arXiv:2601.01418v1 [math.LO] 4 Jan 2026

迈向双布尔代数的简化理论：公理与拓扑表示

Prosenjit Howlader、Leonard Kwuida*、
Mike Behrisch 和 Churn-Jung Liau

摘要。Wille 引入的双布尔代数（dBas）以二十三条恒等式为基础。我们提出一种简化的公理系统——*D*-核代数，并证明它与 Wille 的原始定义等价。这一简化带来了更完善的结构性结果，包括一条改进的布尔表示定理，表明只需更少的条件，便足以将 dBa 表示为一对由伴随映射连接的布尔代数。我们将粘合和构造推广至可能彼此重叠的布尔代数，通过广义序刻画这类代数，并建立一种 Stone 型拓扑表示：每个 dBa 都准同构于 Stone空间上既开又闭子集构成的 dBa。我们还为语境 dBas 和纯双布尔代数构建了简化的逻辑系统，并证明其可靠性与完备性。

数学主题分类。03G10，08C10，06E15。
关键词。双布尔代数、布尔代数、形式概念分析、泛代数、推理式演算、超推理式演算。

1. 引言

在格论中，极性 [3] 是一个三元组 $\mathbb{K} := (G, M, I)$，其中 G 和 M 是集合，且 $I \subseteq G \times M$。在形式概念分析（FCA）中，极性称为形式背景 [17]。根据形式背景，可以通过形式概念或原概念形成簇，并通过蕴涵或关联规则提取规则 [15]。这些模式充分说明了形式概念分析为何在知识发现和管理领域有诸多应用。

*通讯作者。

为形式化这些概念，导出算子 定义在子集$A \subseteq G$ 和 $B \subseteq M$ 上，定义如下[1]:

$$A' := \{m \in M \mid gIm, \forall g \in A\} \quad \text{and} \quad B' := \{g \in G \mid gIm, \forall m \in B\}.$$

映射对 $(', ')$ 在 G 的幂集与 M 的幂集之间构成一个伽罗瓦连接。复合映射 $''$ 是一个闭包算子，相应的闭集构成一个完备格。

一个形式概念 是一个满足 $A' = B$ 和 $B' = A$的对 (A, B)，也就是说，A是满足 B的所有属性的对象集合，而 B 是 A中所有对象共有的属性集合。一个原概念 是一个满足$A'' = B'$的对 (A, B)。如果 (A, B) 是一个概念，且 $C \subseteq G$、 $D \subseteq M$ 满足 $C'' = A$ 和$D'' = B$，那么我们称 C， D 各自生成概念 (A, B)。因此，如果 A 和 B 生成同一个概念，那么 (A, B) 是一个原概念。形如 (A, A') 或 (B', B) 的特殊原概念称为半概念。

我们分别用 $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$、 $\mathfrak{H}(\mathbb{K})$ 和 $\mathfrak{P}(\mathbb{K})$ 表示 $\mathbb{K}$ 的形式概念、半概念和原概念集合。显然， $\mathfrak{B}(\mathbb{K}) \subseteq \mathfrak{H}(\mathbb{K}) \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{K})$。概念层次结构由 $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 上的序关系 $\leq$ 给出:

$$(A, B) \leq (C, D) : \Longleftrightarrow \ A \subseteq C(\text{ or equivalently } B \supseteq D), \tag{1.1}$$

将 $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 转化为完备格 [17]，称为形式背景 $\mathbb{K}$ 的概念格 。这一子概念—超概念序可推广到原概念:

$$(A, B) \sqsubseteq (C, D) : \Longleftrightarrow \ A \subseteq C \text{ and } B \supseteq D. \tag{1.2}$$

Th完备格 $(\mathfrak{B}(\mathbb{K}) \ \leq)$ 的交和并运算为

$$(A, B) \wedge (C, D) = (A \cap C, (B \cup D)'') = (A \cap C, (A \cap C)') \tag{1.3}$$

$$(A, B) \vee (C, D) = ((A \cup C)'', B \cap D) = ((B \cap D)', B \cap D) \tag{1.4}$$

并可推广到原概念集合。此外，在集合 $\mathfrak{P}(\mathbb{K})$上定义了两个否定算子 $\neg$和 $\lrcorner$:

$$\begin{aligned}
\text{meet:} \quad & (A, B) \sqcap (C, D) := (A \cap C, (A \cap C)'), \\
\text{join:} \quad & (A, B) \sqcup (C, D) := ((B \cap D)', B \cap D), \\
\text{negation:} \quad & \neg(A, B) := (G \setminus A, (G \setminus A)'), \\
\text{opposition:} \quad & \lrcorner(A, B) := ((M \setminus B)', M \setminus B), \\
\text{all:} \quad & \top := (G, \emptyset) \text{ and} \\
\text{nothing:} \quad & \bot := (\emptyset, M).
\end{aligned}$$

赋予上述定义的运算后，集合 $\mathfrak{P}(\mathbb{K})$构成代数结构$\mathfrak{P}(\mathbb{K}) := (\mathfrak{P}(\mathbb{K}); \sqcap, \sqcup, \neg, \lrcorner, \top, \bot)$，称为 $\mathbb{K}$ [18]的原概念代数。所有半概念 $\mathfrak{H}(\mathbb{K})$的集合构成原概念代数的子代数，称为 $\mathbb{K}$ [18]的半概念代数，记作$\mathfrak{H}(\mathbb{K}) := (\mathfrak{H}(\mathbb{K}); \sqcap, \sqcup, \neg, \lrcorner, \top, \bot)$。

[1]对于 $x \in G \cup M$，我们将 x' 写作 $\{x\}'$。

为抽象原概念代数（以及半概念代数），引入了双布尔代数。双布尔代数（dBa）[18] 是下述定义的(2，2，1，1，0，0)型代数（D；$\sqcap$，$\sqcup$，$\neg$，$\lrcorner$，$\top$，$\bot$）。

定义 1.1. [18] 满足以下性质的代数 $\mathbf{D} := (D; \sqcap, \sqcup, \neg, \lrcorner, \top, \bot)$ 称为双布尔代数 (dBa)。对于任意 $x, y, z \in D$,

$(1a)$	$(x \sqcap x) \sqcap y = x \sqcap y$	$(1b)$	$(x \sqcup x) \sqcup y = x \sqcup y$
$(2a)$	$x \sqcap y = y \sqcap x$	$(2b)$	$x \sqcup y = y \sqcup x$
$(3a)$	$\neg(x \sqcap x) = \neg x$	$(3b)$	$\lrcorner(x \sqcup x) = \lrcorner x$
$(4a)$	$x \sqcap (x \sqcup y) = x \sqcap x$	$(4b)$	$x \sqcup (x \sqcap y) = x \sqcup x$
$(5a)$	$x \sqcap (y \vee z) = (x \sqcap y) \vee (x \sqcap z)$	$(5b)$	$x \sqcup (y \wedge z) = (x \sqcup y) \wedge (x \sqcup z)$
$(6a)$	$x \sqcap (x \vee y) = x \sqcap x$	$(6b)$	$x \sqcup (x \wedge y) = x \sqcup x$
$(7a)$	$\neg\neg(x \sqcap y) = x \sqcap y$	$(7b)$	$\lrcorner\lrcorner(x \sqcup y) = x \sqcup y$
$(8a)$	$x \sqcap \neg x = \bot$	$(8b)$	$x \sqcup \lrcorner x = \top$
$(9a)$	$\neg\top = \bot$	$(9b)$	$\lrcorner\bot = \top$
$(10a)$	$x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$	$(10b)$	$x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$
$(11a)$	$\neg\bot = \top \sqcap \top$	$(11b)$	$\lrcorner\top = \bot \sqcup \bot$

(12) $(x \sqcap x) \sqcup (x \sqcap x) = (x \sqcup x) \sqcap (x \sqcup x)$ 其中 $x \vee y := \neg(\neg x \sqcap \neg y)$ 且 $x \wedge y := \lrcorner(\lrcorner x \sqcup \lrcorner y)$.

运算 $\sqcap$ 和 $\sqcup$ 称为交和并。$\neg$ 和 $\lrcorner$ 是两种否定。$\bot$ 和 $\top$ 称为底元和顶元。每个布尔代数通过复制补运算都是一个 dBa；当 $\neg$ 和 $\lrcorner$ 重合且 $\neg\neg x = x$ 时，dBa 就成为布尔代数。对于 dBa $\mathbf{D}$，我们使用以下记号 $D_\sqcap := \{x \in D : x \sqcap x = x\}$，$D_\sqcup := \{x \in D : x \sqcup x = x\}$ 以及 $D_p = D_\sqcap \cup D_\sqcup$。对于 $x \in D$, $x_\sqcap := x \sqcap x$ 以及 $x_\sqcup := x \sqcup x$。

若 dBa 满足 $x \sqcap x = x$ 或 $x \sqcup x = x$，即 $D = D_p$，则称其为纯。一个典型例子是半概念代数 $\mathfrak{H}(\mathbb{K})$。注意，$(\mathfrak{P}(\mathbb{K}); \sqsubseteq)$ 是满足条件 $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \sqcap y = x \sqcap x$ 和 $x \sqcup y = y \sqcup y$ 的偏序集。在任意 dBa $\mathbf{D}$ 上定义关系 $\sqsubseteq$ 如下:

$$x \sqsubseteq y :\Longleftrightarrow x \sqcap y = x \sqcap x \text{ and } x \sqcup y = y \sqcup y. \tag{1.5}$$

并使 $(D; \sqsubseteq)$ 成为一个预序集。若关系 $\sqsubseteq$ 是序关系，则称 $\mathbf{D}$ 为情境或正则。若一个情境双布尔代数是全语境的，则对任意满足 $y_\sqcup = x_\sqcap$ 的 $y \in D_\sqcap$ 和 $x \in D_\sqcup$，都存在唯一的 $z \in D$，使得 $z_\sqcap = x$ 且 $z_\sqcup = y$。一个典型例子是原概念代数 $\mathfrak{P}(\mathbb{K})$。若 dBa 满足 $\top \sqcap \top = \bot \sqcup \bot$ [14]，则称其为平凡。注意，若 $\mathfrak{P}(\mathbb{K})$ 是一个平凡双布尔代数，则 $|\mathfrak{B}(\mathbb{K})| = 1$。

顾名思义，每个 dBa 都诱导出两个布尔代数：$\mathbf{D}_\sqcap := (D_\sqcap; \sqcap, \vee, \neg, \bot, \top \sqcap \top)$ 和 $\mathbf{D}_\sqcup := (D_\sqcup; \wedge, \sqcup, \lrcorner, \bot \sqcup \bot, \top)$。文献 [5], 给出了双布尔代数的刻画，表明每个 dBa 都可以由两个布尔代数 $\mathbf{D}_\sqcap$ 和 $\mathbf{D}_\sqcup$ 构造而成。文献 [13], 将平凡且纯的 dBa 刻画为两个布尔代数的线性和。

除布尔表示外，还有几位作者研究了基于上下文的 dBa 表示定理。Wille [18] 为每个 dBa $\mathbf{D}$ 构造了一个标准背景，记作 $\mathbb{K}(\mathbf{D}) := (\mathcal{F}^{pr}(\mathbf{D}), \mathcal{I}^{pr}(\mathbf{D}), \Delta)$，它由集合 $\mathcal{F}^{pr}(\mathbf{D})$（所有主滤子的集合）和集合 $\mathcal{I}^{pr}(\mathbf{D})$（

D 的主理想集合）组成，并带有关系 Δ，使得 $F\Delta I$ 当且仅当 $F \cap I \neq \emptyset$。已有结果表明，对于每个 dBa $\mathbf{D}$，都存在一个从 D 到 $\mathbb{K}(\mathbf{D})$ 的原型概念 代数的同态 [18]，该同态保持并反映拟序（我们称之为拟嵌入）。若 $\mathbf{D}$ 是纯 [2]，则该映射成为嵌入。

文献 [11], 研究了 dBas 的拓扑表示，其中素理想定理 [8, 14] 发挥着核心作用。为表示完全上下文 dBas 和纯 dBas，文献 [6, 7]引入了对象导向原始概念 和半概念 。通过为对象集 G和属性集 M 赋予拓扑，上下文扩展为拓扑空间上的背景 (CTS)。在这一拓扑框架下，定义了既开又闭 对象导向半概念 和原概念，并证明它们分别构成完全上下文 dBa 和纯 dBa。文献 [11], 考虑了标准背景 $\mathbb{K}^c(\mathbf{D})$ 的补，其中将 $\mathbb{K}(\mathbf{D})$ 中的关系 Δ 替换为其补关系∇，该补关系定义为当且仅当 $F \cap I = \emptyset$时 $F \nabla I$。随后，文献 $\mathbb{K}^c(\mathbf{D})$ 在主滤子和理想上赋予拓扑，将其扩展为 CTS $\mathbb{K}^T_{pr}(\mathbf{D})$。文献 [14, 8]利用素理想定理证明，$\mathbb{K}^T_{pr}(\mathbf{D})$ 构成一个 CTS，其中关联关系及其逆关系均连续 [1], 。我们称其为具有连续关系的拓扑空间上的背景 (CTSCR，见定义 2.15)。文献 [11], 证明，每个完全上下文 dBa 都同构于 $\mathbb{K}^T_{pr}(\mathbf{D})$ 的开闭对象导向原始概念代数；若$\mathbf{D}$是纯的，则它同构于开闭对象导向半概念代数。该结果还将布尔代数作为纯 dBa 的特例给出了表示。情境 dBa 和任意 dBa 的拓扑表示仍是一个悬而未决的问题，本文将对此进行探讨。

除了代数分析之外，人们也从逻辑的角度系统地研究了 dBa，这两种研究途径都加深了我们对其结构的理解。针对情境 dBa，人们开发了序列演算 CDBL，随后又将其扩展为模态版本。针对纯 dBa，人们提出了超序列演算 PDBL，并以类似方式将其扩展为模态系统。基于形式上下文，人们研究了这两种演算的关系语义。本文提出了一个与 CDBL 等价的证明系统，以及另一个与 PDBL 等价的证明系统。本文提出的新证明系统得到了显著简化。

双布尔代数由一组 23 个方程定义，如定义 1.1 所示。这份相对较长的公理清单可能会令潜在使用者望而却步，使他们不愿探索或应用这些结构。先前的工作 [12], 表明，公理 (1a)、(1b)、(11a) 和 (11b) 可由 dBa 的其他公理推导出来。本文将构建一种更精简且无冗余的公理化体系。具体而言，我们引入D-$core$代数的概念。它是指一种类型为 (2，2，1，1，0，0) 的泛代数，满足定义 1.1 所列的条件 (2a)–(5a)、(7a)–(8a)、(2b)–(5b)、(7b)–(8b) 和 12。基于此定义，我们得到以下结果。

- 一个泛代数（D、$\sqcap$、$\sqcup$、$\neg$、$\lrcorner$、$\top$、$\bot$）当且仅当它是一个 D-核代数时，才是 dBa。

此外，可以验证，D-核代数刻画了 dBa 的最小公理集。作为证明，我们构造了一个非 dBa，它满足 D-核代数的所有公理，但不满足（7a）和（7b）。

dBa 的新简化定义有助于我们更好地理解结构性结果。我们通过削弱定理 2.1 的原始条件，证明了该定理的一个更强版本。原始结果在 [5], 中证明，描述了如何由两个布尔代数构造一个 dBa。这个新布尔表示定理被用于证明 D- 核代数的进一步结构性结果。我们以与偏序集的普通粘合和相同的方式定义两个偏序集的广义粘合和，记作 $P \oplus_g Q$，但不要求 P 和 Q 不相交。与通常的粘合和不同，广义粘合和不具备反对称性；因此，$P \oplus_g Q$ 一般来说仅是一个拟序。接下来，这一构造被扩展到布尔代数。广义粘合和通过合并两个布尔代数的元素、保留各个代数内部的运算，并根据元素在这些组合运算下的相互作用定义全局序，将两个布尔代数结合起来。

接下来，我们说明如何定义两个布尔代数 P 和 Q 的广义粘合和，它们的论域分别为 P 和 Q。我们考虑以下映射：r 将 $P \cup Q$ 中的元素映射到 P，把 P 中的元素映射到其自身，并将 P 之外的元素映射到 P 的最大元；e 将 P 中的元素嵌入 $P \cup Q$。类似地，r' 将 $P \cup Q$ 中的元素映射到 Q，把 Q 中的元素映射到其自身，并将 Q 之外的元素映射到 Q 的底元；e' 将 Q 中的元素嵌入 $P \cup Q$。利用这些映射[2], ，我们定义一个泛代数

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} := (P \cup Q, \sqcap, \sqcup, \neg, \lrcorner, e'(\top_q), e(\bot_p)),$$

其运算定义如下

$$\begin{aligned} x \sqcap y &:= e(r(x) \wedge_p r(y)) & \neg x &:= e(\neg_p r(x)) \\ x \sqcup y &:= e'(r'(x) \vee_q r'(y)) & \lrcorner x &:= e'(\neg_q r'(x)). \end{aligned} \tag{1.6}$$

我们还定义 $\sqsubseteq$ 与 $P \cup Q$ 上的关系，如方程 1.5 所示。我们将证明$\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ 是一个广义粘合和（命题 4.6）。为更好地理解这一结构，我们将满足定义 3.1 中某些条件的泛代数定义为广义 *D*-核代数 ，并证明

- $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ 只要交集 $P \cap Q$同时包含 P 的最大元和 Q的底元，就是一个广义 D-核代数。

最后，利用这一结果，我们可以刻画纯平凡 dBa。

为找到适当的 Stone空间，我们考虑定义在 dBa D 的素理想$\mathcal{I}_{pr}$**(D)**和主滤子$\mathcal{F}_{pr}$**(D)**集合上的两个 Stone空间的乘积。对于每个 $x \in D$，定义了两个集合 F_x and I_x（式（2.2））， 并证明它们分别是定义在$\mathcal{F}_{pr}$**(D)**和$\mathcal{I}_{pr}$**(D)**上的 Stone空间的既开又闭子集。因此，每个乘积 $F_x \times I_x$ 都是该Stone空间的既开又闭子集。

---

[2]直观地说，当 D 是一个 dBa 时，映射对 (r, e) 和 (r', e') 分别编码映射 $D \to D_{\sqcap}, x \mapsto x \sqcap x$, $D_{\sqcap} \to D, x_{\sqcap} \mapsto x_{\sqcap}$ 以及 $D \to D_{\sqcup}, x \mapsto x \sqcup x$, $D_{\sqcup} \to D, x_{\sqcup} \mapsto x_{\sqcup}$。即 $P = D_{\sqcap}$ 和 $Q = D_{\sqcup}$。

乘积 Stone 空间。我们考虑集合 $\mathcal{D} := \{(F_x, I_x) \mid x \in D\}$，并注意到该对应关系在 $\mathcal{D}$ 与这种形式的既开又闭矩形族之间建立了双射。随后定义两个特殊子族：$\mathcal{D}_\sqcap := \{(F_x, I_{x\sqcap x}) \mid x \in D\}$ 和 $\mathcal{D}_\sqcup := \{(F_{x\sqcup x}, I_x) \mid x \in D\}$，并证明它们各自在适当的运算下构成布尔代数。接着，我们定义两对映射 $r : \mathcal{D} \rightleftharpoons \mathcal{D}_\sqcap : e$ 和 $r' : \mathcal{D} \rightleftharpoons \mathcal{D}_\sqcup : e'$，并验证这两对映射都满足新布尔表示定理（定理 4.1）的假设。由此得到乘积 Stone 空间的既开又闭子集所构成的对偶布尔代数，随后我们证明以下结果。

- 对于每个双布尔代数$\mathbf{D}$，都存在一个从$\mathbf{D}$ 到某个 Stone空间的既开又闭子集构成的 dBa 的同态，且该同态保持拟序。若$\mathbf{D}$是上下文的，则该映射是同构。

基于 D-核代数的结构性质，我们为上下文 *D-core* 代数 引入序列演算 L，并为纯 *D*-核代数引入超序列演算 HL。我们提出的证明系统与针对上下文双布尔代数的 CDBL [9]以及针对纯双布尔代数的 PDBL [10] 密切相关，但为清晰易用起见作了简化。我们还证明了系统 L 与 CDBL 等价，而 HL 与 PDBL 等价。

本文安排如下。第 2 节介绍本文所需的预备知识。第 3 节引入 D-核代数的概念，并证明其与 dBa 等价。第 4 节介绍 dBa 的布尔表示和拓扑表示。第 5 节分别为上下文和纯 D-核代数提出简化的证明系统 L 和 HL，并证明它们分别与上文提到的 CDBL 和 PDBL 等价。最后，我们在第 6 节总结本文工作。

2. 预备知识

本节介绍与 dBa 相关的预备知识，包括已有的代数和拓扑表示结果。我们的主要参考文献是 [3, 18,11, 13, 5]。首先回顾 dBa 的布尔表示。在本节中，$\mathbf{P} := (P;\ \wedge_p, \vee_p, \neg_p, \bot_p, \top_p)$ 和 $\mathbf{Q} := (Q;\ \wedge_q, \vee_q, \neg_q, \bot_q, \top_q)$ 表示两个布尔代数。

设 $r : A \rightleftharpoons P : e$ 和 $r' : A \rightleftharpoons Q : e'$ 是两对映射，满足$r \circ e = id_P$ 以及 $r' \circ e' = id_Q$。我们将这样的映射对称为嵌入-收缩对。定义泛代数 $\mathbf{A} := (A, \sqcap, \sqcup, \neg, \lrcorner, e'(\top_q)\ e(\bot_p))$，其中$\sqcap, \sqcup, \neg, \lrcorner$如方程 1.6 所定义。于是得到以下结果。

定理 2.1. [5] A 是 dBa，当且仅当满足以下条件

(1) $e \circ r \circ e' \circ r' = e' \circ r' \circ e \circ r$

(2) $\begin{cases} e(r(x) \wedge_p r(e'(r'(x) \vee_q r'(y)))) = e(r(x)) \\ e'(r'(x) \vee_q r'(e(r(x) \wedge_p r(y)))) = e'(r'(x)) \end{cases}$ for all $x, y \in A$

(3) $r(e'(\top_q)) = \top_p$ and $r'(e(\bot_p)) = \bot_q$.

此外，每个 dBa 都可以通过这样的构造得到。

让我们回顾两个偏序集的粘合和的定义。

定义 2.2. [3] 设 $(P, \leq_P)$ 和 $(Q, \leq_Q)$ 是两个不相交的偏序集。
(1) 线性和 $P + Q$ 是偏序集 $(P \cup Q, \leq)$，其中对于 $x, y \in P \cup Q$,$x \leq y$，若：

(a) $x, y \in P$和 $x \leq_P y$,
(b) $x, y \in Q$ 和 $x \leq_Q y$,
(c) $x \in P$和 $y \in Q$。

(2) 若 P 有最大元 $\top_p$ 且 Q 有底元 $\bot_q$，则粘合和 $P \dot{+} Q$ 由 $P + Q$ 通过识别 $\top_p = \bot_q$构成。

布尔代数 P 和 Q 的粘合和为 $(P \dot{+} Q; \sqcap, \sqcup, \neg, \lrcorner, \bot, \top)$，其中 $\bot := \bot_p$, $\top := \top_q$，对于 x，$y \in P \dot{+} Q$ 运算定义如下：

$$\neg x := \begin{cases} \neg_p x & \text{if } x \in P, \\ \bot_p & \text{otherwise;} \end{cases} \quad \lrcorner x := \begin{cases} \neg_q x & \text{if } x \in Q, \\ \top_q & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.1}$$

$$x \sqcap y := \begin{cases} x \wedge_p y & \text{if } x, y \in P, \\ \top_p = \bot_q & \text{if } x, y \in Q, \\ x & \text{if } x \in P,\, y \in Q; \end{cases} \quad x \sqcup y := \begin{cases} x \vee_q y & \text{if } x, y \in Q, \\ \bot_q = \top_p & \text{if } x, y \in P, \\ y & \text{if } x \in P,\, y \in Q; \end{cases}$$

定理 2.3. [13] 两个布尔代数 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 的粘合和 $\mathbf{D} := (P \dot{+} Q, \sqcap, \sqcup, \neg, \lrcorner, \bot, \top)$ 是一个纯平凡 dBa。此外，每个纯平凡 dBa 都可由此构造得到。

下一个命题列出了一些平凡 dBa 的性质，后文将会用到。

命题 2.4. [13] 对于平凡 dBa D，以下结论成立，
(1) 若 x，$y \in D_\sqcap$ 则 $x \sqcup y = \bot \sqcup \bot$ 且 $\lrcorner x = \top$。
(2) 若 x，$y \in D_\sqcup$ 则 $x \sqcap y = \top \sqcap \top$ 且 $\neg x = \bot$。

现在我们给出 dBa D 的主滤子和主理想。

定义 2.5。 [18, 14] D 中的一个滤子 是满足以下条件的子集： F D 使得 $x \sqcap y \in F$对所有 x，$y \in F$，并且对所有 $z \in D$和 $x \in F$，$x \sqsubseteq z$都蕴含 $z \in F$。dBa 中的一个理想 则对偶地定义。滤子 F（分别地，理想 I）当且仅当 $F \neq D$（分别地，$I \neq D$）时是真的。一个主 滤子 F（分别地，理想 I）是非空的真滤子（分别地，理想），并且满足：对于所有 $x \in D$，$x \in F$或 $\neg x \in F$（分别地，$x \in I$ 或 $\lrcorner x \in I$）。

主滤子的集合记为$\mathcal{F}_{pr}(\mathbf{D})$，主理想的集合记为$\mathcal{I}_{pr}(\mathbf{D})$。Wille 在 [18]，中考虑了以下标准背景 $\mathbb{K}(\mathbf{D}) := (\mathcal{F}_{pr}(\mathbf{D}), \mathcal{I}_{pr}(\mathbf{D}), \Delta)$，其中对于 $F \in \mathcal{F}_{pr}(\mathbf{D})$ 和$I \in \mathcal{I}_{pr}(\mathbf{D})$，$F \Delta I$ 当且仅当 $F \cap I \neq \emptyset$。对于任意 $x \in \mathbf{D}$，定义

$$F_x := \{F \in \mathcal{F}_{pr}(\mathbf{D}) \mid x \in F\} \text{ and } I_x := \{I \in \mathcal{I}_{pr}(\mathbf{D}) \mid x \in I\}. \tag{2.2}$$

引理 2.6. [18] 设 D 为一个 dBa，且 $\mathbb{K}(\mathbf{D}) := (\mathcal{F}_{pr}(\mathbf{D}), \mathcal{I}_{pr}(\mathbf{D}), \Delta)$.
(1) 对所有 $x \in D_\sqcap$，$F'_x = I_x = I_{x \sqcup x}$。

(2) 对所有 $y \in D_{\sqcup}$, $I'_y = F_y = F_{y \sqcap y}$。(3) 对于 $x \in D$, $F'_x = I_{x \sqcap x} = I_{x \sqcap \sqcup}$ 和 $I'_x = F_{x \sqcup x} = F_{x \sqcup \sqcap}$。(4) 对于 $x \in D$, $(F_x)^c = F_{\neg x}$ 和 $(I_x)^c = I_{\lrcorner x}$。(5) 对于 $x,\ y \in D$, $I_x \cap I_y = I_{x \sqcup y}$ 和 $I_{x_{\sqcup}} = I_x$。(6) 对于 $x,\ y \in D$, $F_x \cap F_y = F_{x \sqcap y}$ 和 $F_{x_{\sqcap}} = F_x$。

随后证明了以下表示结果。

定理 2.7. [18] 对于任意 dBa D 和 $\mathbb{K}(\mathbf{D}) = (\mathcal{F}^{pr}(\mathbf{D}), \mathcal{I}^{pr}(\mathbf{D}) \Delta)$，以下结论成立

(1) 对于 $x \in D$, $(F_x,\ I_x)$ 是 $\mathbb{K}(\mathbf{D})$ 的原概念。(2) 映射 $h : \mathrm{D} \to \mathfrak{P}(\mathbb{K}(\mathbf{D}))$, $x \mapsto h(x) := (F_x,\ I_x)$ 是拟嵌入。

Düntsch 等人 [4] 基于上下文定义了充分性、对偶充分性、可能性和必然算子。对于上下文 $\mathbb{K} := (G,\ M,\ I)$, $g \in G$ 和 $m \in M$，集合

$$g' = \{m \in M \mid (g, m) \in I\} \text{ and } m' = \{g \in G \mid (g, m) \in I\}$$

分别是 g 和 m 的右和左邻域。对于 $A \subseteq G$ 和 $B \subseteq M$，对偶近似算子对定义如下:

$$\text{possibility:}\quad B_I^{\Diamond_{\mathfrak{p}}} := \{g \in G \mid g' \cap B \neq \emptyset\} \text{ and } A_I^{\Diamond_{\mathfrak{o}}} := \{m \in M \mid m' \cap A \neq \emptyset\}$$
$$\text{necessity:}\quad B_I^{\Box_{\mathfrak{p}}} := \{g \in G \mid g' \subseteq B\} \text{ and } A_I^{\Box_{\mathfrak{o}}} := \{m \in M \mid m' \subseteq A\}.$$

如果关系不会引起混淆，我们将省略下标，并将 $B_I^{\Diamond_{\mathfrak{p}}}$ 记为 $B^{\Diamond_{\mathfrak{p}}}$，将 $B_I^{\Box_{\mathfrak{p}}}$ 记为 $B^{\Box_{\mathfrak{p}}}$；对于 A，也同样处理。

必要性算子和可能性算子对应于粗糙集理论（粗糙集理论）[16]中的近似算子。以下定义取自文献 [6, 7]，涉及上下文 $\mathbb{K} = (G,\ M,\ I)$的对象导向半概念和对象导向原始概念。

定义 2.8。 [6, 7] 对于 $A \subseteq G$ 和 $B \subseteq M$，(A, B) 是对象导向半概念，属于 $\mathbb{K}$，当且仅当 $A^{\Box_{\mathfrak{o}}} = B$ 或 $B^{\Diamond_{\mathfrak{p}}} = A$。$(A, B)$ 是对象导向原始概念，属于 $\mathbb{K}$，当且仅当 $A^{\Box_{\mathfrak{o}} \Diamond_{\mathfrak{p}}} = B^{\Diamond_{\mathfrak{p}}}$。

$\mathfrak{R}(\mathbb{K})$表示所有对象导向原始概念的集合，而所有对象导向半概念的集合记为 $\mathfrak{S}(\mathbb{K})$。回顾一下记号$\mathfrak{P}(\mathbb{K})$和 $\mathfrak{H}(\mathbb{K})$，它们分别表示上下文 $\mathbb{K}$的原概念集合和半概念集合。于是我们有以下结果，

定理 2.9. [7, 6] 设 $\mathbb{K} = (G,\ M,\ I)$ 是一个上下文，且设 $\mathbb{K}^c := (G,\ M,\ I^c)$ 是其补形式背景。即 $I^c := G \times M \setminus I$。那么，以下结论成立

(1) $A_I^{\Box_{\mathfrak{o}}} = A_{I^c}^{c\prime}$、$B_I^{\Box_{\mathfrak{p}}} = B_{I^c}^{c\prime}$、$A_I^{\Diamond_{\mathfrak{o}}} = A_{I^c}^{\prime c}$ 和 $B_I^{\Diamond_{\mathfrak{p}}} = B_{I^c}^{\prime c}$。(2) $(A,\ B) \in \mathfrak{P}(\mathbb{K})$ 当且仅当 $(A^c,\ B) \in \mathfrak{R}(\mathbb{K}^c)$ (3) $(A,\ B) \in \mathfrak{H}(\mathbb{K})$ 当且仅当 $(A^c,\ B) \in \mathfrak{S}(\mathbb{K}^c)$

本文考虑的不是 Wille 定义的标准背景，而是其补，定义为 $\mathbb{K}_{pr}(\mathbf{D}) := (\mathcal{F}^{pr}(\mathbf{D}), \mathcal{I}^{pr}(\mathbf{D}) \nabla)$，其中对于 $F \in \mathcal{F}^{pr}(\mathbf{D})$ 和 $I \in$

$\mathcal{I}^{pr}$(**D**)，当且仅当 $F\nabla I$ $F\cap I=\emptyset$ 时，在 [11] 中予以考虑。$\mathbb{K}_{pr}$(**D**) 通过为集合 $\mathcal{F}^{pr}$(**D**) 和 $\mathcal{I}^{pr}$(**D**) 配备拓扑而扩展，得到一种称为拓扑空间上的背景 (CTS) 的结构 [11]。

定义 2.10. [11] $\mathbb{K}^T:=((G,\ \rho),\ (M,\ \tau)\ R)$ 称为拓扑空间上的背景（CTS），若 $(G,\ M,\ R)$ 是一个形式背景，且 $(G,\ \rho)$ 和 $(M,\ \tau)$ 是拓扑空间。

在下一个定义中，我们引入两个集合，它们将作为表示定理中所用具体 dBa 的论域。

定义 2.11. [11] 对于一个 CTS $\mathbb{K}^T$，若 $\mathbb{K}$ 的一个对象导向原始概念（分别为半概念）$(A,\ B)$ 满足 A 在 $(G,\ \rho)$ 中既开又闭，且 B 在 $(M,\ \tau)$ 中既开又闭，则称其为既开又闭。所有既开又闭对象导向原概念（分别为半概念）的集合记为 $\mathfrak{R}^T(\mathbb{K}^T)$（分别为 $\mathfrak{S}^T(\mathbb{K}^T)$）。

通过将族 $\mathcal{B}_0:=\{F_x:\ x\in D\}$作为闭集的子基，定义 $\mathcal{T}$在 $\mathcal{F}^{pr}$(**D**)上的拓扑；类似地，通过子基 $\mathcal{B}:=\{I_x:\ x\in D\}$生成 $\mathcal{J}$ 在 $\mathcal{I}^{pr}$(**D**)上的拓扑。随后证明，

命题 2.12。 [11] $(\mathcal{F}^{pr}$(**D**)，$\mathcal{T})$和$(\mathcal{I}^{pr}$(**D**)，$\mathcal{J})$是紧致且全不连通的拓扑空间，因而是豪斯多夫的。

这一结果为 CTS 框架内纯 dBas 的对偶表示奠定了拓扑基础。特别地，考虑了一类特殊的 CTS，称为具有连续关系的拓扑空间上的背景（CTSCR）。为此，我们首先回顾关系的连续性。

定义 2.13。 [11] 设（$X,\ \rho$）和（$Y,\ \tau$）是拓扑空间。若一个关系$R\subseteq X\times Y$ 满足以下条件，则称其为连续：

(i) 若 A 在 (Y,τ) 中是开集，则 $A^{\Diamond_R}$ 和 $A^{\Box_R}$ 在 (X,ρ) 中也都是开集。

(ii) 若 A 在 (Y,τ) 中是闭集，则 $A^{\Diamond_R}$ 和 $A^{\Box_R}$ 在 (X,ρ) 中也都是闭集 .

注 2.14. R^{-1} 的连续性也可以等价地用由 R 诱导的相应算子来刻画。

现在我们可以定义 CTSCR 了。

定义 2.15. [11] $\mathbb{K}^T:=((G,\rho),(M,\tau)\ R)$ 称为一个具有连续关系的拓扑空间上的背景 (CTSCR)，如果关系 R 和 R^{-1} 相对于 (G,ρ) 和 (M,τ) 连续。

运算 $\sqcap$、$\sqcup$、$\lrcorner$、$\neg$、$\top$、$\bot$ 是为 $A,B,\ C,D)\in\mathfrak{R}^T(\mathbb{K}^T)$ b 定义的 y

$$
\begin{gathered}
(A,B)\sqcap(C,D):=(A\cup C,(A\cup C)^{\Box_o})\\
(A,B)\sqcup(C,D):=((B\cap D)^{\Diamond_R},B\cap D),\\
\lrcorner(A,B):=(B^{c\Diamond_R}B^c)\\
\neg(A,B):=(A^c,A^{c\Box_o})\\
\top:=(\emptyset,\emptyset)\text{ and }\bot:=(G,M).
\end{gathered}
$$

接下来证明以下结果。

定理 2.16. [11] 对于任意 CTSCR $\mathbb{K}^T:=((G,\rho),(M,\tau)\ R)$，$\mathfrak{S}^T(\mathbb{K}^T)\subseteq\mathfrak{R}^T($ $\mathbb{K}^T)$. 此外，我们有以下结论。

(1) $\underline{\mathfrak{R}}^T(\mathbb{K}^T) := (\mathfrak{R}^T(\mathbb{K}^T)\ \sqcup, \sqcap, \neg, \lrcorner, \top, \bot)$ 是一个完全上下文 dBa。(2) $\underline{\mathfrak{S}}^T(\mathbb{K}^T) := (\underline{\mathfrak{S}}^T(\mathbb{K}^T)\ \sqcup, \sqcap, \neg, \lrcorner, \top, \bot)$ 是 $\mathfrak{R}^T(\mathbb{K}^T)$ 的一个子代数，并且是一个纯 dBa。

另一方面，可以证明以下定理。

定理 2.17。 [11] $\mathbb{K}^T_{pr}(\mathbf{D}) := ((\mathcal{F}_{Pr}(\mathbf{D}), \mathcal{T}), (\mathcal{I}_{Pr}(\mathbf{D}), \mathcal{J})\ \nabla)$ 是一个 CTSCR。

于是，我们得到以下表示结果。

Th定理 2.18（dBa 和上下文 dBa 的表示定理）。 [11]

(1) 对任意 dBa $\mathbf{D}$，映射 $h : \mathbf{D} \to \mathfrak{R}^T(\mathbb{K}^T_{pr}(\mathbf{D}))$ 定义为 $h(x) := (F_{\neg x}, I_x)$，对所有 $x \in \mathbf{D}$ 均成立，是从 $\mathbf{D}$ 到 $\mathfrak{R}^T(\mathbb{K}^T_{pr}(\mathbf{D}))$ 的拟嵌入。此处，$\mathbf{D}_P$ 同构于 $\mathfrak{S}^T(\mathbb{K}^T_{pr}(\mathbf{D}))$。(2) 对任意情境双布尔代数 $\mathbf{D}$，上述映射 h 是从 $\mathbf{D}$ 到 $\mathfrak{R}^T(\mathbb{K}^T_{pr}(\mathbf{D}))$ 的嵌入。

定理 2.19（完全上下文 dBa 的表示定理）。 [11] 任意完全上下文 dBa D 都同构于 $\mathfrak{R}^T(\mathbb{K}^T_{pr}(\mathbf{D}))$，即闭开对象导向原概念构成的代数。

定理 2.20（纯 dBa 的表示定理）。 [11] 任意纯 dBa D 都同构于 $\mathfrak{S}^T(\mathbb{K}^T_{pr}(\mathbf{D}))$，即闭开对象导向半概念构成的代数。

3. 冗余公理的消除

本节提取出一组与定义 1.1 中的方程组等价的最小公理集。具体而言，我们提出如下定义。

定义 3.1. 满足以下性质的代数 $\mathbf{D} := (D; \sqcup, \sqcap, \neg, \lrcorner, \top, \bot)$ 称为*D-*核代数。对于任意 $x, y, z \in D$,

$(\ )\ 1a\ \ x \sqcap y = y \sqcap x (3b)\ \ x \sqcup (x \sqcap y) = x (1b)\ x \sqcap (x \sqcup y) = x (4a)\ x \sqcup y = y \sqcup x z) = (x \sqcap y) \vee (2a)\ \neg(x \sqcap x) = x (2b)\ \lrcorner\neg(x \sqcup x) = x (4b)\ x \sqcap (y \wedge z) = (x \sqcup y) \wedge (x \sqcup z) (5a)\ \neg\neg(x \sqcap y) = x \sqcap y (5b)\ \lrcorner\lrcorner(x \sqcup y) = x \sqcup y (6a)\ x \sqcap \neg x = \bot (6b)\ x \sqcup \lrcorner x = \top (7)\ (x \sqcap x) \sqcup (x \sqcap x) = (x \sqcup x) \sqcap (x \sqcup x) (3a)\ x \sqcap (x \sqcup y) = x \sqcap x$

在本节余下部分，我们将证明定义 3.1 与定义 1.1 等价。在以下结果中，方程成对出现，其中 (b) 是 (a) 的对偶。因此，接下来我们只写出 (a) 的证明，并通过对偶得到 (b)。

命题 3.2. 设 D 是一个 D-核代数， x、 y、 $z \in D$。则以下结论成立。

$(1a)\ x \sqcap x = \neg\neg x$ $(1b)\ x \sqcup x = \lrcorner\lrcorner x$
$(2a)\ (x \sqcap y) \sqcap (x \sqcap y) = x \sqcap y$ $(2b)\ (x \sqcup y) \sqcup (x \sqcup y) = x \sqcup y$
$(3a)\ \neg(x \sqcap (y \vee z)) = \neg(x \sqcap y) \sqcap \neg(x \sqcap z)$ $(3b)\ \lrcorner(x \sqcup (y \wedge z)) = \lrcorner(x \sqcup y) \sqcup \lrcorner(x \sqcup z)$
$(4a)\ x \vee x = x \sqcap x$ $(4b)\ x \wedge x = x \sqcup x$
$(5a)\ \neg\neg\neg x = \neg x$ $(5b)\ \lrcorner\lrcorner\lrcorner x = \lrcorner x$
$(6a)\ \neg x \sqcap \neg x = \neg x$ $(6b)\ \lrcorner x \sqcup \lrcorner x = \lrcorner x$

证明。设 $x, y, z \in D$。
$(1a)$ 在定义 3.1 (5a) 中令 $y := x$，然后使用定义 3.1 (2a)，得到 [3]

$$x \sqcap x \overset{\text{D.3.1}}{=}\overset{(5a)}{} \neg\neg(x \sqcap x) \overset{\text{D.3.1}}{=}\overset{(2a)}{} \neg\neg x, \text{ and (1a) is proved.}$$

$(2a)$ 将命题 3.2 (1a) 应用于定义 3.1 (5a)，得到

$$x \sqcap y \overset{\text{D.3.1}}{=}\overset{(5a)}{} \neg\neg(x \sqcap y) \overset{\text{P.3.2}}{=}\overset{(1a)}{} (x \sqcap y) \sqcap (x \sqcap y), \text{ and (2a) is proved.}$$

$(3a)$ 根据定义 3.1 (4a) 和 $\vee$ 的定义，有 $x \sqcap (y \vee z) = \neg(\neg(x \sqcap y) \sqcap \neg(x \sqcap z))$。对两边取否定 $\neg$，并使用定义 3.1 (5a)，得到

$$\neg(x \sqcap (y \vee z)) = \neg\neg(\neg(x \sqcap y) \sqcap \neg(x \sqcap z)) \overset{(5a)}{=} \neg(x \sqcap y) \sqcap \neg(x \sqcap z).$$

$(4a)\ x \vee x \overset{\text{def.}\vee}{=} \neg(\neg x \sqcap \neg x) \overset{\text{D.3.1}}{=}\overset{(2a)}{} \neg\neg x \overset{\text{P.3.2}}{=}\overset{(1a)}{} x \sqcap x.$
(5a) $\neg x \overset{\text{D.3.1}}{=}\overset{(2a)}{} \neg(x \sqcap x) \overset{\text{D.3.1}}{=}\overset{(5a)}{} \neg(\neg\neg(x \sqcap x)) \overset{\text{D.3.1}}{=}\overset{(2a)}{} \neg\neg\neg x.$
(6a) $\neg x \sqcap \neg x \overset{\text{P3.2}}{=}\overset{(1a)}{} \neg\neg\neg x \overset{\text{P3.2}}{=}\overset{(5a)}{} \neg x.$

□

在命题 3.2 中，恒等式 (1a) 和 (1b) 可解释为双重否定律，而 (2a) 和 (2b) 则分别表示 $D_\sqcap$ 和 $D_\sqcup$ 中的幂等性。下述定理表明，双布尔代数（定义 1.1）的公理 $(1a)$，$(1b)$，$(9a)$，$(9b)$，$(11a)$ 和 $(11b)$ 可在 D-核代数中推导出来。

定理 3.3. 设 D 是一个 D-核代数，且 $x, y, z \in D$。那么，以下 hold.

$(1a)\ (x \sqcap x) \sqcap y = x \sqcap y$ $(1b)\ (x \sqcup x) \sqcup y = x \sqcup y$
$(2a)\ \neg\top = \bot$ $(2b)\ \lrcorner\bot = \top$
$(3a)\ \neg\bot = \top \sqcap \top$ $(3b)\ \lrcorner\top = \bot \sqcup \bot$

证明。Let $x, y, z \in D$.
(1a) $(x \sqcap x) \sqcap y \overset{\text{D.3.1}}{=}\overset{(1a)}{} y \sqcap (x \sqcap x) \overset{\text{P.3.2}}{=}\overset{(4a)}{} y \sqcap (x \vee x) \overset{\text{D.3.1}}{=}\overset{(4a)}{} (y \sqcap x) \vee (y \sqcap x)$
$\overset{\text{P.3.2}}{=}\overset{(4a)}{} (y \sqcap x) \sqcap (y \sqcap x) \overset{\text{P.3.2}}{=}\overset{(2a)}{} y \sqcap x \overset{\text{D.3.1}}{=}\overset{(1a)}{} x \sqcap y.$
(2a) $\neg\top \overset{\text{P3.2}}{=}\overset{(5a)}{} \neg\neg\neg\top \overset{\text{P3.2}}{=}\overset{(1a)}{} \neg\top \sqcap \neg\top \overset{\text{D3.1}}{=}\overset{(3a)}{} \neg\top \sqcap (\neg\top \sqcup \lrcorner\neg\top)$
$\overset{\text{D3.1}}{=}\overset{(6b)}{} \neg\top \sqcap \top \overset{\text{D3.1}}{=}\overset{(6a)}{} \bot.$
(3a) $\top \sqcap \top \overset{\text{P3.2}}{=}\overset{(1a)}{} \neg\neg\top \overset{\text{T3.3}}{=}\overset{(2a)}{} \neg\bot.$ □

[3]我们用简写 Def.、Prop.、Lem. 或 Thm.（在方程中也可简写为 D.、P.、T. 或 L.）来指代定义、命题、引理或定理，后接编号以及恒等映射的相关序号（如适用）。 $\sqcap, \sqcup$ 的交换性（定义 3.1 (1a)、(1b)）以及 $\wedge, \vee$ 的交换性，将在未明确引用的情况下使用。

下一个命题给出了 D-核代数的德摩根律。

命题 3.4. 设 D 是一个 D-核代数，且 $x, y \in D$。那么，有：$(1a)\ \neg(x \sqcap y) = \neg x \vee \neg y$ $(1b)\ \lrcorner(x \sqcup y) = \lrcorner x \wedge \lrcorner y$ $(2a)\ \neg(x \vee y) = \neg x \sqcap \neg y$ $(2b)\ \lrcorner(x \wedge y) = \lrcorner x \sqcup \lrcorner y$

证明。设 $x, y \in D$

$$(1a)\quad \neg(x \sqcap y) \overset{\text{T. 3.3}\,(1a)}{=} \neg((x \sqcap x) \sqcap (y \sqcap y)) \overset{\text{P. 3.2}\,(1a)}{=} \neg(\neg\neg x \sqcap \neg\neg y) \overset{\text{def.}\vee}{=} \neg x \vee \neg y$$

$$(2a)\quad \neg(x \vee y) \overset{\text{def.}\vee}{=} \neg\neg(\neg x \sqcap \neg y) \overset{\text{D.3.1}\,(5a)}{=} \neg x \sqcap \neg y$$

□

下一个命题计算了与顶和底相关的一些交和并。

命题 3.5. 设 D 是一个 D-核代数，且 $x, y \in D$。我们有：

$(1a)\ x \sqcap \top = x \sqcap x$	$(1b)\ x \sqcup \bot = x \sqcup x$
$(2a)\ \neg x \sqcap \top = \neg x$	$(2b)\ \lrcorner x \sqcup \bot = \lrcorner x.$
$(3a)\ (x \sqcap y) \sqcap \top = x \sqcap y$	$(3b)\ (x \sqcup y) \sqcap \top = x \sqcup y$
$(4a)\ \neg x \sqcap \neg\bot = \neg x$	$(4b)\ \lrcorner x \sqcup \lrcorner\top = \lrcorner x.$
$(5a)\ x \vee \bot = x \sqcap x$	$(5b)\ x \wedge \top = x \sqcup x$
$(6a)\ \neg x \vee \bot = \neg x$	$(6b)\ \lrcorner x \wedge \top = \lrcorner x$
$(7a)\ (x \sqcap y) \vee \bot = x \sqcap y$	$(7b)\ (x \sqcup y) \wedge \top = x \sqcup y$
$(8a)\ x \sqcap (y \vee \top) = x \sqcap (x \vee y)$	$(8b)\ x \sqcup (y \wedge \bot) = x \sqcup (x \wedge y)$
$(9a)\ \bot \sqcap \bot = \bot$	$(9b)\ \top \sqcup \top = \top$
$(10a)\ (\bot \sqcap \neg x) \sqcap x = \bot$	$(10b)\ (\top \sqcup \lrcorner x) \sqcup x = \top$
$(11a)\ (\bot \sqcap x) \sqcap \neg x = \bot$	$(11b)\ (\top \sqcup x) \sqcup \lrcorner x = \top$
$(12a)\ \bot \sqcap \lrcorner x = \bot$	$(12b)\ \top \sqcup \neg x = \top$
$(13a)\ \bot \sqcap \neg\lrcorner x = \bot$	$(13b) \top \sqcup \lrcorner\neg x = \top.$

证明。对于任意 $x, y \in D$,

(1a) $x \sqcap \top$ D.3.1 (6b)= $x \sqcap (x \sqcup \lrcorner x)$ D.3.1 (3a)= $x \sqcap x$.(2a) $\neg x \sqcap \top$ P3.5 (1a)= $\neg x \sqcap \neg x$ P3.2 (6a)= $\neg x$.(3a) $(x \sqcap y) \sqcap \top$ P.3.5 (1a)= $(x \sqcap y) \sqcap (x \sqcap y)$ P.3.2 (2a)= $x \sqcap y$.(4a) $\neg x \sqcap \neg\bot$ T. 3.3(3a)= $\neg x \sqcap (\top \sqcap \top)$ T. 3.3(1a)= $\neg x \sqcap \top$ P3.5 (2a)= $\neg x$.(5a) $x \vee \bot \overset{\text{def.}\vee}{=} \neg(\neg x \sqcap \neg\bot)$ P3.5 (4a)= $\neg\neg x$ P.3.2 (1a)= $x \sqcap x$.(6a) $\neg x \vee \bot$ P.3.5 (5a) = $\neg x \sqcap \neg x$ P3.2 (6a)= $\neg x$.(7a) $(x \sqcap y) \vee \bot$ P.3.5 (5a)= $(x \sqcap y) \sqcap (x \sqcap y)$ P3.2 (6a)= $x \sqcap y$.(8a) $x \sqcap (y \vee \top)$ D.3.1 (4a)= $((x \sqcap y) \vee (x \sqcap \top))$ P.3.5 (1a)= $((x \sqcap y) \vee (x \sqcap x))$

$$\overset{\text{D.3.1}\,(4a)}{=} x \sqcap (y \vee x).$$

(9a) $\bot \sqcap \bot$ T。3。3 (2a)= $\neg\top \sqcap \neg\top$ P。3。2 (6a)= $\neg\top$ T。3。3 (2a) = $\bot$.

(10a) $\bot \overset{\text{D.3.1 (6a)}}{=} (\bot \sqcap \neg x) \sqcap \neg(\bot \sqcap \neg x) \overset{\text{T.3.3 (2a)}}{=} (\bot \sqcap \neg x) \sqcap \neg(\neg\top \sqcap \neg x)$

$\overset{\text{def.}\vee}{=} (\bot \sqcap \neg x) \sqcap (\top \vee x) \overset{\text{P.3.5 (8a)}}{=} (\bot \sqcap \neg x) \sqcap \big((\bot \sqcap \neg x) \vee x\big)$

$\overset{\text{def.}\vee}{=} (\bot \sqcap \neg x) \sqcap \neg\big(\neg(\bot \sqcap \neg x) \sqcap \neg x\big)$

$\overset{\text{T.3.3 (2a), def.}\vee}{=} (\bot \sqcap \neg x) \sqcap \neg\big((\top \vee x) \sqcap \neg x\big)$

$\overset{\text{P.3.5 (8a)}}{=} (\bot \sqcap \neg x) \sqcap \neg\big(\neg x \sqcap (x \vee \neg x)\big)$

$\overset{\text{D.3.1(4a)}}{=} (\bot \sqcap \neg x) \sqcap \neg\big((\neg x \sqcap x) \vee (\neg x \sqcap \neg x)\big)$

$\overset{\text{D.3.1(6a),3.2 (6a)}}{=} (\bot \sqcap \neg x) \sqcap \neg(\bot \vee \neg x) \overset{\text{P.3.5(6a)}}{=} (\bot \sqcap \neg x) \sqcap \neg\neg x$

$\overset{\text{P.3.2 (1a)}}{=} (\bot \sqcap \neg x) \sqcap (x \sqcap x) \overset{\text{T.3.3 (1a)}}{=} (\bot \sqcap \neg x) \sqcap x.$

(11a) 在命题 3.5 10a 中令 $x := \neg x$，我们得到

$\bot = (\bot \sqcap \neg\neg x) \sqcap \neg x \overset{\text{P.3.2 (1a)}}{=} (\bot \sqcap (x \sqcap x)) \sqcap \neg x \overset{\text{T.3.3 (1a)}}{=} (\bot \sqcap x) \sqcap \neg x.$

(12a) $\bot \overset{\text{P。3。5 (9a)}}{=} \bot \sqcap \bot \overset{\text{D.3.1 (3a)}=\ \bot\sqcup\lrcorner x)}{\bot \sqcap (} \overset{\text{P。3。5 (2b)}}{=} \bot \sqcap \lrcorner x$

(13a) $\bot \overset{\text{P.3.5 (11a)}}{=} (\bot \sqcap \lrcorner x) \sqcap \neg\lrcorner x \overset{\text{P。3。5 (12a)}}{=} \bot \sqcap \neg\lrcorner x.$

□

尽管对于 $x \in$ 而言 $\bot \sqcap x = \bot\{\bot, \lrcorner x, \neg\lrcorner x\}$，但要证明这对任意 $x \in D$ 都成立则更加复杂。这就是接下来两个命题的目标。

命题 3.6. 设 D 是一个 D-核代数，且 $x, y \in D$。以下结论成立：

$(1a)\ x \sqcup (\bot \sqcup y) = x \sqcup y$	$(1b)\ x \sqcap (\top \sqcap y) = x \sqcap y$
$(2a)\ (\bot \sqcap x) \sqcup y = \bot \sqcup y$	$(2b)\ (\top \sqcup x) \sqcap y = \top \sqcap y$
$(3a)\ (\bot \sqcap x) \sqcap (\bot \sqcup y) = \bot \sqcap x$	$(3b)\ (\top \sqcup x) \sqcup (\top \sqcap y) = \top \sqcup x$
$(4a)\ (\bot \sqcap x) \sqcap \neg(x \sqcap \neg y) = (\bot \sqcap x) \sqcap y$	$(4b)\ (\top \sqcup x) \sqcup\lrcorner (x \sqcup\lrcorner y) = (\top \sqcup x) \sqcup y.$

证明：设 $x, y \in D$，

(1a) $x \sqcup (\bot \sqcup y) \overset{\text{P.3.5(1b)}}{=} x \sqcup (y \sqcup y) \overset{\text{T.3.3(1b)}}{=} x \sqcup y.$

(2a) $y \sqcup (\bot \sqcap x) \overset{\text{P.3.6(1a)}}{=} y \sqcup (\bot \sqcup (\bot \sqcap x)) \overset{\text{D.3.1(3b)}}{=} y \sqcup (\bot \sqcup \bot) \overset{\text{T.3.3(1b)}}{=} y \sqcup \bot.$

(3a) $(\bot \sqcap x) \sqcap (\bot \sqcup y) \overset{\text{T. 3.3(1b)}}{=} (\bot \sqcap x) \sqcap \big((\bot \sqcup \bot) \sqcup y\big)$

$\overset{\text{D. 3.1(3b)}}{=} (\bot \sqcap x) \sqcap \big((\bot \sqcup (\bot \sqcap x)) \sqcup y\big) \overset{\text{P. 3.6(1a)}}{=} (\bot \sqcap x) \sqcap \big(y \sqcup (\bot \sqcap x)\big)$

$\overset{\text{D. 3.1(3a)}}{=} (\bot \sqcap x) \sqcap (\bot \sqcap x) \overset{\text{P. 3.2(2a)}}{=} \bot \sqcap x.$

(4a) $(\bot \sqcap x) \sqcap \neg(x \sqcap \neg y) \overset{\text{P.3.4 (1a)}}{=} (\bot \sqcap x) \sqcap (\neg x \vee \neg\neg y)$

$\overset{\text{D.3.1 (4a)}}{=} ((\bot \sqcap x) \sqcap \neg x) \vee ((\bot \sqcap x) \sqcap \neg\neg y) \overset{\text{P.3.5 (11a)}}{=} \bot \vee ((\bot \sqcap x) \sqcap \neg\neg y)$

$\overset{\text{P.3.5 (7a)}}{=} (\bot \sqcap x) \sqcap \neg\neg y \overset{\text{P.3.2 (1a)}}{=} (\bot \sqcap x) \sqcap (y \sqcap y) \overset{\text{T.3.3(1a)}}{=} (\bot \sqcap x) \sqcap y$

□

命题 3.7. 设 D 是一个 D-核代数，且 $g \in D$。则有：

$(1a)\ \bot \sqcap \neg(\neg x \sqcap _y) = \bot \sqcap x$	$(1b)\ \top \sqcup _(_x \sqcup \neg y) = \top \sqcup x$
$(2a)\ x \sqcap \neg(\neg x \sqcap \neg y) = x \sqcap \neg(\neg y \sqcap \neg \top)$	$(2b)\ x \sqcup _(_x \sqcup _y) = x \sqcup _(_y \sqcup _\bot)$
$(3a)\ x \sqcap \neg(\neg y \sqcap \neg(x \sqcup z)) = x \sqcap \neg(\bot \sqcap \neg y)$	$(3b)\ x \sqcup _(_y \sqcup _(x \sqcap z)) = x \sqcup _(\top \sqcup _y)$
$(4a)\ \bot \sqcap x = \bot$	$(4b)\ \top \sqcup x = \top.$

证明。对于 $x, y \in D$

$$
\begin{aligned}
(1a)\quad \bot \sqcap \neg(\neg x \sqcap _y) &\overset{\text{T. 3.3(1a)}}{=} \bot \sqcap \neg(\neg x \sqcap (_y \sqcap _y)) \overset{\text{P. 3.2(1a)}}{=} \bot \sqcap \neg(\neg x \sqcap \neg\neg _y) \\
&\overset{\text{def.}\vee}{=} \bot \sqcap (x \vee \neg _y) \overset{\text{D.3.1}\ (4a)}{=} (\bot \sqcap x) \vee (\bot \sqcap \neg _y) \\
&\overset{\text{def.}\vee}{=} \neg(\neg(\bot \sqcap x) \sqcap \neg(\bot \sqcap \neg _y)) \overset{\text{P. 3.5}\ (13a)}{=} \neg(\neg(\bot \sqcap x) \sqcap \neg \bot) \\
&\overset{\text{T. 3.3(3a)}}{=} \neg(\neg(\bot \sqcap x) \sqcap (\top \sqcap \top)) \overset{\text{T. 3.3(1a)}}{=} \neg(\neg(\bot \sqcap x) \sqcap \top) \\
&\overset{\text{P.3.5(2a)}}{=} \neg\neg(\bot \sqcap x) \overset{\text{D. 3.1}\ (5a)}{=} \bot \sqcap x.
\end{aligned}
$$

$$
(2a)\quad x \sqcap \neg(\neg y \sqcap \neg \top) \overset{\text{def.}\vee}{=} x \sqcap (y \vee \top) \overset{\text{P.3.5(8a)}}{=} x \sqcap (y \vee x) \overset{\text{def.}\vee}{=} x \sqcap \neg(\neg x \sqcap \neg y)
$$

$$
\begin{aligned}
(3a)\qquad x \sqcap \neg(\neg y \sqcap \neg(x \sqcup z)) &\overset{\text{def.}\vee}{=} x \sqcap (y \vee (x \sqcup z)) \\
&\overset{\text{D.3.1(4a)}}{=} (x \sqcap y) \vee (x \sqcap (x \sqcup z)) \overset{\text{D.3.1(3a)}}{=} (x \sqcap y) \vee (x \sqcap x) \overset{\text{D.3.1(4a)}}{=} x \sqcap (y \vee x) \\
&\overset{\text{P.3.5}\ (8a)}{=} x \sqcap (y \vee \top) \overset{\text{def.}\vee}{=} x \sqcap \neg(\neg \top \sqcap \neg y) \overset{\text{T. 3.3(2a)}}{=} x \sqcap \neg(\bot \sqcap \neg y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4a)\quad \bot &\overset{\text{D. 3.1(6a)}}{=} (\bot \sqcap x) \sqcap \neg(\bot \sqcap x) \overset{\text{T. 3.3(1a)}}{=} (\bot \sqcap x) \sqcap \neg(\bot \sqcap (x \sqcap x)) \\
&\overset{\text{命题 3.2(1a)}}{=} (\bot \sqcap x) \sqcap \neg(\bot \sqcap \neg\neg x) \overset{\text{命题 3.7(3a)}}{=} (\bot \sqcap x) \sqcap \neg(\neg\neg x \sqcap \neg((\bot \sqcap x) \sqcup y)) \\
&\overset{\text{命题 3.6(2a)}}{=} (\bot \sqcap x) \sqcap \neg(\neg\neg x \sqcap \neg(\bot \sqcup y)) \overset{\text{命题 3.2(1a)}}{=} (\bot \sqcap x) \sqcap \neg((x \sqcap x) \sqcap \neg(\bot \sqcup y)) \\
&\overset{\text{定理 3.3(1a)}}{=} (\bot \sqcap x) \sqcap \neg(x \sqcap \neg(\bot \sqcup y)) \overset{\text{命题 3.6(4a)}}{=} (\bot \sqcap x) \sqcap (\bot \sqcup y) \overset{\text{命题 3.6(3a)}}{=} \bot \sqcap x
\end{aligned}
$$

□

下一个定理证明，双布尔代数（定义 1.1）的公理（$6a$）和（$6b$）可在 D-核代数的框架内推导出来。

定理 3.8. 设 D 是一个 D-核代数，且 $x, y, \in D$。那么，我们有

$$(1a)\ x \sqcap (x \vee y) = x \sqcap x \quad (1b)\ x \sqcup (x \wedge y) = x \sqcup x.$$

Proof. Do $x, y \in$

$$
\begin{aligned}
x \sqcap \neg(\neg x \sqcap \neg y) &\overset{\text{P. 3.7(2a)}}{=} x \sqcap \neg(\neg \top \sqcap \neg y) \overset{\text{T. 3.3(2a)}}{=} x \sqcap \neg(\bot \sqcap \neg y) \\
&\overset{\text{P. 3.7(3a)}}{=} x \sqcap \neg(\neg y \sqcap \neg(x \sqcup \top)) \overset{\text{P. 3.7(4b)}}{=} x \sqcap \neg(\neg y \sqcap \neg \top) \\
&\overset{\text{T. 3.3(2a)}}{=} x \sqcap \neg(\neg y \sqcap \bot) \overset{\text{P. 3.7(4a)}}{=} x \sqcap \neg \bot \\
&\overset{\text{T. 3.3(3a)}}{=} x \sqcap (\top \sqcap \top) \overset{\text{T. 3.3(1a)}}{=} x \sqcap \top \overset{\text{P.3.5}\ (1a)}{=} x \sqcap x
\end{aligned}
$$

□

Pr命题 3.9。设 D 是一个 D-核代数，且 $x, y, z \in D$。那么有：

$(1a)\ x\sqcap\neg(x\sqcap y)=x\sqcap\neg y$ $(1b)\ x\sqcup\lrcorner(x\sqcup y)=x\sqcup\lrcorner y$ $(2a)\ x\sqcap\neg(x\sqcap\neg y)=x\sqcap y$ $(2b)\ x\sqcup\lrcorner(\lrcorner y\sqcup x)=x\sqcup y$ $(3a)\ x\sqcap\neg(\neg x\sqcap y)=x\sqcap x$ $(3b)\ \lrcorner((x\sqcup x)\sqcup\lrcorner(\neg x\sqcup y))=\lrcorner x$ $(4a)\ \neg x\sqcap\neg(x\sqcap y))=\neg x$ $(4b)\ \lrcorner x\sqcup\lrcorner(x\sqcup y))=\lrcorner x$ $(5a)\ \neg x\sqcap\neg((x\sqcap y)\sqcap z)=\neg x$ $(5b)\ \lrcorner x\sqcup\lrcorner((x\sqcup y)\sqcup z)=\lrcorner x$ $(6a)\ x\sqcap(y\sqcap\neg x)=\bot$ $(6b)\ x\sqcup(y\sqcup\lrcorner x)=\top$

证明。设 $x,y,z\in D$

(1a) $x\sqcap\neg(x\sqcap y)\overset{\text{P.3.4}(1a)}{=}x\sqcap(\neg x\vee\neg y)\overset{\text{D.3.1}(4a)}{=}(x\sqcap\neg x)\vee(x\sqcap\neg y)$
$\overset{\text{D.3.1}(6a)}{=}\bot\vee(x\sqcap\neg y)\overset{\text{P.3.5}(7a)}{=}x\sqcap\neg y.$

(2a) $x\sqcap\neg(x\sqcap\neg y)\overset{\text{P。3。9}(1a)}{=}x\sqcap\neg\neg y\overset{\text{P。3。2}(1a)}{=}x\sqcap(y\sqcap y)\overset{\text{T.3.3}(1a)}{=}x\sqcap y.$

(3a) $x\sqcap\neg(\neg x\sqcap y)\overset{\text{T.3.3}(1a)}{=}x\sqcap\neg(\neg x\sqcap(y\sqcap y))\overset{\text{P。3。2}(6a)}{=}x\sqcap\neg(\neg x\sqcap\neg\neg y)$
$\overset{\text{def.}\vee}{=}x\sqcap(x\vee\neg y)\overset{\text{T.3.8}(1a)}{=}x\sqcap x.$

(4a) $\neg x\sqcap\neg(x\sqcap y)\overset{\text{P.3.4}(1a)}{=}\neg x\sqcap(\neg x\vee\neg y)\overset{\text{T.3.8}(1a)}{=}\neg x\sqcap\neg x\overset{\text{P.3.2}(6a)}{=}\neg x$

(5a) $\neg x\sqcap\neg((x\sqcap y)\sqcap z)\overset{\text{P.3.4}(1a)}{=}\neg x\sqcap(\neg(x\sqcap y)\vee\neg z)$
$\overset{\text{D.3.1}(4a)}{=}(\neg x\sqcap\neg(x\sqcap y))\vee(\neg x\sqcap\neg z)\overset{\text{P.3.9}(4a)}{=}\neg x\vee(\neg x\sqcap\neg z)$
$\overset{\text{P.3.4}(2a)}{=}\neg x\vee\neg(x\vee z)\overset{\text{P.3.4}(1a)}{=}\neg(x\sqcap(x\vee z))\overset{\text{T.3.8}(1a)}{=}\neg(x\sqcap x)$
$\overset{\text{D.3.1}(2a)}{=}\neg x$

(6a) $x\sqcap y\overset{\text{P. 3.2(2a)}}{=}(x\sqcap y)\sqcap(x\sqcap y)\overset{\text{T. 3.8(1a)}}{=}(x\sqcap y)\sqcap((x\sqcap y)\vee(x\sqcap z)).$
$\overset{\text{D.3.1}(4a)}{=}(x\sqcap y)\sqcap(x\sqcap(y\vee z))$

令 $x:=\neg(y\vee z)$，可得

$\neg(y\vee z)\sqcap y=(\neg(y\vee z)\sqcap y)\sqcap(\neg(y\vee z)\sqcap(y\vee z))\overset{\text{D。3。1(4a)}}{=}(\neg(y\vee z)\sqcap y)\sqcap\bot.$
$\overset{\text{P。3。7}(4a)}{=}\bot.$ i.e. $\bot=\neg(y\vee z)\sqcap y\overset{\text{P.3.4}(2a)}{=}(\neg y\sqcap\neg z)\sqcap y.$

令 $y:=x$ 和 $z:=\neg y$，得到

$\bot=(\neg x\sqcap\neg\neg y)\sqcap x\overset{\text{P。3。2}(1a)}{=}(\neg x\sqcap(y\sqcap y))\sqcap x\overset{\text{T.3.3}(1a)}{=}(\neg x\sqcap y)\sqcap x$ □

命题 3.10. 设 D 是一个 D-核代数，且有 $x,\ y,\ z\in D$。我们有：

$(1a)\ ((x\sqcap y)\sqcap z)\sqcap\neg x=\bot$ $(1b)\ ((x\sqcup y)\sqcup z)\sqcup\lrcorner x=\top$ $(2a)\ \neg(x\sqcap y)\sqcap\neg(x\sqcap\neg y)=\neg x$ $(2b)\ \lrcorner(x\sqcup y)\sqcup\lrcorner(\lrcorner y\sqcup x)=\lrcorner x$ $(3a)\ \neg(\neg(x\sqcap(y\sqcap z))\sqcap z)\sqcap z=x\sqcap(y\sqcap z)$ $(3b)\ \lrcorner(\lrcorner(x\sqcup(y\sqcup z))\sqcup z)\sqcup z=x\sqcup(y\sqcup z)$

证明。令 $x,y,z\in D$

(1a) $\bot\overset{\text{P.3.9}(6a)}{=}((x\sqcap y)\sqcap z)\sqcap(\neg x\sqcap\neg((x\sqcap y)\sqcap z))\overset{\text{P. 3.9}(5a)}{=}((x\sqcap y)\sqcap z)\sqcap\neg x$

(2a) $\neg(x \sqcap y) \sqcap \neg(x \sqcap \neg y) \overset{\text{P.3.4 } (2a)}{=} \neg((x \sqcap y) \vee (x \sqcap \neg y))$

$\overset{\text{D.3.1 } (4a)}{=} \neg(x \sqcap (y \vee \neg y)) \overset{\text{def.}\vee}{=} \neg(x \sqcap \neg(\neg y \sqcap \neg\neg y)) \overset{\text{D. 3.1 (6a)}}{=} \neg(x \sqcap \neg\bot)$

$\overset{\text{T.3.3 } (3a)}{=} \neg(x \sqcap (\top \sqcap \top)) \overset{\text{T. 3.3 (1a)}}{=} \neg(x \sqcap \top) \overset{\text{P.3.5 } (1a)}{=} \neg(x \sqcap x) \overset{\text{D.3.1 } (2a)}{=} \neg x$

(3a) $x \sqcap (y \sqcap z) \overset{\text{D.3.1 } (5a)}{=} \neg\neg(x \sqcap (y \sqcap z))$

$\overset{\text{P.3.10}(2a)}{=} \neg(\neg(x \sqcap (y \sqcap z)) \sqcap z) \sqcap \neg(\neg(x \sqcap (y \sqcap z)) \sqcap \neg z)$

$\overset{\text{P.3.9}(5a)}{=} \neg(\neg(x \sqcap (y \sqcap z)) \sqcap z) \sqcap \neg\neg z$

$\overset{\text{P.3.2 } (1a)}{=} \neg(\neg(x \sqcap (y \sqcap z)) \sqcap z) \sqcap (z \sqcap z)$

$\overset{\text{T.3.3 } (1a)}{=} \neg(\neg(x \sqcap (y \sqcap z)) \sqcap z) \sqcap z$

□

命题 3.11. 设 D 是一个 D-核代数，且有 x、y、$z \in D$。则以下结论成立。

(1a) $\neg(x \sqcap \neg(y \sqcap z)) = \neg(x \sqcap \neg y) \sqcap \neg(x \sqcap \neg z)$ (1b) $\lrcorner(x \sqcup \lrcorner(y \sqcup z)) = \lrcorner(x \sqcup \lrcorner y) \sqcup \lrcorner(x \sqcup \lrcorner z)$ (2a) $x \sqcap (\neg(x \sqcap \neg y) \sqcap \neg(x \sqcap \neg z)) = (y \sqcap x) \sqcap z$ (2b) $x \sqcup (\lrcorner(x \sqcup \lrcorner y) \sqcup \lrcorner(x \sqcup \lrcorner z)) = (y \sqcup x) \sqcup z$.

证明。令 $x, y, z \in D$

(1a) $\neg(x \sqcap \neg(y \sqcap z)) \overset{\text{P3.4 (1a)}}{=} \neg(x \sqcap (\neg y \vee \neg z)) \overset{\text{D3.1 (4a)}}{=} \neg((x \sqcap \neg y) \vee (x \sqcap \neg z))$

$\overset{\text{P3.4 (2a)}}{=} \neg(x \sqcap \neg y) \sqcap \neg(x \sqcap \neg z)$.

(2a) $(y \sqcap x) \sqcap z \overset{\text{D3.1 (1a)}}{=} z \sqcap (y \sqcap x) \overset{\text{P3.10 (3a)}}{=} \neg(\neg(z \sqcap (y \sqcap x)) \sqcap x) \sqcap x$

$\overset{\text{D3.1 (1a)}}{=} \neg(x \sqcap \neg((y \sqcap x) \sqcap z)) \sqcap x \overset{\text{P3.11 (1a)}}{=} (\neg(x \sqcap \neg(y \sqcap x)) \sqcap \neg(x \sqcap \neg z)) \sqcap x$

$\overset{\text{P.3.9 (1a)}}{=} (\neg(x \sqcap \neg y) \sqcap \neg(x \sqcap \neg z)) \sqcap x \overset{\text{D3.1 (1a)}}{=} x \sqcap (\neg(x \sqcap \neg y) \sqcap \neg(x \sqcap \neg z))$

□

下面的定理表明，adBa 定义 1.1 中的公理（$10a$）和（$10b$）可以由 D-核代数的公理推导出来。

定理 3.12. 设 D 是一个 D-核代数，且有 x，y，$z \in D$。则以下结论成立。

(a) $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$ (b) $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$.

Proof. Let $x, y, z \in D$

$x \sqcap (y \sqcap z) \overset{\text{D3.1 (1a)}}{=} x \sqcap (z \sqcap y) \overset{\text{P3.10 (3a)}}{=} \neg(\neg(x \sqcap (z \sqcap y)) \sqcap y) \sqcap y$

$\overset{\text{D3.1 (1a)}}{=} \neg(y \sqcap \neg(x \sqcap (z \sqcap y))) \sqcap y \overset{\text{P3.11 (1a)}}{=} (\neg(y \sqcap \neg x) \sqcap \neg(y \sqcap \neg(z \sqcap y))) \sqcap y$

$\overset{\text{P3.9 (1a)}}{=} (\neg(y \sqcap \neg x) \sqcap \neg(y \sqcap \neg z)) \sqcap y \overset{\text{D3.1 (1a)}}{=} y \sqcap (\neg(y \sqcap \neg x) \sqcap \neg(y \sqcap \neg z))$

$\overset{\text{P3.11 (2a)}}{=} (x \sqcap y) \sqcap z$

□

总结目前为止的结果，我们得到以下主要定理。下一节将利用该定理来完善 dBa 的表示定理。

定理 3.13. 一个类型为 (2,2,1,1,0,0) 的代数 $\mathbf{D} := (D, \sqcap, \sqcup, \neg, \lrcorner, \top, \bot)$ 是 dBa，当且仅当它是一个 D-核代数。

证明。 由定理 3.3、3.8 和 3.12 可得证明。 □

可以证明，定义 3.1 给出了一个最小公理集。为说明这一点，我们必须验证每对公理相对于其余公理的独立性。完整证明相当繁琐。因此，我们仅以公理对 (5a)、(5b) 的证明为例。

定理 3.14. 存在一个代数 $\mathbf{D} := (D, \sqcap, \sqcup, \neg, \lrcorner, \top, \bot)$，它满足 $(1a) - (4a)$、$(1b) - (4b)$、$(6a)$，$(6b)$ 和 (7)，但不满足 $(5a)$ 和 $(5b)$。

证明。 在此证明中，我们构造一个二元代数，使公理 (5a) 和 (5b) 不成立。令 $\mathbf{D} := (\{a, b\}; \sqcap, \sqcup, \neg, \lrcorner, \top, \bot)$，其中 $a = \bot$、$b = \top$ 以及运算由下列表定义：

$\sqcap$	a	b
a	a	a
b	a	b

$\sqcup$	a	b
a	a	b
b	b	b

$\wedge$	a	b
a	b	b
b	b	b

$\vee$	a	b
a	a	a
b	a	a

x	$\neg x$	$\lrcorner x$
a	a	b
b	a	b

现在，根据上述表，我们得到 $\neg\neg(b \sqcap b) = \neg\neg b = \neg a = a \neq b = b \sqcap b$，不满足 (5a)。类似地，$\lrcorner\lrcorner(a \sqcup a) = b \neq a = a \sqcup a$，不满足 (5b)。□

4. dBa 表示定理的改进

本节将以双布尔代数的改进框架为基础，重新审视现有结果并推导出更紧致的表述，从而得出更强、更清晰的定理。

4.1. dBa 的布尔表示

我们仍用**P** 和**Q** 表示第 2 节中定义的两个布尔代数。回顾一下，定理 2.1 表明，可以由它们构造出一个 dBa A，其中包含两对映射 (r, e) 和 (r', e')，并满足三个条件：第一个条件确保公理 12，第二个条件确保公理 (4a) 和 (4b)，第三个条件确保公理 (11a) 和 (11b)。现在，由于定理 3.3 和 3.13，我们可以看出第三个条件实际上是冗余的。因此，得到以下结果。

定理 4.1。A 是 dBa，当且仅当满足以下条件

(1) $e \circ r \circ e' \circ r' = e' \circ r' \circ e \circ r$(2) $e(r(x) \wedge_p r(e'(r'(x) \vee_q r'(y)))) = e(r(x))$ and $e'(r'(x) \vee_q r'(e(r(x) \wedge_p r(y)))) = e'(r'(x))$ 对所有 $x, y \in A$ 均成立。

此外，每个 dBa 都可以通过这样的构造得到。

在下一个定理中，我们将证明一个比定理 2.3 更一般的结果。为此，我们以与普通线性和相同的方式定义两个偏序集 $(P, \leq_P)$ 和 $(Q, \leq_Q)$ 的广义线性和，记作 $P \oplus_g Q$，只是 P 和 Q 可以不相交。

定义 4.2。从形式上说，$P \oplus_g Q$ 的底集为 $P \cup Q$，而 $P \oplus_g Q$ 上的关系 $\leq_{P\oplus_g Q}$ 定义如下

$$x \leq_{P\oplus_g Q} y :\Longleftrightarrow \begin{cases} x, y \in P \text{ and } x \leq_P y, & \text{or} \\ x, y \in Q \text{ and } x \leq_Q y, & \text{or} \\ x \in P \text{ and } y \in Q & \text{or} \\ x = \bot_q \text{ and } y = \top_p \end{cases}$$

也就是说，P 中的每个元素都被规定为小于 Q中的每个元素，但 $P \cap Q$ 可能非空。

命题 4.3。设 $(P, \leq_P)$ 和 $(Q, \leq_Q)$ 是两个偏序集，则 $P \oplus_g Q$ 是一个准序集。

证明。根据定义，关系 $\leq_{P\oplus_g Q}$ 是自反的。设 $x \leq_{P\oplus_g Q} y$ 和 $y \leq_{P\oplus_g Q} z$。若 $x, y, z \in P$ 或 $x, y, z \in Q$，则传递性分别由 $\leq_P$ 和 $\leq_Q$ 的传递性得出。若 y 或 z 之一属于 Q，而 $x \in P$，则根据 $\leq_{P\oplus_g Q}$ 的定义，我们也有 $x \leq_{P\oplus_g Q} z$。因此，$\leq_{P\oplus_g Q}$ 是传递的。□

关系 $\leq_{P\oplus_g Q}$ 不一定是反对称的。例如，取 $x, y \in P \cap Q$，其中 $x \neq y$。那么，$x \leq_{P\oplus_g Q} y$ 和 $y \leq_{P\oplus_g Q} x$ 均成立。此外，当 $P \cap Q = \emptyset$ 时，广义线性和就化为普通线性和。

对于布尔代数 P 和 Q，考虑映射对 $r\colon P \cup Q \rightleftharpoons P\colon e$ 和 $r'\colon P \cup Q \rightleftharpoons Q\colon e'$，它们定义为

$$r(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x \in P \\ \top_p, & \text{otherwise} \end{cases} \qquad r'(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x \in Q \\ \bot_q, & \text{otherwise} \end{cases}$$
$$e(x) = x \text{ for all } x \in P \qquad e'(x) = x \text{ for all } x \in Q$$

于是，我们可以定义如下泛代数，

$$\mathbf{P{+}Q} := (P \cup Q, \sqcap, \sqcup, \neg, \lrcorner, e'(\top_q), e(\bot_p))$$

其中运算的定义如方程（1.6）所示。此外，我们按照方程（1.5）在 $P \cup Q$ 上定义关系 $\sqsubseteq$。

引理 4.4. 对所有 $x, y \in P \cup Q$, $x \sqsubseteq y$，当且仅当 $x \leq_{P\oplus_g Q} y$。

证明。令 x、$y \in P \cup Q$ 和 $x \sqsubseteq y$，则 $x \sqcap y = e(r(x) \wedge_p r(x))$ 且 $x \sqcup y = e'(r'(y) \vee_q r'(y))$。若 x、$y \in P$，则 $x \wedge_p y = e(r(x) \wedge_p r(y)) = x \sqcap y = e(r(x) \wedge_p r(x)) = x \wedge_p x = x$，这意味着 $x \leq_P y$。因此 $x \leq_{P\oplus_g Q} y$。若 x、$y \in Q$，则 $x \vee_q y = e'(r'(x) \vee_q r'(y)) = x \sqcup y = e'(r'(y) \vee_q r'(y)) = y \vee_q y = y$，这意味着 $x \leq_Q y$。因此 $x \leq_{P\oplus_g Q} y$。若 $x \in P$ 且 $y \in Q$，则 $x \leq_{P\oplus_g Q} y$。现在，若 $x \notin P$ 且 $y \in P$，$e(r(x) \wedge_p r(y)) = e(r(x) \wedge_p r(x))$ 意味着

$y = \top_p$ 且 $e'(r'(x) \vee_p r'(y)) = e'(r'(y) \vee_p r'(y))$，这意味着 $x = \perp_q$。因此 $x \leq_{P \oplus_g Q} y$。

反过来，设 $x,\ y \in P \cup Q$ 和 $x \leq_{P \oplus_g Q} y$。若 $x,\ y \in P$，则 $x \sqcap y = x \wedge_p y = x \wedge_p x = x \sqcap x$ 且 $x \sqcup y = e'(r'(x) \vee_q r'(y)) = e'(\perp_q \vee \perp_q) = y \sqcup y$。因此 $x \sqsubseteq y$。若 $x,\ y \in Q$，则我们可以证明 $x \sqcap y = e(\top_p \wedge_p \top_p) = x \sqcap x$ 且 $x \sqcup y = x \vee_q y = y \vee_q y = y \sqcup y$，这意味着 $x \sqsubseteq y$。若 $x \in P$ 且 $y \in Q$，则 $x \sqcap y = x \wedge_p x = x \sqcap x$ 且 $x \sqcup y = y \vee_q y = y \sqcap y$，这意味着 $x \sqsubseteq y$。若 $x = \perp_q$ 且 $y = \top_p$，则 $x \sqcap y = \top_p = x \sqcap x$ 且 $x \sqcup y = \perp_q = y \sqcup y$，这意味着 $x \sqsubseteq y$。

□

定义 4.5. P 和 Q 的广义粘合和是一个有序代数结构 $P \oplus Q := (P \cup Q,\ \sqcap,\ \sqcup,\ \neg,\ \lrcorner,\ \top_q,\ \perp_p)$，满足以下条件。

(a) 对于 $x,\ y \in P$, $x \sqcap y = x \wedge_p y$, $\neg x = \neg_p x$(b) 对于 $x,\ y \in Q$, $x \sqcup y = x \vee_q y$, $\lrcorner x = \neg_q x$(c) $x \leq_{P \oplus_g Q} y$ 当且仅当 $x \sqcap y = x \sqcap x$ 且 $x \sqcup y = y \sqcup y$ 对所有 $x,\ y \in P \cup Q$

命题 4.6. P+Q $:= (P \cup Q,\ \sqcap,\ \sqcup,\ \neg,\ \lrcorner,\ e'(\top_q)\ e(\perp_p))$ 是一个广义粘合和。

证明。 条件 (a) 和 (b) 由运算的定义得出。条件 (c) 由引理 4.4 得出。 □

在介绍下一个结果之前，我们先定义广义 D-核代数。

定义 4.7. 若一个泛代数 $(D, \sqcap, \sqcup, \neg, \lrcorner, \top, \perp)$ 满足定义 3.1 中的 (1a)-(2a)、(4a)-(6a)、(1b)-(2b)、(4b)-(6b) 和 7，则称其为广义 *D*-核代数 。

例 4.8. 本例构造了一个广义 D-核代数，但不是 D-核代数的泛代数。

$\sqcup$	a	b	c
a	c	b	c
b	b	b	b
c	c	b	c

$\wedge$	a	b	c
a	c	c	c
b	c	b	c
c	c	c	c

$\sqcap$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

$\vee$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

x	$\neg x$	$\lrcorner x$
a	a	b
b	c	c
c	b	b

$a \sqcap (a \sqcup c) = b \neq a = a \sqcap a$ 和 $a \sqcup (a \sqcap c) = b \neq c = a \sqcup a$

上述示例表明，存在一个非 D-核代数 D，它满足 $(1a) - (2a)$、$(1b) - (2b)$、$(4a) - (6a)$,$(4b) - (6b)$ 和 (7)，但不满足 $(3a)$ 和 $(3b)$。

定理 4.9. 对于两个布尔代数 P 和 Q，假设 $\{\top_p, \perp_q\} \subseteq P \cap Q$。那么，P +Q 是一个广义 D-核代数。

证明。 我们需要证明，对于所有 $x \in P \cup Q$，$e \circ r \circ e' \circ r'(x) = e' \circ r' \circ e \circ r(x)$。为此，我们需要考虑三种情况：

。 $x \in P \cap Q$: 那么 $e \circ r \circ e' \circ r'(x) = x = e' \circ r' \circ e \circ r(x)$。 $x \in P$ 和 $x \notin Q$: 那么 $e \circ r \circ e' \circ r'(x) = e \circ r(\perp_q) = \perp_q$ 与 $\perp_q \in P$ 和 $e' \circ r' \circ e \circ r(x) = e' \circ r'(x) = \perp_q$ 与 $x \notin Q$。

。 $x \notin P$和 $x \in Q$: 那么 $e \circ r \circ e' \circ r'(x) = e \circ r(x) = \top_p$与 $x \notin P$ 和$e' \circ r' \circ e \circ r(x) = e' \circ r'(\top_p) = \top_p$与 $\top_p \in Q$。

□

推论 4.10. 假设布尔代数 P 和 Q 的论域满足 $P \cap Q = \{\top_p\} = \{\bot_q\}$，则 $\mathbf{P}+\mathbf{Q}$ 是一个纯平凡双布尔代数。反过来，每个纯平凡双布尔代数都是两个布尔代数的粘合和。

证明。 根据定理 4.9，代数 $\mathbf{P}+\mathbf{Q}$ 是一个广义 D-核代数。对于任意 $x, y \in P \cup Q$，有

$$e(r(x) \wedge_p r(e'(r'(x) \vee_q r'(y)))) = x \sqcap (x \sqcup y) \quad \text{and} \quad e(r(x)) = x \sqcap x.$$

因此，要证明 $\mathbf{P}+\mathbf{Q}$ 是一个 D-核代数，只需验证对所有 $x, y \in P \cup Q$，$x \sqcap (x \sqcup y) = x \sqcap x$。

根据 x 和 y 的归属情况，这个等式在所有可能情形下都成立。若 $x \notin P$ 和 $y \notin Q$，则 $x \sqcap (x \sqcup y) = x \sqcap x$。若 $x \notin Q$ 和 $y \notin P$，则 $x \sqcap (x \sqcup y) = x \sqcap y = x = x \sqcap x$。若 x、$y \in P$ 和 x、$y \notin Q$，则 $x \sqcup y = \bot_q$，因此 $x \sqcap (x \sqcup y) = x \sqcap \bot_q = x = x \sqcap x$。若 x、$y \in Q$ 和 x、$y \notin P$，则 $x \sqcup y = x \vee_q y$; 此时，或者 $x \vee_q y \notin P$，于是$x \sqcap (x \sqcup y) = \top_p = x \sqcap x$; 或者 $x \vee_q y \in P \cap Q$，这意味着 $x \vee_q y = \top_p = \bot_q$，并再次得到 $x \sqcap (x \sqcup y) = x \sqcap \top_p = \top_p = x \sqcap x$。最后，当其中一个或两个元素等于公共边界元素 $\top_p = \bot_q$ 时，直接验证可知，在其余每一种子情形下都有 $x \sqcap (x \sqcup y) = x \sqcap x$。因此，对所有 x、$y \in P \cup Q$，均有 $x \sqcap (x \sqcup y) = x \sqcap x$，从而 P+Q 是一个 D- 核代数。根据定理 4.1 可知，P+Q 是一个 dBa。此外，对于每个 $x \in P \cup Q$，当 $x \in P$ 时有 $x \sqcap x = x$，当 $x \in Q$ 时有 $x \sqcup x = x$，这表明 P +Q 是一个纯 dBa。最后，由于 $\top_q \sqcap \top_q = \top_p = \bot_q = \bot_p \sqcup \bot_p$，代数 P + Q 是一个平凡双布尔代数。

反过来，设 $\mathbf{D} := (D; \sqcap, \sqcup, \neg, \lrcorner, \top, \bot)$ 是一个纯平凡 dBa。对于布尔代数 $\mathbf{P} = (D_\sqcap, \sqcap, \vee, \neg, \neg\bot, \bot)$ 和 $\mathbf{Q} = (D_\sqcup, \sqcup, \wedge, \lrcorner, \top, \lrcorner\top)$，定义映射 $r\colon D_\sqcup \cup D_\sqcap \to D_\sqcap$ by $r(x) = x \sqcap x$, $e\colon D_\sqcap \to D_\sqcup \cup D_\sqcap$ by $e(x) = x$, $r'\colon D_\sqcup \cup D_\sqcap \to D_\sqcup$ by $r'(x) = x \sqcup x$，以及 $e'\colon D_\sqcup \to D_\sqcup \cup D_\sqcap$ by $e'(x) = x$。于是，根据定理 4.1，$(D_\sqcap \cup D_\sqcup, \sqcap_r, \sqcup_{r'}, \neg_r, \lrcorner_{r'}, e'(\top)\ e(\bot))$ 是一个 dBa，其中，$x \sqcap_r y := e(r(x) \sqcap r(y))$ $x \sqcup_{r'} y := e'(r'(x) \sqcup r'(y))$ $\neg_r x := e(\neg r(x))$，且 $\lrcorner_r x := e'(\lrcorner r'(x))$。此外，对于所有 $x, y \in D_\sqcap \cup D_\sqcup$, $x \sqcap_r y = x \sqcap y$, $x \sqcup_{r'} y = x \sqcup y$, $\neg_r x = \neg x$, 以及 $\lrcorner_r x = \lrcorner x$, $e'(\top) = \top$ and $e(\bot) = \bot$。为完成证明，我们需要证明，对于所有 $x, y \in D_\sqcap \cup D_\sqcup$, $x \leq_{D_\sqcap \oplus_g D_\sqcup} y$ 当且仅当 $x \sqcap y = x \sqcap x$ and $x \sqcup y = y \sqcup y$。

对于 $x, y \in D_\sqcap$, $x \leq_{D_\sqcap \oplus_g D_\sqcup} y$ 当且仅当 $x \sqsubseteq_{D_\sqcap} y$ 当且仅当 $x \sqsubseteq y$ 当且仅当 $x \sqcap y = x \sqcap x$ 且 $x \sqcup y = y \sqcup y$

与上述类似，我们可以证明 $x, y \in D_\sqcup$, $x \leq_{D_\sqcap \oplus_g D_\sqcup} y$ 当且仅当 $x \sqcap y = x \sqcap x$ 且 $x \sqcup y = y \sqcup y$。

现在，若 $x \in D_\sqcap$、$y \in D_\sqcup$、$x \sqcap y = x \sqcap x$ 和 $x \sqcup y = y \sqcup y$，则根据定义有 $x \leq_{D_\sqcap \oplus_g D_\sqcup} y$。现在假设 $x \leq_{D_\sqcap \oplus_g D_\sqcup} y$ 和 $x \in D_\sqcap$、$y \in D_\sqcup$。 $x \sqcap y = x \sqcap (y \sqcap y) = x \sqcap (\top \sqcap \top) = x \sqcap \top = x \sqcap x$，且 $x \sqcup y = (x \sqcup x) \sqcap y = (\bot \sqcup \bot) \sqcup y = \bot \sqcup y = y \sqcup y$。

□

4.2. dBa 表示定理

本小节将讨论 dBas 的拓扑表示。回顾第 2 节中定义的拓扑空间（$\mathcal{F}^{pr}$(D)，$\mathcal{T}$）和（$\mathcal{I}^{pr}$(D)，$\mathcal{J}$）。根据命题 2.12，这些拓扑空间是紧致且完全不连通的拓扑空间。此外，我们可以证明如下结论。

引理 4.11. 子集 X（分别为 Y）在 $\mathcal{F}^{pr}$(D)（分别为 $\mathcal{I}^{pr}$(D)）中是既开又闭的，当且仅当对于某个 $x \in D$，有 $X = F_x$（分别为 $Y = I_x$）。

证明。由于 X 是闭集，我们有 $X = \bigcap_{j\in J}\bigcup_{a\in D_j} F_a$，其中对于每个 $j \in J$，集合 D_j 是 D的有限子集。由于 X 是开集，其补 $X^c = \bigcup_{j\in J}\bigcap_{a\in D_j} F_a^c$是 $(F_{pr}(D), \mathcal{T})$ 的闭子集。由于 $(F_{pr}(D), \mathcal{T})$ 是紧致的，X^c 是紧致的，因此存在有限子集 $E \subseteq J$，使得 $X^c = \bigcup_{j\in E}\bigcap_{a\in D_j} F_a^c$。利用引理 2.6(6)、(3) 和命题 3.4(2a)，我们得到 $X^c = \bigcup_{j\in E}\bigcap_{a\in D_j} F_{\neg a} = \bigcup_{j\in E} F_{\sqcap_{a\in D_j}\neg a} = \bigcup_{j\in E} F_{\neg(\bigvee_{a\in D_j} a)}$。取补得到 $X = \bigcap_{j\in E} F_{\neg\neg(\bigvee_{a\in D_j} a)} = \bigcap_{j\in E} F_{\bigvee_{a\in D_j} a}$，因为对于每个 $j \in E$ 都有 $\bigvee_{a\in D_j} a \in D_\sqcap$。因此，$X = F_{\sqcap_{j\in E}(\bigvee_{a\in D_j} a)}$，并令$x = \sqcap_{j\in E}(\bigvee_{a\in D_j} a)$，我们得出 $X = F_x$。

□

令 $clopen$(J) 表示 J 的所有既开又闭子集组成的集合，令 $clopen$(T) 表示 T 的所有既开又闭子集组成的集合。令 D $\subseteq$ $clopen$(T) $\times$ $clopen$(J)，使得 D := {(F_x, I_x) | $x \in D$}。令 $\mathrm{D}_\sqcap$:= {$(F_x, I_{x\sqcap x})$ | $x \in D$}，且 $\mathrm{D}_\sqcup$:= {$(F_{(x\sqcup x)}, I_x)$ | $x \in D$}。注意，$\mathrm{D}_\sqcap$、$\mathrm{D}_\sqcup$ ⊆ D，因为 $F_x = F_{x\sqcap x}$ 和 $I_x = I_{x\sqcup x}$。于是我们可以证明如下结论。

引理 4.12. 设 **D** 是一个 dBa。则以下结论成立：

(1) $(\mathcal{D}_\sqcap, \vee_B, \wedge_B, \neg_B, 0)$ 是一个布尔代数，其中：

- 并：$(F_x, I_{x\sqcap x}) \vee_B (F_y, I_{y\sqcap y}) = (F_{x\vee y}, I_{x\vee y})$
- 交：$(F_x, I_{x\sqcap x}) \wedge_B (F_y, I_{y\sqcap y}) = (F_{x\sqcap y}, I_{x\sqcap y})$
- 补：$\neg_B(F_x, I_{x\sqcap x}) = (F_{\neg x}, I_{\neg x})$
- 底元：$0 = (F_\bot, I_\bot)$

(2) $(\mathcal{D}_\sqcup, \vee_B, \wedge_B, \lrcorner_B, 1)$ 是一个布尔代数，其中：

- 并：$(F_{(x\sqcup x)}\ I_x) \vee_B (F_{(y\sqcup y)}\ I_y) = (F_{(x\sqcup y)}\ I_{x\sqcup y})$
- 交：$(F_{(x\sqcup x)}\ I_x) \wedge_B (F_{(y\sqcup y)}\ I_y) = (F_{(x\wedge y)}\ I_{x\wedge y})$
- 补：$\lrcorner_B(F_{x\sqcup x}, I_x) = (F_{\lrcorner x}, I_{\lrcorner x})$
- 最大元：$1 = (F_\top,\ I_\top)$

证明。证明很直接。关键观察是，联结词 $\wedge_B$ 模仿了 dBa D 的运算 $\sqcap$，而联结词 $\vee_B$ 模仿了 D 的运算 $\sqcup$。我们知道，对于 dBa D，结构 $(D_\sqcap, \sqcap, \vee, \neg, \bot)$ 和 $(D_\sqcup, \sqcup, \wedge, \lrcorner, \top)$ 各自构成一个布尔代数。

□

现在我们将映射对 (r_0, e_0) 和 (r_1, e_1) 定义如下：

$r\colon \mathrm{D} \to \mathrm{D}_{\sqcap},\ (F_x,\ I_x) \mapsto (F_x,\ I_{x\sqcap x});\ e\colon \mathrm{D}_{\sqcap} \to \mathrm{D},\ (F_x,\ I_{x\sqcap x}) \mapsto (F_{x\sqcap x},\ I_{x\sqcap x});$
$r'\colon \mathrm{D} \to \mathrm{D}_{\sqcup},\ (F_x,\ I_x) \mapsto (F_{x\sqcup x},\ I_x);\ e'\colon \mathrm{D}_{\sqcup} \to \mathrm{D},\ (F_{x\sqcup x},\ I_x) \mapsto (F_{x\sqcup x},\ I_{x\sqcup x})$。

命题 4.13。映射对 (r, e) 和 (r', e') 满足定理 4.1 的条件。

证明。由映射的定义可知，$r \circ e$ 和 $r' \circ e'$ 分别是 $\mathcal{D}_{\sqcap}$ 和 $\mathcal{D}_{\sqcup}$ 上的恒等映射。此外，r, r' 是满射，而 e, e' 是单射。令 (F_x, I_x),$(F_y, I_y) \in \mathcal{D}$。

$$e \circ r \circ e' \circ r'((F_x, I_x)) = e \circ r \circ e'((F_{x\sqcup x}, I_x)) = e \circ r((F_{x\sqcup x}, I_{x\sqcup x}))$$
$$= e((F_{x\sqcup x}, I_{(x\sqcup x)\sqcap (x\sqcup x)})) = (F_{(x\sqcup x)\sqcap (x\sqcup x)}, I_{(x\sqcup x)\sqcap (x\sqcup x)})$$

与上文类似，我们可以证明 p

$$e' \circ r' \circ e \circ r((F_x, I_x)) = (F_{(x\sqcap x)\sqcup (x\sqcap x)}, I_{(x\sqcap x)\sqcup (x\sqcap x)})$$
$$= (F_{(x\sqcup x)\sqcap (x\sqcup x)}, I_{(x\sqcup x)\sqcap (x\sqcup x)}) = e \circ r \circ e' \circ r'((F_x, I_x))$$

$$r'((F_x, I_x)) \vee r'((F_y, I_y)) = (F_{x\sqcup x}, I_x) \vee (F_{y\sqcup y}, I_y) = (F_{x\sqcup y}, I_{x\sqcup y})$$
$$\overset{\text{P. 3.2(2b)}}{=} e(F_{(x\sqcup y)\sqcup (x\sqcup y)}, I_{x\sqcup y}) \text{ which implies that}$$

$e'(r'((F_x, I_x)) \vee r'((F_y, I_y))) = (F_{(x\sqcup y)\sqcup (x\sqcup y)}, I_{(x\sqcup y)\sqcup (x\sqcup y)}) = (F_{x\sqcup y}, I_{x\sqcup y})$ 因此 $r(e'(r'((F_x, I_x)) \vee r'((F_y, I_y)))) = (F_{x\sqcup y}, I_{(x\sqcup y)\sqcap (x\sqcup y)})$。因此，$r(F_x, I_x) \wedge r(e'(r'((F_x, I_x)) \vee r'((F_y, I_y)))) = (F_{x\sqcap (x\sqcup y)}, I_{x\sqcap (x\sqcup y)})$，这意味着

$$e(r(F_x, I_x) \wedge r(e'(r'((F_x, I_x)) \vee r'((F_y, I_y))))) = (F_{x\sqcap (x\sqcup y)}, I_{x\sqcap (x\sqcup y)})$$

$\overset{\text{D. 3.1(3a)}}{=} (F_{x\sqcap x},\ I_{x\sqcap x}) = (F_x,\ I_{x\sqcap x}) = e \circ r((F_x,\ I_x))$ 第三个等式由 $F_{x\sqcap x} = F_x$ 得出。同理，我们可以证明 $e'(r'(F_x,\ I_x) \wedge r'(e(r((F_x,\ I_x)) \vee r((F_y,\ I_y))))) = e' \circ r'((F_x,\ I_x))$。 □

推论 4.14. ($\mathcal{D}$ $\sqcap$, $\sqcup$, $\neg$, $\lrcorner$, $e'(1)$ $e(0)$) 是一个 dBa，其中运算由方程（1.6）定义。

证明。由定理 4.1 和命题 4.13 可得。 □

定理 4.15。每个 dBa D 都与 Stone 拓扑空间的闭开子集所构成的 dBa 拟同构。此外，如果 dBa D 是语境的，则该拟同构成为同构。

证明。我们考虑 Stone 拓扑空间 ($\mathrm{F}_{Pr}(\mathrm{D})$, T) 和 ($\mathrm{I}_{Pr}(\mathrm{D})$, J)。那么，积 ($\mathrm{F}_{Pr}(\mathrm{D}) \times \mathrm{I}_{Pr}(\mathrm{D})$, T $\times$ J) 也是一个 Stone 拓扑空间。根据引理 4.11，$F_x \times I_x$ 是积拓扑中的闭开子集。闭开集 $F_x \times I_x$ 可与有序对 (F_x, I_x) 进行对应。于是由推论 4.14，我们得到所需的代数 D: $= (\mathrm{D}\ \sqcap, \sqcup, \neg, \lrcorner, e'(1)\ e(0))$。映射 $h : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ 定义为 $h(x) = (F_x, I_x)$。该映射是满射。根据定理 2.7，h 是一个双布尔代数同态，并且 $x \sqsubseteq y$ 当且仅当 $h(x) \sqsubseteq h(y)$。

现在，若 D 是语境的，那么映射 h 也是单射，因为此时拟序变为偏序。因此，在这种情况下，h 是同构。□

回顾拓扑空间上的背景的定义 2.10。

定义4.16. 设 $\mathbb{K}^T:=((G,\ \rho),\ (M,\ \tau)\ R)$ 是一个 CTS，且 $A \subseteq G$ 和 $B \subseteq M$。那么，若一对集合 $(A,\ B)$ 是 $\mathbb{K}=(G,\ M,\ R)$ 的原概念（分别为半概念），且 A 和 B 分别是 $(G,\ \rho)$ 和 $(M,\ \tau)$ 中的闭开集，则称这对集合为开闭原概念（分别为半概念）

所有既开又闭的开闭原概念组成的集合记为 $\mathfrak{P}^T(\mathbb{K}^T)$，所有既开又闭的半概念组成的集合记为 $\mathfrak{H}^T(\mathbb{K}^T)$。

定理 4.17. 设 $\mathbb{K}^T(\mathrm{D}) := ((\mathcal{F}^{pr}(\mathrm{D}),\ \mathcal{T}),\ (\mathcal{I}^{pr}(\mathrm{D}),\ \mathcal{J})\ \Delta)$ 是基于 dBa D 的 CTS，且 $A \subseteq \mathcal{F}^{pr}(\mathrm{D})$ 和 $B \subseteq \mathcal{I}^{pr}(\mathrm{D})$。那么，我们有

(1) 若 D 是全语境的，则 $(A,\ B)$ 是一个既开又闭的开闭原概念，当且仅当 $A = F_x$ 且 $B = I_x$，其中某个 $x \in D$(2) 若 D 是纯的，则 $(A,\ B)$ 是一个既开又闭的半概念，当且仅当 $A = F_x$且 $B = I_x$，其中某个 $x \in D$

证明. (1) 设 (A, B) 是 $\mathbb{K}^T(\mathrm{D})$ 的一个既开又闭的开闭原概念。现在考虑既开又闭的半概念 (A, A') 和 (B', B)，于是 $(A, A')_{\sqcup} = (A, A')\ \sqcup (A, A') = (A'', A') = (B', B'') = (B', B) \sqcap (B', B) = (B', B)_{\sqcap}$。由于 A 在 $(\mathrm{F}^{pr}(\mathrm{D}), \mathrm{T})$ 中是既开又闭的，且 B 在 $(\mathrm{I}^{pr}(\mathrm{D}), \mathrm{J})$ 中是既开又闭的，根据引理 4.11，$A = F_x$ 和 $B = I_y$ 对于 $x, y \in D$ 成立。根据引理 2.6(1)，$(A, A') = (F_x, I_{x\sqcap x}) = (F_{x\sqcap x}, I_{x\sqcap x}) = (F_a, I_a)$，其中 $a = x \sqcap x$。由引理 2.6 (2)，$(B', B) = (F_{y\sqcup y}, I_y) = (F_{y\sqcup y}, I_{y\sqcup y}) = (F_b, I_b)$，其中 $b = y \sqcup y$。

现在，$(F_a, I_a)_{\sqcup} = (F_{a\sqcup a}, I_{a\sqcup a})$，类似地，我们可以证明 $(F_b, I_b)_{\sqcap} = (F_{b\sqcap b}, I_{b\sqcap b})$。因此，$(F_{a\sqcup a}, I_{a\sqcup a}) = (F_{b\sqcap b}, I_{b\sqcap b})$，这意味着 $a \sqcup a = b \sqcap b$。由于 D 是全语境的，存在一个 $c \in D$、$c \sqcap c = a$ 和 $c \sqcup c = b$，这意味着 $A = F_a = F_{c\sqcap c} = F_c$ 和 $B = I_b = I_{c\sqcup c} = I_c$。因此，$(A, B) = (F_c, I_c)$。

反过来，$F_x'' = I'_{x\sqcap x} = F_{(x\sqcap x)\sqcup(x\sqcap x)} = F_{x\sqcup x} = I'_x$，因此 (F_x, I_x) 是一个开闭原概念。

(2) 由于 D 是纯 dBa，因此 $x \sqcap x = x$ 或 $x \sqcup x = x$ 对于 $x \in D$。若 $x \sqcap x = x$，则 $(F_x,\ I_x) = (F_x,\ F'_x)$；若 $x \sqcup x = x$，则 $(F_x,\ I_x) = (I'_x,\ I_x)$。

如果该半概念为 $(A,\ A')$，那么我们可以将其写作 $(A,\ A') = (F_x,\ F'_x) = (F_x,\ I_{x\sqcap x}) = (F_{x\sqcap x},\ I_{x\sqcap x})$。如果 $(B',\ B)$，那么我们可以将 $(B',\ B) = (F_{x\sqcup x},\ I_{x\sqcup x})$ 写作。□

推论 4.18。

(1) 对于完全上下文 dBa D，集合 $\mathfrak{P}^T(\mathbb{K}^T(\mathrm{D}))$ 构成一个完全上下文 dBa，并且与 D 同构。(2) 对于纯 dBa D，集合 $\mathfrak{H}^T(\mathbb{K}^T(\mathrm{D}))$ 构成一个纯 dBa，并且与 D 同构。

证明。（1）根据定理 4.17，集合 $\mathfrak{P}^T(\mathbb{K}^T(\mathrm{D}))$ 与集合 D 重合。根据推论 4.14，$\mathfrak{P}^T(\mathbb{K}^T(\mathrm{D}))$ 构成一个 dBa。由于完全上下文 dBa 是情境的，根据定理 4.15，D 与 $\mathfrak{P}^T(\mathbb{K}^T(\mathrm{D}))$ 同构。现在还需证明该代数是完全上下文的。设 (F_a, I_a) 和 (F_b, I_b) 属于 $\mathfrak{P}^T(\mathbb{K}^T(\mathrm{D}))$，使得 $(F_a, I_a)_{\sqcap} = (F_a, I_a)$ 且 $(F_b, I_b)_{\sqcup} = (F_b, I_b)$，以及 $(F_a, I_a)_{\sqcup} = (F_b, I_b)_{\sqcap}$。因此，$(F_{a\sqcap a}, I_{a\sqcap a}) = (F_a, I_a)$，$(F_{b\sqcup b}, I_{b\sqcup b}) = (F_b, I_b)$，并且 $(F_{a\sqcup a}, I_{a\sqcup a}) = (F_{b\sqcap b}, I_{b\sqcap b})$，这意味着 $a \sqcap a = a$, $b \sqcup b = b$ 和 $a \sqcup a = b \sqcap b$。由于 D 是完全上下文的，存在一个 $c \in D$, $c \sqcap c = a$

以及 $c \sqcup c = b$，这意味着 $(F_c, I_c)_{\sqcap} = (F_{c\sqcap c}, I_{c\sqcap c}) = (F_a, I_a)$，并且 $(F_c, I_c)_{\sqcup} = (F_{c\sqcup c}, I_{c\sqcup c}) = (F_b, I_b)$。

(2) 证明与 (1) 的证明类似，因此省略证明。 □

推论 4.18 是定理 2.19 和 2.20 的一种替代方案。它根据上下文的经典原型概念和半概念，为完全与纯 dBa 提供了一个表示定理。此处给出的证明比 [11] 中的证明更简单。此外，定理 2.19 和 2.20 中给出的表示结果可以由推论 4.18 推出，反之亦然。

现在回顾定理 2.9(1)，它指出必要算子、充分算子和导出算子在性质上互为对偶，且每个算子都可以转化为其他算子。牢记这一观察，下面给出定义 2.15 的一个对偶表述。

定义 4.19. 若 CTS $\mathbb{K}^T := ((G, \rho), (M, \tau)\ R)$ 满足 $\mathbb{K}^T := ((G, \rho), (M, \tau)\ R^c)$ 是 CTSCR，则称其为翻译型 *CTSCR*。

回顾第 1 节中定义在集合 $\mathfrak{P}(\mathbb{K})$ 上的运算 $\sqcap, \sqcup, \neg, \lrcorner, \top$ 和 $\bot$。于是我们有以下结果。

定理 4.20. 设 $\mathbb{K}^T := ((G, \rho), (M, \tau)\ R)$ 是一个翻译型 CTSCR。那么我们有以下结论。

(1) $\underline{\mathfrak{P}}^T(\mathbb{K}^T) := (\mathfrak{P}^T(\mathbb{K}^T)\ \sqcup, \sqcap, \neg, \lrcorner, \top, \bot)$ 是一个完全上下文 dBa。此外，$\mathfrak{P}^T(\mathbb{K}^T)$ 与 $\underline{\mathfrak{R}}^T(\mathbb{K}^T)$ 同构。(2) $\underline{\mathfrak{H}}^T(\mathbb{K}^T) := (\mathfrak{H}^T(\mathbb{K}^T)\ \sqcup, \sqcap, \neg, \lrcorner, \top, \bot)$ 是 $\mathfrak{P}^T(\mathbb{K}^T)$ 的子代数，且是一个纯 dBa。此外，$\mathfrak{H}^T(\mathbb{K}^T)$ 与 $\mathfrak{S}^T(\mathbb{K}^T)$ 同构。

证明。（1）容易验证，集合 $\mathfrak{P}^T(\mathbb{K}^T)$ 对运算 $\sqcap$、$\sqcup$、$\neg$ 和 $\lrcorner$ 封闭。例如，设 (A, B)、$(C, D) \in \mathfrak{P}^T(\mathbb{K}^T)$。则 $(A, B) \sqcap (C, D) = (A \cap C, (A \cap C)')$。由于 A 和 C 既开又闭，$A \cap C$ 既开又闭。由定理 2.9(1)，$(A \cap C)'_R = (A \cap C)^{\square}_{R^c}$。根据定义 4.19，$\mathbb{K}^T := ((G, \rho), (M, \tau)\ R)$ 是一个 CTSCR，这意味着 $(A \cap C)^{\square}_{R^c}$ 既开又闭。因此，$(A \cap C)'_R$ 既开又闭，这意味着 $(A, B) \sqcap (C, D) \in \mathfrak{P}^T(\mathbb{K}^T)$。代数 $\mathfrak{P}^T(\mathbb{K}^T)$ 是一个情境双布尔代数，因为它是 $\mathfrak{P}(\mathbb{K})$ 的子代数。为证明它是一个完全上下文 dBas，设 (A, B)、$(C, D) \in \mathfrak{P}^T(\mathbb{K}^T)$，使得 $(A, B)_{\sqcap} = (A, A') = (A, B)$，且 $(C, D)_{\sqcup} = (D', D) = (C, D)$，并且 $(A, B)_{\sqcap} = (A'', A') = (C, D)_{\sqcup} = (D', D'')$，则 $(A, D) \in \mathfrak{P}^T(\mathbb{K}^T)$。此外，$(A, D)_{\sqcap} = (A, B)$ 且 $(A, D)_{\sqcup} = (C, D)$。因此它是一个完全上下文 dBa。

□

注。表示定理 2.19 和 2.20 可作为定理 4.20 和推论 4.18 的推论得到。

5. 上下文 dBas 与纯 dBas 的逻辑

5.1. 重新定义上下文 dBas 的逻辑

可靠性和完备性的证明与 [9] 中 CDBL 的证明完全遵循相同的模式。因此，我们在此仅介绍证明系统，并

指出 CDBL 的若干公理可在我们的新系统中推导出来。有关 CDBL 的详细信息，请读者参阅 [9]。

逻辑 L 的字母表由一个可数集合 $P=\{p,\ q,\ .....\}$ 的命题变量、命题常元 $\bot,\ \top$ 以及逻辑联结词$\sqcup,\ \sqcap,\ \neg,\ \lrcorner$组成。然后，公式集合 Fm 通过归纳方式定义为 $p\in P$

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \lrcorner\varphi \mid \varphi\sqcap\varphi \mid \varphi\sqcup\varphi \mid \top \mid \bot.$$

L 的公理由以下模式给出。

$$\varphi\Rightarrow\varphi;\quad \varphi\sqcap\psi\Rightarrow\varphi;\quad \varphi\sqcap\psi\Rightarrow\psi$$

$$\varphi\Rightarrow\varphi\sqcup\psi;\quad \psi\Rightarrow\varphi\sqcup\psi;\quad \neg(\varphi\sqcap\varphi)\Rightarrow\neg\varphi;\quad \lrcorner\varphi\Rightarrow\lrcorner(\varphi\sqcup\varphi)$$

$$\varphi\sqcap\neg\varphi\Leftrightarrow\bot;\quad \top\Leftrightarrow\varphi\sqcup\lrcorner\varphi;\quad \neg\neg(\varphi\sqcap\psi)\Leftrightarrow\varphi\sqcap\psi;\quad \lrcorner\lrcorner(\varphi\sqcup\psi)\Leftrightarrow\varphi\sqcup\psi$$

$$\varphi\sqcap\varphi\Rightarrow\varphi\sqcap(\varphi\sqcup\psi);\varphi\sqcup(\varphi\sqcap\psi)\ \Rightarrow\varphi\sqcup\varphi;\varphi\sqcap(\psi\vee\theta)\ \Leftrightarrow(\varphi\sqcap\psi)\ \vee(\varphi\sqcap\theta)\quad ;$$

$$\varphi\sqcup(\psi\wedge\theta)\ \Leftrightarrow(\varphi\sqcup\psi)\ \wedge(\varphi\sqcup\theta);(\varphi\sqcup\varphi)\ \sqcap(\varphi\sqcup\varphi)\ \Leftrightarrow(\varphi\sqcap\varphi)\ \sqcup(\varphi\sqcap\varphi)$$

L 的推理规则 如下。

$$\frac{\varphi\Rightarrow\psi\quad \psi\Rightarrow\theta}{\varphi\Rightarrow\theta}\ (Cut)$$

$$\frac{\varphi\Rightarrow\psi}{\varphi\sqcap\theta\Rightarrow\psi\sqcap\theta}\ (\sqcap_R)\quad \frac{\varphi\Rightarrow\psi}{\theta\sqcap\varphi\Rightarrow\theta\sqcap\psi}\ (\sqcap_L)\quad \frac{\varphi\Rightarrow\psi}{\varphi\sqcup\theta\Rightarrow\psi\sqcup\theta}\ (\sqcup_R)$$

$$\frac{\varphi\Rightarrow\psi}{\theta\sqcup\varphi\Rightarrow\theta\sqcup\psi}\ (\sqcup_L)\quad \frac{\varphi\Rightarrow\psi}{\neg\psi\Rightarrow\neg\varphi}\ (\neg)\quad \frac{\varphi\Rightarrow\psi}{\lrcorner\psi\Rightarrow\lrcorner\varphi}\ (\lrcorner)$$

$$\frac{\varphi\sqcap\psi\Rightarrow\varphi\sqcap\varphi\quad \varphi\sqcap\varphi\Rightarrow\varphi\sqcap\psi\quad \varphi\sqcup\psi\Rightarrow\psi\sqcup\psi\quad \psi\sqcup\psi\Rightarrow\varphi\sqcup\psi}{\varphi\Rightarrow\psi}(\sqsubseteq)$$

可推导性按标准方式定义：如果存在一个由序列 S_1、.....、S_m 组成的有限序列，使得 S_m 是 $\varphi\Rightarrow\psi$，并且对于所有 $k\in\{1$、.....、$m\}$，要么 S_k 是公理，要么 S_k 是通过将 L 的规则应用于 $\{S_1$、.....、$S_{k-1}\}$ 中的元素而得到的，则称推理式 $\varphi\Rightarrow\psi$ 在 L 中是可推导的（或可证明的）。

引理 5.1. 对于 $\varphi,\psi,\theta\in Fm$，以下命题在 L 中可证。(1$a$) $\varphi\sqcap\psi\Rightarrow(\varphi\sqcap\psi)\ \sqcap(\varphi\sqcap\psi)$ (1b) $(\varphi\sqcup\psi)\ \sqcup(\varphi\sqcup\psi)\ \Rightarrow\varphi\sqcup\psi.$

证明。 我们给出 (1a) 的证明；(1b) 的证明与之对偶。

1	$\varphi \sqcap \psi \Rightarrow \neg\neg(\varphi \sqcap \psi)$	Axiom
2	$\neg((\varphi \sqcap \psi) \sqcap (\varphi \sqcap \psi)) \Rightarrow \neg(\varphi \sqcap \psi)$	Axiom
3	$\neg\neg(\varphi \sqcap \psi) \Rightarrow \neg\neg((\varphi \sqcap \psi) \sqcap (\varphi \sqcap \psi))$	$2, (\neg)$
4	$\neg\neg((\varphi \sqcap \psi) \sqcap (\varphi \sqcap \psi)) \Rightarrow (\varphi \sqcap \psi) \sqcap (\varphi \sqcap \psi)$	Axiom
5	$\neg\neg(\varphi \sqcap \psi) \Rightarrow (\varphi \sqcap \psi) \sqcap (\varphi \sqcap \psi)$	3, 4, (Cut)
6	$\varphi \sqcap \psi \Rightarrow (\varphi \sqcap \psi) \sqcap (\varphi \sqcap \psi)$	1, 5, (Cut)

□

定理 5.2. 对于 $\varphi, \psi \in Fm$，以下命题在 L 中可证。
(1*a*) $(\varphi \sqcap \psi) \Leftrightarrow (\psi \sqcap \varphi)$。 (1*b*) $\varphi \sqcup \psi \dashv\Rightarrow \psi \sqcup \varphi$.(2*a*) $\neg \Leftrightarrow \neg($
$\varphi \sqcap \varphi)$。 (2*b*) $\lrcorner(\varphi \sqcup \varphi) \Rightarrow \lrcorner\varphi$.(3*a*) $\varphi \sqcap (\varphi \sqcup \psi) \Rightarrow (\varphi \sqcap \varphi)$。 (
3*b*) $\varphi \sqcup \varphi \Rightarrow \varphi \sqcup(\varphi \sqcap \psi)$。

证明。 对于 $i \in \{1, 2, 3\}$，我们将给出 ia 的证明，而 ib 的证明是对偶的 .
(1a) 1 $\varphi \sqcap \psi \Rightarrow \varphi$ Axioml
2 $\varphi \sqcap \psi \Rightarrow \psi$ Axiom
3 $(\varphi \sqcap \psi) \sqcap (\varphi \sqcap \psi) \Rightarrow (\psi \sqcap \varphi)$ $\sqcap_L, \sqcap_R$, and (Cut)
4 $(\varphi \sqcap \psi) \Rightarrow (\varphi \sqcap \psi) \sqcap (\varphi \sqcap \psi)$ Lemma 5.1(1a)
5 $(\varphi \sqcap \psi) \Rightarrow (\psi \sqcap \varphi)$ 4, 3, and (Cut)
在上述内容中交换 in$_i$ 和 in，得到 $\sqcap$, $\Rightarrow$ $(\psi \circ \varphi)$ $(\varphi \psi)$
(2a) 1 $\varphi \sqcap \varphi \Rightarrow \varphi$ Axiom
2 $\neg\varphi \Rightarrow \neg(\varphi \sqcap \varphi)$ $(\neg)$.
(3a) 1 $\varphi \sqcap (\varphi \sqcup \psi) \Rightarrow \varphi$ Axiom
2 $\varphi \sqcap (\varphi \sqcup \psi) \Rightarrow \varphi$ Axiom
3 $(\varphi \sqcap (\varphi \sqcup \psi)) \sqcap (\varphi \sqcap (\varphi \sqcup \psi)) \Rightarrow \varphi \sqcap \varphi$ $\sqcap_L, \sqcap_R$, and (Cut)
4 $\varphi \sqcap (\varphi \sqcup \psi) \Rightarrow (\varphi \sqcap (\varphi \sqcup \psi)) \sqcap (\varphi \sqcap (\varphi \sqcup \psi))$ Lemma!5.1(1a)
5 $\varphi \sqcap (\varphi \sqcup \psi) \Rightarrow \varphi \sqcap \varphi$ 4, 3, (Cut)
□

定义 5.3. 设 D 是一个上下文 D-core 代数。若推理式 $\varphi \Rightarrow \psi$ 被同态 h：$Fm \to$ D 满足，即 $h(\varphi) \sqsubseteq h(\psi)$，则称该推理式为真。此外，若推理式 $\varphi \Rightarrow \psi$ 被每个同态h：$Fm \to$ D 满足，则称其在 D 中为真。若推理式 $\varphi \Rightarrow \psi$ 在任意上下文 D-core 代数中都为真，则称其有效。

定理 5.4. 推理式 $\varphi \Rightarrow \psi$ 可证，当且仅当它有效。

下一个定理确保，尽管进行了这些简化，两个证明系统 CDBL 和 L 仍然等价，因此基本的逻辑性质得以保留。

定理 5.5. 对于 $\varphi, \psi \in Fm$，以下内容在 L 中可证明。
$(1a)$ $\varphi \sqcap \varphi \Rightarrow \varphi \sqcap (\varphi \vee \psi)$ $(1b)$ $\varphi \sqcup (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi \sqcup \varphi$
$(2a)$ $\bot \Rightarrow \varphi$ $(2b)$ $\varphi \Rightarrow \top$ $(3a)$ $\neg\top \Rightarrow \bot$ $(3b)$ $\top \Rightarrow \lrcorner\bot$
$(4a)$ $\neg\bot \Leftrightarrow \top \sqcap \top$ $(4b)$ $\lrcorner\top \Leftrightarrow \bot \sqcup \bot$

证明。第 1a 和 1b 项由定理 3.8 和定理 5.4 推出，而第 3a、3b、4a 和 4b 项也都是定理 3.3 和定理 5.4 的推论。另一方面，第 2a 和 2b 项则由命题 3.7（4a 和 4b）以及命题 3.5（1a、3a、1b 和 3b）结合定理 5.4 得出。□

注。请注意，证明系统 L 是证明系统**CDBL**的简化版本。具体而言，L 可以通过移除引理 5.1 和定理 5.5 中列出的冗余公理，从**CDBL**得到。此外，引理 5.1 和定理 5.5 确保这两个系统是等价的。

5.2. 重新定义纯双布尔代数的逻辑
本文为纯双布尔代数构建了一种超序列演算 PDBL。PDBL 的字母表由一个可数无限的对象变量集合$\mathbf{OV} = \{p, q, r, \ldots\}$、一个可数无限的属性变量集合$\mathbf{PV} = \{P, Q, R, \ldots\}$、命题常元 $\bot$ 和 $\top$，以及逻辑联结词 $\sqcup, \sqcap, \neg,$ 和 $\lrcorner$ 组成。公式集合 Fm 通过归纳定义如下

$$\varphi ::= P \mid p \mid \neg\varphi \mid \lrcorner\varphi \mid \varphi \sqcap \varphi \mid \varphi \sqcup \varphi \mid \top \mid \bot,$$

其中 $p \in \mathbf{OV}$ 和 $P \in \mathbf{PV}$。PDBL 中的 s-超序列是由形式为 $\varphi_1 \Rightarrow \psi_1 \mid \varphi_2 \Rightarrow \psi_2 \mid \ldots \mid \varphi_n \Rightarrow \psi_n$ 的推理式组成的有限序列。注意，当 $n = 1$ 时，推理式 $\varphi \Rightarrow \psi$ 是超序列的一种特殊情况。

这些公理与 CDBL 的公理非常相似 [9]，这是意料之中的，因为每个纯 dBa 也是一个语境 dBa。对于 PDBL，还引入了两个额外的公理来处理变量。

$$p \sqcap p \Leftrightarrow p; \quad P \sqcup P \Leftrightarrow P$$

PDBL 与 CDBL 的句法差异主要体现在推理规则上。

$$\frac{B \mid \varphi \Rightarrow \psi \mid C}{B \mid \varphi \sqcap \theta \Rightarrow \psi \sqcap \theta \mid C}\ (\sqcap_R) \quad \frac{B \mid \varphi \Rightarrow \psi \mid C}{B \mid \theta \sqcap \varphi \Rightarrow \theta \sqcap \psi \mid C}\ (\sqcap_L) \quad \frac{B \mid \varphi \Rightarrow \psi \mid C}{B \mid \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi \mid C}\ (\neg)$$

$$\frac{B \mid \varphi \Rightarrow \psi \mid C}{B \mid \theta \sqcup \varphi \Rightarrow \theta \sqcup \psi \mid C}\ (\sqcup_L) \quad \frac{B \mid \varphi \Rightarrow \psi \mid C}{B \mid \varphi \sqcup \theta \Rightarrow \psi \sqcup \theta \mid C}\ (\sqcup_R) \quad \frac{B \mid \varphi \Rightarrow \psi \mid C}{B \mid \lrcorner\psi \Rightarrow \lrcorner\varphi \mid C}\ (\lrcorner)$$

$$\frac{B \mid \varphi \Rightarrow \psi \mid C \quad D \mid \psi \Rightarrow \theta \mid E}{B \mid D \mid \varphi \Rightarrow \theta \mid C \mid E}\ (Cut) \quad \frac{}{\varphi \Rightarrow \varphi \sqcap \varphi \mid \varphi \sqcup \varphi \Rightarrow \varphi}\ (Sp)$$

$$\frac{B \mid \varphi \sqcap \psi \Rightarrow \varphi \sqcap \varphi \mid C \quad D \mid \varphi \sqcap \varphi \Rightarrow \varphi \sqcap \psi \mid E \quad F \mid \varphi \sqcup \psi \Rightarrow \psi \sqcup \psi \mid G \quad H \mid \psi \sqcup \psi \Rightarrow \varphi \sqcup \psi \mid X}{B \mid D \mid F \mid H \mid \varphi \Rightarrow \psi \mid C \mid E \mid G \mid X} \ (\sqsubseteq)$$

外部推理规则：

$$\frac{B \mid D \mid D \mid C}{B \mid D \mid C} \ (\mathrm{EC}) \quad \frac{B \mid D \mid E \mid C}{B \mid E \mid D \mid C} \ (\mathrm{EE}) \quad \frac{B}{B \mid C} \ (\mathrm{EW})$$

可推导性以标准方式定义。我们证明了该演算相对于纯 dBa 类是可靠且完备的。详细证明请参阅 [10]。

与上一节一样，我们可以得到一个针对纯双布尔代数的简化超序列演算 HL，它与 PDBL 等价。具体做法是采用 L 的公理，而不是 CDBL 的全部公理。由于序列本身就是超序列，引理 5.1 和定理 5.5 对新的证明系统 HL 也成立。因此，系统 HL 与 PDBL 等价。由于 PDBL 相对于纯双布尔代数是可靠且完备的，HL 也同样如此。可靠性和完备性的证明与 PDBL 的证明完全相同，因此我们在此省略细节。

6. 结论

我们为双布尔代数提出了首个约化公理系统，完善了现有的表示定理，推广了经典的粘合和构造，建立了一个斯通型拓扑表示定理，并引入了具有完备证明理论的简化逻辑系统。这些成果显著推进了双布尔代数的代数、拓扑和逻辑基础，并为语境逻辑、布尔概念逻辑及代数逻辑相关领域开辟了新的研究方向。

致谢
本研究由瑞士国家科学基金会（SNF）项目 IZSEZO_233403/1 资助：双布尔代数的公理化。

声明

伦理审批
不适用。

利益冲突
不适用。

作者贡献
所有作者贡献相同。

数据和材料的可用性
不适用。

参考文献

[1] Charalambos D. Aliprantis 和 Kim C. Border。《无限维分析：搭便车指南》。Springer，柏林，2006年。[2] Philippe Balbiani。纯双布尔代数中的字问题判定。《应用逻辑杂志》，10(3):260 – 273，2012年。[3] Garrett Birkhoff。格论，第25卷。American Mathematical Soc.，1940年。[4] Ivo Düntsch 和 Günther Gediga。定性数据分析中的模态风格算子。载于 Kumar Vipin 等编，《*2002*年*IEEE*国际数据挖掘会议论文集》，第155–162页。IEEE计算机学会，2002年。[5] P. Howlader 和 C.J. Liau。形式背景推理的逻辑与代数方面。《*ACM*计算逻辑汇刊》，26(3)，2025年。[6] Prosenjit Howlader 和 Mohua Banerjee。粗糙集理论中半概念生成的代数。载于 Hung Son Nguyen 等编，国际粗糙集联合会议，第440–454页。Springer，查姆，2018年。[7] Prosenjit Howlader 和 Mohua Banerjee。双布尔代数与纯双布尔代数的面向对象原概念及逻辑。载于 Rafael Bello 等编，国际粗糙集联合会议，第308–323页。Springer，查姆，2020年。[8] Prosenjit Howlader 和 Mohua Banerjee。关于双布尔代数的素理想定理与表示定理的评述。载于 Francisco J. Valverde-Albacete 等编，*CLA 2020*，第83–94页。CEUR研讨会论文集，2020年。[9] Prosenjit Howlader 和 Mohua Banerjee。克里普克背景、带算子的双布尔代数及相应的模态系统。《逻辑、语言与信息杂志》，32:117–146，2023年。[10] Prosenjit Howlader 和 Mohua Banerjee。半概念的非分配逻辑及其基于克里普克背景语义的模态扩展。《国际近似推理杂志》，153:115–143，2023年。[11] Prosenjit Howlader 和 Mohua Banerjee。双布尔代数的拓扑表示。《普适代数》，84：论文编号15，共32页，2023年。[12] Prosenjit Howlader 和 Churn-Jung Liau。关于扩展摘要《双布尔代数》的讨论。https://ilia.csic.es/tacl2024/abstracts/conference/contributed/TACL_2024_paper_115.pdf 2024 ，。

[13] GT Kembang、L Kwuida、ERA Temgoua 和 YLJ Tenkeu。简单双布尔代数与次直不可约双布尔代数。预印本 *arXiv:2312.13686*，2023年。[14] Léonard Kwuida。双布尔代数的素理想定理。《数学讨论——一般代数与应用》，27(2):263–275，2007年。[15] L. Lakhal 和 G. Stumme。基于形式概念分析的关联规则高效挖掘。载于 B. Ganter、G. Stumme 和 R. Wille 编，《形式概念分析：基础与应用》，第180–195页。Springer，柏林、海德堡，2005年。[16] Zdzisław Pawlak。粗糙集。《国际计算机与信息科学杂志》，11(5):341–356，1982年。

[17] Rudolf Wille。重构格论：一种基于概念层次结构的方法。载于 I. Rival 编，《有序集。北约高级研究机构系列（*C*辑——数学与物理科学）》，第445–470页。Springer，多德雷赫特，1982年。[18] Rudolf Wille。布尔概念逻辑。载于 Bernhard Ganter 等编，《概念结构：逻辑、语言与计算问题》，第317–331页。Springer，柏林，2000年。

Prosenjit Howlader 信息科学研究所 中
央研究院 台北，115 台湾 电子邮件：
prosen@mail.iis.sinica.edu.tw

Leonard Kwuida*伯尔尼应用科学
大学 商学院 Brückenstr. 73 3005
伯尔尼 瑞士 电子邮件：
leonard.kwuida@bfh.ch

Mike Behrisch 维也纳工业大学 离散数学与几何
研究所 Wiedner Hauptstr. 8–10，1040 维也纳
奥地利 电子邮件： behrisch@logic.at

Churn-Jung Liau 信息科学研究所 中
央研究院 台北，115 台湾 电子邮件：
liaucj@iis.sinica.edu.tw