时，辅助量子比特不仅控制因果顺序，还控制哈密顿演化的时间方向：$|0\rangle_A$ 选择正向动力学 $\mathcal{E}_{L,\ H}$，而 $|1\rangle_A$ 选择反向动力学 $\mathcal{E}_{L,\ -H}$。在没有跃迁的情况下，最终状态为

$$\begin{aligned}|f\rangle_S &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle_A D_1 e^{-iHt}|\varphi\rangle_P + |1\rangle_A e^{iHt} D_1|\varphi\rangle_P\right] \\ &= |+\rangle_A \otimes D_1 e^{-iHt}|\varphi\rangle_P ,\end{aligned} \tag{7}$$

其中我们利用 $\{D_1, H\} = 0$ 将 $e^{iHt}D_1 = D_1 e^{-iHt}$ 改写为。如果发生跃迁，则可得到

$$|f\rangle_S = |-\rangle_A \otimes D_1 L_1 e^{-iHt}|\varphi\rangle_P , \tag{8}$$

这与上述对易情形完全相同。因此，ICO 为 IQEC 协议提供了关键的操作框架，而是否调用 ITD 则是可选的，取决于 D_1 与 H 之间的代数兼容性。

我们通过超通道将这些过程形式化$\mathcal{S}(D,\ \mathcal{E}_{L,\ H})$。图 1 展示了 IQEC 协议的示意图，其中 $\nu_i = HD_i/D_iH$ 刻画了由 D_i诱导的时间反演操作。IQEC 的运行模式由辅助量子比特的数量决定。任意模式 IQEC 的显式超通道构造见补充材料（SM）。上述分析可直接扩展至多噪声情形，得到以下定理（证明见 SM）：

定理1。考虑探针的一组噪声 $L:=\{L_i\}_{i=1}^{m}$。对于 L 的一个最小群生成集 $G:=\{L_i'\}_{i=1}^{m_a}$，若存在一组门 $D:=\{D_i\}_{i=1}^{m_a}$ 满足

$$\begin{aligned}&\{D_i,D_j\}\quad\text{or}\quad[D_i,D_j]=0,\quad i\neq j;\\&\{D_i,H\}\quad\text{or}\quad[D_i,H]=0;\\&\{D_i,L_i'\}=0;\quad[D_i,L_j']=0,\quad i\neq j,\end{aligned}\tag{9}$$

那么，不定因果序量子纠错协议只需 m_a 个辅助量子比特即可纠正该噪声集合。

这里，L 中的任意元素均可表示为 G中元素的乘积:

$$\begin{aligned}&\forall L_i\in L,\ \ L_k'\in G,\\&L_i=cL_j'\quad\text{or}\quad cL_j'L_k'\quad\text{or}\quad cL_j'L_k'L_m'\cdots,\end{aligned}\tag{10}$$

其中 c 是任意常数。需要注意的是，这个最小生成集并不唯一[52]，且有时可能与噪声集合本身重合。

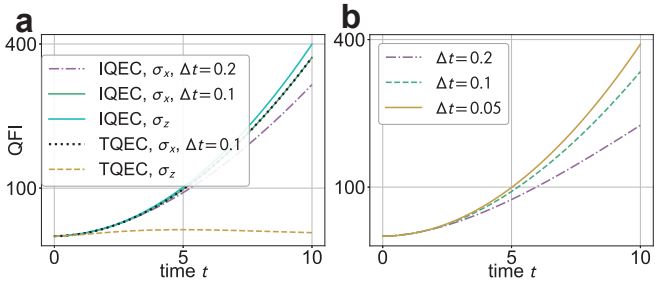


图 2. (a) 单噪声下，单量子比特在不同协议下的结果。图例中的 σ_x 或 σ_z 表示噪声算符。(b) 未知噪声下，单量子比特采用 IQEC 协议的结果。

单量子比特。—考虑一个由哈密顿量 $H=\omega\sigma_z$ 控制且受单一噪声源影响的单量子比特传感器。当噪声算符与哈密顿量正交时，传统量子纠错（TQEC）可以纠正由此产生的错误。通过选择 $D=\sigma_z$，IQEC 也可以纠正这种正交噪声；Δt 但仍需要超短的纠错间隔，以减轻非对易性，因此相比 TQEC 并无实际优势。相比之下，对于与哈密顿量平行的噪声，$L=\sigma_z$，TQEC 完全失效。在这种情况下，通过选择 定理 1 中的条件 $D=\sigma_x$，IQEC 可以满足该定理。此外，由于噪声与哈密顿量对易，只需在最终时刻进行纠错。

图 2（a）展示了单一噪声情形下 IQEC 的性能。

接下来考虑多噪声设置 $\{\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z\}$。由于辅助门生成元 G 可以从$\{\sigma_x,\sigma_y\}$中选取，我们引入两个辅助量子比特和两个辅助门 $\{\sigma_y,\sigma_x\}$。联合系统初始化为$|{+}{+}\rangle_A|\varphi\rangle_P$。经过超信道 $\mathcal{S}(D,\ \mathcal{E}_{L,\ H})$演化后，每次出现跳跃算符 L_i 都会翻转一个指定的辅助量子比特，从而对

将相应的错误事件映射到正交辅助态。

我们进一步分析存在未知噪声时的 IQEC。一种保守策略是假设所有相关的错误机制都可能发生，包括泡利误差和振幅阻尼。由于任意单量子比特噪声都可以在算符基 $\{I,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z\}$ 中展开，因此传感信道可以写成广义克劳斯形式

$$\mathcal{E}_{L,H}\circ|\varphi\rangle_P\langle\varphi|=\sum_{i,j\in\{I,x,y,z\}}c_{ij}\,\sigma_i e^{-iHt}|\varphi\rangle_P\langle\varphi|\,e^{iHt}\sigma_j^\dagger,\tag{11}$$

其中，$\sigma_I=\mathbb{I}$ 和 c_{ij} 是展开系数。

经过超通道 $\mathcal{S}$ 后，每个克劳斯算符 σ_i 都会将辅助系统映射到唯一的正交态。因此，对辅助系统进行测量会移除非对角贡献（$i\neq j$ 见式（11）），并为探针得到标准克劳斯信道的有效混合:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}_A[\mathcal{S}(D,\mathcal{E}_{L,H})\circ|\varphi\rangle_P\langle\varphi|]\\&=\sum_{i\in\{I,x,y,z\}}c_i\,D_i\,\sigma_i e^{-iHt}|\varphi\rangle_P\langle\varphi|\,e^{iHt}\sigma_i^\dagger D_i^\dagger,\end{aligned}\tag{12}$$

其中，根据辅助测量结果对每个分支进行校准（见 SM）。图 2（b）表明，在短时间近似范围内，即使泡利噪声和振幅阻尼共存，IQEC 仍能恢复海森堡极限标度，证实了其对未知噪声环境的适用性。

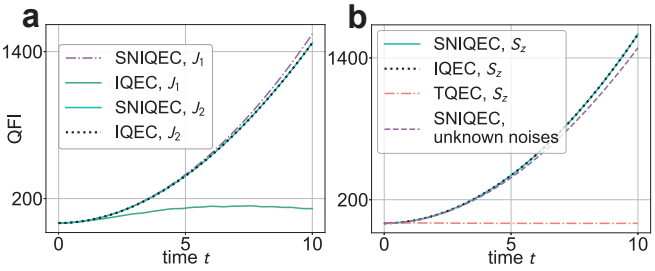


图 3. 不同噪声下双量子比特在不同协议中的结果。

多体系统。—对于多体系统，我们假设其哈密顿量为局域生成哈密顿量，$H=\sum_{k=1}^{N}H^{(k)}$。由于空间分离的站点可以独立控制，与

$H^{(k)}$ 相关的时间演化方向无需在整个晶格上保持一致（见补充材料）。我们将这种架构称为空间非均匀SNIQEC 协议。我们首先将讨论范围限定在集合 $\mathcal{W}$ 中的局域噪声和关联噪声过程。

定理 2. 对于哈密顿量为 $H=\sum_{k=1}^{N}H^{(k)}$ 的 N 位点系统，考虑作用于探针上的噪声集合 $L:=\{L_i\}_{i=1}^{m}$，其中 $L_i\in\mathcal{W}$。令 $G_L:=\{L'^{(k)}_i\}_{i=1}^{m_b^{(k)}}$ 为 L 的最小局部群生成集。若存在一组门 $D:=\{D_i^{(k)}\}_{i=1}^{m_b^{(k)}}$，使得

$$\begin{aligned}&\{D_i^{(k)},D_j^{(k)}\}=0\quad\text{or}\quad[D_i^{(k)},D_j^{(k)}]=0,\quad i\neq j;\\&\{D_i^{(k)},H^{(k)}\}=0\quad\text{or}\quad[D_i^{(k)},H^{(k)}]=0;\\&\{D_i^{(k)},L'^{(k)}_i\}=0;\qquad[D_i^{(k)},L'^{(k)}_j]=0,\quad i\neq j,\end{aligned}\tag{13}$$

那么，*SNIQEC* 协议仅需 $\sum_{k=1}^{N}m_b^{(k)}$ 个辅助量子比特即可纠正该噪声集合。

最小局部群生成集的定义与 G 类似，但额外要求每个生成元 $L'^{(k)}_i$ 仅在其对应位点 k 上具有非平凡作用。重要的是，对于多量子比特探针和任意噪声通道 $L_i\in\mathcal{W}$，总能构造一组辅助门，使 SNIQEC 能够纠正所有局部和相关噪声。相比之下，在标准IQEC 架构中，可能不存在任何既满足定理 1 又能纠正相同噪声的辅助门集合。一个具体示例是哈密顿量 $H=\omega\,(\sigma_z^{(1)}+\sigma_z^{(2)})$ 及其噪声集合$J_1=\{\sigma_\theta^{(1)},\sigma_\theta^{(2)},\sigma_\theta^{(1)}\sigma_\theta^{(2)}\}$ [53]。

纠错方案所需的辅助量子比特开销由（局部）群生成集的大小决定。尽管该集合的大小 m_a 满足 G，但其局部大小 $m_a\le m$并不受同样方式的限制。例如，考虑双量子比特噪声集合 $\sum_{k=1}^{N}m_b^{(k)}$ $J_2=\{\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)},\sigma_y^{(1)}\}$ [54]。根据定理 1 和 2，IQEC 和 SNIQEC 均适用，但 IQEC 所需的辅助量子比特更少，且不依赖于对演化方向的位点分辨控制。图 3（a）展示了相应的双量子比特结果，与上述讨论的两种噪声情形一致。

在多体系统中，另一类重要噪声是形式为 $\sum_{k=1}^{N}L^{(k)}$ 的集体噪声。对于自旋系统，一个典型示例是 $S_z=\sum_{k=1}^{N}\sigma_z^{(k)}$。对于这类过程，即使检测到跃迁，通常也不存在能够逆转该跃迁的幺正门，因为集体算符 L 本质上不可逆。尽管如此，集体噪声下的演化仍允许广义 Kraus 表示。在超通道$\mathcal{S}(D,\ \mathcal{E}_{L,\ H})$中，每个局部贡献 $L^{(k)}$ 都会将辅助系统映射到不同的正交子空间；因此，纠正各个局部贡献实际上就能纠正整个集体算符 L。这一推理可直接推广至更广泛的集体噪声类别。

推论1。对于一个 N 位点系统，其哈密顿量为 $H=\sum_{k=1}^{N}H^{(k)}$，考虑探针的一组噪声 $L:=\{L_i\}_{i=1}^{m}$，其中 $L_i\in\mathcal{K}$（局部噪声、关联噪声和集体噪声集合）。对于 $G_E:=\{L'^{(k)}_i\}_{i=1}^{m_c^{(k)}}$ 的最小代数生成集 L，若存在一组门 $D:=\{D_i^{(k)}\}_{i=1}^{m_c^{(k)}}$ 满足式（*13*），则需要 $\sum_{k=1}^{N}m_c^{(k)}$ 个辅助量子比特，通过 *SNIQEC* 纠正这些噪声。

在这里，噪声集合 L 中的任意元素都可以通过对代数生成集进行重复乘积和线性组合来生成:

$$\begin{aligned}&\forall L_i\in L,\ L'^{(k)}_i\in G_E,\\&L_i=cL'^{(k)}_i\ \text{ or }\ cL'^{(k)}_iL'^{(l)}_j\ \text{ or }\ cL'^{(k)}_i+c'L'^{(l)}_j\cdots.\end{aligned}\tag{14}$$

其中 $c,\ c'\in\mathbb{C}$。对于多量子比特探针，与任意保迹噪声过程相关联的代数生成集总是可以化简为局部泡利算符$\{\sigma_x^{(k)},\sigma_y^{(k)}\}$。这些生成元满足式（14），这意味着 SNIQEC 可以纠正多体系统中的任意保迹噪声。因此，对于一个 N量子比特探针，所有噪声事件都可以使用 $2N$个辅助量子比特进行预警，而与微观噪声模型无关。

不过，对于纯集体噪声，SNIQEC 是不必要的。例如，考虑哈密顿量 $H=\omega S_z$ 及集体噪声 $L=S_z$。该模型不满足 HNLS条件，因此 TQEC 不适用，但 IQEC 仍然可行。为获得最大灵敏度，我们将探针初始化为 GHZ态。如果发生集体跳跃，则可以通过施加适当的恢复算符 [55]将其消除。

图 3（b）比较了双量子比特系统在集体噪声和未知保迹噪声下采用不同纠错策略时的传感性能，证实了我们协议在集体噪声环境中的优势，以及其对未知噪声过程的适用性。

连续变量。—我们考虑一个由 $H=\omega a^\dagger a+\chi\,(a^2+a^{\dagger 2})$ 支配并受光子损失噪声 $L=a$影响的玻色探针。该探针初始化为猫态。在非压缩区间 [56], 内，演化始终局限于猫态子空间，在此情况下，a 的作用实际上是可逆的。利用定理 1 以及辅助宇称门 $D=e^{i\pi\hat{n}}$，IQEC 因此能够实现完美纠错。存在压缩时，动力学通常会将状态驱动出猫态流形，使光子损失变得不可逆：IQEC 仍可报告损失事件，但已无法进行主动恢复。然而，与弱值协议非常类似，通过针对光子损失轨迹进行后选择，可以对探针进行纯化。图 4（a）显示，在非压缩情形下，IQEC 可达到无噪声精度；而在压缩情形下，则可通过后选择恢复相同的精度。

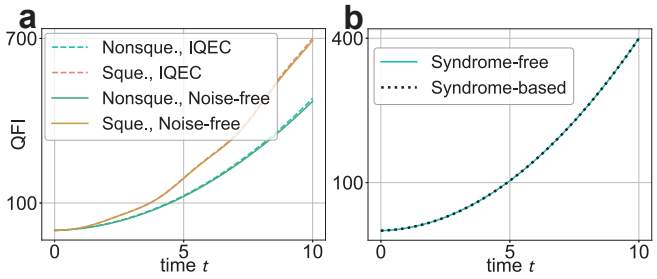


图4. (a) 连续变量系统的结果，其中 $\Delta t = 0.25$。(b) IQEC 中基于综合征和无综合征方案的结果。

幺正校正。—当噪声算符与哈密顿量对易时，只需在演化结束时进行纠错，因此无需中间测量或综合征即可实现完全幺正的方案。

定理3. 考虑探针的一组噪声 $L := \{L_i\}_{i=1}^{m}$。对于最小代数生成集 $G_F := \{L_i'\}_{i=1}^{m_d}$ L，若存在一组门 $D := \{D_i\}_{i=1}^{m_d}$满足方程 (9)，且 $[H, L] = 0$，则使用m_d 个辅助量子比特，*IQEC* 仅通过幺正控制即可实现纠错。

这里，L_i' 是幺正的，$L_i'^2 = \pm\mathbb{I}$，且 L 是相位协变噪声 [57]。对于单量子比特，哈密顿量为 $\omega\sigma_z$ 且噪声为 σ_z时，定理3 成立。图4(b) 展示了基于综合征和无综合征两种方案的结果，二者均可恢复海森堡极限。

结论。——总之，我们提出了一种基于不定因果序的量子纠错（IQEC）协议，为在噪声量子传感器中恢复海森堡极限（HL）灵敏度提供了一个通用框架。IQEC 通过插入一组相对于传感动力学的作用顺序不确定的辅助门，利用由此产生的非对易性，通过对辅助系统进行测量来检测噪声。我们确立了关于噪声和辅助操作的一般约束，并证明，对于任意泡利噪声（包括不可逆信道），IQEC都能实现可纠正性并恢复海森堡极限标度，从而确保即使在噪声未知时也适用。我们还展示了该协议在单量子比特、多体和连续变量平台上的有效性，在这些平台上，它都能可靠地恢复无噪声时的海森堡极限性能。在特定条件下，IQEC可大幅简化，无需频繁纠正或大型辅助系统，有时甚至完全不需要综合征测量。这些特性降低了高精度传感对噪声条件的要求，并确立了ICO作为一种有价值的量子纠错量子资源。除传感之外，IQEC还为NISQ时代系统提供了一个多用途误差缓解框架 [58], ，具有用于量子纠错增强计算 [59–62], 通信 [63, 64], 和电池 [65, 66]等应用。

致谢。—作者感谢中国国家重点研发计划（项目编号：2025YFF0515504）、国家自然科学基金委员会（项目编号：62401359）、光子学与通信国家重点实验室、量子科学与技术国家科技重大专项（项目编号：2021ZD0300703）以及上海市科技重大项目（项目编号：2019SHZDZX01）的支持。

* tailong_shaw@sjtu.edu.cn † ghzeng@sjtu.edu.cn

1 V. Giovannetti, S. Lloyd 和 L. Maccone，量子计量学，《物理评论快报》**96**，010401（2006）。[2] J. Joo、W. J. Munro 和 T. P. Spiller，利用纠缠相干态进行量子计量学，《物理评论快报》**107**，083601（2011）。[3] T. Xiao、J. Fan 和 G. Zeng，基于深度强化学习的量子传感参数估计，npj《量子信息》**8**，2（2022）。[4] J. Joo、W. J. Munro 和 T. P. Spiller，利用纠缠相干态进行量子计量学，《物理评论快报》**107**，083601（2011）。[5] C. L. Degen、F. Reinhard 和 P. Cappellaro，量子传感，《现代物理学评论》**89**，035002（2017）。[6] H. Xu、T. Xiao、J. Huang、M. He、J. Fan 和 G. Zeng，通过量子强化学习在无临界减速的情况下逼近海森堡极限，《物理评论快报》**134**，120803（2025）。[7] B. Escher、R. L. de Matos Filho 和 L. Davidovich，有噪量子增强计量学中最终精度极限估计的一般框架，《自然·物理》**7**，406（2011）。[8] Z. Zhang、S. Mouradian、F. N. Wong 和 J. H. Shapiro，耗散且有噪环境中的纠缠增强传感，《物理评论快报》**114**，110506（2015）。[9] H.-V. Do、C. Lovecchio、I. Mastroserio、N. Fabbri、F. S. Cataliotti、S. Gherardini、M. M. Müller、N. Dalla Pozza 和 F. Caruso，量子芝诺辅助噪声传感的实验验证，《新物理学杂志》**21**，113056（2019）。[10] G. Frascella、S. Agne、F. Y. Khalili 和 M. V. Chekhova，克服基于压缩的光学传感中的探测损耗与噪声，npj《量子信息》**7**，72（2021）。[11] H. Xu、T. Xiao、J. Huang、J. Fan 和 G. Zeng，通过量子数字孪生学习在有噪量子传感中恢复海森堡极限，arXiv预印本 arXiv:2508.11198（2025）。[12] S.-Y. Bai 和 J.-H. An，通过 Floquet工程克服有噪量子计量学的不可能定理，《物理评论快报》**131**，050801（2023）。[13] S. Zhou，受限量子控制下有噪量子计量学的极限，《物理评论快报》**133**，170801（2024）。[14] E. M. Kessler、I. Lovchinsky、A. O. Sushkov 和 M. D. Lukin，用于计量学的量子纠错，《物理评论快报》**112**，150802（2014）。

[15] W. Dür、M. Skotiniotis、F. Froewis 和 B. Kraus，利用量子纠错改进量子计量学，《物理评论快报》**112**，080801（2014）。[16] T. Unden、P. Balasubramanian、D. Louzon、Y. Vinkler、M. B. Plenio、M. Markham、D. Twitchen、A. Stacey、I. Lovchinsky、A. O. Sushkov 等，重复量子纠错增强量子计量学，《物理评论快报》**116**，230502（2016）。[17] F. Reiter、A. S. Sørensen、P. Zoller 和 C. Muschik，耗散型量子纠错及其在囚禁离子量子传感中的应用，《自然·通讯》**8**，1822（2017）。[18] S. Zhou、M. Zhang、J. Preskill 和 L. Jiang，利用量子纠错实现量子计量学中的海森堡极限，《自然·通讯》**9**，78（2018）。[19] D. Layden 和 P. Cappellaro，通过纠错进行空间噪声滤波以实现量子传感，npj《量子信息》**4**，30（2018）。[20] D. Layden、S. Zhou、P. Cappellaro 和 L. Jiang，用于量子计量学的无辅助量子纠错码，《物理评论快报》**122**，040502（2019）。[21] H. Chen、Y. Chen、J. Liu、Z. Miao 和 H. Yuan，利用信息性噪声并结合纠错增强量子计量学，《物理评论快报》**133**，190801（2024）。[22] H. Kwon、U. R. Fischer、S.-W. Lee 和 L. Jiang，通过自主量子纠错在时间上恢复海森堡标度，arXiv预印本 arXiv:2504.13168（2025）。[23] C. Marletto 和 V. Vedral，由引力诱导的两个大质量粒子间纠缠足以作为引力中量子效应的证据，《物理评论快报》**119**，240402（2017）。[24] S. Bose、A. Mazumdar、G. W. Morley、H. Ulbricht、M. Toroš、M. Paternostro、A. A. Geraci、P. F. Barker、M. Kim 和 G. Milburn，用于量子引力的自旋纠缠见证，《物理评论快报》**119**，240401（2017）。[25] A. Belenchia、R. M. Wald、F. Giacomini、E. Castro-Ruiz、Č. Brukner 和 M. Aspelmeyer，大质量物体的量子叠加与引力的量子化，《物理评论D》**98**，126009（2018）。[26] C. Anastopoulos 和 B.-L. Hu，两个引力猫态的量子叠加，《经典与量子引力》**37**，235012（2020）。[27] A.-C. de la Hamette、V. Kabel、M. Christodoulou 和 Č. Brukner，不定因果序与量子坐标，《物理评论快报》**135**，141402（2025）。[28] G. Rubino、L. A. Rozema、A. Feix、M. Araújo、J. M. Zeuner、L. M. Procopio、Č. Brukner 和 P. Walther，不定因果序的实验验证，《科学进展》**3**，e1602589（2017）。[29] L. A. Rozema、T. Strömberg、H. Cao、Y. Guo、B.-H. Liu 和 P. Walther，量子力学中不定因果序的实验方面，《自然综述：物理》**6**，483（2024）。[30] L. Davidovich、A. Maali、M. Brune、J. Raimond 和 S. Haroche，量子开关与非局域微波场，《物理评论快报》**71**，2360（1993）。[31] K. Goswami、C. Giarmatzi、M. Kewming、F. Costa、C. Branciard、J. Romero 和 A. G. White，量子开关中的不定因果序，《物理评论快报》**121**，090503（2018）。[32]M. Araújo、F. Costa 和 Č. Brukner，《通过量子控制的门排序获得计算优势》，《物理评论快报》**113**，250402（2014年）。[33] M. J. Renner 和 Č. Brukner，《通过量子比特门排序的量子叠加态获得计算优势》，《物理评论快报》**128**，230503（2022年）。[34] S. Kurdziałek、W. Górecki、F. Albarelli 和 R. Demkowicz-Dobrzański，《在量子计量学中利用自适应性和因果叠加态对抗噪声》，《物理评论快报》**131**，090801（2023年）。[35] P. A. Guérin、A. Feix、M. Araújo 和 Č. Brukner，《通过通信方向的量子叠加获得指数级通信复杂度优势》，《物理评论快报》**117**，100502（2016年）。[36] F. Del Santo 和 B. Dakić，《单个量子粒子的双向通信》，《物理评论快报》**120**，060503（2018年）。[37] X. Zhao、Y. Yang 和 G. Chiribella，《不定因果序下的量子计量》，《物理评论快报》**124**，190503（2020年）。[38] P. Yin、X. Zhao、Y. Yang、Y. Guo、W.-H. Zhang、G.-C. Li、Y.-J. Han、B.-H. Liu、J.-S. Xu、G. Chiribella、等，《不定门排序下超海森堡量子计量的实验实现》，《自然·物理》**19**，1122（2023年）。[39] F. Chapeau-Blondeau，《借助不定因果序实现噪声量子计量》，《物理评论A辑》**103**，032615（2021年）。[40] M. An、S. Ru、Y. Wang、Y. Yang、F. Wang、P. Zhang 和 F. Li，《不定因果序下的噪声量子参数估计》，《物理评论A辑》**109**，012603（2024年）。[41] A. Z. Goldberg、K. Heshami 和 L. Sánchez-Soto，《利用不定因果序规避多参数量子计量中的噪声》，《物理评论研究》**5**，033198（2023年）。[42] J.-X. Peng、B. Zhu、W. Zhang 和 K. Zhang，《非相位协变噪声下的增强量子计量》，《物理评论快报》**133**，090801（2024年）。[43] J. Liu、H. Yuan、X.-M. Lu 和 X. Wang，《量子费 Fisher 信息矩阵与多参数估计》，《物理学杂志A：数学与理论》**53**，023001（2020年）。[44] M. G. Paris，《面向量子技术的量子估计》，《国际量子信息杂志》**7**，125（2009年）。[45] 这里我们假设 L_1 是酉的。[46] G. Agrawal、P. Halder 和 A. SenDe，《不定时间方向量子计量学》，《量子》**9**，1785（2025年）。[47] B. Xia、J. Huang、H. Li、Z. Luo 和 G. Zeng，《通过不定量子动力学实现光旋转测量的纳弧度级精度》，《科学进展》**10**，eadm8524（2024年）。[48] P. Chen 和 J. Jing，《时间反演策略下的量子比特辅助量子计量学》，《物理评论A辑》**110**，062425（2024年）。[49] T. Strömberg、P. Schiansky、M. T. Quintino、M. Antesberger、L. A. Rozema、I. Agresti、Č. Brukner 和 P. Walther，《量子演化与其时间反演的实验叠加》，《物理评论研究》**6**，023071（2024年）。[50] Y. Guo、Z. Liu、H. Tang、X.-M. Hu、B.-H. Liu、Y.-F. Huang、C.-F. Li、G.-C. Guo 和 G. Chiribella，《单个量子器件中输入输出不定性的实验演示》，《物理评论快报》**132**，160201（2024年）。

[51]A. J. Parzygnat 和 J. Fullwood，《从时间反演对称性到量子贝叶斯规则》，PRX Quantum **4**，020334（2023年）。[52] 例如，考虑一个哈密顿量为 $H = \omega\sigma_z$ $L = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ 的探针。给定噪声集合，候选生成集包括 $G = \{\sigma_x, \sigma_y\}$ 或 $G' = \{\sigma_x, \sigma_z\}$。然而，只有集合 $\{\sigma_x, \sigma_y\}$ 满足定理1，从而确保所需辅助门$\{D_i\}$的存在。[53] 我们设定 $\sigma_\theta = (\sigma_x + \sigma_z)/\sqrt{2}$。[54] 对于 J_2，群生成集的大小为 $|G| = 2$，而局部群生成集的大小为 $|G_L| = 3$。[55] 酉恢复算符为 diag$\{1, 1, \cdots, 1, -1\}$。[56] 这里，非压缩情形下我们设 $\chi = 0$，压缩情形下我们设 $\chi = 0.1$。[57] 相位协变噪声 L 满足 $[H, L] = 0$。[58] K. Bharti、A. Cervera-Lierta、T. H. Kyaw、T. Haug、S. Alperin-Lea、A. Anand、M. Degroote、H. Heimonen、J. S. Kottmann、T. Menke、等，《含噪声的中等规模量子算法》，《现代物理学评论》**94**，015004（2022年）。[59] V. V. Sivak、A. Eickbusch、B. Royer、S. Singh、I. Tsioutsios、S. Ganjam、A. Miano、B. Brock、A. Ding、L. Frunzio、等，《超越盈亏平衡点的实时量子纠错》，《自然》**616**，50（2023年）。[60] M. H. Michael、M. Silveri、R. Brierley、V. V. Albert，

J. Salmilehto、L. Jiang 和 S. M. Girvin，玻色模式的新型量子纠错码，《物理评论X》**6**，031006（2016年）。[61] Y. Kim、A. Eddins、S. Anand、K. X. Wei、E. Van Den Berg、S. Rosenblatt、H. Nayfeh、Y. Wu、M. Zale- tel、K. Temme、等，容错之前量子计算实用性的证据，《自然》**618**，500（2023年）。[62] S. Krinner、N. Lacroix、A. Remm、A. Di Paolo、E. Genois、C. Leroux、C. Hellings、S. Lazar、F. Swiadek、J. Her- rmann、等，在距离三表面码中实现重复量子纠错，《自然》**605**，669（2022年）。[63] X.-M. Hu、C.-X. Huang、Y.-B. Sheng、L. Zhou、B.-H. Liu、Y. Guo、C. Zhang、W.-B. Xing、Y.-F. Huang、C.- F. Li、等，用于量子通信的远距离纠缠纯化，《物理评论快报》**126**，010503（2021年）。[64] X.-M. Hu、Y. Guo、B.-H. Liu、C.-F. Li 和 G.-C. Guo，量子隐形传态进展，《自然综述：物理》**5**，339（2023年）。[65] F. Barra，量子电池的耗散充电，《物理评论快报》**122**，210601（2019年）。[66] F. Campaioli、S. Gherardini、J. Q. Quach、M. Polini 和 G. M. Andolina，专题讨论：量子电池，《现代物理学评论》**96**，031001（2024年）。