无标题稿件编号。（将由编辑
插入）

关于年金支付模型破产问题中产生的积分微分方程

Platon Promyslov

arXiv:2601.01447v1 [math.PR] 4 Jan 2026

收稿日期：日期 / 接受日期：日期

摘要 在经典年金支付模型中，保险公司的资本储备以恒定速率减少，并通过正跳跃增加。我们通过假设将固定比例的资本储备持续投资于价格遵循几何布朗运动的风险资产，而其余部分存入利率恒定的银行账户，对该模型进行推广。我们关注的是无限时间范围内的破产概率，它是初始资本的函数。在对跳跃分布作出较弱假设的情况下，我们证明破产概率是一个二阶积分微分方程的经典解，并得出初始资本较大时其精确的渐近行为。

关键词 年金支付模型 · 破产概率的积分微分方程 · 破产概率的渐近行为

数学主题分类（2020）60G44,91G05

1 引言

在经典的集体风险理论中，Filip Lundberg 于 1903年 开创了这一理论，Harald Cram´er 又在 20 世纪 30 年代进一步发展了它。该理论假设保险公司将其准备金与风险金融活动完全分开。这在当时很自然：当时的立法以社会责任范式为基础，并深受股市灾难所造成惨痛后果的影响。然而，经济现实的演变，加上金融理论的进步，使法律限制逐渐放宽，并催生了关于含风险投资的破产问题的理论研究。这一理论可追溯至 Jostein Paulsen 于 1993年 发表的开创性论文；他运用了 Kesten–Goldie隐式

HSE大学，计算机科学学院，莫斯科，101000，俄罗斯 电子邮件：
platon.promyslov@gmail.com

更新理论（又称分布方程理论），如 Goldie 的 [11], 中所阐述的那样，推导破产概率的渐近行为。此后，许多作者沿着相同思路为该理论的发展作出了贡献，并借助分布方程理论的最新进展；这些进展总结于著作 [6]中。这里仅提及近期几篇研究含风险投资的 Sparre Andersen 型模型的论文；参见 [8], [15], [13], 及其中的参考文献。尽管这种方法功能强大，适用于多种模型，但也有其局限：它只能给出破产概率趋于零的收敛速率，而无法给出精确的渐近结果（即无法提供首项常数）。

对于带有投资的 Lundberg–Cramér 型模型的渐近分析，存在一种替代方法，即将生存概率（或破产概率）表示为满足二阶积分微分方程的函数。此类方程似乎首次出现在 Anna Frolova 的一篇简短论文中， [9],她注意到，对于指数型索赔，该方程可以化为线性常微分方程（ODE）。根据其通解，她推测破产概率按幂函数衰减。后来，这一猜想在 [10]的非寿险模型中以及在 [14] 的年金支付模型中得到了证明。

在本文中，我们研究一种比 [14]中所描述模型更一般的年金模型在破产概率渐近分析中所产生的积分微分方程。具体而言，我们假设保险公司以固定速率 $c > 0$ 向客户支付养老金，并在合同到期时收取其养老金基金的剩余部分作为收入。公司即时将其资本储备的 κ投资于一种风险资产，该资产的价格 $S = (S_t)$按照参数为 a 和 $\sigma > 0$的几何布朗运动（gBm）演化。资本储备的剩余部分 $1 - \kappa$ 投资于无风险资产（银行账户），其收益率为 r。形式上，描述资本储备演化的过程 $X = X^u$ 由以下带跳跃的随机微分方程给出：

$$X_t = u + \int_0^t \kappa X_s(a\,ds + \sigma\,dW_s) + \int_0^t r(1-\kappa)X_s\,ds + P_t, \tag{1}$$

其中 $u \geq 0$ 是初始资本， $W = (W_t)$ 是标准维纳过程，而$P = (P_t)$ 是“业务”过程（或 Cramér–Lundberg 过程），且与W独立。在经典文献中， P通常表示为

$$P_t = -ct + \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i,$$

其中 $N = (N_t)$ 是强度为 $\lambda > 0$ 的泊松过程，$(\xi_i)_{i\geq 1}$ 是严格正随机变量的独立同分布序列，且与 N 独立，其共同分布函数为 F，满足 $F(0) = 0$。在随机微积分文献中，通常将该和表示为随机积分：

$$\sum_{i=1}^{N_t} \xi_i = \int_0^t \int_0^\infty x\,p(ds, dx),$$

其中， $p(ds, dx)$ 是一个泊松随机测度，其均值测度为 $q(ds, dx) = \lambda ds\,F(dx)$。

这样的模型也可以描述风险投资公司的资本演变：该公司支付当前支出，并通过出售创新成果获得收入 ξ_i。

重新整理各项后，将方程 (1) 写成传统的随机微分方程形式，可得：

$$dX_t = \big((a-r)\kappa + r\big)X_t\,dt + \kappa\sigma X_t\,dW_t + dP_t, \qquad X_0 = u. \tag{2}$$

令 $\tau^u := \inf\{t\colon\ X_t^u \le 0\}$（破产时间），$\Psi(u) := \mathbf{P}(\tau^u < \infty)$（破产概率），且 $\Phi(u) := 1 - \Psi(u)$（生存概率）。

前述论文 [14],及其补充论文 [18] 和 [19]（讨论 $\beta = 0$的情形），研究了无风险利率 $r = 0$假设下破产概率的渐近分析。对于 $\kappa = 1$且F 服从指数分布的情形，结果表明，若 $\beta := 2a/\sigma^2 - 1 > 0$，则$\Psi(u) \sim Cu^{-\beta}$（当 $u \to \infty$时）；若 $\beta \le 0$，破产迫在眉睫。若 $\kappa \in (0,1)$，则在 $\beta_\kappa := 2a/(\kappa\sigma^2) - 1$的条件下，同样的结论成立。方程 $\beta_\kappa = 0$ 定义了风险投资比例的阈值，超过该阈值便必然破产。论证的第一步在技术上较为困难且精细，即证明在对 F作出适当假设时，生存概率是光滑的。第二步较为简单，即证明 Φ满足一个积分微分方程。对于指数跳跃分布这一特定情形，对该方程求导并消去积分项后，可将其化为三阶线性常微分方程。对于生存概率的导数而言，该常微分方程实际上是二阶的。文献中已有此类方程解的渐近结果。Kalashnikov 和 Norberg 在 [17], 中证明了破产概率下降速度不会快于某个幂函数；利用这一性质即可得到前述结果。

值得注意的是，消去积分项的方法不仅适用于指数跳跃分布，也适用于其他类别（例如帕累托分布），并且可以借助拉普拉斯变换和陶伯定理得到渐近结果；参见 [1], [2], 和 [3]。

重要的是，如果生存概率是光滑的，即 $\Phi \in C^2$，那么通过基于伊藤公式的直接论证可以得出结论：Φ在经典意义下满足积分微分方程（IDE）

$$\frac{1}{2}\kappa^2\sigma^2u^2\Phi''(u) + ((a-r)\kappa + r)u\Phi'(u) = \\ = c\Phi'(u) - \lambda\int_0^\infty (\Phi(u+y) - \Phi(u))\,dF(y), \tag{3}$$

例如，参见 [14]。破产概率也满足同一方程。

目前已知的确保 Φ 光滑的 F 充分条件相当严格：若 F 具有密度函数 $f \in C^2$，且满足 $f' \in L^1(\mathbb{R}_+)$，则这一性质成立；参见 [16]。因此，一些作者倾向于先验地假设其具有光滑性。另一方面，不难证明，在更一般的条件下，Φ 是上述方程的黏性解；但要证明黏性意义下边值问题解的唯一性，则相当复杂；参见 [5]。此外，对于一个基于广义奥恩斯坦–乌伦贝克过程的模型所导出的方程，近期研究见 [4]。

主要结果。在本文中，我们采用了一种完全不同的证明策略。我们的主要结果是以下定理。

定理1 假设 $F(0) = 0$、$\mathbf{E}[\xi] < \infty$ 且

$$\gamma := \frac{(a-r)\kappa + r}{\kappa^2\sigma^2} > 1.$$

于是，生存概率 $\Phi \in C([0,\infty)) \cap C^2((0,\infty))$ 满足带有边界条件 $\Phi(0) = 0, \Phi(\infty) = 1$的积分微分方程 *(3)*。此外，存在一个有限常数 $C > 0$，使得当 $u \to \infty$ 时，$\Psi(u) \sim Cu^{-\gamma+1}$。

我们的结果大幅放宽了对跳跃幅度分布的现有条件。我们的方法基于将积分微分方程化为关于其解的导数的一对积分方程。这两个积分方程在适当选取的点 $u_0 \in (0,\infty)$ 处耦合。对于定义在 $[u_0,\infty)$ 上的第一个积分方程，我们证明一个颇为特殊的终值问题存在唯一解。具体而言，我们寻求一个解，其渐近行为为 $u^{-\gamma}$（当 $u \to \infty$ 时），这与先前的结果相一致，例如 [14] 中的结果（注意，在 $\kappa = 1$ 且 $r = 0$ 的情况下，$\gamma = \beta + 1$）。值得注意的是，我们在证明中并不依赖先前建立的渐近公式；这些公式仅提供了研究动机。当 u_0 足够大时，我们利用巴拿赫不动点定理求得该解。关于导数的第二个方程是定义在 $(0,u_0]$ 上的第二类沃尔泰拉积分方程，其终端条件 u_0 由第一个方程的解确定。将两个解拼接起来，便得到所求函数的导数解，其中包含一个待确定的乘法常数 C。为了满足零点处的零边界条件，积分得到原积分微分方程解 Φ 时产生的加法常数 C_0 必须取为零。随后选择常数 C，以确保无穷远处的极限为一。还需指出，C 是“可计算的”，因为它可表示为一个涉及上述方程解的积分，而这些解本身至少可以通过数值方法求得。最后，利用伊藤公式，我们很容易得出结论：Φ 与生存概率相同。

我们的论证非常简单。我们不将积分微分方程化为高阶常微分方程，因为那样会引入一个额外常数；相反，我们只依赖于关于积分微分方程解唯一性的标准结果。尽管在概念上受到论文 [12] 关于非寿险模型的启发，我们的证明在技术上却截然不同。

2 积分微分方程的分析

回想一下，我们假设 F 在零点连续（$F(0) = 0$），且 $\mathbf{E}\xi_1 < \infty$。对有界变差函数使用分部积分（或富比尼定理），可得：

$$\int_0^\infty \Phi(u+y)F(dy) = -\int_0^\infty \Phi(u+y)d\bar{F}(y) = \Phi(u) + \int_0^\infty \Phi'(u+y)\bar{F}(y)dy,$$

其中 $\bar{F} := 1 - F$。利用这一关系，方程 (3) 可写成等价形式

$$\frac{1}{2}\kappa^2\sigma^2u^2\Phi''(u) + ((a-r)\kappa + r)u\Phi'(u) - c\Phi'(u) = -\lambda\int_0^\infty \Phi'(u+y)\bar{F}(y)dy, \quad (4)$$

适用于我们的目的。我们关注该方程的经典解，即 $C([0,\infty]) \cap C^2((0,\infty))$，并满足无穷远处的边界条件以及零点处的$\Phi(\infty) = 1$ 和 $\Phi(0) = 0$。

方程 (4) 被化为关于导数 $g(u) := \Phi'(u)$ 的一阶齐次积分微分方程。引入记号

$$\gamma := \frac{2((a-r)\kappa + r)}{\kappa^2\sigma^2}, \quad \alpha := \frac{2c}{\kappa^2\sigma^2}, \quad \mu := \frac{2\lambda}{\kappa^2\sigma^2},$$

我们得到关于 g 的以下积分微分方程:

$$u^2 g'(u) + (\gamma u - \alpha) g(u) = -Ag(u), \tag{5}$$

其中

$$Ag(u) := \mu \int_0^\infty g(u+z)\,\overline{F}(z)\,dz. \tag{6}$$

注意，对于任意 $u > 0$ 和 $p \geq 0$

$$|Ag(u)| \leq \mu \sup_{x \geq u} x^p |g(x)| \int_0^\infty (u+z)^{-p} \bar{F}(z) dz \leq \mu \|g\|_{p,u}\, u^{-p} \mathbf{E}[\xi],$$

其中 $\|g\|_{p,\ u} := \sup_{x \geq u} x^p |g(x)|$。右端关于 u 单调递减，因此，对于任意 $u_0 > 0$, 我们有以下界

$$\sup_{u \geq u_0} |Ag(u)| \leq \mu \|g\|_{p,u_0}\, u_0^{-p} \mathbf{E}[\xi]. \tag{7}$$

注*1* 如果公司将全部资本储备投资于风险资产，即$\kappa = 1$，那么按照 [14] 的记号，常数 $\gamma := 2a/\sigma^2 = \beta + 1$。回顾一下，若$\beta \leq 0$，则对所有 $u > 0$，（最终）破产概率 $\Psi(u) = 1$。

引理1 假设 $\gamma > 0$。令 $u_0 > \mu \mathbf{E}[\xi]$。那么积分微分方程（*5*）在 $[u_0, \infty)$ 上有唯一经典解 $g^* > 0$，使得 $u^\gamma g^*(u) \to 1$，当 $u \to \infty$时。

证明 令 $g \geq 0$ 为满足（5）的可微函数。在任意区间$[u_0, \infty)$上，方程（5）可写成如下等价形式:

$$\left(u^\gamma e^{\alpha/u} g(u)\right)' = -u^{\gamma-2} e^{\alpha/u} Ag(u). \tag{8}$$

根据（7），$\|Ag\|_{\gamma,\ u_0} = \sup_{u \geq u_0} |Ag(u)| < \infty$。将上述关系从 u 积分到 ∞，可得在 $[u_0, \infty)$上，积分方程为

$$1 - u^\gamma e^{\alpha/u} g(u) = -\int_u^\infty t^{\gamma-2} e^{\alpha/t} Ag(t) dt$$

可改写为以下形式

$$g(u) = g_0(u) + Tg(u) \tag{9}$$

其中 $g_0(u) := u^{-\gamma} e^{-\alpha/u}$ 且

$$Tg(u) = \mu\, u^{-\gamma} e^{-\alpha/u} \int_u^\infty t^{\gamma-2}\, e^{\alpha/t} \left(\int_0^\infty g(t+z) \bar{F}(z) dz \right) dt.$$

考虑巴拿赫空间

$$\mathcal{X}_{\gamma,u_0} = \{g \in C([u_0,\infty]) \colon \|g\|_{\gamma,u_0} < \infty\}.$$

注意，对于 $u \geq u_0$ 和任意$g \in \mathcal{X}_{\gamma,\ u_0}$

$$u^\gamma Tg(u) \leq \mu \int_{u_0}^{\infty} t^{\gamma-2} \left(\int_0^{\infty} g(t+z)\bar{F}(z)dz \right) dt \leq \mathbf{E}[\xi]\mu\, u_0^{-1} \|g\|_{\gamma,u_0} < \infty.$$

由此可知，线性算子 T 将空间 $\mathcal{X}_{\gamma,\ u_0}$ 映射到其自身。此外，对于任意 g_1, $g_2 \in \mathcal{X}_{\gamma,\ u_0}$ 我们有如下界

$$||Tg_1 - Tg_2||_{\gamma,u_0} \leq \theta \|g_1 - g_2\|_{\gamma,u_0}, \qquad \theta := \mu \mathbf{E}[\xi] u_0^{-1}.$$

根据我们对 u_0 的选择，常数 $\theta < 1$，因此映射 T 是巴拿赫空间 $\mathcal{X}_{\gamma,\ u_0}$上的压缩映射。由于 $g_0 \in \mathcal{X}_{\gamma,\ u_0}$，映射 $S\colon\ g \mapsto g_0 + Tg$也是$\mathcal{X}_{\gamma,\ u_0}$上的压缩映射。根据巴拿赫不动点定理，$S$ 有唯一的不动点g^*。由于 $g_0 > 0$ 连续迭代是递增的，不动点 g^* 在 $[u_0,\infty)$ 上是严格正函数。容易验证，函数 $S(g^*)$ 连续可微，g^* 也如此。 □

注 *2* 在固定的 u_0下，得到 g^* 在 $[u_0,\infty)$ 上的解，因此该解依赖于初始点 u_0。用符号表示，可写为 $g(u;u_0)$。容易看出，当 $u_1 \geq u_0$时，该函数在区间 $[u_1,\infty)$ 上仍是解。由于解的唯一性，我们有 $g^*(u;u_0) = g^*(u;u_1)$ 在 $[u_1,\infty)$ 上成立。

引理 2 假设 $\gamma > 1$。那么，积分微分方程 *(5)* 在 $[0,\infty)$ 上有唯一经典解 $\hat{}g > 0$，满足 $\hat{}g = g^*$ 在 $[u_0,\infty)$ 上（因此，$u^{\gamma\hat{}}g(u) \to 1$，当 $u \to \infty$ 时）。

证明 为求解区间 $(0,u_0)$ 上带终端条件 $v(u_0) = g^*(u_0)$ 的积分微分方程 (8)（等价于 (5)），我们首先将其转化为积分方程

$$u^\gamma e^{\alpha/u} g(u) = u_0^\gamma e^{\alpha/u_0} g^*(u_0) + \int_u^{u_0} y^{\gamma-2} e^{\alpha/y} Ag(y)dy. \tag{10}$$

将 $Ag(u)$ 定义中的积分在点 u_0 处分开，经过变量代换可得

$$Ag(u) = \mu \int_u^{u_0} g(y)\overline{F}(y-u)\,dy + H(u),$$

其中函数

$$H(u) := \mu \int_{u_0}^{\infty} g^*(y)\overline{F}(y-u)\,dy$$

已知其单调递增且有界：

$$H(u) \leq \mu \sup_{y \geq u_0} g^*(y) \int_u^{\infty} \bar{F}(u-y)dy = \mu \sup_{y \geq u_0} g^*(y)\mathbf{E}\xi.$$

利用控制收敛定理，我们得到极限 $H(0+)$ 存在且等于

$$H(0) = \mu \int_{u_0}^{\infty} g^*(y)\overline{F}(y-)\,dy > 0. \tag{11}$$

令 $M(u) := u^{\gamma}e^{\alpha/u}$。两边除以 $M(u)$ 并交换积分次序，由（10）可得方程

$$g(u) = f(u) + \int_{u}^{u_0} K(u,y)g(y)\,dy, \quad u \in (0,u_0], \tag{12}$$

其中

$$f(u) := \frac{M(u_0)}{M(u)}g^*(u_0) + \frac{1}{M(u)}\int_{u}^{u_0} t^{\gamma-2}e^{\alpha/t}H(t)\,dt,$$

$$K(u,y) := \mu\frac{1}{M(u)}\int_{u}^{y} t^{\gamma-2}e^{\alpha/t}\overline{F}(y-t)\,dt.$$

根据书籍 [7] 中的定理 2.1.1，关系式（12）是一个具有连续核的第二类 Volterra 方程。它存在唯一解 $g_* \in C((0,u_0])$。显然， $g_* \in C^1((0,u_0))$ 。

注意， f 是区间 $(0,u_0]$ 上的连续函数。我们来验证它能否扩展为闭区间 $(0,u_0]$ 上的连续函数。事实上， $M'(u) = (\gamma u - \alpha)u^{\gamma-2}e^{\alpha/u}$ ，根据洛必达法则

$$\lim_{u\downarrow 0} f(u) = \lim_{u\downarrow 0}\frac{1}{M(u)}\int_{u}^{u_0} t^{\gamma-2}e^{\alpha/t}H(t)\,dt = -\lim_{u\downarrow 0}\frac{1}{M'(u)}u^{\gamma-2}e^{\alpha/u}H(u) = \frac{H(0)}{\alpha},$$

其中 $H(0)$ 由公式（11）给出。由此可知， f 可以扩展为闭区间 $[0,u_0]$ 上的连续函数。因此，它的上界为某个常数 $\kappa > 0$。

类似的计算表明，对于所有 $y \in (0, u_0]$

$$\lim_{u\downarrow 0} K(u,y) = \frac{\mu}{\alpha}\bar{F}(y-).$$

对于所有 $u \in (0, u_0)$ 和 $y \geq u$ ，我们有

$$K(u,y) \leq \mu\frac{1}{M(u)}\int_{u}^{y} e^{\alpha/t}t^{\gamma-2}\,dt \leq \frac{\mu}{\gamma-1}y^{\gamma-1} := h(y)$$

考虑到这些性质，我们得到方程 (12) 的解 g_* 满足以下界

$$g_*(u) \leq \kappa + \int_{u}^{u_0} h(y)g_*(y)dy, \qquad u \in (0,u_0].$$

根据 Gronwall–Bellman 不等式

$$g_*(u) \leq \kappa\exp\left\{\int_{u}^{u_0} h(y)\,dy\right\}.$$

因此， $g_*(u)$ 在 $(0, u_0]$ 上有界。

令 $u \downarrow 0$趋于极限，在 (12) 中取极限可得

$$g_*(0+) = \frac{H(0)}{\alpha} + \frac{\mu}{\alpha}\int_0^{u_0} g_*(y)\bar{F}(y)\,dy = \frac{\mu}{\alpha}\int_{u_0}^{\infty} g^*(y)\bar{F}(y)\,dy + \frac{\mu}{\alpha}\int_0^{u_0} g_*(y)\bar{F}(y)\,dy$$

并且通过令$g_*(0) := g_*(0+)$，我们可以将 g_* 扩展为闭区间 $[0,\infty]$ 上的连续函数。因此，函数 $\hat{g} := g_* I_{[0,u_0]} + g^* I_{(u_0,\infty)}$ 是方程（5）的唯一经典解，满足 $u^\gamma \hat{g}(u) \to \infty$，当 $u \to \infty$ 时。

注意，在点 u_0处导数不存在问题。由于已证明唯一性，所构造的解可以替换为任意点 $u_1 > u_0$，而不会影响解$\hat{g}$。 □

因此，$\hat{g}$ 是经典解。

3 不破产概率与积分微分方程的解

由于方程（5）是线性的，其所有在无穷远处具有渐近行为 $Cu^{-\gamma}$、 $C > 0$的解，均具有形式 $C\hat{g}(u)$。方程（3）的相应通解形式为

$$G(u) = C_0 + C\int_0^u \hat{g}(t)\,dt. \tag{13}$$

我们的目标是选择这些常数，以确保 $G = \Phi$。下一个引理表明，常数 C_0 必须等于零。

引理 3 $\Phi(0+) = \Phi(0) := 0$。

证明 考虑由线性随机微分方程给出的随机指数 $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$

$$dZ_t = Z_t\left(((a-r)\kappa + r)\,dt + \sigma\,dW_t\right), \qquad Z_0 = 1,$$

$\hat{}$ 并定义过程 X^u

$$\hat{X}_t^u = Z_t\Big(u - c\int_0^t Z_s^{-1}ds\Big).$$

令 $\hat{\tau}^u := \inf\{t \geq 0 : \hat{} X^u = 0\}$，并令 T_1为泊松过程 N的首次跳跃时刻。根据随机柯西公式，该公式给出了非齐次线性随机微分方程 $X^u = X^u$ 在 $[0, T_1)$ 上的解，且 $X^u_{T_1} = X^u_{T_1} + \Delta X^u_{T_1} \geq X^u_{T_1}$。因此，$\hat{\tau}^u \wedge T_1 = \tau^u \wedge T_1$。由此可得

$$0 \leq \hat{X}^u_{\tau^u \wedge T_1} = Z_{\tau^u \wedge T_1}\Big(u - c\int_0^{\tau^u \wedge T_1} Z_s^{-1}ds\Big) \leq \xi^* u - c\frac{\xi_*}{\xi^*}(\tau^u \wedge T_1),$$

其中 $\xi_* := \inf_{s\leq T_1} Z_s$， $\xi^* := \sup_{s\leq T_1} Z_s$。因此，当 $u \to 0$ 时， $\tau^u \to 0$，结论随之得出。 □

我们选取常数 C，使等式 $G(\infty) = \Phi(\infty) = 1$成立。

引理4 由式（*13*）给出的函数 G，在 $C_0 = 0$ 和 $C = 1/\int_0^\infty \hat{}\, g(s)\, ds$ 的条件下，与 Φ一致。

证明 我们将伊藤公式应用于 $(X^u_{t\wedge\tau})$，其中 G 是方程（3）的经典解，且 $G(0) = 0$ 以及 $G(\infty) = 1$。补偿跳跃分量并重新整理各项后，我们注意到，根据（3），关于 ds 的积分中的被积函数等于零，因此有 $G(X^u_{t\wedge\tau^u}) - G(u) = M_t$，其中

$$M_t = \int_0^{t\wedge\tau^u} G'(X^u_{s\wedge\tau^u})\kappa\sigma X^u_s dW_s + \int_0^{t\wedge\tau^u}\int (G(X^u_{s-}+x) - G(X^u_{s-})(p-q)(ds,dx).$$

过程 (M_t) 是一个从零开始的有界鞅。因此，对于任意停时 τ，$\mathbf{E}[M_\tau] = 0$。由此可得

$$G(u) = \mathbf{E}\left[G(X^u_{\tau^u})I_{\{\tau^u=\infty\}}\right] + \mathbf{E}\left[G(X^u_{\tau^u})I_{\{\tau^u<\infty\}}\right] = G(\infty)\mathbf{P}(\tau^u = \infty) = \Phi(u)$$

从而得到结果。 □

由于 $\Phi = G$，并且根据洛必达法则，当 $u \to \infty$ 时，$1 - G(u) \sim Cu^{-\gamma+1}$，我们得到定理1中所述的所有性质。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

致谢 作者谨向 Yuri Kabanov 致以谢意，感谢他提出问题并给予宝贵指导。

参考文献

1. Albrecher, H., Badescu, A., Landriault, D.：关于带税收的对偶风险模型。《保险：数学与经济学》，**42**，1086–1094（2008） 2. Albrecher, H., Constantinescu C., Thomann E.：带风险投资的更新风险模型的渐近结果。《随机过程及其应用》，**122**，3767–3789（2012） 3. Antipov, V.：关于将拉普拉斯变换应用于随机保险赔付和风险资产投资下的破产问题。arXiv:2508.07235（2025） 4. Antipov, V., Kabanov, Yu.：有限区间内的投资破产问题：偏积分微分方程及其黏性解。《金融与随机学》，https://doi.org/10.1007/s00780-025-00580-6（2025） 5. Belkina, T. A., Kabanov, Yu.：非破产概率积分微分方程的黏性解，《概率论及其应用》，《概率论及其应用》，**60**，4，671–679（2016） 6. Buraczewski, D., Damek, E., Mikosch, Th.：《具有幂律尾部的随机模型：方程 $X = AX + B$》。施普林格运筹学与金融工程丛书。施普林格，柏林（2016） 7. Burton, T.A.：《沃尔泰拉积分方程与微分方程》。学术出版社，纽约（1983） 8. Eberlein, E., Kabanov, Yu., Schmidt T.：带投资的 Sparre Andersen 模型的破产概率。《随机过程及其应用》，**144**，72–84（2022） 9. Frolova, A.G.：风险理论的一些数学模型。全俄几何与分析随机方法学校研讨会。摘要，1994，117-118。10. Frolova, A., Kabanov, Yu., Pergamenshchikov, S.：保险业务中的风险投资具有危险性。《金融与随机学》**6**，2，227–235（2002）

11. Goldie, C.：隐式更新理论与随机方程解的尾部。《应用概率年刊》，**1** 126–166（1991） 12. Grandits, P.：一个 Karamata 型定理，以及按比例投资于股票市场的保险公司的破产概率。《保险：数学与经济学》，**34**，297–305（2004） 13. Kabanov Yu., Legenkiy, D., Promyslov, P.：分布方程与带投资的 Sparre Andersen 模型的破产问题。《极值》。即将发表。 14. Kabanov Yu., Pergamenshchikov S.：保险业务中的风险投资具有危险性：负风险和情形。《金融与随机学》**20**，2，355–379（2016） 15. Kabanov Yu., Promyslov, P.：带投资的 Sparre Andersen 模型的破产概率：年金支付情形。《金融与随机学》**27**，4，887–902（2023） 16. Kabanov, Yu., Pukhlyakov, N.：投资情形下的破产概率：光滑性、积分微分方程与常微分方程、渐近行为。《应用概率杂志》**59**，556–570（2020） 17. Kalashnikov, V., Norberg, R.：存在风险投资时的幂尾破产概率。《随机过程及其应用》，**98**，211–228（2002） 18. Pergamenshchikov, S., Zeitouni, O.：存在风险投资时的破产概率。《随机过程及其应用》**116**，267–278（2006） 19. Pergamenshchikov, S.：《勘误：“存在风险投资时的破产概率” [《随机过程及其应用》**116**（2006），267–278]。《随机过程及其应用》**119**，1，305–306（2009）