arXiv:2601.01434v1 [math.CO] 4 Jan 2026

有界最大度图中的团的高效枚举

龚世才*、王佳进、朱鑫昊和袁博俊‡§

School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou, 310023, P. R. China

摘要。近年来，人们对特定约束下图中独立集或团的枚举这一极值问题表现出浓厚兴趣。例如，Kahn-Zhao 定理给出了 d-正则图中独立集数量的上界。在此基础上，Cutler 和 Radcliffe 推广了这一结果，找到了在阶和最大度均有界的图中使团的数量达到最大的图。

本文提出了一种在有界最大度图中计数团的新方法。为展示该方法的有效性，我们为上述 Cutler-Radcliffe定理和 Kahn-Zhao 定理给出了新的证明。

关键词：独立集； i-独立集；团； i-团；计数。

2010 年美国数学学会主题分类：05C30

1 引言

人们对在特定约束条件下计数图中的独立集或团的极值问题一直抱有浓厚兴趣。团枚举的研究可追溯至 1941 年，当时 Tur´an [21] 首次给出了顶点数固定且团数有界的图中 2-团数量的上界。作为 Tur´an 定理的自然推广，齐科夫 [23] 首次确定了顶点数固定且团数有界的图中固定阶团的最大数量（另见 [8, 10, 13, 14]）。此后，众多研究者为这一领域作出了贡献，积累了丰富的研究成果，探讨了团和独立集枚举的各个方面。另一个值得注意的例子是 Kahn-Zhao 定理，该定理最初由 Kahn [15] 针对二部图证明，随后由 Zhao [22]推广至所有图。

定理 1.1。(Kahn-Zhao) 如果 G 是一个有 n 个顶点的 d-正则图，那么

$$i(G)^{\frac{1}{n}} \leq i(K_{d,d})^{\frac{1}{2d}} = (2^{d+1}-1)^{\frac{1}{2d}},$$

*通讯作者。

†国家自然科学基金委员会资助项目（12271484）。

‡国家自然科学基金委员会资助项目（12201559）。§电子邮箱：scgong@zafu.edu.cn（S. Gong）、wangjiajin0876@163.com（J. Wang）、zhuxinhao0508@163.com（X. Zhu）和 ybjmath@163.com（B. Yuan）。

其中 $i(G)$ 表示图 G中独立集的数量。

如果 G是一个具有 t个独立集的图，那么G（$\overline{G}$的补图）就是一个具有 t 个团的图。对 G 施加的任何度条件，都可以转换为对 G相应的度条件。因此，关于独立集的极值计数问题与关于团的极值计数问题是平行的。2014年，Cutler 和 Radcliffe [7] 将团计数问题的条件从正则性扩展到了最大度。他们解决并加强了 Galvin [9]提出的猜想，具体如下：

定理1.2。 (Cutler 和 Radcliffe) 对于所有 n、 $r \in \mathbb{N}$，记 $n = a(r+1)+b$，其中 $0 \le b \le r$。如果 G是一个阶为 n且最大度至多为 r的图，那么

$$k(G) \le k(aK_{r+1} \cup K_b),$$

当且仅当 $G = aK_{r+1} \cup K_b$，或 $r = 2$ 和 $G = (a-1)K_3 \cup C_4$，或$(a-1)K_3 \cup C_5$时等号成立，其中 $k(G)$ 表示图 G中包含的团的数量。

Kahn-Zhao 定理和 Cutler-Radcliffe定理都为极值图论的后续研究奠定了基础。例如，这些定理已被用于研究子图计数的超饱和现象，即研究者考察图中的边数增加时，某些子图的数量如何增长。近期，图中团的数量界已应用于分析一种用于寻找小分离集的算法 [12]，以及枚举小闭族 [11]。此外，这两个定理也已得到推广，以纳入其他约束条件。关于子图计数问题的深入研究，可参阅 [2, 4–6, 18] 及其中的参考文献。

本文提出一种创新方法，用于计数有界最大度图中的团。为展示该方法的有效性，我们为上述Cutler-Radcliffe定理和 Kahn-Zhao 定理给出了新的证明。本文其余部分安排如下：第2节中，我们进行一些必要的准备工作，介绍顶点团权重和边团权重的概念，以及一些相关引理。随后在第3节中，我们为定理1.2和定理 1.1给出新的证明。

2 预备知识

本文所讨论的所有图均为有限、简单且无向图。关于未定义的图论术语和记号，请读者参阅专著 [3]。

设 $G = (V(G), E(G))$ 是一个具有 $v \in V(G)$ 的图。分别用 $N_G(v)$ 和 $N_G[v]$ 表示 v 在 G中的开邻域和闭邻域。此外，我们用 $d_H(v)$ 表示 v在子图 H中的度，即 $d_H(v) = |N_H(v)|$。用 $\Delta(G)$ 表示图 G 的最大度。对于

对于 $V(G)$ 的子集 S，由 S 诱导的 G 的子图记作 $G[S]$。为简便起见，我们将$G[V(G)\backslash S]$ 记作 $G-S$。对于 G的子图 H，我们用 $G-H$ 表示从G 中仅删除 H 中的边、同时保留 H中的顶点后得到的子图。此外，我们用 aH 表示图 H的 a 个副本。我们用 K_r-tP_2 表示从完全图 K_r 中删除一个 t-匹配后得到的图，其中 $t\le\lfloor\frac{r}{2}\rfloor$。

–

设 $G_1=(V(G_1),E(G_1))$ 和 $G_2=(V(G_2),E(G_2))$ 是两个图。G_1 和 G_2 的并集记为 $G_1\cup G_2$，定义为顶点集为 $V(G_1)\cup V(G_2)$、边集为 $E(G_1)\cup E(G_2)$ 的图。特别地，如果 G_1 和 G_2 不相交（即 $V(G_1)\cap V(G_2)=\emptyset$），则该并集称为这两个图的不交并集。

令 $[n]:=\{1,2,\dots,n\}$。在 $\mathbb{N}$ 的有限子集上定义反字典序，记为 $<_C$，具体如下：对于两个子集 A 和 B，若对称差 $A\Delta B$ 中的最大元素属于 B，则有 $A<_C B$。将其限制在 $[n]$的二元子集上时，反字典序会在完全图 K_n 的边上诱导出一种特定的排序。该反字典序中的前几条边为：

$$\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,5\},\{2,5\},\{3,5\},\{4,5\},\dots.$$

将 *colex* 图 $\mathcal{C}(n,m)$ 定义为一个图，其顶点集为 $[n]$，边集由 $E(K_n)$ 上 colex 顺序中的前 m 条边组成。关于 colex 图的更多研究，可参见 [1,17]。值得注意的是，当 $m=\binom{r}{2}+s$ 满足 $0\le s<r$ 时，图 $\mathcal{C}(n,m)$ 由一个 r 阶团以及一个额外顶点组成，该顶点与这个团中的 s 个顶点相连。

设 G 是一个具有 $u\in V(G)$ 的图。我们用 $k_t(G)$ 表示 G 中大小为 t 的团的数量，团的总数为 $k(G)=\sum_{t\ge0}k_t(G)$。记号 $k_t(u;G)$ 表示 G 中包含顶点 u 的大小为 t 的团的数量。为简洁起见，当图 G 的含义明确时，我们用 $k_t(u)$ 代替 $k_t(u;G)$。克鲁斯卡尔-卡托纳定理蕴含以下结论：

定理 2.1。[16,20]。对于任意正整数 t、m，以及一个具有 n 个顶点和 m 条边的图 G，我们有

$$k_t(G)\le k_t(\mathcal{C}(n,m)).$$

此外，当 $s\ge t-1$ 且 $m=\binom{r}{2}+s$ 具有 $0\le s<r$ 时，$\mathcal{C}(n,m)$ 是满足等式的唯一图。

鉴于每个 t-团由贡献相同的 t 个顶点组成，我们引入顶点团权重这一概念。借助这一概念，我们可以将全局参数 $k(G)$表示为局部顶点贡献之和，其中每个顶点对包含它的每个 t-团贡献 $1/t$。

定义 2.2。 设 G 是一个具有 $u \in V(G)$的任意图。顶点团权重定义为

$$w_G(u) = \sum_i \frac{1}{i} k_i(u; G),$$

其中，求和遍历 G 中所有包含顶点 u 的 i-团 $i \geq 1$。

引理 2.3。 设 G 是一个具有 $u \in V(G)$ 的图。若 $d_G(u) = r\ (r \geq 1)$，则

$$w_G(u) \leq \frac{1}{r+1}(2^{r+1} - 1),$$

当且仅当 $G[N(u)] = K_r$ 时等号成立。

证明。 给定 $d_G(u) = r$，我们注意到，对于 $t > r+1$，有 $k_t(u) = 0$；对于 $t \in [r+1]$，有 $k_t(u) \leq \binom{r}{t-1}$。当且仅当 $G[N(u)] = K_r$ 时等号成立。根据定义 2.2,

$$w_G(u) = \sum_t \frac{1}{t} k_t(u) \leq \sum_{t=1}^{r+1} \frac{1}{t} \binom{r}{t-1} = \frac{1}{r+1}(2^{r+1} - 1),$$

其中，当且仅当 $G[N(u)] = K_r$ 时等号成立。因此，证明完毕。 □

定理 2.4。 设 G 是一个任意图。则

$$k(G) = 1 + \sum_{u \in V(G)} w_G(u).$$

证明。 该结果可直接由定义 2.2 以及如下观察得出：空团是唯一不包含任何顶点的团。

□

下面，我们证明定理 2.4 中的团计数公式也满足包含-排除原理。

定理 2.5。 设 G 是图 G_1 和 G_2 的并，其交集为 $G_1 \cap G_2 = H$。如果 G 中不存在同时包含来自 $E(G_1) \backslash E(H)$ 和 $E(G_2) \backslash E(H)$ 以及 $u \in V(H)$ 的边的团，那么

$$w_G(u) = w_{G_1}(u) + w_{G_2}(u) - w_H(u).$$

证明。 给定 $G_1 \cap G_2 = H$，不存在同时包含来自 $V(G_1) \backslash V(H)$ 和 $V(G_2) \backslash V(H)$ 的顶点的团，因此每个团都完全包含于 G_1 或 G_2 中。于是，对于每个 i，都有 $k_i(u; G) = k_i(u; G_1) + k_i(u; G_2) - k_i(u; H)$。 因此，

$$\begin{aligned} w_G(u) &= \sum_i \frac{1}{i} k_i(u; G) \\ &= \sum_i \frac{1}{i} (k_i(u; G_1) + k_i(u; G_2) - k_i(u; H)) \\ &= w_{G_1}(u) + w_{G_2}(u) - w_H(u). \end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

作为定理 2.5 的直接推论，我们得到以下结果：

定理 2.6。 设 G 是图 G_1 和 G_2 的并，交集为 $G_1 \cap G_2 = H$。如果 G不含同时包含来自 $E(G_1)\backslash E(H)$ 和 $E(G_2)\backslash E(H)$的边的团，那么

$$k(G) = k(G_1) + k(G_2) - k(H).$$

证明。 根据定义 2.2，对于每个顶点 u：

- 若 $u \in V(H)$，则 $k_i(u;G) = k_i(u;G_1) + k_i(u;G_2) - k_i(u;H)$。- 若 $u \in V(G_1) \setminus V(H)$，则 $k_i(u;G) = k_i(u;G_1)$。- 若 $u \in V(G_2) \setminus V(H)$，则 $k_i(u;G) = k_i(u;G_2)$。

因此，

$$\begin{aligned} k(G) &= \sum_{u\in V(G)} w_G(u) + 1 \\ &= \sum_{u\in V(G_1)\setminus V(H)} w_{G_1}(u) + \sum_{u\in V(G_2)\setminus V(H)} w_{G_2}(u) + \sum_{u\in V(H)} (w_{G_1}(u) + w_{G_2}(u) - w_H(u)) + 1 \\ &= k(G_1) + k(G_2) - k(H). \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

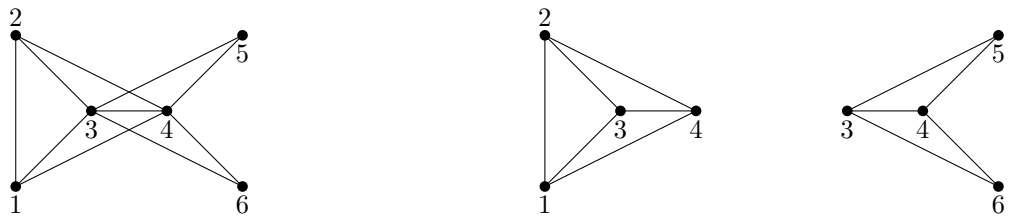
注 1。 在定理 2.6 中，必要时可要求 G 不含同时包含来自$E(G_1)\backslash E(H)$和 $E(G_2)\backslash E(H)$的边的团。设 $G=(V,E)$，其中 $V=\{1,2,3\}$和 $E=\{12,13,23\}$。假设 $G_1=(V_1,E_1)$，其中 $V_1=\{1,2\}$和 $E_1=\{12\}$，且 $G_2=(V_2,E_2)$，其中 $V_2=\{1,2,3\}$和 $E_1=\{13,23\}$。那么 $k(G) \neq k(G_1) + k(G_2) - k(G_1 \cap G_2)$。

例 2.7. 令 G 为图 *1* 所示的图。定义 $G_1 := G[\{1,2,3,4\}]$, $G_2 := G[\{3,4,5,6\}]$ 和 $H := G[\{3,4\}]$。可以验证 $G = G_1 \cup G_2$ 和 $H = G_1 \cap G_2$。那么， G 中不包含同时含有来自 $E(G_1)\backslash E(H)$ 和 $E(G_2)\backslash E(H)$的边的团。因此，

$$w_G(1) = w_{G_1}(1) = \begin{matrix}15\\4\end{matrix}, \quad w_G(3) = w_{G_1}(3)+w_{G_2}(3)-w_H(3) = \begin{matrix}15\\4\end{matrix} + \begin{matrix}19\\6\end{matrix} - \begin{matrix}3\\2\end{matrix} = \begin{matrix}65\\12\end{matrix}, \quad w_G(5) = w_{G_2}(5) = \begin{matrix}7\\3\end{matrix}$$

and

$$k(G) = k(G_1) + k(G_2) - k(H) = 16 + 12 - 4 = 24.$$



G G_1 G_2

图 *1*。

例 2.8。 设 m、 r 和 p 为满足 $m = \binom{r}{2} + p + 1$ 和 $0 \leq p < r - 1$的整数。*colex* 图 $\mathcal{C}(r+1, m)$ 可视为两个图 K_r 和 K_{p+2} 的并，且它们的交集为 K_{p+1}。然后应用定理 *2.5*，我们得到

$$w_{\mathcal{C}(r+1,m)}(\Delta) = \max\{w_{\mathcal{C}(r+1,m)}(v) | v \in V(\mathcal{C}(r+1,m))\} = \frac{2^r - 1}{r} + \frac{2^{p+2} - 1}{p+2} - \frac{2^{p+1} - 1}{p+1}.$$

此外，由定理 *2.6* 可得

$$k(\mathcal{C}(r+1,m)) = 2^r + 2^{p+2} - 2^{p+1}.$$

例 2.9. 设 r 和 t 为整数，且满足 $r \geq 2t$ 和 $t \geq 1$。 $K_r - tK_2$ 可视为两个 $K_{r-1} -$ （$t-1$）K_2 副本的并集，它们的交集为 $K_{r-2} -$（$t-1$）K_2。再次应用定理 *2.6*，可得

$$k(K_r - tK_2) = 2k(K_{r-1} - (t-1)K_2) - k(K_{r-2} - (t-1)K_2).$$

接下来，我们引入概念 $k(e; G)$，它表示 G 中包含边 e的团的数量。与 $w_G(u)$ 不同，我们将其称为相对于给定边的团权重。

定义 2.10. 设 G 为任意图，且 $e \in E$（G）。我们用 k（e； G）表示 G 中包含边 e的团的数量。为简便起见，若不存在歧义，我们将 k（e； G）记作 k（e）。

众所周知，对于任意图 G 和边 $e \in E(G)$， G 中包含的所有团可分为两部分：包含边 e 的团和不包含边 e的团。前者的基数为 $k(e; G)$，后者的基数为 $k(G - e)$。因此，我们有

定理 2.11. 设 G 为任意图，且 $e \in E(G)$。则

$$k(G) = k(G - e) + k(e; G).$$

作为本节的总结，我们引入两个关于边的团权重的引理。这些引理将在最后一章给出的证明中发挥关键作用。

引理 2.12. 设 Γ 为由两个不相交完全图 $P := K_{2p}$ 和 $Q := K_q$通过在 P 和 Q之间添加 $2p$ 条边得到的图，其中 $p \geq 1$ 和 $q \geq 1$。假设对于任意 $w \in V(Q)$ 和 $u \in V(P)$， $d_P(w) \leq p$ 和 $d_Q(u) \leq p$ 均成立。则

$$k(e; \Gamma) \leq 2^p$$

对于 P 和 Q之间的任意边 e 。

证明。 考虑一条边 $e = uw \in E(\Gamma)$，其中 $u \in V(P)$ 且 $w \in V(Q)$。设 F 是包含边 e 的一个极大团。那么，顶点集 $\{u, w\}$ 与其任意子集的并

$V(F)\backslash\{u,w\}$ 诱导出一个包含边 e 的团。因此，这些包含边 e 且为 F 子集的团的数量恰为

$$2^{|V(F)|-2}.$$

定义 $U:=N_P(w)$ 和 $W:=N_Q(u)$。当 $\min\{|W|,|U|\}=1$ 时，例如 $|W|=1$，子图 $\Gamma[U\cup W]$ 构成了包含边 e 的 Γ 的唯一极大团。在这种情况下，$\Gamma[U\cup W]$ 是完全的，因此 $k(e;\Gamma)$ 由 $2^{|U\cup W|-2}$ 给出。由于 $|U|\leq p$，可得 $k(e;\Gamma)\leq 2^{p-1}$. 。证明至此完成。

在接下来的讨论中，我们始终假设 $\min\{|W|,|U|\}\geq 2$。很容易看出，$\Gamma[U\cup\{w\}]$ 和 $\Gamma[W\cup\{u\}]$ 都是完全的，因此它们都是包含边 e 的团。为方便起见，我们定义 $F_1:=\Gamma[U\cup\{w\}]$ 和 $F_2:=\Gamma[W\cup\{u\}]$。我们将讨论分为以下三种情况:

情况 1。 F_1 和 F_2 是包含边 e的 Γ 的仅有两个极大团。

如前面的讨论所述，包含边 e且包含于 F_1中的团恰有 $2^{|U\cup\{w\}|-2}$ 个；类似地，包含边 e且包含于 F_2 中的团恰有 $2^{|W\cup\{u\}|-2}$ 个。鉴于 $|U|\leq p$和 $|W|\leq p$，应用容斥原理，我们可以推导出 $k(e;\Gamma)\leq 2^{|U|-1}+2^{|W|-1}-2^{|V(F_1\cap F_2)|-2}<2^p$. 证明完毕。

Cas情况 2。 F_1 和 F_2 中至少有一个不是包含边 e的 Γ 的极大团 .

不妨设 F_1 不是极大的。于是存在一个极大团，记为 F_3，使得 $V(F_3)\cap U=U$且 $\{w\}\subsetneq V(F_3)\cap W$。令 $W^*=V(F_3)\cap W$。鉴于 P与 Q之间有 $2p$条边，可知 $|U||W^*|\leq 2p$，这意味着 $2^{|U|+|W^*|-2}\leq 2^p$。当且仅当 $\min\{|U|,|W^*|\}=2$、$\max\{|U|,|W^*|\}=p$以及 $W^*=W$时等号成立。应用容斥原理，可得

$$\begin{aligned}k(e;\Gamma)&=2^{|V(F_3)|-2}+2^{|V(F_2)|-2}-2^{|V(F_3\cap F_2)|-2}\\&=2^{|U|+|W^*|-2}+2^{|W|-1}-2^{|W^*|-1}\\&\leq 2^p.\end{aligned}$$

因此，这种情况下结论成立。

情况 3. 至少存在三个包含边 e 的极大团 Γ 。

显然， F_1 和 F_2 都是包含边 e的 Γ的极大团。现在令F_4 为 Γ的另一个极大团，它与 F_1 和 F_2不同，并且包含边 e。定义$U^{**}:=V(F_4)\cap U$以及 $W^{**}:=V(F_4)\cap W$。由于 F_1、F_2和 F_4都是极大团，我们有 $\{u\}\subsetneq U^{**}\subsetneq U$和 $\{w\}\subsetneq W^{**}\subsetneq W$。因此，我们有 $\max\{|U|,|W|\}\geq 3$、$p\geq 3$，$\min\{|U^{**}|,|W^{**}|\}\geq 2$和 $|U^{**}||W^{**}|\leq 2p-2$。然后，结合包含-

排除原理以及 $V(F_1 \cap F_2) = \{u, w\}$这一事实，我们得到

$$\begin{aligned} k(e;\Gamma) &= 2^{|V(F_1)|-2} + 2^{|V(F_2)|-2} + 2^{|V(F_4)|-2} - 2^{|V(F_1\cap F_4)|-2} - 2^{|V(F_2\cap F_4)|-2} \\ &\quad - 2^{|V(F_1\cap F_2)|-2} + 2^{|V(F_1\cap F_2\cap F_4)|-2} \\ &\leq 2^{|U|-1} + 2^{|W|-1} + 2^{|U^{**}|+|W^{**}|-2} - 2^{|U^{**}|-1} - 2^{|W^{**}|-1} \\ &\leq 2^p. \end{aligned}$$

（已知 $|U^{**}||W^{**}| \leq 2p-2$，可得 $|U^{**}|+|W^{**}|-2 \leq p-1$。因此，只要 $|U|-1$、$|V|-1$ 和 $|U^{**}|+|W^{**}|-2$ 这几个量中至少有两个不大于 $p-1$，就能得到所需结果，因为它们中的最大值不大于 $p-1$。所以，这几个量中至少有两个必须等于 $p-1$，例如 $|U|=|V|=p$ 和 $|U^{**}|=|W^{**}|=2$。不等式仍然成立。）由此可得，在这种情况下结论成立。

至此，证明完成。 □

引理 2.13. 设 Γ 是由两个不相交图 $P := K_{2p} - tK_2$ 和 $Q := K_q$ 通过在 P 与 Q 之间添加 $2p$ 条边得到的图，其中 p、t 和 q 是满足 $p \geq t$ 的正整数。假设 $N_P(w) = \{u_i | i = 1, 2, \ldots, p+t\}$，且对每个 $i \in [t]$ 都有 $u_{2i-1}u_{2i} \notin E(P)$。记 $k(\cup_{i=1}^{2t} e_i; \Gamma)$ 为 Γ 中至少包含 $\sum_{i=1}^{2t} e_i$ 的一条边的团的数量。那么

$$k(\cup_{i=1}^{2t} e_i; \Gamma) \leq 2^{p-t} + k(K_{p+t+1} - tK_2) - k(K_{p+t} - tK_2).$$

证明。我们将 $k(\cup_{i=1}^{2t} e_i; \Gamma)$ 分为两类：1）包含至少一条边 $u_i w$（对某个 i 而言），且至少包含一个来自 $N_Q(u_i)\backslash\{w\}$ 的顶点的团；以及 2）包含至少一条边$u_i w$（对某个 i 而言），且不包含 $N_Q(u_i)\backslash\{w\}$ 中顶点的团。已知 P 与 Q之间有 $2p$ 条边，且 $d_P(w) = p + t$，由此可得 $\sum_{i=1}^{2t} d_Q(u_i) \leq p + t$。对于 $i = 1, 2, \ldots, 2t$，用 H_i 表示包含边 $u_i w$ 且至少包含一个来自 $N_Q(u_i)\backslash\{w\}$ 的顶点的最大团。显然，$H_i = \emptyset$ if $d_Q(u_i) = 1$，并且我们可以将顶点 u_i 和 u_j 在 Q 中的邻点集中到其中一个顶点上，从而增加 H_i 和 H_j 中团的数量之和，只要 $d_Q(u_i) > 1$ 且$d_Q(u_j) > 1$。因此，为了使第一类团的数量最大，我们可以令 $d_Q(u_i) = 1$，其中 $i = 1, 2, \ldots, 2t-1$，并令 $d_Q(u_{2t}) = p - t + 1$.。因此，第一类团的数量之和至多为 2^{p-t}。由于每个包含边 e_i 且不包含 $N_Q(u_i)\backslash\{w\}$ 中顶点的团都是 $\Gamma[N_P(w) \cup \{w\}]$ 的子图，第二类团的数量之和至多为$k(\Gamma[N_P(w) \cup \{w\}]) - k(\Gamma[N_P(w)])$。因此，

$$k(\cup_{i=1}^{2t} e_i; \Gamma) \leq 2^{p-t} + k(K_{p+t+1} - tK_2) - k(K_{p+t} - tK_2)$$

因为 $\Gamma[N_P(w) \cup \{w\}] = K_{p+t+1} - tK_2$和 $\Gamma[N_P(w)] = K_{p+t} - tK_2$。 □

3 定理1.2的证明

在本节中，我们将完成定理1.2和定理 1.1 的证明。众所周知，定理1.2是定理 1.1 的推广。因此，下面我们重点证明定理1.2。首先，我们需要建立一个引理。

引理 3.1。设 r、 s 和 p 为固定整数，且满足 $r \geq 3$ 和 $0 \leq s \leq r$。则不等式

$$2^{r+1}+2^s-1>(r+1+s)(\frac{2^r-1}{r}+\frac{2^{p+2}-1}{p+2}-\frac{2^{p+1}-1}{p+1})$$

在满足以下任一条件时成立：

1） $r \geq 12$ 和 $0 \leq p \leq \frac{2r}{3}$； 2）
$7 \leq r \leq 11$ 和 $0 \leq p \leq r-4$;
3） $4 \leq r \leq 6$ 和 $0 \leq p \leq r-3$;

4） $r=3$ 和 $0 \leq p \leq 1$，但不包括 $r=3$、 $s=2$ 和 $p=1$的情形。

证明。 **1)** 对于此情形，我们通过考虑两个子情形来证明该结论，即 $s=r$ 和$s<r$。首先，假设 $s=r$，我们定义函数 $h(s,p,r)$如下：

$$h(s,p,r)=2^{r+1}+2^s-1-(r+1+s)(\frac{2^r-1}{r}+\frac{2^{p+2}-1}{p+2}-\frac{2^{p+1}-1}{p+1}).$$

当 $r \geq 12, s=r$ 和 $0 \leq p \leq \frac{2r}{3}$, 时，可以验证

$$h(s,p,r) \geq h(12,p,12)>0.$$

接下来，考虑子情形 $s<r$。注意到

$$\begin{aligned}\frac{2^r-1}{r}+\frac{2^{p+2}-1}{p+2}-\frac{2^{p+1}-1}{p+1} &< \frac{2^r}{r}+\frac{p\cdot 2^{p+1}}{(p+1)(p+2)}+\frac{1}{(p+1)(p+2)}\\ &< \frac{2^r}{r}+\frac{2^{p+1}}{p}+\frac{1}{2}\\ &\leq \frac{2^{r+1}+3\cdot 2^{\frac{2r}{3}+1}+r}{2r},\end{aligned}$$

那么只需证明

$$2r(2^{r+1}+2^s-1)>(r+1+s)\left(2^{r+1}+3\cdot 2^{\frac{2r}{3}+1}+r\right).$$

我们在 s 上定义函数 $f(s)$ 如下：

$$\begin{aligned}f(s)&=2r\left(2^{r+1}+2^s-1\right)-(r+1+s)\left(2^{r+1}+3\cdot 2^{\frac{2r}{3}+1}+r\right)\\ &=r\cdot 2^{r+1}+r\cdot 2^{s+1}-3r\cdot 2^{\frac{2r}{3}+1}-(s+1)\left(2^{r+1}+3\cdot 2^{\frac{2r}{3}+1}\right)-r\left(r+3+s\right).\end{aligned}$$

可以验证,

$$\begin{aligned}f(r-1)&=r\cdot 2^{r+1}+r\cdot 2^r-3r\cdot 2^{\frac{2r}{3}+1}-r\left(2^{r+1}+3\cdot 2^{\frac{2r}{3}+1}\right)-2r\left(r+1\right)\\ &=r\cdot 2^{\frac{2r}{3}+1}(2^{\frac{r}{3}}-6)-2r\left(r+1\right)\\ &>0,\end{aligned}$$

其中 $f(r-1)$ 是 r 上的增函数。类似地，当 $r \geq 12$ 和 $s \in \{r-2, r-3, r-4\}$. 时， $f(s) > 0$。对于 $s \leq r-5$，我们有

$$\begin{aligned} f(s) &= 2r\left(2^{r+1}+2^s-1\right)-(r+1+s)\left(2^{r+1}+3\cdot 2^{\frac{2r}{3}+1}+r\right) \\ &\geq 2r\cdot 2^{r+1}-(r+1+s)\left(2^{r+1}+3\cdot 2^{\frac{2r}{3}+1}+r\right) \\ &\geq 2r\cdot 2^{r+1}-(r+1+r-5)\left(2^{r+1}+3\cdot 2^{\frac{2r}{3}+1}+r\right) \\ &\geq 2^{r+3}-3(2r-4)\cdot 2^{\frac{2r}{3}+1}-2r(r-2) \\ &> 0, \end{aligned}$$

w这里 $g(r) = 2^{r+3}-3(2r-4)\cdot 2^{\frac{2r}{3}+1}-2r(r-2)$ 是 $r(r \geq 12)$ 上的增函数 .

因此，1）得证。

2）首先，假设 $s = r$，当 $7 \leq r \leq 11$ 且 $0 \leq p \leq r-4$，可以验证， $h(s,p,r) \geq h(7,p,7) > 0.$

接下来，考虑子情形 $s < r$。类似地，我们有

$$\begin{aligned} \frac{2^r-1}{r}+\frac{2^{p+2}-1}{p+2}-\frac{2^{p+1}-1}{p+1} &< \frac{2^r}{r}+\frac{p\cdot 2^{p+1}}{(p+1)(p+2)}+\frac{1}{(p+1)(p+2)} \\ &< \frac{2^r}{r}+\frac{(r-4)\cdot 2^{r-3}}{(r-3)(r-2)}+\frac{1}{(r-3)(r-2)}, \end{aligned}$$

其中 $k(p) = \frac{p\cdot 2^{p+1}}{(p+1)(p+2)}+\frac{1}{(p+1)(p+2)}$ 是 p 上的增函数，当 $7 \leq r \leq 11$ 且 $0 \leq p \leq r-4.$ 时。于是只需证明

$$r(r-3)(r-2)\left(2^{r+1}-1+2^s\right) > (r+1+s)\left(2^r(r-3)(r-2)+r(r-4)\cdot 2^{r-3}+r\right)$$

当 $7 \leq r \leq 11$ 且 $s < r$时。令

$$f(s) = r(r-3)(r-2)\left(2^{r+1}-1+2^s\right)-(r+1+s)\left(2^r(r-3)(r-2)+r(r-4)\cdot 2^{r-3}+r\right)$$

是定义在 s 上的函数 $f(s)$。直接验证可得，当 $7 \leq r \leq 11$ 且 $s \in \{r-1, r-2, r-3\}.$ 时， $f(s) > 0$。对于 $s \leq r-4$，我们有

$$\begin{aligned} f(s) &\geq r(r-3)(r-2)2^{r+1}-(r+1+s)\left(2^r(r-3)(r-2)+r(r-4)\cdot 2^{r-3}+r\right) \\ &\geq 2^{r+1}(r-3)(r-2)r-\left(2^r(r-3)(r-2)+2^{r-3}(r-4)r+r\right)(2r-3) \\ &> 0, \end{aligned}$$

其中， $q(r) = 2^{r+1}(r-3)(r-2)r-\left(2^r(r-3)(r-2)+2^{r-3}(r-4)r+r\right)(2r-3)$ 是定义在 $r(7 \leq r \leq 11)$ 上的增函数。

因此，结论 2) 得证。

3)-4) 的结论可通过直接验证得出，细节从略。 □

注 **2.** 若 $r = 3, s = 2$ 和 $p = 1$，则 $2^{r+1}+2^s-1 = (r+1+s)(\frac{2^r-1}{r}+\frac{2^{p+2}-1}{p+2}-\frac{2^{p+1}-1}{p+1})$.

定理1.2的证明。令 G 为在阶为 n 且最大度不超过 r的图中团数最多的图。我们将证明分为以下三种情形：**情形 1.** $r = 1$。根据定义 2.2， $w_G(u) = \frac{3}{2}$ 当 $d(u) = 1$时成立，而 $w_G(u) = 1$ 当 $d(u) = 0$时成立，这意味着 $G = aK_2 \cup K_b$ 是在最大度不超过 1 的图中唯一使团数达到最多的图。

情形 2. $r = 2$。设 $d(u) = 2$。根据定义 2.2， $w_G(u) = \frac{7}{3}$ 若 u 包含在某个三角形中，则取此值；否则取 $w_G(u) = 2$。此外，由于这两个值都大于那些度小于 2 的顶点的团权重， $k(C_4) = k(C_3 \cup K_1)$ 且 $k(C_5) = k(C_3 \cup K_2)$，极大性要求尽可能多地形成三角形，因此 G 是唯一的极值图，其中若$n \equiv 0$(模 3)，则 $G = \frac{n}{3}C_3$；若 $n \equiv 1$(模 3)，则 $G = (\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1)C_3 \cup C_4$或 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor C_3 \cup K_1$；否则为 $G = (\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1)C_3 \cup C_5$或 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor C_3 \cup K_2$。

情况 3。 $r \geq 3$。鉴于 $k(aK_{r+1} \cup K_b) = a(2^{r+1} - 1) + 2^b$，于是 $k(G) \geq a(2^{r+1} - 1) + 2^b$. 集合

$$w_G(\Delta) = \max\{w_G(v) | v \in V(G)\}.$$

我们将通过以下三个断言证明 $w_G(\Delta) = \frac{2^{r+1}-1}{r+1}$ **断言 1**。

$$w_G(\Delta) > \begin{cases} \frac{2^r-1}{r} + \frac{2^{\frac{2r}{3}+2}-1}{\frac{2r}{3}+2} - \frac{2^{\frac{2r}{3}+1}-1}{\frac{2r}{3}+1} & \text{if } r \geq 12; \\ \frac{2^r-1}{r} + \frac{2^{r-2}-1}{r-2} - \frac{2^{r-3}-1}{r-3} & \text{if } 7 \leq r \leq 11; \\ \frac{2^r-1}{r} + \frac{2^{r-1}-1}{r-1} - \frac{2^{r-2}-1}{r-2} & \text{if } 4 \leq r \leq 6; \\ \frac{2^r-1}{r} + \frac{2^{1+2}-1}{1+2} - \frac{2^{1+1}-1}{1+1} = \frac{19}{6} & \text{if } r = 3. \end{cases} \tag{1}$$

对于 $r \geq 12$，反设 $w_G(\Delta) \leq \frac{2^r-1}{r} + \frac{2^{\frac{2r}{3}+2}-1}{\frac{2r}{3}+2} - \frac{2^{\frac{2r}{3}+1}-1}{\frac{2r}{3}+1}$。为简便起见，设 $\frac{2^r-1}{r} + \frac{2^{\frac{2r}{3}+2}-1}{\frac{2r}{3}+2} - \frac{2^{\frac{2r}{3}+1}-1}{\frac{2r}{3}+1} := A$。应用引理 3.1，可得

$$\begin{aligned} k(G) &\leq nA \\ &= (a-1)(r+1)A + (r+1+b)A \\ &< (a-1)(r+1)\frac{2^{r+1}-1}{r+1} + (2^{r+1}-1) + 2^b \\ &< a(2^{r+1}-1) + 2^b, \end{aligned}$$

这便导出了矛盾。其他情形的证明类似，为简洁起见，略去。需要指出的是，在引理 3.1 中描述的 $r = 3$， $s = 2$ 和 $p = 1$ 情形下，条件$w_G(\Delta) > \frac{2^r-1}{r} + \frac{2^{1+2}-1}{1+2} - \frac{2^{1+1}-1}{1+1} = \frac{19}{6}$ 至关重要。这是因为在这种情况下，并非每个顶点都具有相同的团权重，尽管等式 $(r+1+b)w_G(\Delta) = k(K_{r+1} \cup K_b)$ 成立。

断言 2。 设 u 为满足 $w_G(u) = w_G(\Delta)$ 的顶点，并设 p 为满足$|E(G[N[u]])| = \binom{r+1}{2} - p$的整数。则

$$p \leq \begin{cases} \lfloor \frac{r}{3} \rfloor - 1 & \text{if } r \geq 12; \\ 2 & \text{if } 7 \leq r \leq 11; \\ 1 & \text{if } 4 \leq r \leq 6; \\ 0 & \text{if } r = 3. \end{cases} \tag{2}$$

对于 $r \geq 12$，根据断言 1， $w_G(\Delta) > \frac{2^r-1}{r} + \frac{2^{\frac{2r}{3}+2}-1}{\frac{2r}{3}+2} - \frac{2^{\frac{2r}{3}+1}-1}{\frac{2r}{3}+1}$。于是，由定理 2.1 可得

$$w_G(\Delta) \geq w_{\mathcal{C}(r+1,\binom{r}{2}+\lceil \frac{2r}{3} \rceil+1)}(\Delta),$$

这里我们使用$\lceil \frac{2r}{3} \rceil$ 以确保完整性，从而使不等式变弱。再次应用定理 2.1，可得

$$\begin{aligned} |E(G[N[u]])| &\geq |E(\mathcal{C}(r+1, \binom{r}{2} + \left\lceil \frac{2r}{3} \right\rceil + 1))| \\ &= \binom{r}{2} + \left\lceil \frac{2r}{3} \right\rceil + 1 \\ &= \binom{r+1}{2} - r + 1 + \left\lceil \frac{2r}{3} \right\rceil \\ &= \binom{r+1}{2} - \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + 1. \end{aligned}$$

其他情形的证明类似，为简洁起见略去。

断言 3。 $w_G(\Delta) = \frac{2^{r+1}-1}{r+1}$。当 $n = r+1$ 时，根据引理 2.3 K_{r+1} 是满足 $n \cdot w_{K_{r+1}}(\Delta) \geq 2^{r+1} - 1$ 的唯一图。当 $r = 3$ 时，为确保 $w_G(\Delta)$ 满足不等式 (1)，根据断言 2， G 必须为 $aK_4 \cup K_b$。在这种情况下， $w_G(\Delta) = \frac{2^{3+1}-1}{3+1}$，因此当 $n = r+1$ 或 $r = 3$ 时结论成立。因此，在下面的讨论中，我们始终假设 $n > r+1$ 和 $r \geq 4$.

反设 $w_G(u) = w_G(\Delta) < \frac{2^{r+1}-1}{r+1}$。于是，结合断言 2 和引理 2.3， $G[N[u]] \neq K_{r+1}$，从而 $|E(G[N[u]])| = \binom{r+1}{2} - p$，其中 p 满足不等式 (1)。为方便起见，令 $H := G[N[u]]$, $N(u) = \{u_i | i = 1, 2, \ldots, r\}$, $V(G) \backslash N[u] = \{w_i | i = 1, 2, \ldots\ldots, n-r-1\}$，且 $E(H, G \backslash H) = \{e_i | i = 1, 2, \ldots, s\}$。那么，以下两种子情况之一必然成立:

子情况 3.1。 对于每个 $i (i = 1, 2, \ldots\ldots, n-r-1)$， $d_H(w_i) \leq p$。

令 $e_i = u_i w_i$ for $i = 1, 2$，使得 $u_1 u_2 \notin E(H)$。注意， w_1 和 w_2 可能是同一个顶点。令 G^* 为从 G 中删除边 e_1 和 e_2 后得到的图。于是

$$k(G) - k(G^*) \leq k(e_1; G) + k(e_2; G) \leq 2^{p+1},$$

最后一个不等式由引理 2.12 得出，因为 G包含一个子图，而该子图是引理 2.12 中描述的 Γ的子图。现在令 G^{**} 为在 G^* 中添加边 $u_1 u_2$后得到的图。

回想一下， $\overline{H}$ 包含 p 条边，这意味着 $G[N[u]]$ 至少包含 $r+1-2p$ r-度的顶点。因此， G^* 包含一个与 $K_{r-2p+3}-K_2$ 同构的子图，其中包括顶点 u_1 和 u_2。因此，

$$\begin{aligned} k(G^{**})-k(G^*) &\geq k(K_{r-2p+3})-k(K_{r-2p+3}-K_2) \\ &= 2^{r-2p+1} \\ &> 2^{p+1}, \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由不等式（2）针对 $r \geq 3p+1$ 得出，这与图 G 的极大性矛盾。因此，这种情况不可能发生。

子情形 3.2. 存在一个顶点，记作 w_1，使得 $d_H(w_1) > p$。

假设 $d_H(w_1) = p+t$，其中 $t \geq 1$。令 $\{e_i = u_i w_1 | i = 1, 2, \ldots, p+t\}$。那么至少存在 t 对顶点，记作 (u_{2i-1}, u_{2i})，对于 $i = 1, 2, \ldots, t$，使得 $u_{2i-1}u_{2i} \notin E(H)$。因此， $G[N(w_1) \cup w_1]$ 同构于 $K_{p+t+1} - tK_2$ 的一个子图。令 G^* 为从 G 中删除边 $\{e_i | i = 1, 2, \ldots, 2t\}$ 后得到的图。那么 G 包含一个子图，而该子图是引理 2.13 中所述 Γ 的子图。结合引理 2.13，可得

$$\begin{aligned} k(G)-k(G^*) &\leq \sum_{i=1}^{2t} k(\cup_{i=1}^{2t} e_i; G) \\ &\leq 2^{p-t} + k(G[N(w_1) \cup w_1]) - k(G^*[N(w_1) \cup w_1]) \\ &< 2^{p-t} + k(K_{p+t+1} - tK_2) - k(K_{p+t} - tK_2), \end{aligned}$$

其中， $k(\cup_{i=1}^{2t} e_i; G)$表示 G 中至少包含$\sum_{i=1}^{2t} e_i$的一条边的团的数量。

令 G^{**} 为由 G^* 添加边 $u_{2i-1}u_{2i}$ （针对 $i \in [t]$）得到的图。与上面的讨论类似， $G[N[u]]$ 至少包含 $r+1-2p$ r度的顶点，因此 $G[N[u]]$包含一个 $K_{r+1-2p+2t} - tK_2$ 的子图，该子图包含所有顶点 $\{u_i | i = 1, 2, \ldots, 2t\}$。因此，我们有

$$k(G^{**}) - k(G^*) > k(K_{r+1-2p+2t}) - k(K_{r+1-2p+2t} - tK_2).$$

因此，对于 $t \geq 2$，我们有

$$\begin{aligned} k(G^{**})-k(G) &> k(K_{r+1-2p+2t}) - k(K_{r+1-2p+2t} - tK_2) - k(K_{p+t+1} - tK_2) + k(K_{p+t} - tK_2) - 2^{p-t} \\ &> k(K_{p+2+2t}) - k(K_{p+2+2t} - tK_2) - k(K_{p+t+1} - tK_2) - 2^{p-t} \quad (by\ r \geq 3p+1) \\ &= k(K_{p+2+2t} - K_2) + k(K_{p+2t}) - k(K_{p+2+2t} - tK_2) - k(K_{p+t+1} - tK_2) - 2^{p-t} \\ &\geq k(K_{p+2t}) - k(K_{p+t+1} - tK_2) - 2^{p-t} \\ &= k(K_{p+2t} - K_2) + k(K_{p+2t-2}) - k(K_{p+t+1} - tK_2) - 2^{p-t} \\ &\geq k(K_{p+2t-2}) - 2^{p-t} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

如果 $t=1$，那么

$$\begin{aligned} k(G^{**})-k(G) &> k(K_{r-2p+3})-k(K_{r-2p+3}-K_2)-k(K_{p+2}-K_2)+k(K_{p+1}-K_2)-2^{p-1} \\ &= 2^{r-2p+1}-2^{p+1} \\ &\geq 2^{p+2}-2^{p+1} \quad (by\ r\geq 3p+1) \\ &> 0. \end{aligned}$$

因此，这些结果都与图 G 的极大性相矛盾。因此，这种情况不可能发生。

到目前为止， $w_G(\Delta)=\frac{2^{r+1}-1}{r+1}$ 。因此， G 包含一个子图 K_{r+1}。如果图 $G-K_{r+1}$ 的阶大于 $r+1$，那么通过类似的方法， G 还有另一个 K_{r+1}。因此， G包含 $\lfloor \frac{n}{r+1} \rfloor$ 个 K_{r+1} 的副本，证明完毕。□

参考文献

[1] B.M. ´Abrego、S. Fern´andez-Merchant、M.G. Neubauer 和 W.Watkins，图中度的平方和，**J. Inequal. Pure and Appl. Math.** 10 (3) (2009), 64。

[2] J. Alexander、J. Cutler 和 T. Mink，具有给定最小度的图中的独立集，**Electron. J. Combin.**19 (2012),37, 11。

[3] J.A. Bondy 和 U.S.R. Murty，《图论》，GTM，第 244 卷，*Springer*，2008年。

[4] Z. Chase，给定最大度的图中三角形的最大数量，**Adv. inCombin.**2020年：10，#R5。

[5] E.K. Cho、J. Kim 和 S.I. Kim，有界最大度图的独立支配，**J. Combin. Theory Ser. B**158 (2023)，341–352。

[6] J. Cutler、J. Nir 和A.J. Radcliffe，子图计数的超饱和，**图与组合**38 (2022)，6。

[7] J. Cutler 和 A.J. Radcliffe，给定最大度的图中完全子图的最大数量，**J. Combin. Theory Ser. B** 104 (2014年)，60–71。

[8] P. Erd¨os，关于某些图中所含完全子图数量的问题，**Magyar Tud.Akad. Mat. Kutat´o Int. K¨ozl.**7 (1962), 459–464。

[9]D. Galvin，关于图中独立集的两个问题，**Discrete Math.** 311 (2011), 2105–2112。

[10] N.G. Had˘ziivanov，图上 Tur´an 定理的一个推广，**保加利亚科学院通报**29 (1976), 1567–1570.

[11] S. Norine、P. Seymour、R. Thomas 和 P. Wollan，适当的小子式封闭族，**J.Combin. Theory Ser. B**96(5), 754–757 (2006).[12] B. Reed 和 D.R. Wood，含有排除子式的图中的快速分离。载于：欧洲组合学、图论与应用会议（EuroComb'05）论文集，卷 AE，离散数学理论与计算机科学会议录，2005，45–50.[13] S. Roman，无 p团的图中 q团的最大数量，**Discrete Math.**14 (1976), 365–371.[14] N. Sauer，Tur´an 定理的一个推广，**J. Combin. Theory Ser. B** 10 (1971), 109–112.[15] J. Kahn，二部图上硬核模型的熵方法，**Combin. Probab.Comput.**10 (2001), 219–237.[16] G. Katona，有限集的一个定理，载于：图论，会议论文集，蒂哈尼，1966，学术出版社，纽约，1968，187–207.[17] L. Keough 和 A.J. Radcliffe，匹配数最少的图，**组合数学** 36 (6) (2016), 703–723.[18] R. Kirsch 和 A.J. Radcliffe，边数少而三角形多的图，**Electron. J. Combin.** 26 (2) (2019), #R36.[19] R. Kirsch 和 A.J. Radcliffe，边数少而团多的图，**Electron. J. Combin.** 28 (1) (2021), #R26.[20] J.B. Kruskal，复形中的单形数，载于：数学优化技术，加州大学出版社，伯克利，加利福尼亚州，1963，251–278.[21] P. Tur´an，图论中的一个极值问题，Mat. Fiz. Lapok 48, 436–452 (1941).[22] Y. Zhao，正则图中独立集的数量，**Combin. Probab. Comput.** 19 (2010), 315–320.[23] A.A. Zykov，关于线性复形的一些性质，**Mat. Sb. (N.S.)** 24 (66) (1949), 163–188.