旋磁波导的模态分析

Konstantinos Delimaris，*IEEE* 研究生会员，Georgios D. Kolezas，Carsten Rockstuhl 和 Grigorios P. Zouros，*IEEE* 高级会员

arXiv:2601.01470v1 [physics.optics] 4 Jan 2026

摘要—**本文报告了开放式旋磁波导（GWs）的模态分析结果。GWs 由非圆形旋磁（即旋电和旋磁）芯层以及无限延伸的各向同性包层组成。为解决这一问题，我们开发了两种相互独立的全波方法。第一种技术是扩展积分方程（EIE）方法，它是在此前开发的 EIE 方法基础上扩展而来，后者用于计算复合介质各向同性波导中的传播常数。第二种技术是切比雪夫展开方法（CEM）。在这两种实现中，旋磁芯层内的电场和磁场均采用基于超势的柱矢量波函数（SUPER-CVWFs）展开；该函数近期针对旋磁圆柱体的斜入射多重散射问题开发。两种技术均可在不作近似的情况下计算一般情形下的传播常数。本文研究了各种非圆形旋磁波导。通过商用有限元求解器对 EIE 和 CEM 的结果进行了验证，并对两种方法的精度和计算性能进行了基准测试。本文还介绍了一项微波应用，其中计算了外加磁通密度偏置存在时铁氧体棒的复传播常数。我们的工作将开放式波导中的传播理论从介质/各向同性波导推进到旋磁波导，并为当代导波结构的设计提供了支持。**

索引词—**各向异性、介质波导、陀螺性、模态分析、传播常数、超势。**

I. 引言

OPEN 波导是现代微波和光子系统的重要组成部分，应用范围广泛，涵盖从单脉冲雷达 [1],波束驱动辐射源 [2], 太赫兹网络中的高速传输 [3], 用于环境、工业和生物医学领域的光纤传感器 [4], 毫米波频率下的信号失真 [5], 到基于光载波的微波干涉测量的微波光子干涉仪 [6], 以及低时延传输系统 [7]等众多领域。

传统上，圆柱形介质波导（DWs）由各向同性材料制成，例如二氧化硅。根据应用需求，芯层的介电常数可能呈现阶跃折射率 [8], 反抛物线渐变折射率 [9], 螺旋包层阶跃折射率 [10], 或径向变化分布 [11]。然而，现代导波结构利用各向异性材料以实现奇异特性，例如用于截止频率以下传播的超材料光纤 [12], 支持轨道角动量的扭曲各向异性介电常数光纤 [13]以及用于数据传输的光学涡旋 [14] ，还有用于C波段传播的高双折射掺杂二氧化硅玻璃结构 [15]。

过去，人们已通过多种方法对非圆形各向同性介质波导进行了严格的模态分析。具有代表性的方法包括：针对椭圆形杆使用椭圆波函数 [16], [17], 针对任意横截面芯层使用场的积分表示 [18], 以及针对非圆形介质波导使用辅助源法 [19]。近年来，人们还通过零场法-表面等效原理方法 [20], 以及矢量扩展积分方程法 [21]研究了复合非圆形介质结构。

尽管如上所述，已有多种针对各向同性介质波导模态分析的方法，但关于开放式非圆形各向异性波导严格模态分析的报道仍然很少。在本文语境中，旋磁波导（GMW）是指芯层为旋磁介质的开放式波导。具体而言，旋电波导（广义电磁波）具有旋电芯层，而旋磁波导（GMW）具有旋磁芯层。

关于圆形旋磁性波导的纯理论研究（不含数值结果）最初见于 [22] ，采用了叠加原理。 [23] 通过圆柱本征函数展开法研究了圆形旋电波。该研究给出了普遍情形下的特征方程（即不对旋电芯的张量介电率分量施加限制），但数值结果仅限于非对角分量相较于其他分量较小的情形。 [24] 提出了一种针对横向开放式各向异性波导的模态理论，采用变分法； [25] 通过微扰法研究了介电常数具有对角分量的开放式各向异性波导； [26] 则通过等效电流理论分析了介电常数受扰的开放式各向异性波导。 [27]将马丢函数法用于各向异性椭圆开放式波导的模态分析。 [28] 也采用圆柱本征函数法，分析开放式各向异性波导中的光学涡旋。 [29] 通过将每一层表示为混合矩阵，再提取该结构的等效电路，研究了具有多层单轴各向异性的圆形及非圆形开放式各向异性波导。最后， [30]采用变换光学技术，对开放式各向异性波导中的扭曲介电率进行建模。

在本研究中，我们首次报告了严格的

Konstantinos Delimaris 任职于希腊雅典国立技术大学电气与计算机工程学院，地址为希腊雅典 15773；同时任职于美国纽约市立大学先进科学研究中心光子学倡议，地址为美国纽约州纽约市 NY 10031（电子邮箱：kdeli-maris@gc.cuny.edu）。Georgios D. Kolezas 和 Grigorios P. Zouros 任职于希腊雅典国立技术大学电气与计算机工程学院，地址为希腊雅典 15773（电子邮箱：geokolezas@central.ntua.gr；zouros@ieee.org）。Carsten Rockstuhl 任职于德国卡尔斯鲁厄理工学院理论固态物理研究所，地址为德国卡尔斯鲁厄 76131；同时任职于德国卡尔斯鲁厄理工学院纳米技术研究所，地址为德国卡尔斯鲁厄 76131（电子邮箱：carsten.rockstuhl@kit.edu）。

圆形和非圆形旋电波导的全波模态分析。我们采用两种相互独立的全波方法，计算这类波导中的传播常数。第一种方法基于扩展积分方程（EIE），此前曾用于计算复合各向同性双层波导中的传播常数 [21]。第二种方法是本文提出的切比雪夫展开法（CEM），该方法无需积分，通过使用切比雪夫多项式满足芯层-包层界面处的边界条件（BCs）。在这两种方法（EIE 和 CEM）中，电磁场（EM）均使用近期提出的基于超势的柱矢量波函数（SUPER-CVWFs）展开 [31]。当关于 z 具有 $\exp(i\beta z)$ 依赖关系时，这种展开使我们能够轻松表示旋磁介质中的场；也就是说，在 $\partial/\partial z \to i\beta \neq 0$的情况下，其中 β 为传播常数。每种方法在施加边界条件（BCs）后，都会得到一个行列式方程，其根即为传播常数 β。

通过在大量案例中与其他方法进行比较，对 EIE 和 CEM 进行了全面验证：（i）对于圆形各向同性介质波导，与众所周知的分离变量法（SVM） [32] 进行比较；（ii）对于圆形旋电波导，与微扰解进行比较 [23]；（iii）对于一般情况下的圆形旋电波导和旋磁波导，即不限制芯层介电常数/磁导率的张量元素时，与 COMSOL 商用全波有限元求解器进行比较；（iv）对于非圆形旋电波导和旋磁波导，与 COMSOL 进行比较，其中包括横截面为椭圆形、圆角三角形和圆角正方形的芯层。本文还讨论了各种方法的优缺点及其相对于 COMSOL 的效率。最后，为了展示 EIE 和 CEM 的适用性，本文研究了一项微波应用：计算存在外加磁通密度偏置时铁氧体旋磁波导的复传播常数。

本工作的创新之处如下。（i）针对具有旋电和旋磁芯层的圆形与非圆形旋电波导，开展了完整、严格的全波模态分析。本分析推动了开放式波导研究从传统各向同性芯层向旋光芯层的发展。具体而言，对于圆形旋磁波导，本工作在 [22]的基础上有所推进，因为 [22]仅进行了理论讨论，缺少恰当的数值结果。相比之下，本研究全面讨论了铁氧体旋磁波导的理论、分析与验证，并探究了其微波应用。对于圆形旋电波，本工作在 [23] 的基础上有所推进；该文给出了适用于一般情况（即不限制旋电芯层的张量介电常数分量）的特征方程，但数值结果仅限于非对角分量相较于其他分量较小的情况。本研究不存在这类局限性。（ii）所得解为全波解。此外，张量介电常数/磁导率分量的取值不受限制。例如，该解不局限于弱导近似（WGA），后者假设芯层的折射率与包层相近。（iii）构建了两种独立方法，即 EIE 和 CEM，用于计算 β，其中

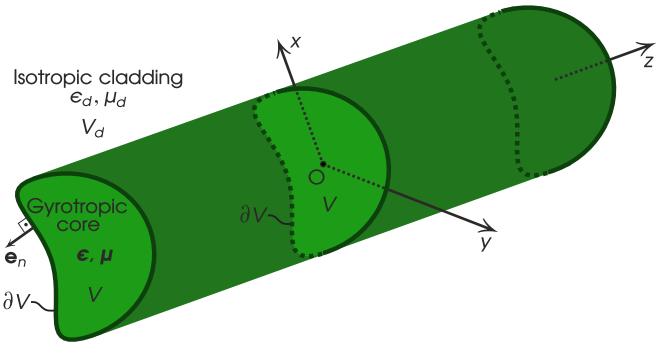


图1。旋电波导的构型。

旋磁芯层具有非圆形横截面。（iv）EIE 和 CEM 均以将场展开为 SUPER-CVWF 为出发点。尽管 SUPER-CVWF 是在 [31] 中为多重散射问题而开发的，本工作将这些最新发展的表达式用于解决另一类问题，即旋电波导中的混合波传播。对于 EIE，本方法扩展了 [21]，中采用的 EIE：现在，积分表示（IR）的核函数使用 SUPER-CVWF，而非广泛用于各向同性结构的标准圆柱矢量波函数。由此得到新的积分项，并用于构造行列式方程，以计算旋电波导中的 β 。另一方面，CEM 不像 EIE 那样基于积分，而是将芯层与包层界面上的边界条件按切比雪夫多项式展开。这提高了非圆形横截面的计算精度，因为 EIE 在此类情况下表现不佳。

本文的组织结构如下：第二节给出求解过程，第三节讨论这些方法的验证、收敛性和性能，第四节讨论其在铁氧体旋磁波导中的微波应用，第五节对全文进行总结。最后，附录A和B分别包含应用 EIE 和 CEM 所需的积分与求和。

II. 问题的求解

A. 旋电波导和 *SUPER-CVWF* 的构型

图1描绘了非圆形 GW 的构型。旋磁核心由边界 ∂V 定义，其中 $\mathbf{e}_n$ 为其指向外部的单位法向量，V 为其内部。芯层 V 是一个具有张量介电常数 $\boldsymbol{\epsilon}$ 和磁导率 $\boldsymbol{\mu}$ 的介质，其旋磁形式为

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon & -i\epsilon_a & 0 \\ i\epsilon_a & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu & -i\mu_a & 0 \\ i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix}. \quad (1)$$

在（1）中，ϵ_0 和 μ_0 分别为自由空间的介电常数和磁导率，而 ϵ、ϵ_a、ϵ_z、μ、μ_a和 μ_z 为相对参数。图1中的包层记为 V_d，是具有本构参数 $\epsilon_d = \epsilon_{dr}\epsilon_0$ 和 $\mu_d = \mu_{dr}\mu_0$ 的各向同性电介质。

对于在旋磁介质中的传播，其中$\partial/\partial z \neq 0$，电场和磁场的纵向分量 E_z 和 H_z 相互耦合 [33], ，即它们不会

分别满足齐次亥姆霍兹方程，正如 $\partial/\partial z = 0$时的截止情形。然而，借助所谓的超势 [33], , 可以在 $\partial/\partial z \to i\beta \neq 0$时得到电磁场分量的解析解。在 [31],中，我们构建了 SUPER-CVWF，使得能够对旋磁介质内部的电磁场进行优雅的矢量展开。这些 SUPER-CVWF 将标准圆柱矢量波函数与根据超势理论获得的场分量解析表达式相结合。特别地，假设具有 $\exp(-i\omega t)$ 时间依赖性并且 $\partial/\partial z \to i\beta$，电场$\mathbf{E}(\mathbf{r})$在 V内部可展开为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{jm}\big[\tilde{\mathbf{M}}_m^{(1)}(\chi_j,\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{N}}_m^{(1)}(\chi_j,\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{L}}_m^{(1)}(\chi_j,\mathbf{r})\big], \quad (2)$$

其中，$\mathbf{r} = (\rho,\varphi,z)$ 是柱坐标中的位置矢量，A_{jm} 为未知展开系数，而 $\tilde{\mathbf{M}}_m^{(1)}(\chi_j,\mathbf{r})$、$\tilde{\mathbf{N}}_m^{(1)}(\chi_j,\mathbf{r})$ 和 $\tilde{\mathbf{L}}_m^{(1)}(\chi_j,\mathbf{r})$ 是电超圆柱矢量波函数，其表达式为

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{M}}_m^{(1)}(\chi_j,\mathbf{r}) &= e^{i\beta z}e^{im\varphi}T_j\Big[i\frac{m}{\rho}J_m(\chi_j\rho)\mathbf{e}_\rho - \chi_j J_m'(\chi_j\rho)\mathbf{e}_\varphi\Big],\\
\tilde{\mathbf{N}}_m^{(1)}(\chi_j,\mathbf{r}) &= e^{i\beta z}e^{im\varphi}\frac{W_j - i\beta S_j}{\chi_j^2+\beta^2}\Big[i\beta\chi_j J_m'(\chi_j\rho)\mathbf{e}_\rho \\
&\quad - \frac{m\beta}{\rho}J_m(\chi_j\rho)\mathbf{e}_\varphi + \chi_j^2 J_m(\chi_j\rho)\mathbf{e}_z\Big],\\
\tilde{\mathbf{L}}_m^{(1)}(\chi_j,\mathbf{r}) &= e^{i\beta z}e^{im\varphi}\frac{\chi_j^2 S_j - i\beta W_j}{\chi_j^2+\beta^2}\Big[\chi_j J_m'(\chi_j\rho)\mathbf{e}_\rho \\
&\quad + i\frac{m}{\rho}J_m(\chi_j\rho)\mathbf{e}_\varphi + i\beta J_m(\chi_j\rho)\mathbf{e}_z\Big]. \qquad (3)
\end{aligned}$$

在式 (3) 中，χ_j 由 [31, 式 (6)]给出，T_j、W_j 和 S_j 由 [31, 式 (8)]给出；$J_m(x)$ 是贝塞尔函数，$J_m'(x)$ 是其关于自变量的导数。内部的磁场$\mathbf{H}(\mathbf{r})$ V展开为

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{jm}\big[\hat{\mathbf{M}}_m^{(1)}(\chi_j,\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{N}}_m^{(1)}(\chi_j,\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{L}}_m^{(1)}(\chi_j,\mathbf{r})\big], \quad (4)$$

其中，$\hat{\mathbf{M}}_m^{(1)}(\chi_j,\mathbf{r})$、$\hat{\mathbf{N}}_m^{(1)}(\chi_j,\mathbf{r})$ 和 $\hat{\mathbf{L}}_m^{(1)}(\chi_j,\mathbf{r})$ 是磁超圆柱矢量波函数，由式 (3) 将 $T_j \to N$、$W_j \to R_j$ 和 $S_j \to M_j$ 替换为 N、R_j 和 M_j 得到，其中后三者由 [31,式 (8)]给出。

在各向同性包层 V_d中，电场 $\mathbf{E}^d(\mathbf{r})$ 按标准圆柱矢量波函数展开为：

$$\mathbf{E}^d(\mathbf{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\big[B_m\mathbf{M}_m^{(6)}(\kappa_c,\mathbf{r}) + \Gamma_m\mathbf{N}_m^{(6)}(\kappa_c,\mathbf{r})\big]. \quad (5)$$

在式（5）中，B_m 和 Γ_m 是未知的展开系数，$\kappa_c = (\beta^2 - k_d^2)^{1/2}$，而 $k_d = \omega(\epsilon_d\mu_d)^{1/2}$ 是 V_d中的波数。CVWF $\mathbf{M}_m^{(6)}(\kappa_c,\mathbf{r})$由 $T_j^{-1}\tilde{\mathbf{M}}_m^{(1)}(\chi_j,\mathbf{r})$给出，其中$\chi_j \to \kappa_c$，$J_m(x) \to K_m(x)$为第二类修正贝塞尔函数，当 κ_c 为实数时表示衰减波；$J_m'(x) \to K_m'(x)$则是 $K_m(x)$对自变量的导数。CVWF $\mathbf{N}_m^{(6)}(\kappa_c,\mathbf{r})$由 $k_d^{-1}(\chi_j^2 + \beta^2)/(W_j - i\beta S_j)\,\tilde{\mathbf{N}}_m^{(1)}(\chi_j,\mathbf{r})$给出，其中 $\chi_j \to \kappa_c$, $\chi_j^2 \to -\kappa_c^2$,$J_m(x) \to K_m(x)$，且 $J_m'(x) \to K_m'(x)$。V_d内部的磁场$\mathbf{H}^d(\mathbf{r})$由$\mathbf{H}^d(\mathbf{r}) = -i/(\omega\mu_d)\nabla\times\mathbf{E}^d(\mathbf{r})$求得。

本节余下部分将介绍：如何应用 SVM 对圆形导波进行全波模态分析，以及如何利用 EIE 和 CEM 对非圆形导波进行全波模态分析。下文中，电磁场表示为 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\rho})e^{i\beta z}$,$\mathbf{F} = \mathbf{E},\mathbf{H}$，其中 $\boldsymbol{\rho} = (\rho,\varphi)$ 是极坐标中的位置矢量。非圆形纤芯定义如下：在横向 xy 平面上，采用以 O 为原点的极坐标系 (ρ,φ)，如图 1 所示。于是，∂V由极坐标方程 $\rho = \rho(\varphi)$ 定义，其中 $0 \leqslant \varphi < 2\pi$。对于圆形纤芯，$\rho = a$，其中 a 为半径。

B. 通过 *SVM* 分析圆形导波

对于圆形芯层的模态分析，我们采用 SVM。为构造行列式方程，我们令边界条件满足 $\mathrm{e}_\rho \times [\mathrm{E}^d(a,\varphi,z) - \mathrm{E}(a,\varphi,z)] = 0$ and $\mathrm{e}_\rho \times [\mathrm{H}^d(a,\varphi,z) - \mathrm{H}(a,\varphi,z)] = 0$。将 (2)、(4)、(5) 以及利用 (5) 得到的 $\mathrm{H}^d(\boldsymbol{\rho}) = -i/(\omega\mu_d)\nabla\times\mathrm{E}^d(\boldsymbol{\rho})$ 展开式代入，并利用指数函数的正交关系，我们准确地得到以下齐次系统，用于对 β 进行全波计算，即 $\mathbb{Q}(\beta)\mathrm{u} = 0$，其中向量 $\mathrm{u} = [A_{1m},A_{2m},B_m,\Gamma_m]^T$，矩阵 $\mathbb{Q}(\beta) = (q_m^{pq}(\beta)) \in \mathbb{C}^{4\times4}, p,q = 1, 2, 3, 4$，其元素为 $q_m^{1j} = -T_j\chi_j J_m'(\chi_j a) + (imS_j/a)\,J_m(\chi_j a)$, $j = 1, 2$, $q_m^{13} = \kappa_c K_m'(\kappa_c a)$,$q_m^{14} = [m\beta/(k_d a)]K_m(\kappa_c a)$, $q_m^{2j} = W_j J_m(\chi_j a)$, $j = 1\ 2$ $q_m^{23} = 0$ $q_m^{24} = \big(\kappa_c^2/k_d\big)\,K_m\ \kappa_c a$ $q_m^{3j} = , , , ( ), -N_j\chi_j J_m'\ \chi_j a + im/a\ M_j J_m\ \chi_j a$ $j = 1\ 2$ $q_m^{33} = ( ) ( ) ( ), , ,-[im\beta/(Z_d k_d a)]K_m(\kappa_c a)$, $q_m^{34} = -(i\kappa_c/Z_d)\ K_m'(\kappa_c a)$,$q_m^{4j} = R_j J_m(\chi_j a)$, $j = 1, 2$, $q_m^{43} = -[i\kappa_c^2/(Z_d k_d)]K_m(\kappa_c a)$, 以及 $q_m^{44} = 0$。$\det\mathbb{Q}(\beta) = 0$ 的根 β 给出圆形旋电波导的传播常数。

C. 通过 *EIE* 实现非圆形 *GW*

对于通过 EIE 方法进行的非圆形纤芯模态分析，我们将后者应用于外部激励为零的情况 [21]，即，

$$\begin{aligned}
&\frac{i}{k_d}Z_d(k_d^2\mathbb{I} + \nabla\nabla^T)\oint_{\boldsymbol{\rho}'\in\partial V}\mathbb{G}_d(k_c;\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\mathbf{e}_n'\times\mathbf{H}^d(\boldsymbol{\rho}')\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'\\
&+\nabla\times\oint_{\boldsymbol{\rho}'\in\partial V}\mathbb{G}_d(k_c;\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\mathbf{e}_n'\times\mathbf{E}^d(\boldsymbol{\rho}')\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}' = 0,\ \boldsymbol{\rho}\in V. \quad (6)
\end{aligned}$$

在（1）中，$Z_d = (\mu_d/\epsilon_d)^{1/2}$ 是包层的阻抗，$\mathbb{I}$ 是单位并矢，T 表示转置，而 $\mathbb{G}_d(k_c;\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')$是无界 V_d 空间格林函数（GF）的张量形式 [31, 式（A.1）], , 其自变量为 $k_c = (k_d^2 - \beta^2)^{1/2} = i\kappa_c$。方程（6）是一个具有 $\boldsymbol{\rho} \in V$的矢量积分方程。接下来，我们在（6）中代入 $\mathbb{G}_d(k_c;\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')$的 $\rho < \rho'$分支，并对$\mathbb{G}_d(k_c;\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')$应用未加撇号的微分算子 $k_d^2\mathbb{I} + \nabla\nabla^T, \nabla\times$。此过程得到两个标量积分方程：一个由（6）的 z分量得到，另一个由（6）的 ρ–或 φ分量得到（两者均得到相同的标量积分方程）。采用堆叠记法，这些标量积分方程写作

$$iJ_{\frac{1}{2}m} - Z_d J_{\frac{4}{3}m} = 0. \quad (7)$$

（7）的上半部分，即使用堆叠记法中的上方指标得到的方程，对应于（6）的 z分量；而（7）的下半部分，即使用堆叠记法中的下方指标得到的方程，对应于（6）的 ρ 或 φ分量。 J_{km}, $k=1$、2、3、4是积分，其中 J_{1m} 和 J_{3m} 由下式给出

$$J_{\substack{1\\3}m}=\oint\limits_{\boldsymbol{\rho}'\in\partial V}\mathbf{M}_m^{(6)*T}(\kappa_c,\boldsymbol{\rho}')\mathrm{e}_n'\times\begin{matrix}\mathbf{E}^d(\boldsymbol{\rho}')\\\mathbf{H}^d(\boldsymbol{\rho}')\end{matrix}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}',\tag{8}$$

其中，星号表示复共轭。 J_{2m}和 J_{4m} 分别由 J_{1m} 和 J_{3m} 通过将 $\mathbf{M}_m^{(6)*T}\to\mathbf{N}_m^{(6)*T}$替换而得到。式 (8) 中出现的圆柱矢量波函数源自 $\mathbb{G}_d(k_c;\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')$ 的张量展开。具体而言，我们使用 $\mathbf{M}_m^{(6)*T}$和 $\mathbf{N}_m^{(6)*T}$，而不是 [31, 式 (A.1)], 中的 $\mathbf{M}_m^{(3)*T}$和 $\mathbf{N}_m^{(3)*T}$，并利用性质 $H_m^{(1)}(k_c\rho)=(2/\pi)i^{-m-1}K_m(\kappa_c\rho)$ 和 $k_cH_m^{(1)\prime}(k_c\rho)=(2/\pi)i^{-m-1}\kappa_cK_m'(\kappa_c\rho)$; 其中， $H_m^{(1)}(x)$ 是第一类汉克尔函数， $H_m^{(1)\prime}(x)$ 是其对自变量的导数。

为继续构建行列式方程，我们通过适当运用关于 ∂V的边界条件，对式 (7) 重新进行表述。具体而言，我们写作

$$\begin{aligned}iJ_{1m}'-Z_dJ_{4m}&=0,\\iJ_{1m}-Z_dJ_{4m}'&=0,\\iJ_{2m}'-Z_dJ_{3m}&=0,\\iJ_{2m}-Z_dJ_{3m}'&=0,\end{aligned}\tag{9}$$

其中，我们在带撇号的 IR J_{1m}' 和 J_{2m}'中应用了边界条件$\mathbf{e}_n'\times\mathbf{E}^d(\boldsymbol{\rho}')=\mathbf{e}_n'\times\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}'),\boldsymbol{\rho}'\in\partial V$，并在带撇号的 IR J_{4m}' 和 J_{3m}'中应用了边界条件$\mathbf{e}_n'\times\mathbf{H}^d(\boldsymbol{\rho}')=\mathbf{e}_n'\times\mathbf{H}(\boldsymbol{\rho}'),\ \boldsymbol{\rho}'\in\partial V$。必须采用上述方案 (9)，因为这样才能使芯区场$\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ 以及包层场$\mathbf{E}^d$、$\mathbf{H}^d$得到恰当耦合，其方式类似于构建圆形各向同性介质波导的特征方程时所采用的方法 [32]。

将$\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho})$、$\mathbf{H}(\boldsymbol{\rho})$、$\mathbf{E}^d(\boldsymbol{\rho})$ 和$\mathbf{H}^d(\boldsymbol{\rho})$–$i/(\omega\mu_d)\nabla\times\mathbf{E}^d(\boldsymbol{\rho})$代入 (9)，并利用 (2)、(4) 和 (5)，可得以下无穷组齐次线性方程，即

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}I_{1,j\mu m}'A_{j\mu}\\&+\frac{\kappa_c^2}{k_d}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\left(I_{2,\mu m}^{(2)}B_\mu+I_{2,\mu m}^{(1)}\Gamma_\mu\right)=0,\\&-Z_d\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}I_{4,j\mu m}'A_{j\mu}-i\frac{\kappa_c^2}{k_d}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}I_{1,\mu m}\Gamma_\mu=0,\\&\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}I_{2,j\mu m}'A_{j\mu}-\frac{\kappa_c^2}{k_d}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}I_{1,\mu m}B_\mu=0,\\&-Z_d\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}I_{3,j\mu m}'A_{j\mu}\\&+i\frac{\kappa_c^2}{k_d}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\left(I_{2,\mu m}^{(1)}B_\mu+I_{2,\mu m}^{(2)}\Gamma_\mu\right)=0.\end{aligned}\tag{10}$$

在 (10) 中， $I_{k,\,j\mu m}'$, $k=1$，2，3，4, $I_{1,\,\mu m}$, $I_2^{(1)}{}_{,\,\mu m}$ 和 $I_2^{(2)}{}_{,\,\mu m}$ 是附录A中给出的积分。

方程 (10) 构成齐次系统 $\mathbb{A}(\beta)\mathbf{u}=0$，其未知向量为 $\mathbf{u}=[A_{1\mu},A_{2\mu},B_\mu,\Gamma_\mu]^T$，系统矩阵为 $\mathbb{A}$，大小为 $4(2M+1)\times4(2M+1)$，其中 M 是指标 μ的截断界限。传播常数 β 是行列式方程 $\det\mathbb{A}(\beta)=0$的根。

D. 通过 *CEM* 分析非圆形 *GW*

为建立用于非圆形纤芯模态分析的 CEM，我们首先施加边界条件 $\mathrm{e}_n\times[\mathrm{E}^d(\boldsymbol{\rho})-\mathrm{E}(\boldsymbol{\rho})]=0$ and $\mathrm{e}_n\times[\mathrm{H}^d(\boldsymbol{\rho})-\mathrm{H}(\boldsymbol{\rho})]=0$, $\boldsymbol{\rho}\in\partial V$。将 $\mathrm{e}_n=1/N(\varphi)[\mathrm{e}_\rho-\rho'(\varphi)/\rho(\varphi)\mathrm{e}_\varphi]$, $0\leqslant\varphi<2\pi$ 表示为 $N(\varphi)=\{1+[\rho'(\varphi)/\rho(\varphi)]^2\}^{1/2}$, $\rho'(\varphi)\equiv\mathrm{d}\rho(\varphi)/\mathrm{d}\varphi$，并通过 (2)、(4) 和 (5) 将 $\mathrm{E}(\boldsymbol{\rho})$、$\mathrm{H}(\boldsymbol{\rho})$、$\mathrm{E}^d(\boldsymbol{\rho})$ 和 $\mathrm{H}^d(\boldsymbol{\rho})=-i/(\omega\mu_d)\nabla\times\mathrm{E}^d(\boldsymbol{\rho})$ 代入上述边界条件，我们得到四个标量方程，即

$$\begin{aligned}&\begin{matrix}E_z^d(\varphi)\\H_z^d(\varphi)\end{matrix}-\begin{matrix}E_z(\varphi)\\H_z(\varphi)\end{matrix}\equiv\begin{matrix}E_Z(\varphi)\\H_Z(\varphi)\end{matrix}=0,\\&\frac{1}{N(\varphi)}\left\{\frac{\rho'(\varphi)}{\rho(\varphi)}\left[\begin{matrix}E_\rho^d(\varphi)\\H_\rho^d(\varphi)\end{matrix}-\begin{matrix}E_\rho(\varphi)\\H_\rho(\varphi)\end{matrix}\right]+\begin{matrix}E_\varphi^d(\varphi)\\H_\varphi^d(\varphi)\end{matrix}-\begin{matrix}E_\varphi(\varphi)\\H_\varphi(\varphi)\end{matrix}\right\}\\&\equiv\begin{matrix}E_T(\varphi)\\H_T(\varphi)\end{matrix}=0.\end{aligned}\tag{11}$$

边界条件 (11) 的形式为 $G(\varphi)=0$，其中 $G(\varphi)=E_Z(\varphi)$ $E_T(\varphi)$ $H_Z(\varphi)$ $H_T(\varphi)$。CEM 基于利用切比雪夫多项式展开这些边界条件。具体而言， $G(\varphi)$ 在所谓的切比雪夫节点 $t_k=\cos(\pi(k+1/2)/K)\in[-1,1], k=0$，1，……，$K-1$ 上近似为

$$G(t_k)=\sum_{p=0}^{K-1}a_pT_p(t_k),\quad k=0,1,\ldots,K-1.\tag{12}$$

在 (12) 中， a_p 是展开系数， $T_p(t_k)=\cos(p\pi(k+1/2)/K)$ 是第一类切比雪夫多项式 [34]。利用离散正交关系 [34]

$$\sum_{k=0}^{K-1}T_p(t_k)T_q(t_k)=\begin{cases}K\delta_{pq},\ p,q=0\\\frac{K}{2}\delta_{pq},\ p,q\neq0\end{cases},K>\max\{p,q\},\tag{13}$$

其中， δ_{pq} 是克罗内克δ， a_p 的计算方式为

$$a_p=\frac{\varepsilon_p}{K}\sum_{k=0}^{K-1}G(t_k)T_p(t_k),\quad p=0,1,\ldots,K-1,\tag{14}$$

其中， ε_p ($\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_p=2$, $p\geqslant1$) 是诺伊曼因子。为了使 (12) 在每个切比雪夫节点处均为零， t_k, a_p 对所有 $p=0$、1、……、$K-1$ 都应为零。这便得到以下用于构造

齐次系统的线性无关方程，即

$$\begin{aligned}
\varepsilon_p \sum_{k=0}^{K-1} E_Z(t_k)T_p(t_k) &= 0,\\
\varepsilon_p \sum_{k=0}^{K-1} E_T(t_k)T_p(t_k) &= 0,\\
\varepsilon_p \sum_{k=0}^{K-1} H_Z(t_k)T_p(t_k) &= 0,\\
\varepsilon_p \sum_{k=0}^{K-1} H_T(t_k)T_p(t_k) &= 0,
\end{aligned} \tag{15}$$

对 $p = 0,1,\ldots,K-1$。接着，将式 (11) 中 $E_Z(t_k)$、$E_T(t_k)$、$H_Z(t_k)$ 和 $H_T(t_k)$ 的表达式代入，再代入使用电磁超圆柱矢量波函数及标准圆柱矢量波函数表示的场分量，可得四组无穷齐次线性方程：

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} M^1_{jmp}A_{jm} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} M^1_{4mp}\Gamma_m = 0,\\
&\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} M^2_{jmp}A_{jm}\\
&+ \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(M^2_{3mp}B_m + M^2_{4mp}\Gamma_m\right) = 0,\\
&\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} M^3_{jmp}A_{jm} - \frac{i}{Z_d}\sum_{m=-\infty}^{\infty} M^3_{3mp}B_m = 0,\\
&\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} M^4_{jmp}A_{jm}\\
&- \frac{i}{Z_d}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(M^4_{3mp}B_m + M^4_{4mp}\Gamma_m\right) = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

在式 (16) 中，M^r_{smp}、$r,s = 1,2,3,4$ 是附录 B 中给出的求和式。

式 (16) 中的每个方程均针对 $p = 0,1,\ldots,K-1$ 求值。一般而言，$K > 2M+1$，其中 M 是指标 m 的截断界限。然而，为使式 (16) 构成方阵齐次系统，指标 p 应与指标 m 取相同数量的值，即 $2M+1$。因此，$p = 0,1,\ldots,2M$。综上，式 (16) 构成齐次系统 $\mathbb{B}(\beta)\mathbf{v} = 0$，其未知向量为$\mathbf{v} = [A_{1m}, A_{2m}, B_m, \Gamma_m]^T$，系统矩阵 $\mathbb{B}$ 的大小为 $4(2M+1)\times 4(2M+1)$。通过 CEM 得到的传播常数 β 是行列式方程 $\det\mathbb{B}(\beta) = 0$ 的根。

III. 验证、收敛性与性能

A. 验证

我们对图 2 所示圆形及各种非圆形旋电波导的 EIE 和 CEM 进行了广泛验证。对于圆形各向同性芯层，我们将 EIE、CEM 和第 II-B 节中的 SVM 与著名的解析解 [32] 进行比较。为确保一致性，我们也将 COMSOL 的结果与 [32] 中的结果进行比较。对于圆形旋磁芯层，

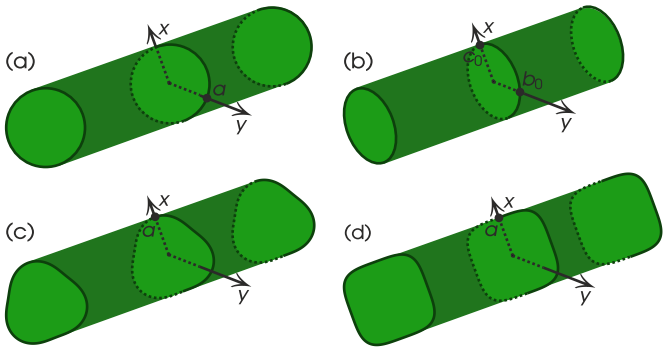


图 2. 分析中考虑的圆形和非圆形旋磁波导：(a) 圆形；(b) 椭圆形；(c) 圆角三角形；(d) 圆角正方形。

表 Iβ/k_0 圆形各向同性介质波导。芯层：$\epsilon = 1.8^2$, $\epsilon_a = 0$, $\epsilon_z = 1.8^2$, $\mu = 1$, $\mu_a = 0$, $\mu_z = 1$。包层：$\epsilon_{dr} = 1.5^2$, $\mu_{dr} = 1$。$k_0 a = \pi$。

No	m,p	EIE/CEM/SVM	解析解 [32]	COMSOL
1	$\pm 2, 1$	1.55187	1.55187	1.55186
2	0, 1	1.55742	1.55742	1.55740
3	0, 2	1.57022	1.57022	1.57021
4	$\pm 1, 1$	1.69937	1.69937	1.69937

将 EIE 和 CEM 与第 II-B 节中的 SVM 以及 COMSOL 的解进行比较。此外，对于圆形旋电芯中非对角介电常数元素较小这一特殊情况，我们将 EIE 和 CEM 与 SVM、COMSOL 以及近似解 [23] 进行比较。对于非圆形纤芯，仅将 EIE 和 CEM 与 COMSOL 进行比较。在所有示例中，为了对精度作出有效判断，我们均以五位小数计算归一化后的 β/k_0——为简单起见，将自由空间波数 k_0 设为 1 m^{-1}。后续章节将讨论所有方法的性能。各示例的参数值列于表格标题中。

在表 I 中，我们考虑圆形各向同性介质波导这一简单情况。将 EIE、CEM 和 SVM 的结果与众所周知的解析解 [32]，以及 COMSOL 的结果进行比较。每个传播模式均由指标m 和 p表示，其中 p 是根的阶数。在此示例中，指标 m 和 p 既可通过 [32], 获得，也可通过第 II-B 节中的 SVM 获得。对于各向同性介质波导，已知 $n_d < \beta/k_0 < n$，其中 n_d 是包层的折射率，n是芯层的折射率。各向同性介质波导具有简并模式，即，β/k_0 在 $\pm|m|$时具有相同的值。对于此配置中存在的全部四个 β/k_0，三种方法（即 EIE、CEM 和 SVM）的结果均与 [32]高度吻合。COMSOL 的结果也与 [32], 一致；在 COMSOL 中使用更精细的网格会提高其精度，但也会增加其有限元法 (FEM) 求解器的执行时间。

接下来，在表 II 中，我们研究圆形旋电介质芯的一个特殊情况：其 ϵ张量中的非对角元素较小。此情况已通过[23]中的微扰法求解。对于旋电波导，$n_d < \beta$ [23]。此处，将全波 EIE、CEM 和 SVM 与 [23],进行比较，而 COMSOL 则

表 IITableβ/k_0 适用于圆形旋电波（小非对角元）。芯层： $\epsilon=1.4$、 $\epsilon_z=1.2$、 $\mu=1$、 $\mu_a=0$、 $\mu_z=1$。包层： $\epsilon_{dr}=1$、 $\mu_{dr}=1$。 $k_0a=1.8$、 $m=1$。

No	ϵ_a	EIE	CEM	SVM	扰动 [23]	COMSOL
1	$+10^{-3}$	1.009479	1.009479	1.009479	1.009612	1.009478
2	-10^{-3}	1.009321	1.009321	1.009322	1.009489	1.009321
3	$+10^{-1}$	1.018689	1.018689	1.018689	1.015996	1.018689
4	-10^{-1}	1.003161	1.003161	1.003161	1.004355	1.003154
5	$+2\times10^{-1}$	1.030298	1.030298	1.030298	1.022791	1.030298
6	-2×10^{-1}	1.000388	1.000388	1.000388	1.001012	1.000307

表 IIIβ/k_0 圆形广义电磁波导（一般情况）。芯层： $\epsilon=4$、 $\epsilon_a=5.5$、 $\epsilon_z=3$、 $\mu=1$、 $\mu_a=0$、 $\mu_z=1$。包层： $\epsilon_{dr}=2.5$、 $\mu_{dr}=1$。 $k_0a=\pi$。

No	m,p	EIE	CEM	SVM	COMSOL
1	$-2,1$	1.58179	1.58179	1.58179	1.58145
2	$+4,1$	1.69097	1.69097	1.69097	1.69059
3	$+1,1$	2.04562	2.04562	2.04562	2.04515
4	$-1,1$	2.18439	2.18439	2.18439	2.18413
5	$+3,1$	2.24007	2.24007	2.24007	2.23990

也用于保持一致性。在表 II 中，我们考察了 [23, 表 1]，中所列的一些小-ϵ_a 情况，即 $\epsilon_a=\pm10^{-3}$, $\pm10^{-1}$, $\pm2\times10^{-1}$，而 $m=1$。显然，EIE、CEM 和 COMSOL 均与 SVM 的结果一致。具体而言，对于所考察的所有情况，EIE 和 CEM 的结果与 SVM 一致至小数点后六位；在本示例中，我们保留六位小数，因为较小的加号/减号 $\epsilon_a=10^{-3}$值会导致 β/k_0 发生变化，而这种变化只有在小数点后第 4 位之后才会显现。COMSOL 的结果也与 SVM 一致，但对于 $\epsilon_a=-2\times10^{-1}$ 情况，两者仅一致至小数点后第 4 位。相反，微扰法[23] 的精度较低，这一点可以从所给出的结果中得出。

在表 III 中，我们研究一般情况下的圆形旋电介质芯，即与前述示例相同，不对 $\boldsymbol{\epsilon}$ 张量施加任何限制。在这种情况下，无法应用 [23] 。从所列出的 β/k_0 数值来看，EIE 和 CEM 与 SVM 的结果高度吻合，精确到小数点后五位。此外，COMSOL 的结果与 SVM 的结果也相符，精确到小数点后三位。虽然有限元法中使用了极精细的网格，但仍可进一步提高精度，不过这会显著增加 CPU 时间。表 III 中的指标 m和p 由 SVM 计算得出。从这些指标可以看出，圆形 GEW 消除了简并，因为针对 $m=+1$ 计算得出的 $\beta/k_0=2.04562$ 与使用 $m=-1$计算得出的 $\beta/k_0=2.18439$数值不同。

表 IV 给出了一个与表 III 类似的圆形旋磁芯示例。这里也有类似的结论：EIE、CEM 和 SVM 之间吻合极佳，而 COMSOL 与其他三种方法的结果也达到令人满意的一致程度。这里同样出现了简并解除，从计算得到的 β/k_0 可以明显看出，它们在 $m=\pm1$时取值不同。

表 IVβ/k_0 圆形旋磁波（一般情况）。芯层： $\epsilon=1$、 $\epsilon_a=0$、 $\epsilon_z=1$、 $\mu=4$、 $\mu_a=5.5$、 $\mu_z=3$。包层： $\epsilon_{dr}=2.5$、 $\mu_{dr}=1$。 $k_0a=\pi$。

No	m,p	EIE	CEM	SVM	COMSOL
1	$+1,1$	1.90586	1.90586	1.90586	1.90687
2	$-1,1$	2.05758	2.05758	2.05758	2.05818
3	$+3,1$	2.13972	2.13972	2.13972	2.14091

表 Vβ/k_0 椭圆旋电波和 GMW。 $k_0c_0=\pi$, $k_0b_0=0.8\pi$左：旋电芯；芯层： $\epsilon=4$、 $\epsilon_a=5.5$、 $\epsilon_z=3$、 $\mu=1$、 $\mu_a=0$、 $\mu_z=1$；包层： $\epsilon_{dr}=2.5$、 $\mu_{dr}=1$。右：旋磁芯；芯层： $\epsilon=1$、 $\epsilon_a=0$、 $\epsilon_z=1$、 $\mu=4$、 $\mu_a=0.5$、 $\mu_z=3$；包层： $\epsilon_{dr}=2$、 $\mu_{dr}=1$。

No	旋电 EIE	CEM	COMSOL	旋磁 EIE	CEM	COMSOL
1	1.71274	1.70068	1.70052	1.47442	1.46538	1.46526
2	1.96690	1.96856	1.96812	1.49180	1.49682	1.49680
3	2.04585	2.09575	2.09556	1.51392	1.52560	1.52548
4	—	—	—	1.67537	1.67867	1.67848
5	—	—	—	1.73011	1.72987	1.72983
6	—	—	—	1.75637	1.76510	1.76498
7	—	—	—	1.95764	1.95471	1.95470

表 VIβ/k_0 圆角三角形 GEW 和 GMW。 $k_0a=0.8\pi$, $h=0.1$。左：旋电芯；芯层： $\epsilon=4$, $\epsilon_a=0.2$, $\epsilon_z=3$, $\mu=1$, $\mu_a=0$, $\mu_z=1$；包层： $\epsilon_{dr}=2$, $\mu_{dr}=1$。右：旋磁芯；芯层： $\epsilon=1$, $\epsilon_a=0$, $\epsilon_z=1$, $\mu=4$, $\mu_a=0.2$, $\mu_z=3$；包层： $\epsilon_{dr}=2$, $\mu_{dr}=1$。

No	旋电 EIE	CEM	COMSOL	旋磁 EIE	CEM	COMSOL
1	1.45277	1.45513	1.45510	1.43335	1.43367	1.43360
2	1.46049	1.46369	1.46376	1.44032	1.44313	1.44327
3	1.50252	1.50689	1.50685	1.47262	1.47400	1.47387
4	1.58370	1.58504	1.58497	1.62124	1.62214	1.62199
5	1.74155	1.74537	1.74538	1.73232	1.74239	1.74251
6	1.82556	1.83228	1.83227	1.80685	1.82475	1.82483

接下来，我们展示非圆形导波的有效性。表 V 给出了椭圆截面芯的计算结果，其半长轴为 c_0、半短轴为 b_0，偏心率为 $h=[1-(b_0/c_0)^2]^{1/2}$。表 V 左侧列出了旋电芯的结果，右侧列出了旋磁芯的结果。从所列结果可以看出，对于旋电情形和旋磁情形，EIE 的结果与 COMSOL 的吻合度均达到小数点后两位。相比之下，CEM 在旋电情形下与 COMSOL 的吻合度达到小数点后三位，在旋磁情形下则达到小数点后四位，表明其精度高于 EIE。

接下来，在表 6 中，我们考虑圆角三角形 GEW 和 GMW。圆角三角形横截面的极坐标方程为 $\rho(\varphi)=a[h^2+2h\cos(3\varphi)+1]^{1/2}/(h+1)$,$0\leqslant\varphi<2\pi$，其中 h 是一个用于调整横截面形状的参数。对于陀螺电介质情形，EIE 与 COMSOL 的结果精确到小数点后两位；对于旋磁情形，则精确到小数点后 3 位—

表 VIIβ/k_0 圆角正方形 GEW 和 GMW。$k_0a = 0.4\pi$, $n = 2$。左：旋电芯；芯层：$\epsilon = 3$, $\epsilon_a = 0.5$, $\epsilon_z = 5$, $\mu = 1$, $\mu_a = 0$, $\mu_z = 1$；包层：$\epsilon_{dr} = 2$, $\mu_{dr} = 1$。右：旋磁芯；芯层：$\epsilon = 1$, $\epsilon_a = 0$, $\epsilon_z = 1$, $\mu = 3$, $\mu_a = 0.5$, $\mu_z = 5$；包层：$\epsilon_{dr} = 2$, $\mu_{dr} = 1$。

No	旋电 EIE	CEM	COMSOL	旋磁 EIE	CEM	COMSOL
1	1.41988	1.41922	1.41923	1.41911	1.41841	1.41843
2	1.53758	1.53757	1.53750	1.53220	1.53566	1.53569

陀螺磁性情形下的数字位数。与 COMSOL 相比，CEM 的精度高于 EIE，即对于旋电和陀螺磁性情形，精度最高可达小数点后四位。

作为最后一个示例，在表 VII 中，我们考察圆角正方形旋电波导和 GMW。圆角正方形的极坐标方程为 $\rho(\varphi) = a/(\cos^{2n}\varphi + \sin^{2n}\varphi)^{1/(2n)}$,$0 \leqslant \varphi < 2\pi$，其中 n 是用于调整截面形状的参数。关于本示例所采用的参数值，该设置允许旋电和旋磁芯层分别取两个 β/k_0 值。尽管如此，与 EIE 相比，CEM 始终表现出更高的精度：相对于 COMSOL 可达到四位小数，而 EIE 在旋电和旋磁情形下分别达到四位和两位小数。

B. 收敛性

在图 3 中，我们考察 EIE 和 CEM 的收敛性。我们通过计算 β/k_0 的 $|(\beta/k_0)_{\text{conv}} - (\beta/k_0)_M|$ 和 $|(\beta/k_0)_{\text{conv}} - (\beta/k_0)_{\text{NOP}}|$，研究其数值如何收敛，其中 $(\beta/k_0)_{\text{conv}}$ 是收敛值。对于第一次计算（见图 3(a) 和 (b)），我们固定对轮廓 ∂V 进行采样的点数（即 EIE 的积分阶数和 CEM 的切比雪夫节点数 K），并改变截断界限 M 的值，以获得 $(\beta/k_0)_M$。对于第二次计算（见图 3(c) 和 (d)），我们固定 M，并改变对轮廓 ∂V 进行采样的点数，以获得 $(\beta/k_0)_{\text{NOP}}$。显然，我们无法对表 I–表 VII 中给出的所有 β/k_0 实施上述研究，因此，为展示收敛性，我们针对表 V 的结果 No 1 进行该研究（即，旋电情形下 $(\beta/k_0)_{\text{EIE}} = 1.71274$、$(\beta/k_0)_{\text{CEM}} = 1.70068$，以及旋磁情形下 $(\beta/k_0)_{\text{EIE}} = 1.47442$、$(\beta/k_0)_{\text{CEM}} = 1.46538$）。图 3(a) 和 (c) 描绘了旋电情形下的收敛性，图 3(b) 和 (d) 则描绘了旋磁情形下的收敛性。

从图 3(a) 和 (b) 可以看出，使用 $M = 14$ 时，CEM 在陀螺电介质情形和旋磁情形下分别达到七位和八位有效数字的收敛精度。使用更大的 M 值时，CEM 的收敛性进一步提升，可达到更多有效数字。相反，当 $M \geqslant 11$ 时，EIE 会停滞，在陀螺电介质情形和旋磁情形下分别无法达到超过五位和七位有效数字的收敛精度。因此，图中未显示 EIE 在 $M > 10$ 时的数值。

最后，图 3(c) 和 (d) 表明，对于固定的 M，当采用较高的积分阶数时，EIE 对旋电和旋磁情形分别可实现收敛至十二位和十四位有效数字

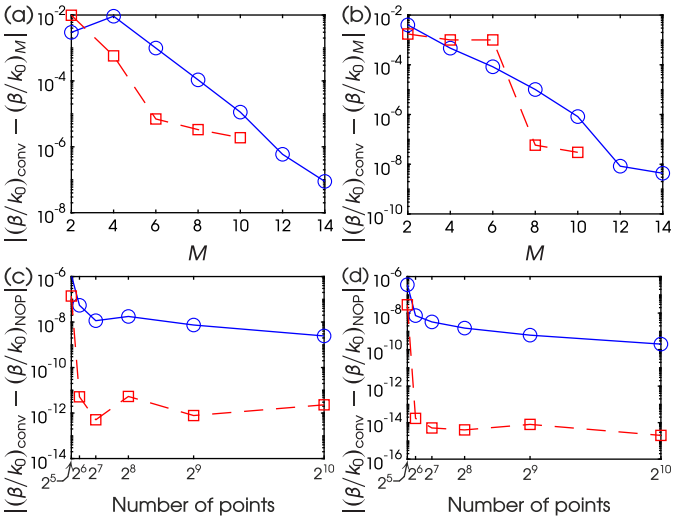


图 3. 收敛图。(a)–(b) $|(\beta/k_0)_{\text{conv}} - (\beta/k_0)_M|$ 随 M 的变化，其中 EIE 固定使用 32 个积分点，CEM 使用 $K = 128$；(c)–(d) $|(\beta/k_0)_{\text{conv}} - (\beta/k_0)_{\text{NOP}}|$ 随点数（积分点和切比雪夫节点数）的变化，其中 EIE 和 CEM 均固定使用 $M = 10$。红色曲线/方块：EIE；蓝色曲线/圆圈：CEM。(a)、(c) $(\beta/k_0)_{\text{EIE}} = 1.71274$ 和 $(\beta/k_0)_{\text{CEM}} = 1.70068$ 的收敛性（陀螺电介质情形/表 V 中的结果 1）；(b)、(d) $(\beta/k_0)_{\text{EIE}} = 1.47442$ 和 $(\beta/k_0)_{\text{CEM}} = 1.46538$ 的收敛性（旋磁情形/表 V 中的结果 1）。

表 VIII 计算性能。

示例	EIE CPU 时间 (s)	EIE 内存 (GB)	CEM CPU 时间 (s)	CEM 内存 (GB)	COMSOL CPU 时间 (s)	COMSOL 内存 (GB)
表 V	119	0.28	70	0.33	332	22.5
表 VI	85	0.28	63	0.33	333	22.9
表 VII	76	0.28	48	0.33	49	4.8

。另一方面，CEM 对旋电和旋磁情形分别可达到八位和九位有效数字。然而，图 3 中的讨论涉及两种方法的自收敛，而表 V 中讨论的实际精度表明，与 EIE 相比，CEM 与 COMSOL 的结果具有更好的一致性。最后，关于 M 和点数对收敛性的影响，需要指出的是，增加点数会显著改善收敛性，但 M 对精度的影响更大，尤其是对于非圆形纤芯（即，与将 M 保持在适中值并增加点数相比，将点数保持在适中值并增加 M 可获得更高的精度）。

C. 性能

表 VIII 讨论了表 V–VII 中非圆形纤芯示例的计算性能，即 EIE、CEM 和 COMSOL 的 CPU 时间与内存消耗。为获得表 VIII 汇总的结果，在五位小数收敛性约束下计算一个 β/k_0 值。为此，EIE 使用截断界限 $M = 10$ 和 128 个积分点进行初始化；表 V、VI、VII 中的示例分别使用 $M = 12$，14，10 初始化 CEM，并且 β/k_0；

表 IX 圆形 G-610 铝石榴石铁氧体 GMW 的复数 β/k_0 值。芯层：G-610。包层：$\epsilon_{dr}=1, \mu_{dr}=1$。$f=4$ GHz，$a=1$cm，$B_0=1$ T。

否 m,	p EIE	CEM	SVM	COMSOL
1	+1, 1 2。97446	2.97446	2.97447	2.97442
	$+i0.00085883$	$+i0.00085883$	$+i0.00085884$	$+i0.00085883$
2	−1, 1 2。93819	2.93819	2.93818	2.93815
	$+i0.00071097$	$+i0.00071097$	$+i0.00071097$	$+i0.00071096$
3	0, 1 1。98134	1.98134	1.98134	1.98129
	$+i0.00062067$	$+i0.00062067$	$+i0.00062068$	$+i0.00062066$

最后，COMSOL 使用最大单元尺寸为 0.2 的密集网格进行初始化。具体而言，我们计算了前 β/k_0 个值（陀螺电介质情形下表 V–VII 中的结果编号 1）；其余 β/k_0 值以及旋磁情形也得到了类似数据。要达到五位小数的收敛精度，CEM 在 CPU 时间方面优于 EIE 和 COMSOL，在内存消耗方面优于 COMSOL；EIE 和 CEM 的 RAM 需求实际上相近。芯层形状也至关重要。值得注意的是，对于椭圆形和圆角三角形芯层，COMSOL 的有限元法求解器需要近 23 GB RAM，而 EIE 和 CEM 分别只需 0.28 GB 和 0.33 GB。相比之下，对于圆角方形芯层，COMSOL 的内存消耗较低，为 4.8 GB RAM，且 CPU 时间与 CEM 相近。

根据上述讨论，包括验证、收敛性和性能，我们得出结论：在计算 β/k_0 方面，CEM 的表现优于 EIE，因此建议将其作为计算非圆形旋电波导传播特性的更优替代方法。

IV. 微波应用：铁氧体旋磁波导的复传播常数

本文介绍了外加磁通密度偏置条件下铁氧体旋磁波导的一种微波应用。由于铁氧体具有带损耗的色散特性，其传播常数 β 为复数。我们计算圆形和椭圆形芯层的复数归一化 β/k_0，使用 COMSOL 验证结果，并讨论引入偏心率（相当于对芯层几何形状施加扰动）如何改变 β/k_0 和模式分布。

铁氧体受到外加磁通密度$\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_z$磁化时，会表现出旋磁响应 [35]。$\boldsymbol{\mu}$ 相对参数为 $\mu = 1+\omega_0\omega_m/(\omega_0^2-\omega^2)$、$\mu_a = \omega\omega_m/(\omega_0^2-\omega^2)$和 $\mu_z = 1$。在本研究中，我们将 G-610 铝石榴石作为铁氧体材料，其中$\omega_m = \mu_0\gamma M_s$，$\gamma = 1.759\times10^{11}$C/kg 为旋磁比，$4\pi M_s = 680$ G [35]，$\omega_0 = \mu_0\gamma H_0 - i\mu_0\gamma\Delta H/2$ 为复数拉莫尔圆频率，$H_0 = B_0/\mu_0$ 为外加磁场强度，且 $\Delta H = 40$ Oe [35]。该 $\boldsymbol{\epsilon}$ 为各向同性，其相对值为 $\epsilon = \epsilon_z = 14.5 + i0.0029$ 和 $\epsilon_a = 0$ [35]。

表 IX 给出了圆形G-610 GMW在工作频率为$f=4$ GHz、$B_0=1$ T时计算得到的复数β/k_0 。我们重点关注这些复数 β/k_0 它们对应于铁氧体芯内部的局域模式。由于芯层为圆形，我们采用了所有方法，即 EIE、CEM、SVM 以及 COMSOL。对于给定的 f，存在三个复数 β/k_0，如表 IX 所示。模式指标 m和 p 由 SVM 计算得到。结果 1 和结果 2 的复数 β/k_0 对应于非简并模式，因为它们是在相反的 m 值下得到的。对于实部和虚部，四种方法的结果均一致到小数点后四位；对于结果 2 的虚部，EIE、CEM 和 SVM 的结果一致到小数点后五位。这些说明展示了所开发的方法处理有损色散GMW的能力。

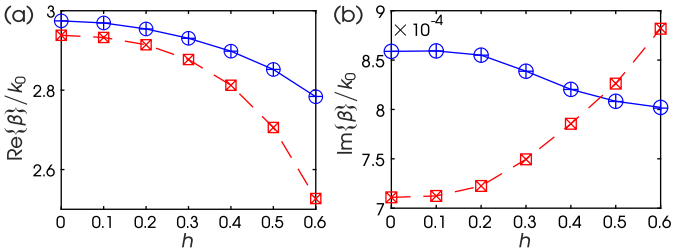


图4. 椭圆形G-610铝石榴石铁氧体GMW的复数 β/k_0 与 h 的关系。参数值与表 IX 中的相同，但 c_0等于 1 cm。(a) Re$\{\beta\}/k_0$；(b) Im$\{\beta\}/k_0$。蓝色曲线：模式1；红色曲线：模式2。蓝色圆圈：CEM；蓝色加号：COMSOL；红色方块：CEM；红色叉号：COMSOL。

我们的研究在图4中进一步扩展，我们通过引入椭圆形芯并逐渐增大其偏心率 h，考察复数 β/k_0 的变化。具体而言，椭圆形芯的半长轴为 $c_0 = 1$ cm。图4(a)展示了 Re$\{\beta\}/k_0$ 随 h 的变化，图4(b)展示了 Im$\{\beta\}/k_0$ 随 h 的变化，其中 Re 和 Im 分别表示实部和虚部。我们从圆形纤芯（$h=0$）开始，逐渐达到 $h=0.6$。当 h高于0.6时，模式的场分布不再局限于铁氧体芯内，而是向空间中的包层延伸。具体来说，图4中的曲线展示了圆形G-610 GMW的两种非简并模式（表 IX 中的结果 No 1 和 2）如何随 h变化而演变。当$h=0$时，Re$\{\beta\}/k_0$ 和 Im$\{\beta\}/k_0$ 的初始值等于表 IX 中给出的值。图4中的蓝色曲线对应于 $h=0$ 时具有 $\beta/k_0 = 2.97446 + i0.00085883$ 的模式（下文称为模式1），红色曲线对应于 $h=0$ 时具有 $\beta/k_0 = 2.93819 + i0.00071097$的模式（下文称为模式2）。随着 h 增大，两种模式的实部均减小。相反，模式1的虚部略微减小，而模式2的虚部增大。CEM（图4中的结果仅使用 CEM 得出）和 COMSOL 均验证了这一现象，因为两种方法所得的实部和虚部结果都相吻合。

最后，我们在图5中展示模式1和模式2各自的模式分布：绘出横向总电场 $\mathbf{F}(\boldsymbol{\rho})$ 的幅值，其中 $\mathbf{F}=\mathbf{E}, \boldsymbol{\rho}\in V$和 $\mathbf{F}=\mathbf{E}^d, \boldsymbol{\rho}\in V_d$，并将其归一化至最大值，对应的参数为 $h=0,0.2,0.4,0.6$。对于$h=0,0.2$，两个模式均局限于G-610芯层内，而衰减部分则向空间中延伸至包层内。

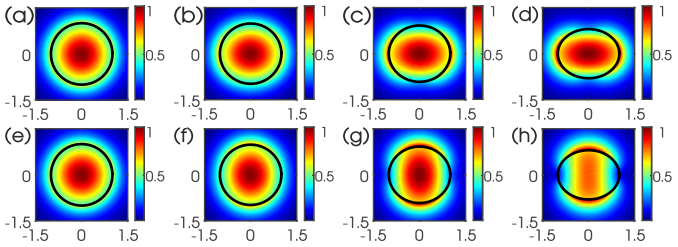


图5. 图4所研究的局域芯模在不同 h取值下的归一化总电场幅值模式分布。(a)–(d)：对应于模式1复数 β/k_0 的局域模式分布（图4中的蓝色曲线）。(e)–(h)：对应于模式2复数 β/k_0 的局域模式分布（图4中的红色曲线）。(a) 和 (e) $h=0$；(b) 和 (f) $h=0.2$；(c) 和 (g) $h=0.4$；(d) 和 (h) $h=0.6$。

当 $h=0.4$,0.6 时，模式分布呈拉长状；模式1沿长轴拉长，模式2沿短轴拉长。此外，这两个模式会延伸至包层内，不同于$h=0$,0.2 的情况，在后者中模式局限性较好。还应指出，与相同h值下的模式1相比，$h=0.4$ 对应的模式2局限性不强。h 取值高于图5所示值时，模式分布不再局限，而会显著延伸至包层内。

V. 结论

我们分析了非圆形导波，并计算了它们的传播常数。为此，我们构建了两种相互独立的全波方法，即 EIE 和 CEM；同时，还针对圆形导波这一特定情形构建了 SVM。通过考察各种圆形和非圆形旋磁波导，对这三种方法进行了验证。我们将其结果与 COMSOL Multiphysics 进行比较，并在非对角介电常数元素较小时，与适用于圆形旋电波导的基于微扰的方法进行比较，从而验证了这些方法的有效性。此外，我们还讨论了 EIE 和 CEM 的收敛性与计算性能，并证实它们能够揭示非圆形导波的传播特性。最后，我们将所开发的 CEM 用于一项微波应用，在外加磁通密度偏置下，计算圆形和椭圆形铁氧体旋磁波导的复传播常数。

附录A EIE积分

式（10）涉及积分 $I'_{k,j\mu m}$、$k=1,2,3,4$。$I'_{1,j\mu m}$ 和 $I'_{2,j\mu m}$ 分别由下式给出

$$I'_{1,j\mu m}=\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(\mu-m)\varphi}}{\sqrt{1+(\rho'/\rho)^2}}W_jJ_\mu(\chi_j\rho)\times\left[\frac{im\rho'}{\rho^2}K_m(\kappa_c\rho)+\kappa_cK'_m(\kappa_c\rho)\right]\rho\mathrm{d}\varphi,$$

$$I'_{2,j\mu m}=\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(\mu-m)\varphi}}{\sqrt{1+(\rho'/\rho)^2}}W_jJ_\mu(\chi_j\rho)\times\left[\frac{i\beta\rho'\kappa_c}{k_d\rho}K'_m(\kappa_c\rho)+\frac{m\beta}{k_d\rho}K_m(\kappa_c\rho)\right]\rho\mathrm{d}\varphi$$

$$-\frac{\kappa_c^2}{k_d}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(\mu-m)\varphi}}{\sqrt{1+(\rho'/\rho)^2}}\Big\{-T_j\chi_jJ'_\mu(\chi_j\rho)+\frac{imS_j}{\rho}J_\mu(\chi_j\rho)+\frac{\rho'}{\rho}\Big[S_j\chi_jJ'_\mu(\chi_j\rho)+\frac{imT_j}{\rho}J_\mu(\chi_j\rho)\Big]\Big\}K_m(\kappa_c\rho)\rho\mathrm{d}\varphi,\quad(A.1)$$

而 $I'_{3,j\mu m}$ 和 $I'_{4,j\mu m}$ 可分别通过将 $W_j\to R_j$、$T_j\to N$ 和 $S_j\to M_j$替换为 $I'_{1,j\mu m}$ 和$I'_{2,j\mu m}$得到。

式 (10) 还涉及积分 $I_{1,\ \mu m}$, $I_2^{(1)}{}_{,\ \mu m}$ 和 $I_2^{(2)}{}_{,\ \mu m}$，其定义如下：

$$I_{1,\mu m}=\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(\mu-m)\varphi}}{\sqrt{1+(\rho'/\rho)^2}}K_\mu(\kappa_c\rho)\times\left[\frac{im\rho'}{\rho^2}K_m(\kappa_c\rho)+\kappa_cK'_m(\kappa_c\rho)\right]\rho\mathrm{d}\varphi,$$

$$I^{(1)}_{2,\mu m}=\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(\mu-m)\varphi}}{\sqrt{1+(\rho'/\rho)^2}}K_m(\kappa_c\rho)\times\left[\kappa_cK'_\mu(\kappa_c\rho)-\frac{i\mu\rho'}{\rho^2}K_\mu(\kappa_c\rho)\right]\rho\mathrm{d}\varphi,$$

$$I^{(2)}_{2,\mu m}=-\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(\mu-m)\varphi}}{\sqrt{1+(\rho'/\rho)^2}}K_\mu(\kappa_c\rho)\times\left[\frac{i\beta\kappa_c\rho'}{k_d\rho}K'_m(\kappa_c\rho)+\frac{m\beta}{k_d\rho}K_m(\kappa_c\rho)\right]\rho\mathrm{d}\varphi$$

$$+\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(\mu-m)\varphi}}{\sqrt{1+(\rho'/\rho)^2}}K_m(\kappa_c\rho)\times\left[\frac{\mu\beta}{k_d\rho}K_\mu(\kappa_c\rho)-\frac{i\beta\kappa_c\rho'}{k_d\rho}K'_\mu(\kappa_c\rho)\right]\rho\mathrm{d}\varphi.\quad(A.2)$$

附录 B CEM 求和

公式（16）涉及求和式 M^r_{smp}, $r,s=1,2,3,4$。求和式 M^1_{jmp}, M^2_{jmp}, M^1_{4mp}, M^2_{3mp} 和 M^2_{4mp} 定义如下

$$M^1_{jmp}=-W_j\varepsilon_p\sum_{k=0}^{K-1}T_p(t_k)J_m(\chi_j\rho_k)e^{im\varphi_k},$$

$$M^2_{jmp}=-\varepsilon_p\sum_{k=0}^{K-1}T_p(t_k)\Big\{\frac{1}{N(\varphi_k)}\frac{\rho'_k}{\rho_k}\Big[T_j\frac{im}{\rho_k}J_m(\chi_j\rho_k)+\chi_jS_jJ'_m(\chi_j\rho_k)\Big]-T_j\chi_jJ'_m(\chi_j\rho_k)+\frac{imS_j}{\rho_k}J_m(\chi_j\rho_k)\Big\}e^{im\varphi_k},$$

$$M^1_{4mp}=-\frac{\kappa_c^2}{k_d}\varepsilon_p\sum_{k=0}^{K-1}T_p(t_k)K_m(\kappa_c\rho_k)e^{im\varphi_k},$$

$$M^2_{3mp}=\varepsilon_p\sum_{k=0}^{K-1}T_p(t_k)\Big[\frac{1}{N(\varphi_k)}\frac{\rho'_k}{\rho_k}\frac{im}{\rho_k}K_m(\kappa_c\rho_k)-\kappa_cK'_m(\kappa_c\rho_k)\Big]e^{im\varphi_k},$$

$$M^2_{4mp} = \varepsilon_p \sum_{k=0}^{K-1} T_p(t_k) \Big[\frac{1}{N(\varphi_k)} \frac{\rho'_k}{\rho_k} \frac{i\beta}{k_d} K'_m(\kappa_c \rho_k) - \frac{m\beta}{k_d \rho_k} K_m(\kappa_c \rho_k) \Big] e^{im\varphi_k}, \tag{B.1}$$

其中 $\varphi_k = \pi(1 + t_k)$。 M^3_{jmp}由 M^1_{jmp}替换 $W_j \to R_j$ 得到， M^4_{jmp}由 M^2_{jmp}替换 $T_j \to N_j$和 $S_j \to M_j$ $M^3_{3mp} = M^1_{4mp}$ $M^4_{3mp} = M^2_{4mp}$ $M^4_{4mp} =$ 得到，、和。 M^2_{3mp}

参考文献

[1] M. Geiger、P. Gruner、M. Fischer、A. Durr、T. Chaloun 和 C. Waldschmidt，“160 GHz 多模介质波导单脉冲雷达 ”，*IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*，第 68 卷，第 11 期，第 4825–4834 页，2020 年 11 月。[2] S. N. Galyamin、V. V. Vorobev 和 A. V. Tyukhtin，“开口介质加载圆波导中的衍射：严格方法”，*IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*，第 69 卷，第 5 期，第 2429–2438 页，2021 年 5 月。[3] T. Kawanishi，“太赫兹与光子无缝通信”，*J. Lightwave Technol.*，第 37 卷，第 7 期，第 1671–1679 页，2019 年 4 月。[4] M. Elsherif、A. E. Salih、M. G. Mu˜noz、F. Alam、B. AlQat- tan、D. S. Antonysamy、M. F. Zaki、A. K. Yetisen、S. Park、T. D. Wilkinson 和 H. Butt，“光纤传感器：工作原理、应用和局限性”，*Adv. Photonics Res.*，第 2100371 页，2022 年 7 月。[5] A. Meyer 和 M. Schneider，“毫米波频率下圆形介质波导中的信号失真”，*Int. J. Microw. Wirel. Technol.*，第 14 卷，第 1 期，第 8–18 页，2022 年 2 月。[6] C. Zhu、S. Tian、L. Ma 和 J. Huang，“采用微波光子学的多模光纤干涉传感器”，*J. Lightwave Technol.*，第 1–11 页，2024年。[7] Y. Sagae、T. Matsui、T. Mori 和 K. Nakajima，“面向低时延和低损耗的单模光纤设计”，*J. Lightwave Technol.*，第 42 卷，第 16 期，第 5704–5709 页，2024 年 8 月。[8] E. M. Karchevskii、A. O. Spiridonov、A. I. Repina 和 L. Beilina，“利用传播常数测量重建光纤芯层和包层的介电常数”，*Phys. Res. Int.*，第 2014 卷，第 1–9 页，2014 年 9 月。[9] B. Ung、P. Vaity、L. Wang、Y. Messaddeq、L. A. Rusch 和 S. LaRochelle，“采用反抛物线渐变折射率分布、用于传输携带轨道角动量模式的少模光纤”，*Opt. Express*，第 22 卷，第 15 期，第 18 044–18 055 页，2014 年 7 月。[10] U. N. Singh、O. N. Singh、P. Khastgir 和 K. K. Dey，“螺旋包层阶跃折射率光纤的色散特性：解析研究”，*J. Opt. Soc.Am. B*，第 12 卷，第 7 期，第 1273 页，1995 年 7 月。[11] M. J. Lahart，“径向变化介电常数圆柱形介质波导中的传播模式”，*J. Opt. Soc. Am. A Opt. Image Sci. Vis.*，第 16 卷，第 3 期，第 584 页，1999 年 3 月。[12] D. Pratap、S. Anantha Ramakrishna、J. G. Pollock 和 A. K. Iyer，“各向异性超材料光纤”，*Opt. Express*，第 23 卷，第 7 期，第 9074–9085 页，2015 年 4 月。[13] E. V. Barshak、C. N. Alexeyev、B. P. Lapin 和 M. A. Ya- vorsky，“用于稳健轨道角动量信息传输的扭曲各向异性光纤”，*Phys. Rev. A*，第 91 卷，第 3 期，2015 年 3 月。[14] E. V. Barshak、D. V. Vikulin、B. P. Lapin、S. S. Alieva、C. N. Alexeyev 和 M. A. Yavorsky，“用于扭曲各向异性光纤中信息传输的稳健高阶光学涡旋”，*J. Opt.*，第 23 卷，第 3 期，第 035603 页，2021 年 3 月。[15] D. Michalik、A. Anuszkiewicz、R. Buczynski 和 R. Kasztelanic，“迈向具有各向异性纤芯的高双折射石英大模场面积光纤”，*Opt. Express*，第 29 卷，第 15 期，第 22 883–22 899 页，2021 年 7 月。[16] C. Yeh，“椭圆介质波导”，*J. Appl. Phys.*，第 33 卷，第 11 期，第 3235–3243 页，1962 年 11 月。[17] G. P. Zouros 和 J. A. Roumeliotis，“椭圆介质波导截止波数的精确闭式解”，*IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*，第 60 卷，第 9 期，第 2741–2751 页，2012 年 9 月。[18] L. Eyges、P. Gianino 和 P. Wintersteiner，“任意横截面形状介质波导的模式”，*J. Opt. Soc. Am.*，第 69 卷，第 9 期，第 1226 页，1979 年 9 月。[19] M. Kouroublakis、N. L. Tsitsas 和 G. Fikioris，“采用双激励源辅助源法计算介质波导的特征值”，*IEEE J. Multiscale Multi-phys.Comput.Tech.*，第 7 卷，第 151–160 页，2022年。[20] M. Kouroublakis、N. L. Tsitsas、G. Fikioris 和 G. P. Zouros，“用于介质波导模式分析的零场法—表面等效原理方法”，*IEEE Trans. Microw. TheoryTech.*，第 73 卷，第 3 期，第 1448–1459 页，2025 年 3 月。[21] K. Delimaris、G. Gkrimpogiannis 和 G. P. Zouros，“采用矢量扩展积分方程法对复合光纤进行模态分析”，*J. Lightwave Technol.*，第 43 卷，第 8 期，第 3958–3967 页，2025 年 4 月。[22] P. S. Epstein，“旋磁介质中的波传播理论”，*Rev. Mod. Phys.*，第 28 卷，第 1 期，第 3–17 页，1956 年 1 月。[23] N. K. Uzunoglu，“具有旋电芯层的圆柱形介质波导中的传播”，*IEE Proc., H Microw. Opt. An- tennas*，第 128 卷，第 3 期，第 164 页，1981年。[24] I. V. Lindell 和 M. I. Oksanen，“横向各向异性光纤：非标准特征值问题的变分分析”，*IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*，第 31 卷，745，1983 9，736第 页。[25] C.-X. Shi，“有限包层各向异性光纤理论”，*Opt. Commun.*，第 70 卷，第 5 期，第 384–388 页，1989 年 4 月。[26] H. Rongqing、W. Yizun 和 S. Chaoxiang，“各向异性光纤的等效电流理论”，*Microw. Opt. Technol. Lett.*，第 2 卷，第 9 期，第 319–321 页，1989 年 9 月。[27] S. A. Kang，“各向异性椭圆光纤”，博士学位论文，伊利诺伊大学芝加哥分校研究生院，芝加哥，伊利诺伊州，1991年。[28] C. N. Alexeyev、E. V. Barshak 和 M. A. Yavorsky，“具有扭转应力的各向异性光纤中的光学涡旋”，*Opt. Spectrosc.*，第 115 卷，第 6 期，第 889–897 页，2013 年 12 月。[29] V. Kamra 和 A. Dreher，“多层单轴各向异性介质中的圆形和非圆形波导及带状线分析”，*IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*，第 67 卷，第 2 期，第 584–591 页，2019 年 2 月。[30] M. Napiorkowski 和 W. Urbanczyk，“采用变换光学形式体系对扭曲各向异性光纤进行严格建模”，*Opt. Express*，第 29 卷，第 10 期，第 15 199–15 216 页，2021 年 5 月。[31] G. P. Zouros、K. Delimaris、C. Rockstuhl 和 G. D. Kolezas，“旋光圆柱体的斜入射多重散射”，*IEEE Trans.AntennasPropag.*，提前在线发表，2025年。[32] D. Marcuse，光传输光学。纽约：范·诺斯特兰德·莱因霍尔德公司，1982年。[33] S. Prze´ziecki 和 R. A. Hurd，“关于旋光介质中标量赫兹势的注记”，*Appl. Phys.*，第 20 卷，第 4 期，第 313–317 页，1979 年 12 月。[34] J. C. Mason 和 D. Handscomb，切比雪夫多项式。博卡拉顿，佛罗里达州：CRC出版社，2003年。[35] D. M. Pozar，微波工程。霍博肯，新泽西州：约翰·威立父子公司，2012年。