arXiv:2601.01472v1 [cs.LO] 4 Jan 2026

作为字符串图随机矩阵的带图

Filippo Bonchi 和 Cipriano Junior Cioffo ⋆

比萨大学

摘要。 带图为配备两个幺半积 $\otimes$ 和 $\oplus$的范畴提供了一种图形化表示，其中 $\oplus$ 是双积。近期，带图已被推广，可用于处理任意幺半单子的 Kleisli 范畴。在本文中，我们证明，对于子分布单子，带图与字符串图子分布的随机矩阵同构。随后，我们利用这一结果，为概率布尔电路提供完全公理化。

关键词： 字符串图、概率系统、幺半环范畴

1 引言

在概率系统的组合语义日益受到关注的推动下，越来越多的研究 [10,27,40,5,15,14,28,37,20,19,22,44,39,21,18] 采用字符串图 [30,42], , 以形式化表示由幺半签名自由生成的严格对称幺半范畴中的态射。这些图通常在 $\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$ 中解释，即子分布单子的 Kleisli范畴 $\mathcal{D}_{\leq}$ （或其适当变体），其幺半结构由笛卡尔积诱导 $\otimes$。许多研究聚焦于复制器和丢弃器的作用，以及它们与边缘分布和联合分布的对应关系。 

相比之下，尽管第二种幺半张量 $\oplus$ 对应于集合的不交并，且它与 $\otimes$ 的相互作用在许多概率框架 [44,11,33] 中发挥着关键作用，但人们对它在 $\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$ 中的研究却少得多。一个可能的原因是，标准字符串图本质上只能表示一种幺半结构。为了克服这一局限，我们聚焦于带图 [4], , 可以将其非正式地理解为字符串图的字符串图。这种表达力更强的图形语言支持同时推理 $\otimes$ 和 $\oplus$，尤其是在 $\oplus$ 构成双积的范畴中，也就是说，它既是范畴积又是余积。此外，近期研究表明， [2],带图可自然地推广至任意幺半单子的 Kleisli 范畴，因此特别适用于 $\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$；这正是本文的主要研究对象。

⋆ 本研究部分获得高级研究与发明局（ARIA）安全人工智能计划的资助。Bonchi 获得意大利大学与研究部（Ministero dell'Università e della Ricerca）PRIN 2022 PNRR 项目资助，项目编号 P2022HXNSC - RAP（编程中的资源感知）。本研究在高性能计算、大数据与量子计算国家中心 SPOKE 10（量子计算）框架内开展，并获得欧盟 Next-GenerationEU 国家复苏与韧性计划（NRRP）资助——任务 4，组成部分 2，投资编号 1.4，CUP 编号 I53C22000690001。

我们的出发点是注意到，余积 $\oplus$在 $\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$ 中还满足一项额外的泛性质，类似于积的泛性质，因此与双积颇为相似。我们将 $\oplus$ 满足这一性质的范畴称为凸双积范畴(定义 2)，并研究与之相关的幺半代数。具有有限双积的范畴带有自然幺半群和余幺半群，而凸双积范畴则带有自然幺半群和余指凸代数，后者是带基点凸代数（PCA）的对偶；带基点凸代数是子分布单子 [45,6,7,36]的Eilenberg-Moore代数。

这与有限双积范畴理论之间还存在一个引人注目的类比：给定任意一个以幺半群富化的范畴$\mathbf{C}$，可以构造矩阵范畴$\mathbf{Mat(C)}$，即在$\mathbf{C}$ [34], 上定义的矩阵范畴，它具有有限双积。类似地，从一个以 PCA 富化的范畴$\mathbf{C}$ 出发，可以定义$\mathbf{StMat(C)}$这一$\mathbf{C}$上的随机矩阵凸双积范畴（命题 3）。复合通过矩阵乘法定义：和由 PCA 富化中的凸和给出，乘积则由$\mathbf{C}$中的态射复合给出。我们证明，这一构造产生了一个函子$\mathbf{StMat(–)}$，它从 PCA-富集范畴范畴$\mathbf{PCACat}$ 映射到凸双积范畴范畴$\mathbf{CBCat}$，并且是遗忘函子U 的左伴随（定理 2）：

$$\mathbf{Cat} \underset{U}{\overset{(-)^+}{\rightleftarrows}} \mathbf{PCACat} \qquad \mathbf{StMat}(-) : \mathbf{PCACat} \underset{U}{\rightleftarrows} \mathbf{CBCat}$$

最左边的伴随是标准的（例如参见 [8,46]）：函子 $\mathbf{(–)^+}$ 将一个局部小范畴$\mathbf{C}$ 自由地以 PCA 富化。所得范畴$\mathbf{C}^+$ 中的态射由$\mathbf{C}$中态射的子分布给出。

我们的关键结果是，这两个伴随的复合可以用生成元与方程来进行句法表示。具体而言，我们定义一个函子$\mathbf{T(–)}\colon \mathbf{Cat} \to \mathbf{CBCat}$，它为每个范畴$\mathbf{C}$ 自由添加一个带有自然幺半群的幺半结构，以及余指凸代数。我们证明$\mathbf{T(–)}$是遗忘函子$U\colon \mathbf{CBCat} \to \mathbf{Cat}$ 的左伴随（定理 4），由此得出$\mathbf{T(C)}$与$\mathbf{StMat(C^+)}$同构（推论 1）。

重要的是，当$\mathbf{C}$ 是字符串图范畴$\mathbf{Diag}_{\Sigma}$时，$\mathbf{T(Diag}_{\Sigma}\mathbf{)}$与单子 $\mathcal{D}_{\leq}$ 所对应的带图范畴一致，该单子由 [2]引入。 [2]中的一个结果表明，$\mathbf{T(Diag}_{\Sigma}\mathbf{)}$具有两个幺半积，$\oplus$ 和 $\otimes$，它们构成一个幺半环范畴 （也称为双幺半范畴） [32,29]。同构$\mathbf{T(Diag}_{\Sigma}\mathbf{)} \cong \mathbf{StMat(Diag}_{\Sigma}^{+}\mathbf{)}$由此为带提供了一种具体解释：它们是随机矩阵，其元素是字符串图的概率分布。有趣的是，$\oplus$ 是矩阵的直和，而 $\otimes$是（扩展的）Kronecker积。

我们认为，这一同构可以得到有效应用，从而为基于字符串图的概率语言提供更有原则性的公理化，并简化其完备性证明。作为一个案例研究，我们重新考察了 [40] 中概率布尔电路的完全公理化。它们可以编码为布尔电路的带图，从而更有效地实现概率控制（见[2, 示例 30]）。我们证明（推论 3），只需在布尔电路的公理和带结构（即自然幺半群和 co-PCA）的基础上添加一条额外公理——该公理最初见于 [13]——就足以导出另一种完全公理化。

完备性证明归结为若干范畴论观察、两个几乎显而易见的引理，以及凸双积的泛性质。

概要。 我们首先在第 2 节回顾带基点凸代数、PCA-富集范畴，以及上图中最左侧的伴随。第 3 节介绍凸双积范畴及其相关的幺半群代数结构。在第 4 节中，我们定义随机矩阵并建立最右侧的伴随。与复合伴随相对应的句法构造 $\mathbf{T}(-)$，将在第 5 节中介绍。随后，我们在第 6 节将此构造应用于字符串图范畴，从而得到带图。最后，第 7 节重新探讨概率布尔电路， [40], 阐释其作为概率带的编码，见 [2], 并介绍另一种公理化及其完备性证明。

2 带基点凸代数

我们首先回顾几种广为人知的代数结构。

一个带基点凸代数 (pca) [45],由一个集合X、一个指定元素 $\star \in X$以及对所有属于开实区间 $(0, 1)$ 的p，一个函数 $+_p \colon X \times X \to X$构成；固定 $\tilde{p} \stackrel{\text{def}}{=} pq$ 和 $\tilde{q} \stackrel{\text{def}}{=} p(1-q)\,1-pq$ 后，对所有 $x_1, x_2, x_3 \in X$，以下定律均成立。

$$(x_1 +_q x_2) +_p x_3 = x_1 +_{\tilde{p}} (x_2 +_{\tilde{q}} x_3) \qquad x_1 +_p x_2 = x_2 +_{1-p} x_1 \qquad x_1 +_p x_1 = x_1 \quad (1)$$

PCA态射是保持 $\star$ 和 $+_p$的函数。我们用 **PCA** 表示 PCA 及其态射所构成的范畴。

在任意 PCA 中，对于所有 $p \in [0,1]$，都可以通过令 $x +_1 y \stackrel{\text{def}}{=} x$ 以及 $x +_0 y \stackrel{\text{def}}{=} y$ 来定义 $+_p$。对于所有 $n \in \mathbb{N}$、$p_1, \ldots\ldots p_n \in [0,1]$，使得 $\sum_i p_i \leq 1$，可归纳地定义 $\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (-)_i \colon X^n \to X$为

$$\sum_{i=1}^{0} p_i \cdot (-)_i \stackrel{\text{def}}{=} \star \qquad \sum_{i=1}^{n+1} p_i \cdot (-)_i \stackrel{\text{def}}{=} (-)_1 +_{p_1} \sum_{j=1}^{n} q_j \cdot (-)_j. \quad (2)$$

其中 $(-)_j = (-)_{i+1}$，并且当 $p_1 \neq 1$时，q_j为 $\frac{p_{i+1}}{1-p_1}$，否则为 0。注意，当 $n = 1$时，$p_i \cdot (-)_i$ 按定义即为 $(-)_1 +_{p_1} \star$。由于这一运算将发挥关键作用，我们将其命名为标量 p 乘法 $\in [0,1]$，并固定采用以下记号。

$$p \cdot x \stackrel{\text{def}}{=} x +_p \star$$

pca 的标准例子由某个集合 X 上的有限支撑概率次分布的集合 $\mathcal{D}_{\leq}(X)$ 给出。回顾一下，X 上的有限支撑次分布是一个函数 $d \colon X \to [0,1]$ 使得 $\sum_{x \in X} d(x) \leq 1$，并且对有限多个 x 有 $d(x) \neq 0$。$\mathcal{D}_{\leq}(X)$ 中的特定元素 $\star$ 是零次分布，即对于所有 $x \in X$，都有 $\star(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0$；给定 $d_1, d_2 \in \mathcal{D}_{\leq}(X)$，对于所有 $p \in (0,1)$，有 $(d_1 +_p d_2)(x) \stackrel{\text{def}}{=} p \cdot d_1(x) + (1-p) \cdot d_2(x)$。此时，固定一些额外记号会很方便：$\mathcal{D}(X)$ 是所有有限支撑分布的集合（即 $\sum_{x \in X} d(x) = 1$），并且对于所有 $x \in X$，δ_x 是 x 处的狄拉克分布（即如果 $x = x'$，则 $\delta_x(x') = 1$，否则为 0）。

如果每个同态集 **C** $[X,Y]$ 都带有一个 pca，并且态射的复合是一个 pca 态射，则范畴 **C** 是 **PCA**-*enriched* 的；也就是说，对于所有 $p \in (0,1)$ 以及类型匹配的态射e、f、g、h，以下条件成立。

$$e;(f +_p g) = (e;f) +_p (e;g) \qquad (f +_p g);h = (f;h +_p g;h) \qquad f;\star = \star = \star;f \quad (3)$$

函子F若保留每个同态集上的 pca 结构，则称其为**PCA**-富集函子。**PCA**-富集范畴及其函子构成一个范畴，记为**PCACat**。此后考虑的所有范畴都默认是局部小的：**Cat** 表示局部小范畴构成的范畴。注意，存在一个遗忘函子U：**PCACat** $\to$ **Cat**。

任意范畴 C 都可导出一个 PCA-富集范畴 C^+：C^+ 的对象与 C 的对象相同；对于任意对象 X、Y，同态集定义为 $C^+[X,Y]$ def= $\mathcal{D}_{\leq}(C[X,Y])$。对于 $d_1 : X \to Y$ 和 $d_2 : Y \to Z$，其复合 $d_1; d_2 : X \to Z$ 定义如下：对于所有 $h \in C[X,Z]$，令 $d_1; d_2(h)$ def $= \sum_{(f,g)|f;g=h} d_1(f) \cdot d_2(g)$; 恒等态射 $id_X : X \to X$ 由δ_{id_X}给出。容易看出，C^+ 是一个 PCA- 富集范畴。此外，赋值 $C \mapsto C^+$ 导出一个函子 $(-)^+ : \mathrm{Cat} \to \mathrm{PCACat}$，它是遗忘函子 U 的左伴随（参见例如 [8, 命题 6.4.7] 或 [46,推论 1]）。

定理1 ([8,46]). $(-)^+$：**Cat** $\to$ **PCACat** 是 U 的左伴随：**PCACat** $\to$ **Cat**。

例1。设 **1** 是一个只有单对象和单箭头的范畴。该 **PCA**-富集范畴 $\mathbf{1}^+$ 只有一个对象，态射为 $p \in [0,1]$，复合由乘法给出。

对于集合 A，A 上的词集 （下文记作 A^*）具有单对象范畴的结构。**PCA**-富集范畴 $(A^*)^+$ 有一个对象，态射是关于 A^* 的次分布。对于所有词 $w \in A^*$，复合 $d_1, d_2 \in \mathcal{D}_{\leq}(A^*)$ 定义为 $d_1;d_2(w) \overset{\text{定义为}}{=} \sum_{u;v=w} d_1(u) \cdot d_2(v)$。

我们的 PCA 富集范畴主要示例是 $\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$，即单子 $\mathcal{D}_{\leq} : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ 的 Kleisli范畴（例如参见 [24]）。对象是集合；态射 $f : X \to Y$ 是函数 $X \to \mathcal{D}_{\leq}(Y)$。我们常将 $f(y \mid x)$ 写作 $f(x)(y)$，因为这个数表示在输入 x 的条件下 f 返回 y 的概率。恒等态射 $id_X : X \to \mathcal{D}_{\leq}(X)$ 将每个元素 $x \in X$ 映射到 δ_x。对于两个函数 $f : X \to \mathcal{D}_{\leq}(Y)$ 和 $g : Y \to \mathcal{D}_{\leq}(Z)$，它们在 $\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$ 中的复合定义为 $f ; g(z \mid x)$ def= $\sum_{y \in Y} f(y \mid x) \cdot g(z \mid y)$。

在我们的工作中，$\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$具有两种对称幺半结构这一点至关重要：$(\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq}), \otimes, 1)$ 和 $(\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq}), \oplus, 0)$。幺半积 $\otimes$ 在对象上的定义是集合的笛卡尔积，通常记作 $\times$，其单位为单元素集合 1 def= $\{\bullet\}$；$\oplus$ 是集合的不交并，其单位为空集 0 def= $\{\}$。下文中，我们用 $X \oplus Y$ def $= \{(x,0) \mid x \in X\} \cup \{(y,1) \mid y \in Y\}$ 表示两个集合 X 和 Y 的不交并，其中 0 和 1 是用于区分来源集合的标签。对于态射 $f : X \to Y$ 和 $g : X' \to Y'$，$f \otimes g : X \otimes X' \to Y \otimes Y'$ 以及 $f \oplus g : X \oplus X' \to Y \oplus Y'$ 的定义如下，适用于所有 $x \in X$、$x' \in X'$、$y \in Y$、$y' \in Y'$、$u \in X \oplus X'$ 以及 $v \in Y \oplus Y'$。

$$\begin{aligned} f \otimes g(y,y' \mid x,x') &\overset{\text{def}}{=} f(y \mid x) \cdot g(y' \mid x') \\ f \oplus g(v \mid u) &\overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(y \mid x) & \text{if } u = (x,0) \text{ and } v = (y,0) \\ g(y' \mid x') & \text{if } u = (x',1) \text{ and } v = (y',1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

对称性 $\sigma^{\otimes}\mathrm{X,Y}:\mathrm{X}\otimes\mathrm{Y}\to\mathrm{Y}\otimes\mathrm{X}$ 和 $\sigma^{\oplus}\mathrm{X,Y}:\mathrm{X}\oplus\mathrm{Y}\to\mathrm{Y}\oplus\mathrm{X}$ 的定义与 Set 中相同。实际上，$(\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq}), \oplus, \otimes, 0, 1)$ 构成一个幺半环（又称双幺半）范畴，其含义见 [32]。我们将在第 6 节回到幺半环范畴。在此之前，我们只关注由 $\oplus$提供的幺半结构。

3 凸双积范畴

与 Set 上所有单子的 Kleisli 范畴一样，范畴 $\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$ 继承了 Set 的余积：式 (4) 中的运算 $\oplus$ 在 $\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$ 中充当余积。我们首先观察到，$\oplus$ 满足一个额外的泛性质，我们将其称为凸积，如下所述。

定义 1. 设 X_1, X_2 是 *PCA* 丰富范畴 **C** 中的两个对象。X_1 与 X_2 的凸积 是一个对象 Z，带有两个态射 $\pi_1\colon Z\to X_1$ 和 $\pi_2\colon Z\to X_2$，并满足以下性质：对于所有满足 $p_1, p_2\in[0,1]$ 且 $p_1+p_2\leq 1$ 的 $p_1, p_2\in[0,1]$，以及所有态射 $f:A\to X_1, g:A\to X_2,$，都存在唯一的态射 $h:A\to Z$，使得 $h;\pi_1 = p_1\cdot f$ 且 $h;\pi_2 = p_2\cdot g$。

类似地，n 个对象 $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n$ 的凸积是一个对象 Z，带有态射$\pi_i\colon \mathrm{Z}\to\mathrm{X}_i$，其中 $\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{n}$，并满足以下性质：对于所有 $\mathrm{p}_1,\ldots\mathrm{p}_n\in[0,1]$，其中 $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{p}_i\leq 1$，以及态射 $\mathrm{f}_i\colon\mathrm{A}\to\mathrm{X}_i$，存在唯一的态射 $\mathrm{h}\colon\mathrm{A}\to\mathrm{Z}$，使得对于所有 $\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{n}$，$\mathrm{h};\ \pi_i=\mathrm{p}_i\cdot\mathrm{f}_i$。注意，根据定义，0 元凸积是一个终对象。此后，我们将唯一的态射 h 记作 $\langle\mathrm{f}_1,\ldots,\mathrm{f}_n\rangle_{\boldsymbol{p}}$，其中 p 是 $\mathrm{p}_1,\ldots,\mathrm{p}_n$ 的简写。

定义 2. 凸双积范畴 是一个由**PCA**富集的范畴**C**，它有一个既是始对象又是终对象的对象0；并且对于每一对对象 $X_1, X_2,$，都存在一个对象 $X_1\oplus X_2$ 及态射 $\pi_i:X_1\oplus X_2\to X_i$ 和 $\iota_i:X_i\to X_1\oplus X_2$，使得$(X_1\oplus X_2,\iota_1,\iota_2)$是一个余积，$(X_1\oplus X_2,\pi_1,\pi_2)$ 是一个凸积，并且

$$\iota_i;\pi_j=\delta_{i,j} \tag{5}$$

其中 $\delta_{i,j}:X_i\to X_j$定义为 $\delta_{i,j\,def}=id_{X_i}$当 $i=j$ 时，以及 $\delta_{i,j\,def}=\star_{X_i,X_j}$否则。凸双积范畴之间的态射是一个保有限余积的 **PCA** 富化函子 $F\colon\mathbf{C}\to\mathbf{D}$。我们用 **CBCat** 表示凸双积范畴及其态射所成的范畴。

引理1。在凸双积范畴 **C** 中，富化与（凸）积相容，即：

$$f+_p g=\langle f,g\rangle_{p,1-p};[id_Y,id_Y] \tag{6}$$

对于所有 $f,g:X\to Y$ 和 $p\in[0,1]$。

证明。考虑从 X 到 $Y\oplus Y$ 的态射$f;\ \iota_1$ 和$g;\ \iota_2$，以及它们的和$f;\ \iota_1+_p g;\ \iota_2$。下面的计算表明

$$\begin{aligned}(f;\iota_1+_p g;\iota_2);\pi_1 &= f,\iota_1;\pi_1+_p g;\iota_2;\pi_1 && \text{(pca-enrichment)}\\ &= f+_p\star_{X,Y} && \text{(by (5))}\\ &= p\cdot f\end{aligned}$$

类似地，$(f;\ \iota_1 +_p g;\ \iota_2);\ \pi_2 = (1-p)\cdot g$。根据凸积的泛性质，我们得出$f;\ \iota_1 +_p g;\ \iota_2 = \langle f, g\rangle_{p,1-p}$。将两边与 $[id_Y, id_Y]$复合，得到

$$\begin{aligned} f +_p g &= (f;\iota_1 +_p g;\iota_2);[id_Y, id_Y] \\ &= \langle f, g\rangle_{p,1-p};[id_Y, id_Y]. \end{aligned} \qquad \text{(pca-enrichment)}$$

与具有有限双积的范畴类似，凸双积范畴的态射保持（凸）积（见附录 D 中的命题 9）。

引理 2. 设**C** 是一个凸双积范畴。那么**C** 具有 n 元凸积。

由于任意凸双积范畴**C** 都具有有限余积，根据 Fox 定理， [16],它构成一个对称幺半范畴（$\mathbf{C}, \oplus, 0$），其中每个对象X都带有一个自然且相容的交换幺半群，即满足图 4 和图 5 中定律的态射 $\triangleright_X\colon X\oplus X \to X$和 $\curlyvee_X\colon 0 \to X$。其中，$\alpha_{X,Y,Z}$, λ_X, ρ_Y 分别表示结合子、左、右单位子。回想一下， $\triangleright_X$ 由恒等态射$[id_X,id_X]$ 的余配对给出，而 $\curlyvee_X$ 是从始对象出发的唯一态射。

同样，凸积结构赋予任意对象 X 一个自然且相容的 *co-pca*：对于所有 $p \in (0,1)$，存在一个态射 ${}_p\triangleleft_X\colon X \to X \oplus X$，定义为$\langle id_X,id_X\rangle_{p,1-p}$；以及一个态射 $\downarrow_X\colon X \to 0$，定义为到终对象 0 的唯一映射，并满足图 6 和图 7 中的定律。

命题 1. 设**C**是一个凸双积范畴。则对于每个对象 X，三元组$(X,{}_p\triangleleft_X, \downarrow_X)$ 是自然且相容的 *co-pca*，即图 *6* 和图 *7* 中的公理成立。

在附录 B 中，我们展示了一些凸双积范畴的例子，例如 $\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$及其连续对应物。与我们的工作最相关的是 $\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$。对于所有集合$X$， $\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$中的 co-pca 和幺半群如下所示。

$$\begin{array}{llll} {}_p\triangleleft_X\colon X \to X\oplus X & \downarrow_X\colon X \to 0 & \curlyvee_X\colon 0 \to X & \triangleright_X\colon X\oplus X \to X \\ \quad x \mapsto \delta_{(x,0)} +_p \delta_{(x,1)} & \quad x \mapsto \star & & \quad (x,i) \mapsto \delta_x \end{array} \tag{7}$$

幺半群和 co-pca 稍后将用于自由生成凸双积范畴。具体而言，凸双积范畴的态射可刻画如下。

命题 2。 函子 $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ 是凸双积范畴的态射，当且仅当它是保幺半群和 *co-pca* 的强幺半函子。

图 4、5、6 和 7 中的公理已放入附录，因为它们的严格 对应形式已出现在表 1 和表 2 中。从现在起，我们假设幺半范畴是严格的，也就是说，结构同构 $\alpha_{X、Y、Z}$、 λ_X、 ρ_X 均为恒等态射。作此假设不失一般性 [34],，因为它极大地简化了计算，并允许使用图示记法：图 1 的最后三行展示了自然幺半群和 co-PCA 公理的图示表示。

$(\text{标识}_P \oplus \triangleright_P);\triangleright_P = (\triangleright_P \oplus \text{标识}_P);\triangleright_P$	($\triangleright$-as)	$(\curlyvee_P \oplus id_P);\triangleright_P = id_P$	($\triangleright$-un)
$\curlyvee_0 = \text{恒等}_0$ $\triangleright_0 = \text{恒等态射}_0$	($\curlyvee_0$, $\triangleright_0$-相干性)	$\sigma_{P,P};\ \triangleright_P = \triangleright_P$	($\triangleright$-对称性)
$\curlyvee_{P\oplus Q} = \curlyvee_P \oplus \curlyvee_Q$	($\curlyvee$-相干性)	$\triangleright_{P\oplus Q} = (\text{恒等态射}_P \oplus \sigma_{P,Q} \oplus \text{恒等态射}_Q);(\triangleright_P \oplus \triangleright_Q)$	($\triangleright$-相干性)
$\curlyvee_P; f = \curlyvee_Q$	($\curlyvee$-自然)	$\triangleright_P; f = (f \oplus f);\ \triangleright_Q$	($\triangleright$-自然)

表 1：严格幺半范畴中自然相干幺半群的公理。

$p\triangleleft_P;(q\triangleleft_P \oplus id_P) = \tilde{p}\triangleleft_P;(id_P \oplus \tilde{q}\triangleleft)$	($p\triangleleft$-作为)	$\tilde{p} = \frac{p}{pq}$ $\tilde{q} = \frac{p(1-q)}{1-pq}$	
$p\triangleleft_P;\triangleright_P = id_P$	($p\triangleleft$-idem)	$p\triangleleft_P\,\sigma_{P,P} = {}^{1-p}\triangleleft_P$	($p\triangleleft$-对称)
$p\triangleleft_0 = id_0$	($p\triangleleft_0$-相干)	$\downarrow_0 = id_0$	($\downarrow_0$-相干)
$\downarrow_{P\oplus Q} = \downarrow_P \oplus \downarrow_Q$	($\downarrow$-相容)	$p\triangleleft_{P\oplus Q} = (p\triangleleft_P \oplus {}^p\triangleleft_Q);(id_P \oplus \sigma_{P,Q} \oplus id_Q)$	($p\triangleleft$-相容)
$f;\downarrow_Q = \downarrow_P$	($\downarrow$-自然)	$f;{}^p\triangleleft_Q = {}^p\triangleleft_P;(f \oplus f)$	($p\triangleleft$-自然)

表 2：严格幺半范畴中自然与相干的共PCA的公理。

4 PCA-富集范畴上的随机矩阵

众所周知（例如，参见 [34,练习 VIII.2.5–6]），从一个以交换幺半群为富集结构的范畴出发，可以自由生成其矩阵所构成的有限双积范畴。本节将证明，对于以**PCA**为富集结构的范畴，也存在类似的构造：给定这样的范畴 **C**，可以构造其上的随机矩阵所构成的凸双积范畴**StMat**(**C**)，其中包含定义在 C上的随机矩阵。

StMat(C) 的对象是 Ob(C)* 中的字。我们将用 $\bigoplus^m{}_{k=1} U_k$ 表示字 $U_1 \ldots U_n$，并用 0 表示空字。我们将 C 的对象记为 U、V，将 StMat(C) 的对象记为 P、Q。在 StMat(C) 中，态射 $M : \bigoplus^n{}_{k=1} U^k \to \bigoplus^m{}_{k=1} V_k$ 是一个 $m \times n$ 矩阵的等价类，其 (j, i) 项由对 (p_{ji}, f_{ji}) 给出，其中 $f_{ji} \in C[U_i, V_j]$，且 $p_{ji} \in [0,1]$ 满足 $\sum_{j=1}^m p_{ji} \le 1$。如果对所有 i、j，都有 $p_{ji} \cdot f_{ji} = p'_{ji} \cdot f'_{ji}$ in $C[U_i, V_j]$，则矩阵 M 和 M′ 等价，记作 $M \equiv M'$。

注*1.* 矩阵的元素使用有序对（p_{ji}, f_{ji}）是指定约束 $\sum_{j=1}^m p_{ji} \le 1$所必需的。不过，$\equiv$可以确保我们能够安全地写作 $M_{ji} = p_{ji} \cdot f_{ji}$。

两个态射 $M: \bigoplus^n{}_{k=1} U^k \to \bigoplus^m{}_{k=1} V_k$和 $M' : \bigoplus^m{}_{k=1} V_k \to \bigoplus^l{}_{k=1} W_k$的复合通过矩阵乘法$M'M$得到：对于所有$u \in \{1, \ldots, l\}$和$i \in \{1, \ldots, n\}$，$(u, i)$处的元素为

$$(M'M)_{ui} \stackrel{\text{def}}{=} r_{ui} \cdot \left(\sum_{j=1}^m \frac{p'_{uj} p_{ji}}{r_{ui}} \cdot (f_{ji}; f'_{uj}) \right) = \sum_{j=1}^m p'_{uj} p_{ji} \cdot (f_{ji}; f'_{uj}) \tag{8}$$

其中，凸和 $\sum_k p_k \cdot (-)_k$ 由**PCA** 对**C**的富化给出，复合 ; 属于**C**，且$r_{ui} = (\sum_{j=1}^m p'_{uj} p_{ji})$。简单计算可验证，$\sum_{u=1}^l r_{ui} \le 1$，$p'_{uj} p_{ji} r_{ui} \in [0,1]$，并且式 (8) 中的等式由引理7.8得出 ___

见附录 C。对于所有对象$P = \bigoplus^{n}{}_{k=1}U_k$，$id_P$ 是一个$n \times n$ 矩阵，其元素为 $(id_P)_{jj} = 1 \cdot id^{U_j}$；并且对于$i \neq j$，有 $(id_P)_{ji} = 0 \cdot \star$。

例 *2*。 回顾 $\mathbf{1}^+$ 和（A^*）$^+$，它们来自例1。在 **StMat(1⁺)** 中，对象是自然数，而态射 $n \to m$ 是通常的 $m \times n$ 次随机矩阵（即 $\sum_{j=1}^{m} p_{ji} \leq 1$）。在 **StMat**（（$A^*$）$^+$）中，对象是自然数，而态射 $n \to m$ 是元素属于 $\mathcal{D}_{\leq}$（A^*）的 $m \times n$ 矩阵。以左下方的矩阵 N： $2 \to 3$ 和 M： $2 \to 2$ 为例。复合 M；N： $2 \to 3$ 就是右侧的矩阵。

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot a & \frac{1}{2} \cdot c \\ \frac{1}{3} \cdot ab & 0 \cdot \star \\ 0 \cdot \star & \frac{1}{3} \cdot id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot a & 1 \cdot c \\ \frac{1}{2} \cdot ab & 0 \cdot \star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot aa + \frac{1}{2} abc) & \frac{1}{2} \cdot ca \\ \frac{1}{6} \cdot aab & \frac{1}{3} \cdot cab \\ \frac{1}{6} \cdot ab & 0 \cdot \star \end{pmatrix}$$

命题 3。**StMat**(**C**) 是一个凸双积范畴。

对于任意矩阵M 和N，$M \oplus N$ 如下方左侧所示定义

$$M \oplus N \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} M & \emptyset \\ \emptyset & N \end{pmatrix} \qquad \sigma_{U,Q} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \emptyset & id_Q \\ id_P & \emptyset \end{pmatrix} \tag{9}$$

其中，$\emptyset$ 是所有元素均为 $0 \cdot \star$的矩阵。对称性 $\sigma^{\oplus}{}_{P,Q}$：$P \oplus Q \to Q \oplus P$ 如上方右侧所示定义。每个对象P都配备了 co-pca 和幺半群。对于所有对象$U \in \mathbf{C}$，它们定义如下，其中 $!_U$（分别为 $?_U$）是具有 0 行（列）的唯一矩阵。

$$^{p}\!\triangleleft_U \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} p \cdot id_U \\ (1-p) \cdot id_U \end{pmatrix} \qquad \mathrel{\rotatebox{-90}{$\circ$}}_U \stackrel{\text{def}}{=} !_U \qquad \mathrel{\rotatebox{-90}{$\circ$}}_U \stackrel{\text{def}}{=} ?_U \qquad \triangleright_U \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 \cdot id_U & 1 \cdot id_U \end{pmatrix} \tag{10}$$

对于 P **StMat(C)** 中的任意对象，co-pca 和幺半群归纳定义如下：

$$\begin{array}{c|c} ^{p}\!\triangleleft_0 \stackrel{\text{def}}{=} id_0 \quad \mathrel{\rotatebox{-90}{$\circ$}}_0 \stackrel{\text{def}}{=} id_0 \quad \mathrel{\rotatebox{-90}{$\circ$}}_{U \oplus P} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrel{\rotatebox{-90}{$\circ$}}_U \oplus \mathrel{\rotatebox{-90}{$\circ$}}_P & \triangleright_0 \stackrel{\text{def}}{=} id_0 \quad \mathrel{\rotatebox{-90}{$\circ$}}_0 \stackrel{\text{def}}{=} id_0 \quad \mathrel{\rotatebox{-90}{$\circ$}}_{U \oplus P} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrel{\rotatebox{-90}{$\circ$}}_U \oplus \mathrel{\rotatebox{-90}{$\circ$}}_P \\ ^{p}\!\triangleleft_{U \oplus P} \stackrel{\text{def}}{=} (^{p}\!\triangleleft_U \oplus {}^{p}\!\triangleleft_P); (id_U \oplus \sigma_{U,P} \oplus id_P) & \triangleright_{U \oplus P} \stackrel{\text{def}}{=} (id_U \oplus \sigma_{P,U} \oplus id_P); (\triangleright_U \oplus \triangleright_P) \end{array} \tag{11}$$

正如矩阵范畴是自由生成的有限双积范畴 [34],一样，**StMat**(**C**) 是由 **C**自由生成的凸双积范畴。下面我们将对此进行说明。

首先，对于所有 PCA-富集函子 F : C $\to$ D，都可以定义 StMat(F): StMat(C) $\to$ StMat(D)，其作为函子将对象 $\bigoplus^{n}$ k=1U$_k$ 映射为 $\bigoplus^{n}$ k=1 F(U$_k$)，并将矩阵 M : $\bigoplus^{n}$ k=1 U$_k$ $\to$ $\bigoplus^{m}$ k=1 V$_k$（其元素为 M ji =p ji ·f$_{ji}$）映射为元素为 StMat(F)(M)$_{ji}$ def=p ji ·F(f ji) 的矩阵。

命题 4。 设 F : **C** $\to$ **D** 是一个 *PCA* 富集函子。**StMat**(F): **StMat**(**C**) $\to$**StMat**(**D**) 是凸双积范畴之间的态射。

那么，很容易验证，赋值 **C** $\mapsto$ **StMat(C)** 和 F $\mapsto$ **StMat**(F) 定义了一个函子 **StMat(–)**：**PCACat** $\to$ **CBCat**，它是遗忘函子U：**CBCat** $\to$ **PCACat**的左伴随。

${}^{p}\!\triangleleft_U\colon U \to U \oplus U$ ${}^{\downarrow}\!\circ_U\colon U \to 0$ $\sigma^{\oplus}_{U,V}\colon U \oplus V \to V \oplus U$ $\triangleright_U\colon U \oplus U \to U$ ${}^{\uparrow}\!\circ_U\colon 0 \to U$			
$id_0\colon 0 \to 0$ $id_U\colon U \to U$	$\dfrac{c\colon U \to V}{\overline{c}\colon U \to V}$	$\dfrac{\mathrm{t}\colon P \to Q \qquad \mathrm{s}\colon Q \to R}{\mathrm{t};\mathrm{s}\colon P \to R}$	$\dfrac{\mathrm{t}\colon P_1 \to Q_1 \qquad \mathrm{s}\colon P_2 \to Q_2}{\mathrm{t} \oplus \mathrm{s}\colon P_1 \oplus P_2 \to Q_1 \oplus Q_2}$
$(f;g);h = f;(g;h)$ $(f_1 \oplus f_2);(g_1 \oplus g_2) = (f_1;g_1) \oplus (f_2;g_2)$	$id_P;f = f = f;id_Q$	$id_0 \oplus f = f = f \oplus id_0$ $\sigma_{P,Q};\sigma_{Q,P} = id_{P\oplus Q}$	$(f \oplus g) \oplus h = f \oplus (g \oplus h)$ $(s \oplus id_R);\sigma_{Q,R} = \sigma_{P,R};(id_R \oplus s)$

表3：自由生成的严格对称幺半范畴的类型规则（上）和公理（下）。

定理 2. StMat(−): PCACat → CBCat 是 U : CBCat → PCACat 的左伴随

我们以一个简单的观察结束本节，该观察将在第 7 节中发挥作用。

命题 5。 对于任意凸双范畴 **C**，上述伴随的余单位$\epsilon_{\mathbf{C}}$： **StMat**（U（**C**）） → **C** 是凸双范畴的全忠实态射。

5 随机矩阵的等式呈现

到目前为止，我们已经看到，给定一个范畴，可以先在**PCA**上对其进行自由丰富，然后通过取其随机矩阵范畴，得到一个凸双积范畴。现在，我们用生成元与方程对这类范畴作语法描述。

对于范畴**C**，我们考虑由以下文法生成的项

$$\mathrm{t} ::= {}^{p}\!\triangleleft_U \mid {}^{\downarrow}\!\circ_U \mid \overline{c} \mid {}^{\uparrow}\!\circ_U \mid \triangleright_U \mid id_U \mid id_0 \mid \sigma^{\oplus}_{U,V} \mid \mathrm{t};\mathrm{t} \mid \mathrm{t} \oplus \mathrm{t} \tag{12}$$

其中$p \in (0,1)$，U、$V \in Ob(\mathbf{C})$，且c是**C**中的一个态射。项根据表3顶部的规则确定类型：每种类型都是一个态射$P \to Q$，其中P、$Q \in Ob(\mathbf{C})^*$均视为**C**中对象的和。正如预期的那样，我们只考虑那些可定型的项。对于任意的$P \in Ob(\mathbf{C})^*$，我们按式（11）定义${}_p\triangleleft_P$, ${}^{\downarrow}\!\circ_P$, ${}^{\uparrow}\!\circ_P$, $\triangleright_P$ 。类似的归纳定义给出id_P 和 $\sigma^{\oplus}_{P,Q}$

范畴 **T(C)** 的对象集为 $Ob(\mathbf{C})^*$。**T(C)**[中从P到Q] 的态射是满足自然相干幺半群、co-pca、严格对称幺半范畴公理（分别见表1、表2和表3底部）以及以下两个公理的项的等价类。

$$\overline{id_P} = id_P \qquad \overline{c;d} = \overline{c};\overline{d} \tag{Tape}$$

恒等态射、复合、对称性和幺半积均按项上的方式定义。因此，显然（**T(C)**，⊕，0）构成一个对称幺半范畴。此外，该范畴在 **PCA** 上富集：对于任意对象P、Q以及态射f、g：$P \to Q$

$$f +_p g \overset{\text{def}}{=} {}^{p}\!\triangleleft_P;(f \oplus g);\triangleright_Q \qquad \star_{P,Q} \overset{\text{def}}{=} {}^{\downarrow}\!\circ_P;{}^{\uparrow}\!\circ_Q \tag{13}$$

由${}^{\uparrow}\!\circ$和${}^{\downarrow}\!\circ$的自然性可知，0 同时是始对象和终对象。根据 Fox 定理 [16]，⊕是一个余积，其余积注入为 $id_{P_1} \oplus {}^{\uparrow}\!\circ_{P_2}\colon P_1 \to P_1 \oplus P_2$ 和 ${}^{\uparrow}\!\circ_{P_1} \oplus id_{P_2}\colon P_2 \to P_1 \oplus P_2$。

我们的主要技术工作是证明 $\oplus$是一个凸积，其投影为 $\mathrm{id}_{P_1} \oplus \mathbb{0}_{P_2} : P_1 \oplus P_2 \to P_1$ 和 $\mathbb{0}_{P_1} \oplus \mathrm{id}_{P_2} : P_1 \oplus P_2 \to P_2$。根据余积性质，任意 $t : \bigoplus^m_{j=1} V_j \to \bigoplus^n_{i=1} U_i$ 都是余配对 $[t_1, \ldots, t_m]$，其中 $t_j = \iota_j ; t$。因此，只需考虑类型为 $V \to \bigoplus^n_{i=1} U_i$ 的态射。首先，我们将 $p \lhd$ 扩展到任意 $p \in [0,1]$：${}^0\lhd_U \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1}_U \oplus \mathrm{id}_U$ 和 ${}^1\lhd_U \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{id}_U \oplus \mathbb{1}_U$。然后，对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $p = p_1, \ldots, p_n$，其中 $p_i \in [0,1]$ 满足 $\sum_{i=1}^n p_i \leq 1$，我们归纳地定义 $p\lhd^n_U : U \to \bigoplus^n_{i=1} U$ 如下

$$p\lhd^0_U \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{0}_U \qquad p\lhd^{n+1}_U \stackrel{\text{def}}{=} {}^{p_1}\lhd_U ; (id_U \oplus {}^{q}\lhd^n_U) \tag{14}$$

其中，当 $p_1 = 1$ 且 $q_i = \frac{p_{i+1}}{1 - p_1}$ 时，$q = q_1, \ldots q_n$ 为 $\overline{q_i} = 0$，否则为其他值。给定 n 个态射 $t_i : U \to U_i$，简单计算可确认 $(p \lhd^n_U ; \bigoplus^n_{i=1} t_i) ; \pi_i = p_i \cdot t_i$。因此，$p\lhd^n_U ; \bigoplus^n_{i=1} t_i : U \to \bigoplus^n_{i=1} U_i$ 是满足 n元凸积约束的中介箭头。困难之处在于证明其唯一性。我们依赖于 $\mathbf{T}(\mathbf{C})$ 的两个关键性质：

引理3。对于所有 t：$U \to \bigoplus^n_{i=1} U_i$，存在 $\boldsymbol{p} = p_1, \ldots, p_n$ 以及 $t_i : U \to U_i$，使得 $t = p\lhd^n_U ; \bigoplus^n_{i=1} t_i$。

引理 4. *[可消去性]* 对于所有 $r \in (0,1)$，对于所有 s、t，若 $r \cdot s = r \cdot t$，则 $s = t$。

定理 3. $\mathbf{T}(\mathbf{C})$ 是一个凸双积范畴。特别地，对于所有 $\boldsymbol{p} = p_1, \ldots, p_n$ 和 $t_i : U \to U_i$，$\langle t_1, \ldots t_n \rangle_{\boldsymbol{p}} = p\lhd^n_U ; \bigoplus^n_{i=1} t_i$。

赋值 $\mathbf{C} \mapsto \mathbf{T(C)}$ 诱导出一个函子 $\mathbf{T}(-) : \mathbf{Cat} \to \mathbf{CBCat}$，它是遗忘函子 U: **CBCat** $\to$ **Cat** 的左伴随。

定理 4. $\mathbf{T}(-) : \mathbf{Cat} \to \mathbf{CBCat}$ 是 U 的左伴随 : $\mathbf{CBCat} \to \mathbf{Cat}$。

证明。对于函子 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$，$\mathbf{T}(F) : \mathbf{T(C)} \to \mathbf{T(D)}$ 在对象上的定义为 $\mathbf{T}(F)(\bigoplus^n_{i=1} U_i) = \bigoplus^n_{i=1} F(U_i)$。在态射上，它按如下方式归纳定义。

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{T}(F)(t_1 ; t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}(F)(t_1) ; \mathbf{T}(F)(t_2) & \mathbf{T}(F)(t_1 \oplus t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}(F)(t_1) \oplus \mathbf{T}(F)(t_2) \\
\mathbf{T}(F)({}^p\lhd) \stackrel{\text{def}}{=} {}^p\lhd_{\mathbf{T}(F)(P)} & \mathbf{T}(F)(\rhd_P) \stackrel{\text{def}}{=} \rhd_{\mathbf{T}(F)(P)} \\
\mathbf{T}(F)(\mathbb{0}_P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{0}_{\mathbf{T}(F)(P)} & \mathbf{T}(F)(\mathbb{1}_P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1}_{\mathbf{T}(F)(P)} \\
\mathbf{T}(F)(id_U) \stackrel{\text{def}}{=} id_{\mathbf{T}(F)(U)} & \mathbf{T}(F)(id_0) \stackrel{\text{def}}{=} id_{\mathbf{T}(F)(0)} \\
\mathbf{T}(F)(\sigma^{\oplus}_{P,Q}) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^{\oplus}_{\mathbf{T}(F)(P),\mathbf{T}(F)(Q)} & \mathbf{T}(F)(\overline{c}) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{F(c)}
\end{array}$$

根据定义，$\mathbf{T}(F)$ 是一个保 co-pca 和幺半群的幺半函子。由命题 2 可知，它是凸双范畴的一个态射。因此，我们有一个函子$\mathbf{T}(-) : \mathbf{Cat} \to \mathbf{CBCat}$。下面我们证明这个伴随。

对于所有范畴 $\mathbf{C}$，伴随的单位 $\eta_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \to \mathbf{T(C)}$ 是对象上恒等的函子，它将 $\mathbf{C}$ 中的每个态射 $c : U \to V$ 映射为 c。(Tape) 中的公理迫使 $\eta_{\mathbf{C}}$ 成为一个函子。单位的自然性显而易见。

现在，取一个凸双积范畴 $\mathbf{D}$，并考虑一个函子 $F : \mathbf{C} \to U(\mathbf{D})$。根据命题 1，$\mathbf{D}$ 是一个对称幺半范畴，其中每个对象 X 都带有一个

co-pca $(\triangleleft_X, \downarrow_X)$ 和一个自然相容幺半群 $(\triangleright_X, \uparrow_X)$。可以利用这些结构，像对 $\mathbf{T}(F)$ 所做的那样，归纳地定义 $F^\sharp\colon \mathbf{T}(\mathbf{C}) \to \mathbf{D}$：例如，$F^\sharp(\triangleleft_P) \overset{\text{定义为}}{=} {}_P\triangleleft_{F^\sharp(P)}$。基例 $F^\sharp(c) = F(c)$ 确保 $\eta_{\mathbf{C}};F^\sharp = F$。根据定义，$F^\sharp$ 是一个保持 co-pca 和幺半群结构的严格对称幺半群函子，因此根据命题 2，它是凸双范畴的一个态射。

为证明唯一性，取凸双范畴的一个态射 $H\colon \mathbf{T}(\mathbf{C}) \to \mathbf{D}$ 使得 $\eta_{\mathbf{C}};H = F$，即 $H(c) = F(c)$。根据命题 2，H 必须保留 co-pca 和幺半群。因此 $H = F^\sharp$。

推论 1. 对于所有范畴 $\mathbf{C}$，$\mathbf{T}(\mathbf{C})$ 在 **CBCat** 中同构于 $\mathbf{StMat}(\mathbf{C}^+)$。

证明。根据伴随函子的复合、其唯一性以及定理 1、2 和 4。

同构 $\mathbf{T}(\mathbf{C}) \to \mathbf{StMat}(\mathbf{C}^+)$ 将 c 映射为 1×1 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 \cdot c \end{pmatrix}$，并将 ${}_p\triangleleft_U$, $\downarrow_U$, $\uparrow_U$, $\triangleright_U$ 映射为式 (10) 中定义的矩阵。$\mathbf{T}(\mathbf{C})$ 中态射的复合和求和映射为式 (8) 和 (9) 中定义的矩阵乘法和直和。恒等态射和对称性也同样如此。例如，$(\downarrow_2 \triangleleft_U \oplus \text{恒等态射}_U)$; $\begin{pmatrix} a & ab \\ & c \end{pmatrix}$; $(\text{恒等态射}_U \oplus \sigma^{\oplus}_{U,U})$; $(\triangleright_U \oplus \text{恒等态射}_U)$ 映射为例 2 中的矩阵 M。

上述推论通过生成元与方程对 $\mathbf{StMat}(\mathbf{C}^+)$ 的刻画，为研究进一步的等式理论（例如第 7 节中的理论）铺平了道路。下面的结果保证了将 $\mathbf{T}(\mathbf{C})$ 对附加公理取商后得到的范畴仍然是凸双积范畴。

命题 6。 设 $\mathbf{C}$ 为一个范畴，且 $\sim$ 是; 和 $\oplus$ 上的（关于 $\mathbf{T}(\mathbf{C})$ 的）同余关系。设 $\mathbf{T}(\mathbf{C})_\sim$ 为 $\mathbf{T}(\mathbf{C})$ 关于 $\sim$ 取商后得到的范畴，并令 $Q_\sim\colon \mathbf{T}(\mathbf{C}) \to \mathbf{T}(\mathbf{C})_\sim$ 为将每个态射映射到其 $\sim$-等价类的函子。则 $\mathbf{T}(\mathbf{C})_\sim$ 是一个凸双积范畴，而 $Q_\sim$ 是凸双积范畴之间的态射。

6 概率带图

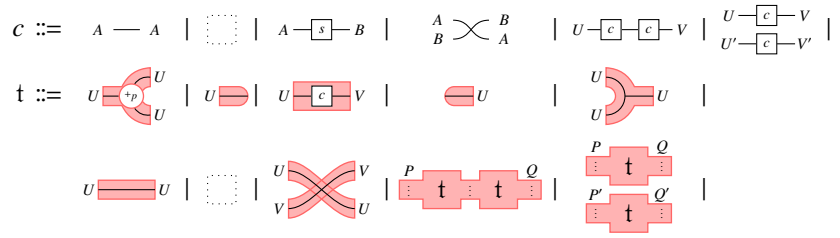
回顾一下，幺半签名是一个元组（$\mathcal{S}, \Sigma$, ar, coar），其中 $\mathcal{S}$ 是基本类型的集合，以下记作 A、B、.....；Σ 是生成元的集合，记作 s、t.....；而 ar、coar：$\Sigma \to \mathcal{S}^*$ 为每个符号赋予其元数和余元数（$\mathcal{S}$ 上的词）。给定一个幺半签名 Σ，可以自由生成严格对称幺半群 Diag_Σ：对象是 $\mathcal{S}^*$ 中的词；态射是字符串图 [30,42]。这些可以看作由以下文法生成的项（其中 $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{S}$ $\mathrm{snd}\ \mathrm{s} \in \Sigma$）

$$c ::= id_A \mid id_1 \mid s \mid \sigma^{\otimes}_{A,B} \mid c;c \mid c \otimes c \tag{15}$$

模掉严格对称幺半范畴的公理。一个 幺半群理论 $\mathbb{T} = (\Sigma, E)$ 由一个幺半签名以及一组 E 组成，其中的元素是 $\mathbf{Diag}_\Sigma$ 中具有相同源和目标的态射对。令 $=_{\mathbb{T}}$ 为 $\mathbf{Diag}_\Sigma$ 中态射上的等价关系，它由 E 生成同余闭包（相对于 ; 和 $\otimes$）得到。我们将 $\mathbf{Diag}_\Sigma$ 按 $=_{\mathbb{T}}$ 取商后得到的范畴记作 $\mathbf{Diag}_{\mathbb{T}}$。

范畴 $\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{T}})$ 是将第5节中的构造应用于 $\mathbf{Diag}_{\mathbb{T}}$ 所得，按定义与 [2]中的带图 范畴一致。其对象

T(Diag$_{\mathbb{T}}$) 的对象是 $(\mathcal{S}^*)^*$，我们常将其写成多项式 $P = \bigoplus_{i=1}^{n} \bigotimes_{j=1}^{m_i} A_{i,j}$。我们将 P 的单项式 称为 n 字 $\bigotimes_{j=1}^{m_i} A_{i,j}$。例如，$(A \otimes B) \oplus 1$ 的单项式为 $A \otimes B$ 和 1。我们用 U、V 等表示单项式。**T(Diag$_{\mathbb{T}}$)** 的态射具有直观的图示表示，由以下两条分层语法规定。



第一层对应于 (15)，第二层对应于 (12)；第一层中的图是字符串图，第二层中的图称为带。注意：(a) 字符串图可以出现在带内；(b) 字符串图的类型为 $U \to V$，其中 U、$V \in \mathcal{S}^*$，且垂直复合对应于 $\otimes$；(c) 带的类型为 $P \to Q$，其中 P、$Q \in (\mathcal{S}^*)^*$，且垂直复合对应于 $\oplus$。

恒等态射 id_0 表示为空带，而 id_1 则是：一条填有空字符串 ϵ 的带。对于单项式 $U = A_1 \ldots A_n$，id_U 表示为一条包含 n 根线、且标记为 A_i 的带。例如，id_{AB} 表示为  。在上下文清楚时，我们将简单地用一根带有相应标记的线 来表示它。同样，对于多项式 $P = \bigoplus_{i=1}^{n} U_i$，$id_P$ 可通过对带进行垂直复合得到，如下方 (16) 左侧所示。

(16)

余对角映射 $\triangleright_U : U \oplus U \to U$ 表示为带的合并，$_p\triangleleft_U : U \oplus U \to U$ 表示为标有 $p \in (0,1)$ 的带的分裂，余邦 $\curlywedge_U : 0 \to U$ 是左边界闭合的带，而 $\curlyvee_U : U \to 0$ 则是右边界闭合的带。利用（11）中的定义，我们可以为任意多项式构造 $\triangleright_P, {}_P\triangleleft_P, \curlywedge_P, \curlyvee_P$。例如，$\triangleright_{A\oplus B\oplus C}$ 和 $\curlywedge_{AB\oplus B\oplus C}$ 分别如上方第二个和第三个图表所示。最后一个图表是

多项式的带  .

该图形表示体现了若干公理，例如 (Tape) 公理以及公半范畴的公理。其余公理见图 1。

根据推论 1，我们知道**T(Diag$_{\mathbb{T}}$)** 与**StMat(Diag$_{\mathbb{T}}^{+}$)** 同构：带恰好表示了**Diag$_{\mathbb{T}}$** 中字符串图的次概率分布所对应的随机矩阵。例如，(16) 中最右侧的图对应矩阵 $1 \times 1 \begin{pmatrix} (1-p)(1-q) & \cdot_{AA} \end{pmatrix}$，而左侧下方的带图则表示

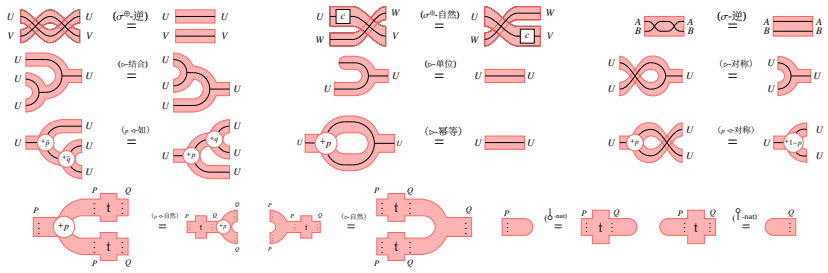
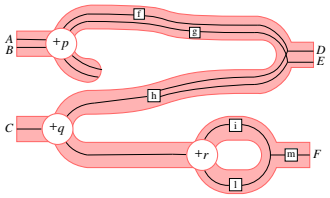
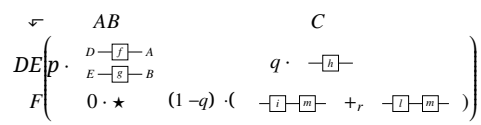


图1：带图的公理。

2×2 右侧的随机矩阵。





现在必须回想起 [2]，$\otimes$不仅可以定义在字符串图上，也可以定义在带上：对于 t_1: $P\to Q$、$t_2: R\to S$，令 $_1\otimes t_2$ def= $L_P(t_2)$; $R_S(t_1)$，其中 $L_P(\cdot)$、$R_S(\cdot)$ 是左侧和右侧粘合，其定义见 [2] 中的表 4（附录 A 中的表6也有列出）。对于对象 $P=\bigoplus i\, U_i$和 $Q=\bigoplus j\, V_j$，$P\otimes Q$ def= $\bigoplus i\ \bigoplus j\, U_iV_j$。

[2] 中的定理 27 保证 $(\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{T}}), \otimes, 1)$ 是一个对称幺半范畴。此类范畴在 **PCA** 上是幺半富集的：

$$t\otimes(\mathfrak{s}_1+_p\mathfrak{s}_2)=(t\otimes\mathfrak{s}_1)+_p(t\otimes\mathfrak{s}_2)\qquad(\mathfrak{s}_1+_p\mathfrak{s}_2)\otimes t=(\mathfrak{s}_1\otimes t)+_p(\mathfrak{s}_2\otimes t)\qquad\star\otimes t=t=t\otimes\star$$

最重要的是，这两个幺半范畴 $(\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{T}}), \oplus, 0)$ 和 $(\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{T}}), \otimes, 1)$ 通过（右严格）环范畴的定律相互作用（见 [32,29]）。

定理 5（引自 [2]）。$(\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{T}}), \oplus, \otimes, 0, 1)$ 是一个右严格环范畴。

借助推论 1 中的同构，我们可以为 $\mathbf{StMat}(\mathbf{Diag}^+_{\mathbb{T}})$ 配备一个额外乘积 $\otimes$。其定义如下。对于对象 $P\otimes Q$，其定义与带中的定义相同。对于态射，首先对所有 $d_1\in\mathbf{Diag}^+_{\mathbb{T}}[U_1,V_1]$ 和 $d_2\in\mathbf{Diag}^+_{\mathbb{T}}[U_2,V_2]$,$d_1\otimes^+ d_2\in\mathbf{Diag}^+_{\mathbb{T}}[U_1U_2,V_1V_2]$ 定义为

$$d_1\otimes^+ d_2(c)\overset{\text{def}}{=}\sum_{\{(c_1,c_2)|c_1\otimes c_2=c\}} d_1(c_1)\cdot d_2(c_2)\qquad\text{for } c\in\mathbf{Diag}_{\mathbb{T}}[U_1U_2,V_1V_2].$$

（回顾第 2 节，$\mathrm{Diag}^+_{\mathbb{T}}[U,V]=\mathcal{D}_{\leq}(\mathrm{Diag}_{\mathbb{T}}[U,V])$）。对于矩阵，它被定义为以 $\otimes^+$ 作为乘法的 Kronecker积。更确切地说，设 $M:\bigoplus^n i_{=1}U_i\to\bigoplus^{n'} i'_{=1}U_{i'}$，$N:\bigoplus^m j_{=1}V_j\to\bigoplus^{m'} j'_{=1}V_{j'}$，则 $M\otimes N$ 是一个大小为 $n'm'\times nm$ 的矩阵，其行由数对 $(i',j')\in\{1,\ldots,n'\}\times\{1,\ldots m'\}$ 索引，列

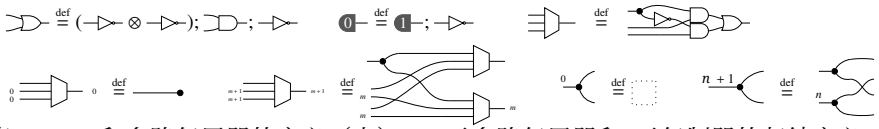


表 4：、 和多路复用器的定义（上）；m元多路复用器和n元复制器的归纳定义（下）。

由数对 (i, j) ∈{1,. . . , n}×{1,. . . m}索引。假设 $M_{i',i} = p_{i',i} \cdot d_{i',i}$，且 $N_{j',j} = q_{j',j} \cdot e_{j',j}$，则对所有索引 (i′, j′)，M⊗N 均有定义，其中 (i, j) 定义为 $(M \otimes N)_{(i',j'),(i,j)} \mathrm{def} = (p_{i',i} \cdot q_{j',j}) \cdot (d_{i',i} \otimes^{+} e_{j',j})$。

推论 2. T(Diag$_{\mathbb{T}}$)和StMat(Diag$^{+}_{\mathbb{T}}$) 作为幺半环范畴是同构的。

7 概率布尔电路

现在，我们快速回顾 [40]中的因果概率布尔电路。考虑只有一个类型的幺半签名，$\mathcal{S} = \{A\}$，以及生成元

$$PB \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\ ,\ ,\ ,\ ,\ \} \cup \{\ \mid p \in (0,1)\}.$$

元数和余元数由左侧和右侧端口的数量决定：例如，具有元数 $A^2 = AA$ 和余元数 A，而具有元数 A 和余元数$A^0 = 1$。前三个生成元表示布尔代数的运算和常量（∧、 ¬、1），接收左侧的一个布尔信号并在右侧发出两个副本，接收左侧的一个信号并将其丢弃，而 表示集合 2 上的分布 $\mathrm{def} = \{0, 1\}$，映射 $1 \mapsto p$ 和 $0 \mapsto 1 - p$。

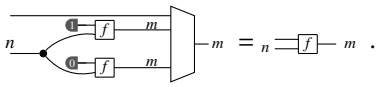
形式上，图表的语义是幺半函子 $\langle\!\langle - \rangle\!\rangle$：$\mathbf{Diag}_{PB} \to \mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$，其在对象上的定义为 $A^n \mapsto 2^n$；对于态射，则首先将生成元解释为 $\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$中的态射

$$\begin{array}{lll} \langle\!\langle \ \rangle\!\rangle : 2 \times 2 \to 2 & \langle\!\langle \ \rangle\!\rangle : 2 \to 2 & \langle\!\langle \ \rangle\!\rangle : 1 \to 2 \\ \quad (x, y) \mapsto \delta_{x \wedge y} & \quad x \mapsto \delta_{\neg x} & \quad \bullet \mapsto \delta_1 \\ \langle\!\langle \ \rangle\!\rangle : 2 \to 2 \times 2 & \langle\!\langle \ \rangle\!\rangle : 2 \to 1 & \langle\!\langle \ \rangle\!\rangle : 1 \to 2 \\ \quad x \mapsto \delta_{(x,x)} & \quad x \mapsto \delta_{\bullet} & \quad \bullet \mapsto \delta_1 +_p \delta_0 \end{array}$$

然后利用幺半范畴（$\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq}), \otimes, 1$）的结构进行归纳定义：例如 $\langle\!\langle c_1 \otimes c_2 \rangle\!\rangle = \langle\!\langle c_1 \rangle\!\rangle \otimes \langle\!\langle c_2 \rangle\!\rangle$，其中第二个 ⊗ 是式（4）中的那个。

[40] 图4展示了概率布尔电路的一种可靠且完备的等式公理化。简而言之，这些公理包括布尔代数的公理（见表5），以及另外4条用于处理 的复杂公理。值得一提的是，这些公理在很大程度上依赖于多路复用器：表 4 中的$A^3 \to A$ 图表示一个布尔函数：当$x = 1$ 时，将(x,y,z)映射为y；当$x = 0$时，则映射为z。表 4 还展示了m元多路复用器$A^{2m+1} \to A^m$的定义。这

已用于 [13] 提供一种基于以下定律的替代公理化 [1]。



(17)

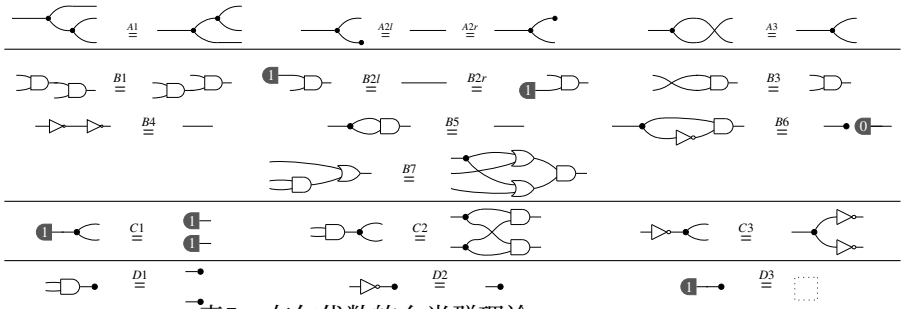
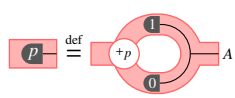


表5：布尔代数的幺半群理论。

在 [2, 例 30], 中，给出了将概率布尔电路编码为带图的方法。令B 为从PB中删去 后得到的签名，并令 $\mathbb{B}$ 为表5中的幺半群理论，它由布尔代数的常见公理组成。为后续使用，值得回顾一下（例如参见 [40,定理 3.2]）：$\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}}$ 同构于 $\mathbf{Set}_2$, 的全子范畴$\mathbf{Set}$，其对象为所有$n \in \mathbb{N}$对应的集合 2^n 。我们将$\mathbf{Diag}_B$ 的态射称为布尔电路，将$\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_B)$的态射称为布尔电路的概率带。此类带图的语义由 [2, 例 30] 中的幺半环范畴态射 $[\![-]\!]$: $\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_B) \to \mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$给出，如图2所示。将概率布尔电路编码为带图的函子是唯一的幺半函子$\mathcal{E}(-)$：$(\mathbf{Diag}_{PB}, \otimes, 1) \to (\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_B), \otimes, 1)$，它映射



其中



如预期，编码保留了语义，即对于所有c，$[\![\mathcal{E}(c)]\!] = \langle\!\langle c \rangle\!\rangle$ 在$\mathbf{Diag}_{PB}$中成立。

本节将证明，布尔代数的公理和（17）足以刻画由 $[\![-]\!]$所诱导的等价。更准确地说，我们采用（17）在带中的编码：对于所有 $t: A^{n+1} \to A^m$，$t = (id_A \otimes ({}_n; t_1 \otimes t_0)); {}_{m\,mm}$ 其中 $t_0 =$   $(\boxed{0} \otimes id_{A^n}); t$ 和 $t_1 = (\boxed{} \otimes id_{A^n}); t$。简单的计算证实了该公理

[1] 更准确地说，在 [13]，（17）这一规律以多路复用器自然性的等价形式出现。

$$[\![id_A]\!] \stackrel{\text{def}}{=} id_2 \qquad [\![id_1]\!] \stackrel{\text{def}}{=} id_1 \qquad \left[\!\!\left[\sigma^{\otimes}_{A,A}\right]\!\!\right] \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^{\otimes}_{2,2} \qquad [\![c;d]\!] \stackrel{\text{def}}{=} [\![c]\!];[\![d]\!] \qquad [\![c \otimes d]\!] \stackrel{\text{def}}{=} [\![c]\!] \otimes [\![d]\!]$$

$$[\![s]\!] \stackrel{\text{def}}{=} \langle\!\langle s \rangle\!\rangle \qquad [\![\overline{c}]\!] \stackrel{\text{def}}{=} [\![c]\!] \qquad [\![\curvearrowleft_{A^n}]\!] \stackrel{\text{def}}{=} \curvearrowleft_{2^n} \qquad \left[\!\!\left[\circ\!\!\downarrow_{A^n}\right]\!\!\right] \stackrel{\text{def}}{=} \circ\!\!\downarrow_{2^n} \quad \left[\!\!\left[\circ\!\!\uparrow_{A^n}\right]\!\!\right] \stackrel{\text{def}}{=} \circ\!\!\uparrow_{2^n} \qquad [\![\triangleright_{A^n}]\!] \stackrel{\text{def}}{=} \triangleright_{2^n}$$

$$[\![id_{A^n}]\!] \stackrel{\text{def}}{=} id_{2^n} \qquad [\![id_0]\!] \stackrel{\text{def}}{=} id_0 \qquad \left[\!\!\left[\sigma^{\oplus}_{A^n,A^m}\right]\!\!\right] \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^{\oplus}_{2^n,2^m} \qquad [\![\mathfrak{s};\mathfrak{t}]\!] \stackrel{\text{def}}{=} [\![\mathfrak{s}]\!];[\![\mathfrak{t}]\!] \qquad [\![\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t}]\!] \stackrel{\text{def}}{=} [\![\mathfrak{s}]\!] \oplus [\![\mathfrak{t}]\!]$$

图 2：语义 $[\![-]\!] : \mathbf{T}(\mathbf{Diag}_B) \to \mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$。这里 s 是 B 中的一个生成元。

是可靠的：$[\![-]\!]$ 将等式的左侧和右侧映射为$\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$中的同一个态射。

我们用 ~ 表示由上述公理生成的$\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}})$上关于 $\oplus$、 $\otimes$ 和;的同余，并用 $\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}})_{\sim}$ 表示将$\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}})$按~取商后得到的范畴。我们将把每个 Tape 映射到其 ~等价类的函子记作$Q_{\sim}$: $\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}}) \to \mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}})_{\sim}$，将每个图映射到其$=_{\mathbb{B}}$ 等价类的函子记作$Q_{\mathbb{B}}$: $\mathbf{Diag}_B \to \mathbf{Diag}_{\mathbb{B}}$ 。

由于这些公理是可靠的，$[\![-]\!] : \mathbf{T}(\mathbf{Diag}_B) \to \mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$ 可以分解为

$$\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_B) \xrightarrow{\mathbf{T}(Q_{\mathbb{B}})} \mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}}) \xrightarrow{Q_{\sim}} \mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}})_{\sim} \xrightarrow{\quad I \quad} \mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$$

对某个函子I。证明完备性相当于证明I 是忠实的。

根据推论 1，我们知道 $\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}}) \cong \mathbf{StMat}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}}^{+}) \cong \mathbf{StMat}(\mathbf{Set}_2^{+})$。现在，令 $\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})_2$ 为 $\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$ 的全子范畴，其对象是对所有$n \in \mathbb{N}$而言的集合 2^n，并令 J: $\mathbf{Set}_2 \to \mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})_2$ 为显然的嵌入。由于 $\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})_2$ 是**PCA**-富化的，根据定理1，存在一个**PCA**-富化函子$J^{\sharp}$: $\mathbf{Set}_2^{+} \to \mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})_2$。它具有以下关键性质。

引理 5. 对于所有 $d_1, d_2 \in \mathbf{Set}_2^{+}[1, 2^m]$, $J^{\sharp}(d_1) = J^{\sharp}(d_2)$ *iff* $d_1 = d_2$。

证明。给出 $\mathsf{J}^{\sharp}$ 的明确定义很方便。回顾一下，Set_2^{+} 中的态射 $\mathsf{d} : 2^n \to 2^m$ 是 $\mathsf{Set}_2[2^n, 2^m]$ 上的次概率分布，即 $\mathcal{D}_{\leq}(\mathsf{Set}_2[2^n, 2^m])$ 的一个元素。$\mathsf{J}^{\sharp}$ 是对象上恒等的函子，它将 $\mathsf{d} : 2^n \to 2^m$ 映射为如下定义的 Kleisli 箭头：对于所有 $\mathsf{b} \in 2^n$，$\mathsf{b}' \in 2^m$，$\mathsf{J}^{\sharp}(\mathsf{d})(\mathsf{b}'|\mathsf{b}) = \sum_{\{\mathsf{f} \mid \mathsf{f}(\mathsf{b}) = \mathsf{b}'\}} \mathsf{d}(\mathsf{f})$。显然，对于 $\mathsf{n} = 0$，$\mathsf{J}^{\sharp}$ 给出显然的双射

$$\mathcal{D}_{\leq}(\mathbf{Set}_2[1, 2^m]) \cong \mathcal{D}_{\leq}(2^m) \cong \mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})_2[1, 2^m].$$

我们将 F: $\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}}) \to \mathbf{StMat}(\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})_2)$ 称为凸双范畴的态射，它由将同构 $\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}}) \to \mathbf{StMat}(\mathbf{Set}_2^{+})$ 与 $\mathbf{StMat}(J^{\sharp})$ 复合而得到。

我们将G: $\mathbf{StMat}(\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})_2) \to \mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$称为凸双范畴的态射，它是通过将嵌入 $\mathbf{StMat}(\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})_2) \to \mathbf{StMat}(\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq}))$与定理 2 中伴随的余单位复合而得到的，$\epsilon_{\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})}$: $\mathbf{StMat}(\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})) \to \mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$。根据命题 5，后者既满且忠实，因此$G$也既满且忠实。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}}) & \xrightarrow{Q_{\sim}} & \mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}})_{\sim} \\ \downarrow{\scriptstyle F} & \swarrow{\scriptstyle H} & \downarrow{\scriptstyle I} \\ \mathbf{StMat}(\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})_2) & \xrightarrow[G]{} & \mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq}) \end{array}$$

由于 $Q_{\sim}$ 在对象上是恒等态射，且G 既满且忠实，根据正交分解系统的性质（例如参见 [38]），存在唯一的 H: $\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}})_{\sim} \to \mathbf{StMat}(\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})_2)$，使上述图表交换。下文将证明 H 是忠实的，从而得出 I 也是忠实的。

此后，我们用$\mathbf{B}[1,A^n]$ 表示n元布尔向量的集合，即$\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}})[1,A^n]$ 中形如$\bigotimes_{i=1}^{n} b_i$（其中$b_i \in \{$  ,  $\}$）的所有带。下面的结论可由简单的归纳论证证明。

引理 6. 设$\mathfrak{s},\mathfrak{t} \in \mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}})[A^n, A^m]$。若对所有$\mathfrak{b} \in \mathbf{B}[1, A^n]$，都有$\mathfrak{b};\mathfrak{s} \sim \mathfrak{b};\mathfrak{t}$，则$\mathfrak{s} \sim \mathfrak{t}$。

定理6. H: $\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}})_{\sim} \to \mathbf{StMat}(\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})_2)$ 是忠实的。

证明。 设 $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} : A^n \to A^m$ 是$\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}})$中的态射。用 $[\mathfrak{s}]_{\sim}$ 和 $[\mathfrak{t}]_{\sim}$ 表示它们的 $\sim$ 等价类。

$$
\begin{aligned}
H([\mathfrak{s}]_{\sim}) = H([\mathfrak{t}]_{\sim}) &\Rightarrow F(\mathfrak{s}) = F(\mathfrak{t}) && (F = Q_{\sim}; H)\\
&\Rightarrow \text{for all } \mathfrak{b} \in \mathbf{B}[1, A^n],\ F(\mathfrak{b}); F(\mathfrak{s}) = F(\mathfrak{b}); F(\mathfrak{t})\\
&\Rightarrow \text{for all } \mathfrak{b} \in \mathbf{B}[1, A^n],\ F(\mathfrak{b};\mathfrak{s}) = F(\mathfrak{b};\mathfrak{t}) && \text{(Functoriality)}\\
&\Rightarrow \text{for all } \mathfrak{b} \in \mathbf{B}[1, A^n],\ \mathfrak{b};\mathfrak{s} = \mathfrak{b};\mathfrak{t} && \text{(Lemma 5)}\\
&\Rightarrow \mathfrak{s} \sim \mathfrak{t} && \text{(Lemma 6)}
\end{aligned}
$$

上述推导证明，对于类型为H 态射$A^n \to A^m$，H 是忠实的。这一事实很容易推出，对于态射 $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$: $A^k \to \bigoplus_{i=1}^{n} A^{m_i}$，$H$ 也是忠实的。事实上，根据引理3和定理 3，

$$\mathfrak{s} = \langle \mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_n \rangle_{\boldsymbol{q}} \quad \mathfrak{t} = \langle \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n \rangle_{\boldsymbol{p}} \tag{18}$$

存在$\boldsymbol{q} = q_1, \ldots, q_n$、$\boldsymbol{p} = p_1, \ldots, p_n$，使得 $\mathfrak{s}_i : A^k \to A^{m_i}$，且 $\mathfrak{t}_i : A^k \to A^{m_i}$。因此

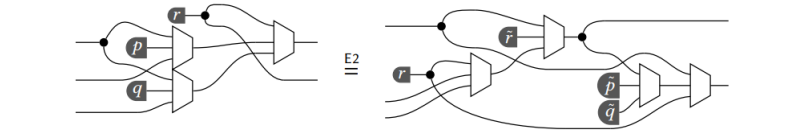
$$
\begin{aligned}
H([\mathfrak{s}]_{\sim}) = H([\mathfrak{t}]_{\sim}) &\Rightarrow F(\mathfrak{s}) = F(\mathfrak{t}) && (F = Q_{\sim}; H)\\
&\Rightarrow \text{for all } i,\ F(\mathfrak{s}); F(\pi_i) = F(\mathfrak{t}); F(\pi_i)\\
&\Rightarrow \text{for all } i,\ F(\mathfrak{s};\pi_i) = F(\mathfrak{t};\pi_i) && \text{(Functoriality)}\\
&\Rightarrow \text{for all } i,\ \mathfrak{s};\pi_i \sim \mathfrak{t};\pi_i && \text{(Previous implication)}\\
&\Rightarrow \text{for all } i,\ q_i \cdot \mathfrak{s}_i \sim p_i \cdot t_i && (18)\\
&\Rightarrow \text{for all } i,\ [q_i \cdot \mathfrak{s}_i]_{\sim} = [p_i \cdot t_i]_i
\end{aligned}
$$

根据命题 6, $[\mathfrak{s}]_{\sim} = \langle [\mathfrak{s}_1]_{\sim}, \ldots, [\mathfrak{s}_n]_{\sim} \rangle_{\boldsymbol{q}}$和 $[\mathfrak{t}]_{\sim} = \langle [\mathfrak{t}_1]_{\sim}, \ldots, [\mathfrak{t}_n]_{\sim} \rangle_{\boldsymbol{p}}$。由于对于所有$i$，$[\mathfrak{t}];[\pi_i]_{\sim}$ 和 $[\mathfrak{s}];[\pi_i]_{\sim}$ 都等于$p_i \cdot [\mathfrak{t}_i]_{\sim} = [p_i \cdot t_i]_{\sim} = [q_i \cdot \mathfrak{s}_i]_{\sim}$，因此$\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}})_{\sim}$ 中n元凸积的泛性质蕴含 $[\mathfrak{s}]_{\sim} = [\mathfrak{t}]_{\sim}$。

对于任意类型的态射 $\bigoplus_{j=1}^{o} A^{k_j} \to \bigoplus_{i=1}^{n} A^{m_i}$，我们可以轻松地运用余积的泛性质以及刚刚证明的情形。

推论 3. I: $\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}})_{\sim} \to \mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$ 是忠实的。

注 *2*。 我们通过带图证明概率布尔电路完备性的方法，与 [40], 中基于范式论证的方法截然不同。相反，我们依赖于推论 1 中建立的同构 $\mathbf{T}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}}) \cong \mathbf{StMat}(\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}}^{+})$



$$\text{where } \tilde{r} = rp + (1-r)q \quad \text{and} \quad \begin{array}{ll} \tilde{p} = \frac{rp}{\tilde{r}} & \text{if } \tilde{r} \neq 0, \text{ and anything otherwise} \\ \tilde{q} = \frac{r(1-p)}{1-\tilde{r}} & \text{if } \tilde{r} \neq 1, \text{ and anything otherwise} \end{array}$$

图 3：公理 E2 来自 [40]。

带图的公理仅涉及幺半群和 co-pca 结构、布尔代数定律，以及额外的多路复用器公理 (17)。相比之下， [40] 中的 的公理更加复杂，因为它们直接作用于概率结构。特别是， [40] 的公理 E1、E3 和 E4 可直接由幺半群、co-pca 和布尔公理推出，而公理 E2（见图 3）则需要用到 [13]中的多路复用器公理 (17)。

8 结论

我们引入了凸双积范畴的概念（定义 2），并构造了在 **PCA** 富集范畴 **C** 上的随机矩阵 **StMat(C)**，证明了**StMat(C)** 是由 **C** 生成的自由凸双积范畴（定理 2）。

随后，我们介绍了一种句法构造：对于任意范畴 **C**，范畴 **T(C)** 是通过自由添加带有自然幺半群和余指凸代数的幺半结构得到的。我们证明了**T(C)** 是基于 **C** 的自由凸双积范畴（定理 4）。结合一个已知结果（定理 1），我们推导出同构**T(C)** $\cong$ **StMat(C**$^+$**)**（推论 1），其中 **C**$^+$ 中的态射是 **C** 中态射的次分布。

当**C** $=$ **Diag**$_\Sigma$是一个字符串图范畴时，这一构造尤其重要：在这种情况下，**T(Diag**$_\Sigma$**)** 就是 [2]中引入的概率带图范畴。同构 **T(Diag**$_\Sigma$**)** $\cong$ **StMat(Diag**$_\Sigma^+$**)** 因而为带图提供了一种具体的解释：将其视为随机矩阵，其元素是关于字符串图的概率次分布。

借助 [2,例 30], ，我们将这一框架应用于 [40]中概率布尔电路的完全公理化。我们提出了一种替代性的公理化方案，将布尔电路的公理、概率带的公理，以及来自 [13]的一条额外定律结合起来。得益于同构 **T(Diag**$_\Sigma$**)** $\cong$ **StMat(Diag**$_\Sigma^+$**)**，最终的完备性证明在概念上更加简单，结构上也更加清晰。

相关工作与未来研究。 在 PCA-富集范畴上构造随机矩阵，在概念上类似于经典的在交换幺半群富集范畴上构造矩阵 [34,12]。然而，后一种构造足够简单，可以留作 [34], 练习，而前一种构造则需要做更多工作。特别是，有限双积范畴中，态射$f\colon A \oplus B \to C \oplus D$ 与由态射组成的四元组 $(f_{A,C}, f_{B,C}, f_{A,D}, f_{B,D})$ 之间存在双射对应，其中每个$f_{X,Y}\colon X \to Y$。这种对应关系在凸双积范畴中不再成立。我们的

概率带图似乎与效用理论效用 [11,9]密切相关。效效用理论建立在有限部分可加范畴 [1], 之上，也就是说，建立在以部分交换幺半群为富集结构的范畴之上，而非带基点凸代数之上。准确理解这两个框架之间的关系，是未来研究一个有趣的方向。

在 [46], 中，引入了一个用于丰富任意代数理论上的字符串图的通用框架。这种方法与基于带图的构造 [2], 根本不同，因为它没有考虑由余积 $\oplus$ 所诱导的结构。因此，与基于矩阵的语义之间的对应关系并不会在 [46] 中出现。

我们计划依据 [3] 中提出的方法，为概率带图加入关于 $\oplus$ 的迹。该工作表明，幺半范畴迹的一项特定性质——称为 一致性——对应于 Hoare 风格程序逻辑 [25] 中通过不变量进行推理。有趣的是，正如 [26], 所示，对于 $\oplus$ in$\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$ 上的迹，一致性成立。初步结果表明，在概率情形下，不变量对应于次鞅，从而为图示语义与概率程序验证之间建立联系提供了有前景的途径。

此外，扩展了迹的概率带图具有足够的表达能力，可以编码 [41], 中的概率正则表达式；这些表达式为生成式概率系统的正则行为提供了完备的公理化——也就是说，$\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$ [24] 中的余代数。我们认为，带或许能再次提供一种更有原则、更模块化的公理化，类似于 [31] 中的克莱尼代数。有趣的是，[31] 中的完备性证明严重依赖于语言上的矩阵表示；正如我们在例 2 中所提示的，我们的带形式体系自然支持概率语言上的随机矩阵。

最后，我们提及，将我们的公理化扩展到带有 （在 [40] 中用于显式条件化）的概率电路，一是一项颇具挑战性的未来工作。事实上，我们的证明关键依赖于众所周知的同构 $\mathbf{Diag}_{\mathbb{B}} \cong \mathbf{Set}_2$，而我们尚不了解部分函数存在类似结果；要支持 ，这类结果是必需的。

参考文献

1. Arbib, M.A., Manes, E.G.：部分可加范畴与流图语义。《代数杂志》**62**(1), 203–227（1980）2. Bonchi, F., Cioffo, C.J., Di Giorgio, A., Di Lavore, E.：幺半单子的带图（2025 22819 32503),https://arxiv.org/abs/ 。. Bonchi, F., Di Giorgio, A., Di Lavore, E.：程序逻辑的图解代数。载于：FoSSaCS 2025（即将发表）（2025）4. Bonchi, F., Di Giorgio, A., Santamaria, A.：用带图解构关系演算。《ACM 编程语言汇刊》**7**(POPL), 1864–1894（2023）5. Bonchi, F., Di Lavore, E., Román, M：有效应的 Mealy 机器：双模拟与迹。即将在 LICS 2025 发表**abs/2410.10627** （2024）。 https://doi.org/10.48550/ARXIV.241010627 610627, 10485502410.https://doi.org/./arXiv.. Bonchi, F., Silva, A., Sokolova, A.：凸代数的力量。载于：第 28 届并发理论国际会议（CONCUR 2017）。第 23–1 页。Schloss Dagstuhl–莱布尼茨信息学中心（2017）7. Bonchi, F., Sokolova, A., Vignudelli, V.：非确定性、概率与终止系统的迹理论。《逻辑方法与计算机科学》**18**(2)（2022）。https://doi.

org/10.46298/LMCS-18(2:21)2022, https://doi.org/10.46298/lmcs-18(2:21) 2022 8. Borceux, F.：《范畴代数手册》。第 2 卷，《数学及其应用百科全书》第 51 卷。剑桥大学出版社，剑桥（1994），范畴与结构 9. Cho, K.：范畴量子基础中的效应子。arXiv 预印本 arXiv:1910.12198（2019）10. Cho, K., Jacobs, B.：通过字符串图进行分解与贝叶斯反演。《计算机科学中的数学结构》29(7), 938–971（2019）11. Cho, K., Jacobs, B., Westerbaan, B., Westerbaan, A.：效应子理论导论。ArXiv abs/1512.05813（2015），https://api.semanticscholar.org/CorpusID: 14013233 12. Coecke, B., Selby, J., Tull, S：《通往经典性的两条道路》266, 104–118（2018 年 2 月）。https: //doi.org/10.4204/EPTCS.266.7 13. Di Giorgio, A., Sobocinski, P., Voorneveld, N.：资源理论中的参数迭代。载于：第 34 届 EACSL 计算机科学逻辑年度会议（CSL 2026）。信息学国际会议论文集（LIPIcs），Schloss Dagstuhl–莱布尼茨信息学中心（2026），即将发表 14. Di Lavore, E., Román, M.：基于偏马尔可夫范畴的证据决策理论。CoRR abs/2301.12989（2023）。https://doi.org/10.48550/ARXIV.2301.12989, https:// doi.org/10.48550/arXiv.2301.12989 15. Di Lavore, E., Román, M., Sobocinski, P.：偏马尔可夫范畴。CoRR abs/2502.03477（2025）。https://doi.org/10.48550/ARXIV.2502.03477, https:// doi.org/10 03477 16 48550 2502 . /arXiv. . . Fox, T.：余代数与笛卡尔范畴。《代数通讯》4(7), 665–667（1976）。https://doi.org/10.1080/00927877608822127 17. Fritz, T.：随机矩阵范畴的一个表示。arXiv 预印本 arXiv:0902.2554（2009）18. Fritz, T., Gadducci, F., Perrone, P., Trotta, D.：弱马尔可夫范畴与弱仿射单子。arXiv 预印本 arXiv:2303.14049（2023）19. Fritz, T., Gonda, T., Houghton-Larsen, N.G., Lorenzin, A., Perrone, P., Stein, D.：范畴概率中的膨胀与信息流公理。《计算机科学中的数学结构》33(10), 913–957（2023）20. Fritz, T., Gonda, T., Perrone, P.：范畴概率中的德芬内蒂定理。arXiv 预印本 arXiv:2105.02639（2021）21. Fritz, T., Klingler, A.：范畴概率中的 d-分离准则。《机器学习研究杂志》24(46), 1–49（2023）22. Fritz, T., Perrone, P.：概率单子的双幺半群结构。《理论计算机科学电子札记》341, 121–149（2018）23. Giry, M.：概率论的范畴方法。载于：《拓扑与分析的范畴方面：1981 年 8 月 11–15 日在渥太华卡尔顿大学举行的国际会议论文集》。第 68–85 页。施普林格（2006）24. Hasuo, I., Jacobs, B., Sokolova, A.：通过余归纳实现通用迹语义。《逻辑方法与计算机科学》3（2007）25. Hoare, C.A.R.：计算机编程的公理基础。《美国计算机协会通讯》12(10), 576–580（1969）26. Jacobs, B.：从余代数迹到幺半范畴迹。《理论计算机科学电子札记》264(2), 125–140（2010）27. Jacobs, B., Kissinger, A., Zanasi, F.：通过弦图手术进行因果推断。载于：软件科学与计算结构基础国际会议。第 313–329 页。施普林格（2019）

28. Jacobs, B., Zanasi, F., 等：贝叶斯推理的逻辑要义。剑桥大学出版社（2021） 29. Johnson, N., Yau, D.：双幺半范畴、e_n-幺半范畴与代数 K 理论。arXiv 预印本 arXiv:2107.10526（2021） 30. Joyal, A., Street, R.：张量演算的几何，I。《数学进展》88(1)，55–112（1991年7月）。https://doi.org/10.1016/0001-8708(91)90003-P 31. Kozen, D.：克莱尼代数与正则事件代数的完备性定理。《信息与计算》110，366–390（1994） 32. Laplaza, M.L.：分配律的相干性。载于：Kelly, G.M., Laplaza, M., Lewis, G., Mac Lane, S.（编）《范畴中的相干性》。第29–65页。《数学讲义》，施普林格，柏林、海德堡（1972）。https://doi.org/10.1007/BFb0059555 33. Liell-Cock, J., Staton, S.：组合式不精确概率：分级单子与马尔可夫范畴提供的一种解决方案。《ACM 程序设计语言汇刊》9(POPL)，1596–1626（2025）。https://doi.org/10.1145/3704890, https://doi.org/10.1145/3704890 34. Mac Lane, S.：《工作数学家的范畴论》，《数学研究生教材》第5卷。施普林格出版社，纽约，第2版（1978），//www.springer.com/gb/book/ 9780387984032 35. Mellies, P.A.：线性逻辑的范畴语义。《综述与综合》27，15–215（2009） 36. Mio, M., Sarkis, R., Vignudelli, V.：结合非确定性、概率与终止性：等式推理与度量推理。载于：第36届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年度研讨会，LICS 2021，意大利罗马，2021年6月29日至7月2日。第1–14页。IEEE（2021）。https://doi.org/10.1109/LICS52264.2021.9470717, https://doi.org/10.1109/LICS52264.2021.9470717 37. Moss, S., Perrone, P.：遍历分解定理的范畴论证明。《遍历理论与动力系统》43(12)，4166–4192（2023） 38. nLab 作者：(bo, ff) 分解系统。https://ncatlab.org/nlab/show/%28bo% 2C+ff%29+factorization+system（2025年7月），修订版12 39. Perrone, P.：马尔可夫范畴与熵。《IEEE 信息论汇刊》70(3)，1671–1692（2023） 40. Piedeleu, R., Torres-Ruiz, M., Silva, A., Zanasi, F.：离散概率编程中等价关系的完全公理化。载于：ESOP 2025（即将发表）（2025） 41. Rozowski, W., Silva, A.：概率正则表达式的完备性定理。载于：Sobocinski, P., Lago, U.D., Esparza, J.（编）第39届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年度研讨会论文集，LICS 2024，爱沙尼亚塔林，2024年7月8日至11日。第66:1–66:14页。ACM（2024）。https://doi.org/10.1145/3661814.3662084, https: //doi.org/10.1145/3661814.3662084 42. Selinger, P.：幺半范畴的图形语言综述。载于：《物理学的新结构》，第289–355页。施普林格（2010） 43. Sokolova, A., Woracek, H.：分布凸集中的终止性。《计算机科学中的逻辑方法》14（2018） 44. Stein, D., Staton, S.：带精确条件的概率编程。《ACM 会刊》71(1)，1–53（2024） 45. Stone, M.H.：重心演算的公设。《纯粹与应用数学年刊》29(1)，25–30（1949） 46. Villoria, A., Basold, H., Laarman, A.：为图表增添代数运算。载于：软件科学与计算结构基础国际会议。第121–143页。施普林格（2024）

A 附加图表

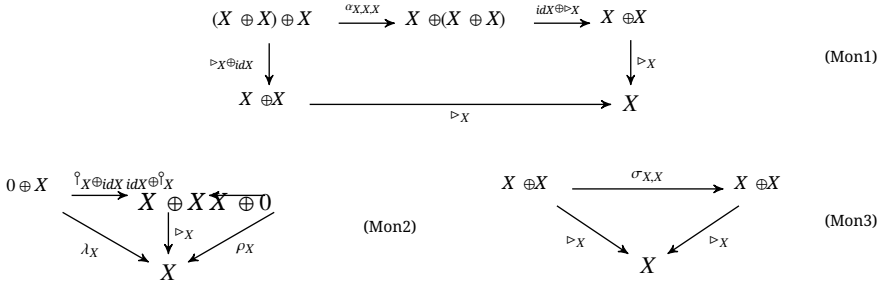


图 4：交换幺半群公理

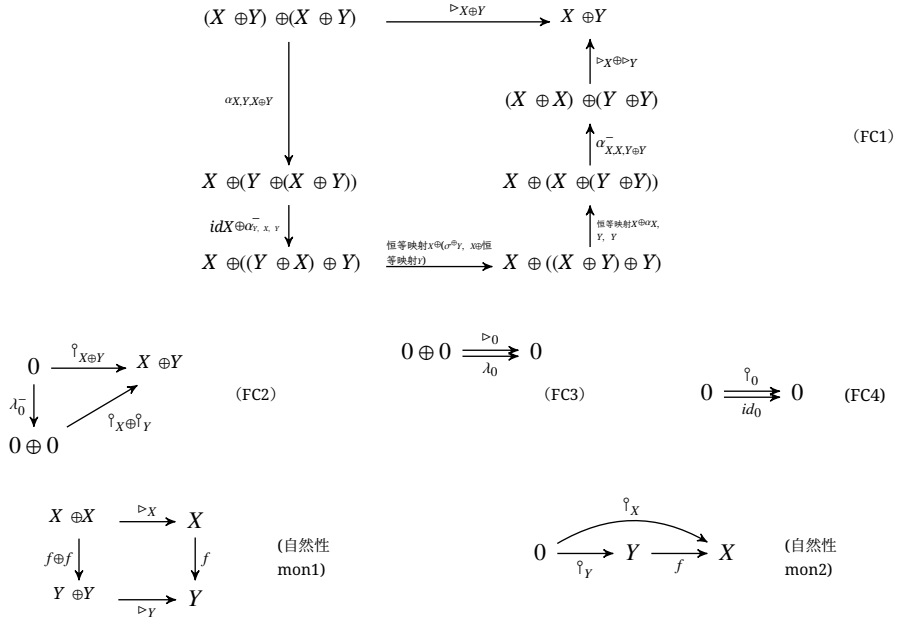


图5：交换幺半群的相干性和自然性公理

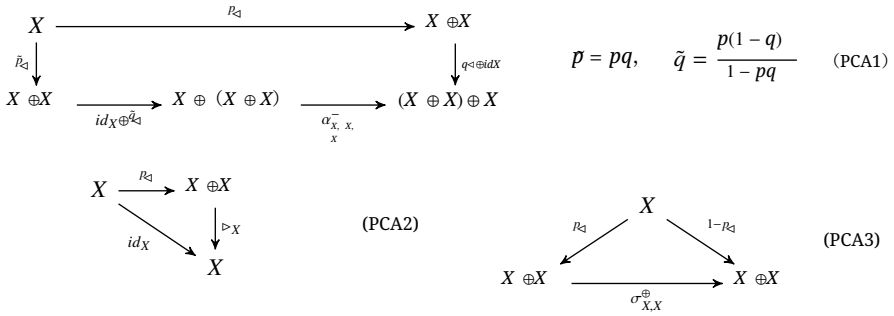


图 6：co-PCA 公理

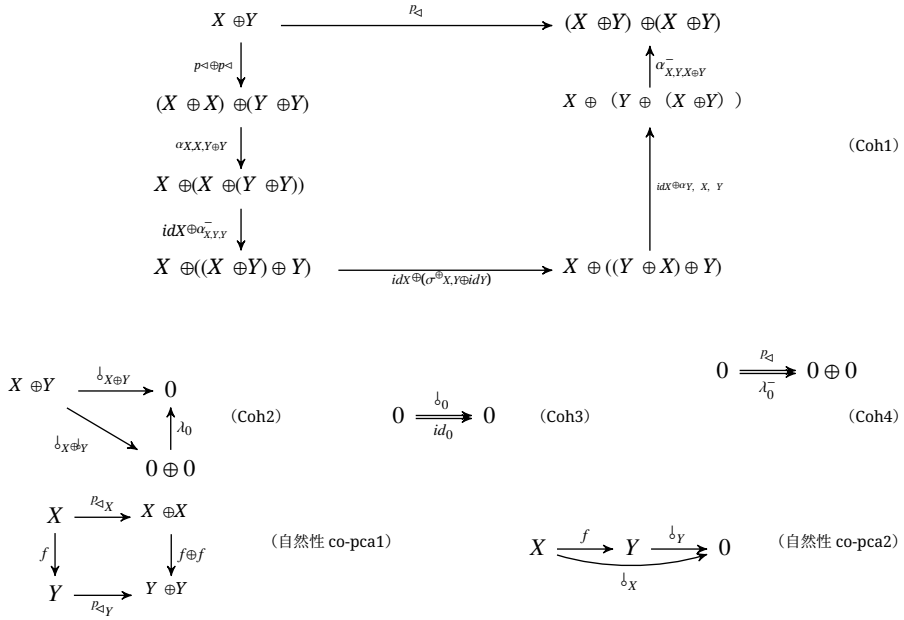


图 7：co-pca对象的相干性与自然性公理

B 凸双积范畴的一些示例

在本附录中，我们将介绍凸双积范畴的几个例子：子分布单子的Kleisli范畴、其连续版本，以及关于有限部分可加范畴的一个结果。

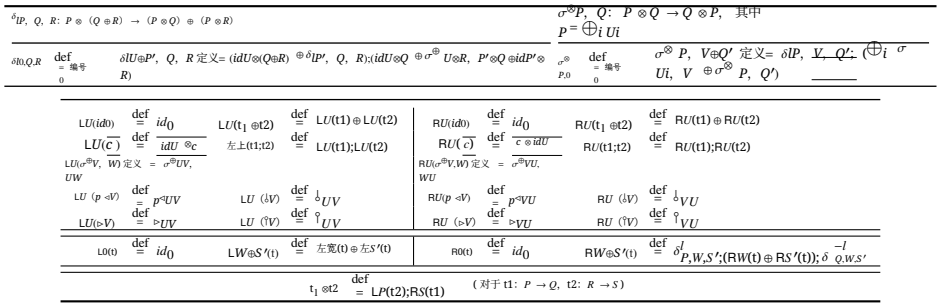


表6：左分配子的归纳定义 $\delta^{l}_{P,\,Q,\,R}$ 和 $\otimes$-对称性 $\sigma^{\otimes}{}_{P,\,Q}$ （上）；单项式与多项式胡须作用（中）； $\otimes$的定义（下）。

B.1 次分布单子的 Kleisli范畴

命题 7。 $\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$ 是一个凸双积范畴

证明。 余积由**Set**中的余积诱导，而空集 0 既是始对象，也是终对象。事实上，对于每个对象X，唯一的态射$X \to 0$ 会将元素$x \in X$ 映射为零次分布（它是 $\mathcal{D}_{\leq}(0)$的唯一元素）。

$\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$是PCA-富集的，因为对于每个X、Y $\in \mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$，同态集$\mathcal{KL}(\mathcal{D}_{\leq})$[X, Y]是一个带基点凸代数，其运算定义如下： $+_p$(f, g)(y|x) def =p ·f (y|x) +(1 − p) ·g(y|x)，对所有f, g : X →Y和p ∈(0, 1)均成立；并且$\star_{X,Y}$(y|x) def = 0（即，它是将每个x映射为Y上的零次分布的态射）。简单计算可知，态射复合是带基点凸代数的态射，也就是说，它保持运算 $+_p$和$\star_{X,Y}$。例如，对于所有f, g: X →Y和h: Y →Z，(f $+_p$ g); h =(f ; h $+_p$ g; h)可由下式推出：

$$
\begin{aligned}
((f +_p g); h)(z|x) &= \sum_{y\in Y} (f +_p g)(y|x) \cdot h(z|y) \\
&= \sum_{y\in Y} (p \cdot f(y|x) + (1-p) \cdot g(y|x)) \cdot h(z|y) \\
&= p \cdot \sum_{y\in Y} f(y|x) \cdot h(z|y) + (1-p) \cdot \sum_{y\in Y} g(y|x) \cdot h(z|y) \\
&= p \cdot (f; h)(z|x) + (1-p) \cdot (g; h)(z|x) \\
&= (f; h +_p g; h)(z|x).
\end{aligned}
$$

现在注意到 $X_1 \oplus X_2$ 连同投影 $\pi_i \colon X_1 \oplus X_2 \to X_i$（其中 $i = 1$ 取 2）由下式给出

$$
\pi_1(x_1|z) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \delta_{x_1} & z = \iota_1(x_1) \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad \pi_2(x_2|z) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \delta_{x_2} & z = \iota_2(x_2) \\ 0 & otherwise \end{cases}
$$

是 X_1 和 X_2的凸积。事实上，给定态射 $f_1\colon A \to X_1$ 和 $f_2\colon A \to X_2$，以及 $p_1, p_2 \in (0,1)$，使得 $p_1 + p_2 \leq 1$，则存在态射 $\langle f_1, f_2\rangle_{p_1,p_2}\colon A \to X_1 \oplus X_2$，定义如下：

$$\langle f_1, f_2\rangle_{p_1,p_2}(z|a) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} p_1 \cdot f_1(x_1|a) & z = \iota_1(x_1) \\ p_2 \cdot f_2(x_2|a) & z = \iota_2(x_2). \end{cases}$$

注意，对于 $i \in \{1,2\}$,

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2\rangle_{p_1,p_2}; \pi_i(x_i|a) &= \sum_{z \in X_1 + X_2} \langle f_1, f_2\rangle_{p_1,p_2}(z|a) \cdot \pi_i(x_i|z) \\ &= \langle f_1, f_2\rangle_{p_1,p_2}(\iota_i(x_i)|a) \\ &= p_i \cdot f_i(x_i|a) \end{aligned}$$

也就是说，成立 $(\langle f_1, f_2\rangle_{p_1,\ p_2}); \pi_i = p_i \cdot f_i$。这是具有此性质的唯一态射，因为对于任何其他态射 $h'\colon A \to X_1 \oplus X_2$，满足 $h'; \pi_i = p_i \cdot f_i$ 对所有$i = 1$成立，由此可得 2

$$\begin{aligned} h'(\iota_1(x_1)|a) &= h'(\iota_1(x_1)|a) \cdot 1 \\ &= \sum_{z \in X_1 \oplus X_2} h'(z|a) \cdot \pi_1(x_1|z) \\ &= h'; \pi_1(x_1|a) \\ &= p_1 \cdot f_1(\iota_1(x_1)|a) \end{aligned}$$

类似地，对于 π_2，可得 $h'(\iota_2(x_2)|a) = p_2 \cdot f_2(\iota_2(x_2)|a)$，即 $h' = \langle f_1, f_2\rangle_{p_1,\ p_2}$。简单计算可确认 (5) 和 (6) 成立。

B.2 标准博雷尔空间上的次随机马尔可夫核

考虑标准博雷尔空间及其上的可测函数所构成的范畴，记作 BorelMeas。给定一个标准博雷尔空间 (X, Σ_X)，用 $\mathcal{G}_{\leq}(X)$ 表示 X 上次概率测度的集合，即满足 $\mu(X) \leq 1$ 的可测函数 $\mu : (X, \Sigma_X) \to ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$，其中 $\mathcal{B}([0,1])$ 是 $[0,1]$ 上的博雷尔 σ-代数。该赋值扩展为函子 $\mathcal{G}_{\leq} : \mathrm{BorelMeas} \to \mathrm{BorelMeas}$，对应于 Giry 单子 [23] 的次分布版本。函子 $\mathcal{G}_{\leq}$ 是一个对称幺半群单子，其 Kleisli 范畴 $\mathcal{KL}(\mathcal{G}_{\leq})$ 是标准博雷尔空间及次随机马尔可夫核所构成的范畴。从 (X, Σ_X) 到 (Y, Σ_Y) 的次随机马尔可夫核是一个函数 $f : \Sigma_Y \times X \to [0,1]$，满足对所有 $x \in X$，$f(-|x) : \Sigma_Y \to [0,1]$ 是 Y 上的次概率测度；并且对所有 $U \in \Sigma_Y$，$f(U|-) : X \to [0,1]$ 是可测函数。对象 (X, Σ_X) 上的恒等态射是马尔可夫核 δ_X，满足对所有 $x \in X$ 和 $U \in \Sigma_X$，$\delta_X(U|x) = 1$ 当且仅当 $x \in U$，否则为 0。$\mathcal{KL}(\mathcal{G}_{\leq})$ 中箭头的复合由查普曼-科尔莫戈罗夫方程给出：对所有次随机马尔可夫核 $f : (X, \Sigma_X) \to (Y, \Sigma_Y)$ 和 $g : (Y, \Sigma_Y) \to (Z, \Sigma_Z)$，$f; g : (X, \Sigma_X) \to (Z, \Sigma_Z)$ 定义为满足以下条件的马尔可夫核：对所有 $x \in X$ 和 $U \in \Sigma_Z$,

$$(f; g)(U|x) \coloneqq \int_Y g(U|y)\, f(dy|x)$$

命题 8. $\mathcal{KL}(\mathcal{G}_{\leq})$是一个凸双积范畴。

证明。 $\mathcal{KL}(\mathcal{G}_{\leq})$ 中的余积由 BorelMeas 中的余积给出，即标准博雷尔空间的不交并。始对象和终对象都是空的标准博雷尔空间。PCA-富化由马尔可夫核的逐点凸组合给出：对所有马尔可夫核 $f, g : (X, \Sigma_X) \to (Y, \Sigma_Y)$ 以及 $p \in [0,1]$，$f +_p g : (X, \Sigma_X) \to (Y, \Sigma_Y)$ 定义为：对所有 $x \in X$ 和 $U \in \Sigma_Y$，$(f +_p g)(U|x) := p \cdot f(U|x) + (1-p) \cdot g(U|x)$。零箭头 $\star_{(X,\Sigma_X),(Y,\Sigma_Y)} : (X, \Sigma_X) \to (Y, \Sigma_Y)$ 是满足以下条件的马尔可夫核：对所有 $x \in X$ 和 $U \in \Sigma_Y$，$\star_{(X,\Sigma_X),(Y,\Sigma_Y)}(U|x) = 0$。PCA 的公理成立，因为它们在 $[0,1]$ 中成立。简单计算可知，$+_p$ 和 $\star$ 与复合相容。例如，如命题 7 中所示，对所有马尔可夫核 $f, g : (X, \Sigma_X) \to (Y, \Sigma_Y)$、$h : (Y, \Sigma_Y) \to (Z, \Sigma_Z)$ 以及 $p \in [0,1]$，我们可按如下方式得到 $(f +_p g); h = f; h +_p g; h$

$$
\begin{aligned}
((f +_p g); h)(C \mid x) &= \int_Y h(C \mid y)\,(f +_p g)(dy \mid x) \\
&= \int_Y h(C \mid y)\,(p\,f(dy \mid x) + (1-p)\,g(dy \mid x)) \\
&= p \int_Y h(C \mid y)\,f(dy \mid x) \;+\; (1-p) \int_Y h(C \mid y)\,g(dy \mid x) \\
&\qquad\qquad \text{(linearity of the integral)} \\
&= p\,(f; h)(C \mid x) \;+\; (1-p)\,(g; h)(C \mid x) \\
&= ((f; h) +_p (g; h))(C \mid x).
\end{aligned}
$$

现在我们证明，$(X1, \Sigma_{X_1}) \overset{\pi_1}{\leftarrow} (X1, \Sigma_{X_1}) \oplus (X2, \Sigma_{X_2}) \overset{\pi_2}{\rightarrow} (X2, \Sigma_{X_2})$ 是 $\mathcal{KL}(\mathcal{G}_{\leq})$ 中的二元凸积。马尔可夫核 π_1 和 π_2 定义如下：对于所有 $z \in X_1 \oplus X_2$ 以及 $U \in \Sigma_{X_1}$，$\pi_1(U|z) = 1$ 若 $z \in \iota_1(U)$，否则为 0；对于所有 $z \in X \oplus Y$ 以及 $V \in \Sigma_{X_2}$，$\pi_2(V|z) = 1$ 若 $z \in \iota_2(V)$，否则为 0。给定 $f : (A, \Sigma_A) \to (X1, \Sigma_{X_1})$、$g : (A, \Sigma_A) \to (X2, \Sigma_{X_2})$ 以及满足 $p_1 + p_2 \leq 1$的 $p_1, p_2 \in [0,1]$，我们证明存在唯一的马尔可夫核 $h : (A, \Sigma_A) \to (X1, \Sigma_{X_1}) \oplus (X2, \Sigma_{X_2})$，使得 $h; \pi_1 = p_1 \cdot f$ 且 $h; \pi_2 = p_2 \cdot g$。以下定义的马尔可夫核 h 给出了存在性：对于所有 $a \in A$、$U \in \Sigma_{X_1}$ 和 $V \in \Sigma_{X_2}$，

$$h(\iota_1(U)|a) := p_1 \cdot f(U|a) \quad h(\iota_2(V)|a) := p_2 \cdot g(V|a)$$

其中，对于$_{X_2}$ h 的任意元素，由可数可加性延拓。唯一性证明如下：假设还存在具有相同性质的h'。那么，对于所有$a \in A$、$U \in \Sigma_{X_1}$ 和$V \in \Sigma_{X_2}$，有

$$
\begin{aligned}
h'(\iota_1(U) \mid a) &= \int_{X_1 \oplus X_2} \mathbf{1}_{\iota_1(U)}(z)\,h'(dz \mid a) && \text{（关于}h'(\cdot \mid a)\text{）的积分定义} \\
&= \int_{X_1 \oplus X_2} \pi_1(U \mid z)\,h'(dz \mid a) && \text{(def. of indicator function)} \\
&= (h'; \pi_1)(U \mid a) && \text{（核复合）} \\
&= (p_1 \cdot k_1)(U \mid a). && \text{（}h';\ \pi_1 = p_1 k_1\text{ 的性质）}
\end{aligned}
$$

类似地，$h'(\iota_2(V)|a) = (p_2 \cdot g)(V|a)$。由于$x_2$ 中的每个元素都可由形如 $\iota_1(U)$和 $\iota_2(V)$的元素作可数并得到，因此h' 完全由上述等式确定，故$h' = h$。

C 第 2 节附录

证明（定理*1*的证明）。该结果可由关于任意代数理论上富集的更一般结果推出：例如参见 [8,命题 6.4。7] 或 [46, 推论 1]。无论如何，展示其中涉及的结构是很方便的。

我们首先说明函子 $F : C \to D$ 的 $F^+: C^+ \to D^+$ 定义。对于所有对象 X，F^+ 定义为 $F^+(X) \text{ def} = F(X)$；对于所有 $d \in C^+[X, Y], F^+(d) \in D^+[FX, FY]$，对于所有 $h : FX \to FY$，定义 $F^+(d)(g) \text{ def}= \sum_{\{f \in C[X,Y]|F(f)=g\}} d(f)$。容易验证该函子是 PCA-富集的。

对于所有范畴 $\mathbf{C}$，单位 $\eta_{\mathbf{C}}: \mathbf{C} \to \mathbf{C}^+$ 是在对象上作用为恒等态射，并将任意态射 $f \in \mathbf{C}[X, Y]$ 映射到 $\delta_f \in \mathbf{C}^+[X, Y]$ 的函子。

现在，给定一个 PCA 富集范畴 D 和一个函子 $F: C \to U(D)$，可以如下定义函子 $F^\sharp: C^+ \to D$：对于所有对象 X，$F^\sharp(X) \text{ def} = F(X)$；对于所有态射 $d \in C^+[X, Y], F^\sharp(d) \text{ def}= \sum_{f \in C[X,Y]} d(f) \cdot \delta_{F(f)}$。

D 第 3 节附录

证明（引理 2 的证明）。对 n 作归纳，我们证明 $\bigoplus^n{}_{i=1} X_i$ 是 $X_1, \ldots, X_n$ 的凸积。当 $n = 0$ 时，注意到对象 0 根据定义 2 是终对象。当 $n + 1$ 时，假设根据归纳假设，$\bigoplus^n{}_{i=1} X_i$ 是 $X_1, \ldots, X_n$ 的凸积，其投影为 $\pi_i: \bigoplus^n{}_{i=1} X_i \to X_i$。由于 C 有二元凸积，我们可以取凸积 $(\bigoplus^n{}_{i=1} X_i) \oplus X_{n+1}$，其投影为 $\pi'_1: (\bigoplus^n{}_{i=1} X_i) \oplus X_{n+1} \to \bigoplus^n{}_{i=1} X_i$ 以及 $\pi'_2: (\bigoplus^n{}_{i=1} X_i) \oplus X_{n+1} \to X_{n+1}$。我们断言，$(\bigoplus^n{}_{i=1} X_i) \oplus X_{n+1}$ 的投影为$\pi''_i: (\bigoplus^n{}_{i=1} X_i) \oplus X_{n+1} \to X_i$，对所有 $i \in 1 \ldots n + 1$ 定义如下

$$\pi''_i = \begin{cases} \pi'_1; \pi_i & i \in 1, \ldots n \\ \pi'_2 & i = n + 1 \end{cases}$$

是 $X_1, \ldots, X_{n+1}$ 的凸积。为验证泛性质，设 $p = p_1, \ldots, p_{n+1}$ 满足 $\sum_{i=1}^{n+1} p_i \leq 1$，且 $f_i: A \to X_i$。取 $q = q_1, \ldots, q_n$，使得 $q_i = p_1 - p_{n+1}$。由于根据归纳假设，$\bigoplus^n{}_{i=1} X_i$ 是 n 元凸积，因此存在态射 $\langle f_1, \ldots, f_n\rangle_q : A \to \bigoplus^n{}_{i=1} X_i$，使得 $p_i \cdot f_i = \langle f_1, \ldots, f_n\rangle_q; \pi_i$。对于 $n+1$ 元情形，我们构造中介态射 $h: A \to (\bigoplus^n{}_{i=1} X_i) \oplus X_{n+1}$，定义为 $\langle \langle f_1, \ldots, f_n\rangle_q, f_{n+1} \rangle_{1-p_{n+1}, p_{n+1}}$。

引理 7。 在凸双积范畴中，以下结论成立：

1. $\star_{X,Y} = \natural_X$； $\natural_Y$*2.* $\pi_1 = (id_{X_1} \oplus \natural_{X_2})$； ρ_{X_1} 对于 π_1: $X_1 \oplus X_2 \to X_1$； *3.* $\pi_2 = (\natural_{X_1} \oplus id_{X_2})$； λ_{X_2} 对于 π_2: $X_1 \oplus X_2 \to X_2$; *4.* $p \cdot f = p \triangleleft_X$; $(f \oplus \natural_X)$; ρ_Y对于所有 f: $X \to Y$;

此外，在 *PCA* 富集范畴中，以下结论成立：

5. $(1-p)\cdot f = {}^{p}\triangleleft_X; (\mathring{\circ}_X \oplus f); \lambda_y$ 对所有 $f: X \to Y$;
6. $(p\cdot f); g = p\cdot(f; g)$ *and* $f; (p\cdot g) = p\cdot(f; g)$;
7. $p\cdot(q\cdot f) = pq\cdot f$; *8.* $q\cdot\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot f_i = \sum_{i=1}^{n}(qp_i)\cdot f_i$;

证明。 我们将在下文逐项证明。

1. 由富化和0的终结性可轻易得出：

$$\begin{aligned} \star_{X,Y} &= \star_{X,0}; \mathring{\circ}_Y && (3)\\ &= \mathring{\circ}_X; \mathring{\circ}_Y && (0 \text{ is final}) \end{aligned}$$

2. 注意，对于 ι_i: $X_i \to X_1 \oplus X_2$,

$$\iota_1; (id_{X_1} \oplus \mathring{\circ}_{X_2}); \rho_{X_1} = id_{X_1} \qquad \iota_2; (id_{X_1} \oplus \mathring{\circ}_{X_2}); \rho_{X_1} = \mathring{\circ}_{X_2}; \mathring{\circ}_{X_1} = \star_{X_2,X_1}$$

即 $(id_{X_1} \oplus \mathring{\circ}_{X_2})$; $\rho_{X_1} = [id_{X_1}, \star_{X_2,X_1}]$。现在，根据 (5)，有 $[id_{X_1}, \star_{X_2,X_1}] = \pi_1$。

3. 与上面的点类似。
4. 根据以下推导。

$$\begin{aligned} p\cdot f &= f +_p \star_{X,\ Y} && (\text{def. of } p\cdot(-))\\ &= {}^{p}\triangleleft_X; (f \oplus \star_{X,Y}); \triangleright_Y && (6)\\ &= {}^{p}\triangleleft_X; (f \oplus (\mathring{\circ}_X; \mathring{\circ}_Y)); \triangleright_Y && (\text{Lemma 7.1})\\ &= {}^{p}\triangleleft_X; (f \oplus \mathring{\circ}_X); (id_Y \oplus \mathring{\circ}_Y); \triangleright_Y && (\text{Symmetric Monoidal Category})\\ &= {}^{p}\triangleleft_X; (f \oplus \mathring{\circ}_X); \rho_Y && (\text{Mon2}) \end{aligned}$$

5. 根据以下推导

$$\begin{aligned} (1-p)\cdot f &= f +_{1-p} \star_{X,Y} && (\text{def. of } p\cdot(-))\\ &= \star_{X,y} +_p f && (1)\\ &= {}^{p}\triangleleft_X; (\star_{X,Y} \oplus f); \triangleright_Y && (6)\\ &= {}^{p}\triangleleft_X; ((\mathring{\circ}_X; \mathring{\circ}_Y) \oplus f); \triangleright_Y && (\text{Lemma 7.1})\\ &= {}^{p}\triangleleft_X; (\mathring{\circ}_X \oplus f); (id_Y \oplus \mathring{\circ}_Y); \triangleright_Y && (\text{Symmetric Monoidal Category})\\ &= {}^{p}\triangleleft_X; (\mathring{\circ}_X \oplus f); \lambda_Y && (\text{Mon2}) \end{aligned}$$

6. 由富化可轻易推出。例如，第一个等式的证明如下。

$$\begin{aligned} (p\cdot f); g &= (f +_p \star_{X,Y}); g && (\text{def of } p\cdot(-))\\ &= (f; g) +_p (\star_{X,Y}; g) && (3)\\ &= (f; g) +_p (\star_{X,Z}) && (3)\\ &= p\cdot(f; g) && (\text{def of } p\cdot(-)) \end{aligned}$$

7. 由 PCA 的定律可轻易推出。

$$\begin{aligned} p\cdot(q\cdot f) &= (f +_q \star) +_p \star && \text{(def. of } p\cdot(-)) \\ &= f +_{pq} (\star +_{\frac{p\cdot(1-q)}{1-pq}} \star) && (1) \\ &= f +_{pq} \star && (1) \\ &= pq\cdot f && \text{(def. of } p\cdot(-)) \end{aligned}$$

8. 由归纳法可得。$n = 0$ 的情形由 PCA 的定律得出：$q\cdot\star = \star +_q \star = \star$。对于$n+1$，考虑

$$\begin{aligned} q\cdot\sum_{i=1}^{n+1} p_i\cdot f_i &= q\cdot(f_1 +_{p_1} \sum_{j=1}^{n} q_j\cdot f_j) && \text{(Def. of } \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} p_i\cdot f_i \text{ in (2))} \\ &= q\cdot f_1 +_{p_1} \sum_{j=1}^{n} qq_j\cdot f_j && \text{(PCA laws + Ind. Hp.)} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} qp_i\cdot f_i && \text{(Def. of } \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} p_i\cdot f_i \text{ in (2))} \end{aligned}$$

引理 8。 在凸双积范畴中，$\overset{|}{\circ}$ 和$_p\triangleleft$ 构成自然变换，即 $f;\overset{|}{\circ}_Y = \overset{|}{\circ}_X$ 以及 $f;{}^p\triangleleft_Y = {}_p\triangleleft_X;(f\oplus f)$，对所有 $f: X\to Y$ 均成立。

证明。 等式$f;\overset{|}{\circ}_Y = \overset{|}{\circ}_X$ 对于$f: X\to Y$，由 0 是终对象这一事实可得。等式

$$f;{}^p\triangleleft_Y = {}^p\triangleleft_X;(f\oplus f)$$

由凸积的泛性质可得。事实上，注意到

$$\begin{aligned} {}^p\triangleleft_X;(f\oplus f);\pi_1 &= {}^p\triangleleft_X;(f\oplus f);(id_Y\oplus\overset{|}{\circ}_Y);\rho_X && \text{(Lemma 7.2)} \\ &= {}^p\triangleleft_X;(f\oplus(f;\overset{|}{\circ}_Y));\rho_X && \text{(Symmetric Monoidal Category)} \\ &= {}_p\triangleleft_X;(f\oplus\overset{|}{\circ}_X);\rho_X && \text{(Naturality of } \overset{|}{\circ}_X) \\ &= p\cdot f && \text{(Lemma 7.4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^p\triangleleft_X;(f\oplus f);\pi_2 &= {}^p\triangleleft_X;(f\oplus f);(\overset{|}{\circ}_Y\oplus id_Y);\lambda_X && \text{(Lemma 7.3)} \\ &= {}^p\triangleleft_X;((f;\overset{|}{\circ}_Y)\oplus f);\lambda_X && \text{(Symmetric Monoidal Category)} \\ &= {}^p\triangleleft_X;(\overset{|}{\circ}_X\oplus f);\lambda_X && \text{(Naturality of } \overset{|}{\circ}_X) \\ &= (1-p)\cdot f && \text{(Lemma 7.5)} \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} f;{}^p\triangleleft_Y;\pi_1 &= f;\langle id_X, id_X\rangle_{p,(1-p)};\pi_1 && \text{(def. of } {}^p\triangleleft) \\ &= f;(p\cdot id_X) && \text{(convex product)} \\ &= p\cdot(f;id_X) && \text{(Lemma 7.6)} \\ &= p\cdot f && \text{(Category)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f;{}^{p}\!\lhd_Y;\pi_2 &= f;\langle id_X, id_X\rangle_{p,(1-p)};\pi_2 && \text{(def. of } {}^{p}\!\lhd) \\
&= f;((1-p)\cdot id_X) && \text{(convex product)} \\
&= (1-p)\cdot(f;id_X) && \text{(Lemma 7.6)} \\
&= (1-p)\cdot f && \text{(Category)}
\end{aligned}
$$

引理 9. 在凸双积范畴中，图 7 中的相干公理成立。

证明。 (Coh2)、(Coh3) 和 (Coh4) 由 0 既是始对象又是终对象这一事实得出。
(Coh1) 则由自然性和余积的泛性质得出。

令 $s \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{X,X,Y\oplus Y};(id^X \oplus \alpha^{-}_{X,Y,Y});(id_X \oplus(\sigma^{\oplus}{}_{X,Y}\oplus id_Y));(idX \oplus \alpha_{Y,X,Y});\alpha^{-}_{X,Y,X\oplus Y}$. 令

$$\iota_1^{(X\oplus X)\oplus(Y\oplus Y)}: X\oplus X \to (X\oplus X)\oplus(Y\oplus Y) \text{ and } \iota_2^{(X\oplus X)\oplus(Y\oplus Y)}: Y\oplus Y \to (X\oplus X)\oplus(Y\oplus Y)$$

为余积注入。利用余积所诱导的结构同构的定义，可以很容易地验证

$$\iota_1^{(X\oplus X)\oplus(Y\oplus Y)};s = \iota_1\oplus\iota_1 \qquad \text{and} \qquad \iota_2^{(X\oplus X)\oplus(Y\oplus Y)};s = \iota_2\oplus\iota_2. \tag{19}$$

Then

$$
\begin{aligned}
\iota_1;({}^{p}\!\lhd_X \oplus {}^{p}\!\lhd_Y);s &= \iota_1;[{}^{p}\!\lhd_X;\iota_1^{(X\oplus X)\oplus(Y\oplus Y)}, {}^{p}\!\lhd_Y;\iota_2^{(X\oplus X)\oplus(Y\oplus Y)}];s && \text{(def. of } \oplus) \\
&= {}^{p}\!\lhd_X;\iota_1^{(X\oplus X)\oplus(Y\oplus Y)};s && \text{(coproduct)} \\
&= {}^{p}\!\lhd_X;(\iota_1\oplus\iota_1) && (19) \\
&= \iota_1;{}^{p}\!\lhd_{X\oplus Y} && \text{(Lemma 8)}
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\iota_2;({}^{p}\!\lhd_X \oplus {}^{p}\!\lhd_Y);s &= \iota_2;[{}^{p}\!\lhd_X;\iota_1^{(X\oplus X)\oplus(Y\oplus Y)}, {}^{p}\!\lhd_Y;\iota_2^{(X\oplus X)\oplus(Y\oplus Y)}];s && \text{(def. of } \oplus) \\
&= {}^{p}\!\lhd_Y;\iota_2^{(X\oplus X)\oplus(Y\oplus Y)};s && \text{(coproduct)} \\
&= {}^{p}\!\lhd_X;(\iota_2\oplus\iota_2) && (19) \\
&= \iota_2;{}^{p}\!\lhd_{X\oplus Y} && \text{(Lemma 8)}
\end{aligned}
$$

因此，余积的泛性质蕴含 ${}^{p}\!\lhd_{X\oplus Y} = {}^{p}\!\lhd_X \oplus {}^{p}\!\lhd_Y;s$。

引理 10。 在凸双积范畴中，以下结论成立：

1. $p\cdot {}^{q}\!\lhd_X = \langle id_X,\ idx\rangle_{pq,\ p(1-q)}$。 *2.* ${}^{p}\!\lhd_X;$
$(id_X \oplus q\cdot id_X) = \langle id_X,\ idx\rangle_{p,\ (1-p)q}$

证明。 我们下面逐项进行证明。

1. 根据 $\langle id_X$、$idx\rangle_{pq,\ p(1-q)}$ 以及以下两个推导的唯一性。

$$
\begin{aligned}
(p\cdot {}^{q}\!\lhd_X);\pi_1 &= p\cdot({}^{q}\!\lhd_X;\pi_1) && \text{(Lemma 7.4)} \\
&= p\cdot(\langle id_X, id_X\rangle_{q,1-q};\pi_1) && \text{(def. of } {}^{q}\!\lhd) \\
&= p\cdot(q\cdot id_X) && \text{(convex product)} \\
&= (pq)\cdot id_X && (7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(p \cdot {}^{q}\triangleleft_X);\pi_2 &= p \cdot ({}^{q}\triangleleft_X;\pi_2) && \text{（引理 7.4）}\\
&= p \cdot (\langle id_X, id_X\rangle_{q,1-q};\pi_2) && \text{(def. of } {}^{q}\triangleleft)\\
&= p \cdot ((1-q)\cdot id_X) && \text{(convex product)}\\
&= (p(1-q))\cdot id_X && (7)
\end{aligned}
$$

2. 根据 $\langle id_X$、$idx\rangle_{p,(1-p)q}$ 的唯一性以及以下两个推导。

$$
\begin{aligned}
{}^{p}\triangleleft_X;(id_X \oplus q\cdot id_X);\pi_1 &= {}^{p}\triangleleft_X;(id_X \oplus q\cdot id_X);(id_X \oplus \curlyvee_X);\rho_X && \text{(Lemma 7.2)}\\
&= {}^{p}\triangleleft_X;(id_X \oplus (q\cdot id_X;\curlyvee_X));\rho_X && \text{(Symmetric Monoidal Category)}\\
&= {}^{p}\triangleleft_X;(id_X \oplus \curlyvee_X);\rho_X && \text{(Naturality of } \curlyvee)\\
&= p\cdot id_X && \text{(Lemma 7.4)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{p}\triangleleft_X;\ (id_X \oplus q\ \cdot id_X);\ \pi_2 &= {}_{P}\triangleleft_X;\ (id_X \oplus q\ \cdot id_X);\ (\ \curlyvee_X \oplus id_X);\ \lambda_X && \text{(Lemma 7.3)}\\
&= {}_{P}\triangleleft_X;\ (\ \curlyvee_X \oplus (q\ \cdot id_X));\lambda_X && \text{（对称幺半范畴）}\\
&= (1-p)\cdot(q\cdot id_X) && \text{(Lemma 7.5)}\\
&= ((1-p)q)\cdot id_X && \text{(Lemma 7.7)}
\end{aligned}
$$

证明（命题 *1* 的证明）。我们已在引理 8 和 9 中证明了自然性和相干性。下面证明图 6 中的公理。

图 6 中的 (PCA1) 由凸积的泛性质得出。事实上，注意到

$$
\begin{aligned}
{}^{p}\triangleleft_X;({}^{q}\triangleleft_X \oplus id_X);\pi_1 &= {}^{p}\triangleleft_X;({}^{q}\triangleleft_X \oplus id_X);(id_{X\oplus X} \oplus \curlyvee_X);\rho_{X\oplus X} && \text{(Lemma 7.2)}\\
&= {}^{p}\triangleleft_X;({}^{q}\triangleleft_X \oplus \curlyvee_X);\rho_{X\oplus X} && \text{(Symmetric Monoidal Category)}\\
&= p\cdot {}^{q}\triangleleft && \text{(Lemma 7.4)}\\
&= \langle id_X, id_X\rangle_{pq,\,p(1-q)} && \text{(Lemma 10)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{p}\triangleleft_X;({}^{q}\triangleleft_X \oplus id_X);\pi_2 &= {}^{p}\triangleleft_X;({}^{q}\triangleleft_X \oplus id_X);(\curlyvee_{X\oplus X} \oplus id_X);\lambda_X && \text{(Lemma 7.3)}\\
&= {}_{\text{段落}}\triangleleft_X;\ (\ ({}^{q}\triangleleft_X;\ (\ \curlyvee_X \oplus \curlyvee_X))\ \oplus {}_{\text{标识符}X});\lambda_X && \text{（对称幺半范畴）}\\
&= {}^{p}\triangleleft_X;(\curlyvee_X \oplus id_X);\lambda_X && \text{(Lemma 8)}\\
&= (1-p)\cdot id_X && \text{(Lemma 7.5)}
\end{aligned}
$$

类似地，固定 $\tilde{p} \overset{\text{def}}{=} pq$ 和 $\tilde{q} \overset{\text{def}}{=} \frac{p(1-q)}{1-pq}$，可得

$$
\begin{aligned}
\tilde{p}\triangleleft; (id_X \oplus \tilde{q}\triangleleft); \alpha^{-}_{X,X,X}; \pi_1 &= \tilde{p}\triangleleft; (id_X \oplus \tilde{q}\triangleleft); \alpha^{-}_{X,X,X}; (id_{X\oplus X} \oplus \curlyvee_X); \rho_{X\oplus X} && \text{(Lemma 7.2)}\\
&= \tilde{p}\triangleleft; (id_X \oplus \tilde{q}\triangleleft); (id_X \oplus (id_X \oplus \curlyvee_X)); \rho_X && \text{(Symmetric Monoidal Category)}\\
&= \tilde{p}\triangleleft; (\, id_X \oplus (\tilde{q}\triangleleft; (id_X \oplus \curlyvee_X))\,); \rho_X && \text{(Symmetric Monoidal Category)}\\
&= \tilde{p}\triangleleft; (\, id_X \oplus \tilde{q} \cdot id_X\,) && \text{(Lemma 7.4)}\\
&= \langle id_X, id_X\rangle_{\tilde{p},(1-\tilde{p})\tilde{q}} && \text{(Lemma 10)}\\
&= \langle id_X, id_X\rangle_{pq,p(1-q)} && \text{(def of } \tilde{p} \text{ and } \tilde{q})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{p}\triangleleft; (id_X \oplus \tilde{q}\triangleleft); \alpha^{-}_{X,X,X}; \pi_2 &= \tilde{p}\triangleleft; (id_X \oplus \tilde{q}\triangleleft); \alpha^{-}_{X,X,X}; (\curlyvee_{X\oplus X} \oplus id_X); \lambda_X && \text{(Lemma 7.3)}\\
&= \tilde{p}\triangleleft; (id_X \oplus \tilde{q}\triangleleft); \alpha^{-}_{X,X,X}; ((\curlyvee_X \oplus \curlyvee_X) \oplus id_X); \lambda_X && \text{(Lemma 9)}\\
&= \tilde{p}\triangleleft; (\curlyvee_X \oplus id_X); \lambda_X; \tilde{q}\triangleleft_X; (\curlyvee_X \oplus id_X); \lambda_X && \text{(Symmetric Monoidal Category)}\\
&= \tilde{p}\triangleleft; (\curlyvee_X \oplus id_X); \lambda_X; (1-\tilde{q}) \cdot id_X && \text{(Lemma 7.5)}\\
&= \tilde{p}\triangleleft; (\curlyvee_X \oplus ((1-\tilde{q}) \cdot id_X)); \lambda_X && \text{(S对称幺半范畴 id 1 C)}\\
&= (1-\tilde{p}) \cdot ((1-\tilde{q}) \cdot id_X) && \text{(Lemma 7.5)}\\
&= (1-\tilde{p})(1-\tilde{q}) \cdot id_X && \text{(Lemma 7.7)}\\
&= (1-p) \cdot id_X && \text{(def. } \tilde{p} \text{ and } \tilde{q})
\end{aligned}
$$

因此，$\tilde{p}\triangleleft; (\tilde{q}\triangleleft \oplus id_X) = p\triangleleft; id_X \oplus q\triangleleft; \alpha^{-}_{X,X,X}$。

图 6 中的 (PCA2) 由 PCA-富化的相干性（即性质 (6)）推出：

$$
\begin{aligned}
p\triangleleft_X; \triangleright_X &= p\triangleleft_X; (id_X \oplus id_X)\triangleright_X\\
&= id_X +_p id_X && (6)\\
&= id_X && (1)
\end{aligned}
$$

图 6 中的 (PCA3) 由凸积的泛性质推出。事实上，注意到

$$
\begin{aligned}
p\triangleleft_X; \sigma_{X,X}; \pi_1 &= p\triangleleft_X; \sigma_{X,X}; (id_X \oplus \curlyvee_X); \rho_X && \text{(Lemma 7.2)}\\
&= p\triangleleft_X; (\curlyvee_X \oplus id_X); \lambda_X && \text{（对称幺半范畴）}\\
&= (1-p) \cdot id_X && \text{(Lemma 7.5)}
\end{aligned}
$$

类似地，对于 π_2，我们有 $p\triangleleft_X; \sigma_{X,X}; \pi_2 = p \cdot id_X$。因此，凸积的泛性质意味着 $p\triangleleft_X; \sigma_{X,X} = {}^{1-}p\triangleleft_X$。

命题 9. 设 $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ 是凸双积范畴之间的一个函子。若 F 保持有限余积，则 F 保持凸二元积。

证明。保持有限余积等价于保持二元余积和始对象。因此，假设 $\mathrm{F(X)}\ \mathrm{F}(\iota_1)\to \mathrm{F(X\oplus Y)}\ \mathrm{F}(\iota_2)\leftarrow$ 是 F(X) 和 F(Y) 的余积，这等价于要求态射 $[\mathrm{F}(\iota_1), \mathrm{F}(\iota_2)]\colon \mathrm{F(X)} \oplus \mathrm{F(Y)} \to \mathrm{F(X} \oplus \mathrm{Y)}$ 是同构（记其逆为 k）。并且还假设 $\mathrm{F}(0_{\mathbf{C}})$ 在 D 中是始对象（因此 $!_{F(0_{\mathbf{C}}}$是同构）。现在注意到

$$\begin{aligned}
F(\pi_1^{X\oplus Y}) &= F(id_X \oplus \text{¡}_Y; \rho_X) && \text{(Lemma 7.2)}\\
&= F(id_X \oplus \text{¡}_Y); F([id_X, !_X]) && \text{(def. } \rho\text{)}\\
&= F([id_X, \text{¡}_Y; !_X]) && \text{(Coproducts)}\\
&= k; [id_{F(X)}, F(\text{¡}_Y; !_X)] && \text{(coproducts and } k \text{ iso)}\\
&= k; (id_{F(X)} \oplus \text{¡}_{F(Y)}); [id_{F(X)}, !_{F(X)}] && (F(0_{\mathbf{C}}) \cong 0_{\mathbf{D}})\\
&= k; \pi_1^{F(X)\oplus F(Y)} && \text{(def } \rho\text{)}
\end{aligned}$$

类似地，$\mathrm{F}(\pi_2^{X\oplus Y}) = \mathrm{k};\ \pi_2^{F(X)\oplus F(Y)}$。现在我们可以证明，带有投影 $\mathrm{F}(\pi_1^{X\oplus Y})$ 和 $\mathrm{F}(\pi_2^{X\oplus Y})$ 的 $\mathrm{F(X} \oplus \mathrm{Y)}$ 是 F(X) 和 F(Y) 的凸二元积。设 $\mathrm{f} : \mathrm{A} \to \mathrm{F(X)}$，$\mathrm{g}\colon \mathrm{A} \to \mathrm{F(Y)}$，且 $\mathrm{p} \in (0, 1)$，并取态射 $\langle \mathrm{f}, \mathrm{g}\rangle_{p,1-p};\ [\mathrm{F}(\iota_1), \mathrm{F}(\iota_2)]\colon \mathrm{A} \to \mathrm{F(X} \oplus \mathrm{Y)}$，其中 $\langle \mathrm{f}, \mathrm{g}\rangle_{p,1-p} : \mathrm{A} \to \mathrm{F(X)} \oplus \mathrm{F(Y)}$ 是由 D 中的凸二元积诱导的唯一态射。现在，由于 $\mathrm{F}(\pi_1^{X\oplus Y}) = \mathrm{k}; \pi_1^{F(X\oplus F(Y))}$，可得

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle_{p,1-p}; [F(\iota_1), F(\iota_2)]; F(\pi_1^{X\oplus Y}) &= \langle f, g\rangle_{p,1-p}; [F(\iota_1), F(\iota_2)]; k; \pi_1^{F(X\oplus F(Y))}\\
&= \langle f, g\rangle_{p,1-p}; \pi_1^{F(X)\oplus F(Y)} && (k \text{ inverse})\\
&= p \cdot f && \text{(convex products)}
\end{aligned}$$

类似地，$\langle \mathrm{f}, \mathrm{g}\rangle_{p,1-p};\ [\mathrm{F}(\iota_1), \mathrm{F}(\iota_2)];\ \mathrm{F}(\pi_2^{X\oplus Y}) = (1 - \mathrm{p}) \cdot \mathrm{g}$。关于唯一性，若 $\mathrm{h} : \mathrm{A} \to \mathrm{F(X} \oplus \mathrm{Y)}$ 满足 $\mathrm{h};\ \mathrm{F}(\pi_1^{X\oplus Y}) = \mathrm{p} \cdot \mathrm{f}$ 且 $\mathrm{h};\ \mathrm{F}(\pi_2^{X\oplus Y}) = (1 - \mathrm{p}) \cdot \mathrm{g}$，则 $\mathrm{h};\ \mathrm{k} = \langle \mathrm{f}, \mathrm{g}\rangle_{p,1-p}$。与 $[\mathrm{F}(\iota_1), \mathrm{F}(\iota_2)]$ 复合后，得到 $\mathrm{h} = \langle \mathrm{f}, \mathrm{g}\rangle_{p,1-p};\ [\mathrm{F}(\iota_1), \mathrm{F}(\iota_2)]$。

证明（命题 *2* 的证明）。根据 Fox 定理，我们知道每个有限余积范畴 $\mathbf{C}$（因此任何凸双积范畴）都对应于一个幺半范畴 $(\mathbf{C}, \oplus_{\mathbf{C}}, 0_{\mathbf{C}})$，其中每个对象 X 都配备了一个相干自然幺半结构 $(X, \triangleright_X, !_X)$。此外，有限余积范畴之间的函子 $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ 保持有限余积，当且仅当将其视为幺半函子 $F\colon (\mathbf{C}, \oplus_{\mathbf{C}}, 0_{\mathbf{C}}) \to (\mathbf{D}, \oplus_{\mathbf{D}}, 0_{\mathbf{D}})$ 时，它是强幺半的并且保持幺半群

$$\psi_{X,X}; F(\triangleright_X) = \triangleright_{F(X)} \qquad \psi_0; F(!_X) = !_{F(X)}$$

其中 $\psi\colon \oplus_{\mathbf{C}} \circ (F \times F) \xRightarrow{\cong} F \circ \oplus_{\mathbf{D}}$ 以及 $\psi_0\colon 0_{\mathbf{D}} \xrightarrow{\cong} F(0_{\mathbf{C}})$ 由强幺半结构给出。对于任意凸双积范畴，命题 1 表明，每个对象 X 都具有自然且相容的 co-pca 结构（X，$^{p}\triangleleft_X$，¡_X）。在此情况下，在每个对象都具有相容的自然幺半群和 co-pca 结构的幺半范畴之间，保持幺半群的强幺半函子也保持 ψ。

对象也具有相容的自然幺半群和 co-pca 结构，并且还保持$\natural_X$。事实上，

$$\begin{aligned}\psi_0^{-1} &= \psi_0^{-1};\natural_0 && \text{(Coh3 in Figure 7)}\\ &= \natural_{F(0)} && \text{(Nat. co-pca1)}\end{aligned}$$

因此，$\natural_X$ 得以保留：$F(\natural_X);\psi_0^{-1} = F(\natural_X);\natural_{F(0)} = \natural_{F(X)}$。

此外，注意到凸双积范畴$\mathbf{C}$ 对应于幺半范畴$(\mathbf{C}, \oplus_{\mathbf{C}}, 0_{\mathbf{C}})$，其中每个对象都配备了相容且自然的幺半结构和余 PCA 结构；此外，对于给定的$f: X \to A$ 和$g: X \to B$，对于任意$h: X \to A \oplus B$，

$$\begin{cases} h;(id_A \oplus \natural_B) = {}^{p}\!\lhd_X;(f \oplus \natural_B) \\ h;(\natural_A \oplus id_B) = {}^{p}\!\lhd_X;(\natural_A \oplus g) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad h = {}^{p}\!\lhd_X;(f \oplus g) \tag{20}$$

因为$\mathbf{C}$ 具有凸二元积。现在，若F 是 PCA-富集的，则

$$\begin{aligned} F({}^{p}\!\lhd_X);\psi_{X,X}^{-1};(id_{F(X)} \oplus \natural_{F(X)}) &= F({}^{p}\!\lhd_X);\psi_{X,X}^{-1};(id_{F(X)} \oplus \natural_{F(X)});\rho_{F(X)};\rho_{F(X)}^{-1} \\ &= F({}^{p}\!\lhd_X);\psi_{X,X}^{-1};(id_{F(X)} \oplus \natural_{F(X)});(id_{F(X)} \oplus \overset{\circ}{\natural}_{F(X)});\rhd_{F(X)};\rho_{F(X)}^{-1} \\ &\qquad \text{(Def. } \rho\text{)} \\ &= F({}^{p}\!\lhd_X);F(id_X \oplus (\natural_X;\overset{\circ}{\natural}_X));\psi_{X,X}^{-1};\rhd_{F(X)};\rho_{F(X)}^{-1} \quad \text{(Nat. } \psi\text{)} \\ &= F({}^{p}\!\lhd_X);F(id_X \oplus (\natural_X;\overset{\circ}{\natural}_X));F(\rhd_X);\rho_{F(X)}^{-1} \\ &\qquad (\psi_{X,X};F(\rhd_X) = \rhd_{F(X)}) \\ &= F(p \cdot id_X);\rho_{F(X)}^{-1} \qquad \text{(Eq. 6)} \\ &= p \cdot id_{F(X)};\rho_{F(X)}^{-1} \qquad \text{(PCA-enrichment)} \\ &= {}^{p}\!\lhd_{F(X)};(id_{F(X)} \oplus \natural_{F(X)});\rho_{F(X)};\rho_{F(X)}^{-1} \\ &\qquad \text{(Eq. 6 + Def. } \rho \text{ + Lemma 7.1)} \\ &= {}^{p}\!\lhd_{F(X)};(id_{F(X)} \oplus \natural_{F(X)}) \end{aligned}$$

类似地，可以证明$F({}^{p}\!\lhd_X);\psi_{X,X}^{-1};(\natural_{F(X)} \oplus id_{F(X)}) = {}^{p}\!\lhd_{F(X)};(\natural_{F(X)} \oplus id_{F(X)})$。因此，由性质（20）可得$F({}^{p}\!\lhd_X);\psi_{X,X}^{-1} = {}^{p}\!\lhd_{F(X)}$。反过来，若$F: (\mathbf{C}, \oplus_{\mathbf{C}}, 0_{\mathbf{C}}) \to (\mathbf{D}, \oplus_{\mathbf{D}}, 0_{\mathbf{D}})$也保留对角映射${}^{p}\!\lhd$，则它是 PCA-富集的，因为

$$\begin{aligned} F(f +_p g) &= F({}^{p}\!\lhd_X;(f \oplus g);\rhd_X) && \text{(Eq. 6)} \\ &= {}^{p}\!\lhd_{F(X)};\psi_{X,X};F(f \oplus g;\rhd_X) \\ &= {}^{p}\!\lhd_{F(X)};F(f) \oplus F(g);\rhd_{F(X)} \\ &= F(f) +_p F(g) && \text{(Eq. 6)} \end{aligned}$$

同样，保持$\natural_X$ 和$\overset{\circ}{\natural}_Y$ 不变意味着 $F(\star_{X,\,Y}) = \star_{F(X),\,F(Y)}$。

推论4。设 F：$\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ 是凸双积范畴之间的函子。如果 F 保持有限余积，则 F 保持 n元凸积。

证明。 这由命题 9 和引理 2 得出，后者说明了如何从二元凸积构造 n元凸积。

命题 10. 设 F: **C** $\to$ **D** 是凸双积范畴之间保持有限余积的函子，则 F 是 *PCA*-富集的，当且仅当 F 对每个 $X \in$ **C**都保持$p \lhd_X$ 。

证明。 沿用命题 9 的记号，若F 是 PCA-富集的，则

$$\begin{aligned} F(\langle id_X, id_X\rangle_{p,1-p}); k; \pi_1^{F(X)\oplus F(Y)} &= F(\langle id_X, id_X\rangle_{p,1-p}); F(\pi_1^{X\oplus Y}) && \text{(Prop. 9)} \\ &= F(p \cdot id_X) = p \cdot id_{F(X)} && \text{(PCA-enrichment)} \end{aligned}$$

并且类似地$F(\langle id,id\rangle_{p,1-p})$; k; $\pi_1^{F(X)\oplus F(Y)} = (1-p)\cdot id_{F(X)}$。因此，**D** 中凸积的泛性质蕴含$F(\langle id_X,idx\rangle_{p,1-p})$; $k = \langle id_{F(X)},id_{F(X)}\rangle_{p,1-p}$。

反之，若$F(\langle id_X, idx\rangle_{p,1-p})$; $k = \langle id_{F(X)},id_{F(X)}\rangle_{p,1-p}$，则对每一对行$f$、$g \in$ **C**([X,Y])

$$\begin{aligned} F(f +_p g) =& F(\langle id_X, id_X\rangle_{p,1-p}; (f \oplus g); \triangleright_Y) && \text{(Eq. 6)} \\ &= F(\langle id_X, id_X\rangle_{p,1-p}); k; (F(f) \oplus F(g)); \triangleright_{F(Y)} && \text{(coproducts preserv.)} \\ &= \langle id_{F(X)}, id_{F(X)}\rangle_{p,1-p}; (F(f) \oplus F(g)); \triangleright_{F(Y)} \\ &= F(f) +_p F(g). && \text{(Eq. 6)} \end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned} F(\star_{X,Y}) &= F(\downarrow_X; \uparrow_Y) && \text{(Lemma 7.1)} \\ &= F(\downarrow_X); F(\uparrow_Y) \\ &= \downarrow_{F(X)}; \uparrow_{F(Y)} && (0_{\mathbf{D}} \text{ terminal} + F(0_{\mathbf{C}}) \cong 0_{\mathbf{D}}) \\ &= \star_{F(X),F(Y)}. && \text{(Lemma 7.1)} \end{aligned}$$

第 4 节的附录 E

我们将命题 3 的证明分解为若干中间结果。

引理 11. 设 **C** 为一个 *PCA* 富集范畴。**StMat**(**C**) 是一个有限余积范畴。

证明。 我们借助 Fox 定理 [16]来证明这一结果。回顾 (9) 中 $\oplus$和 σ 的定义。验证 (**StMat**(**C**), $\oplus$,0) 是一个严格对称幺半范畴，需要进行若干繁琐的矩阵乘法。我们通过说明，对于每个对象 P, ($\triangleright_P$, $\uparrow_P$) 按照 (10) 中的定义，是一个自然且相容的余幺半群。

注意，根据（10）中的定义， $\triangleright_P$ 其中$P = \bigoplus_{k=1}^{n} U_k$ 是矩阵

$$\begin{pmatrix} 1\cdot id_{U_1} & \emptyset & \emptyset & 1\cdot id_{U_1} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \ddots & & \emptyset & \ddots & \\ & & \emptyset & & & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1\cdot id_{U_n} & \emptyset & \emptyset & 1\cdot id_{U_n} \end{pmatrix}$$

而 $\curlywedge_U$ 是唯一的 $(n+1)\times 0$ 矩阵。

表 1 中的公理可由矩阵乘法得出。例如，结合律公理 $\triangleright$-asis 可通过以下计算得到：

$$(id_P \oplus \triangleright_P);\triangleright_P = \begin{pmatrix} id_P & id_P & id_P \end{pmatrix} = (\triangleright_P \oplus id_P);\triangleright_P$$

自然性 $\triangleright$-nat 可由以下计算得到：

$$(M \oplus M);\triangleright_Q = \begin{pmatrix} M & M \end{pmatrix} = \triangleright_P; M$$

其中 $M\colon P \to Q$。最后，$\curlywedge$-nat 显然成立，因为一个 $m \times n$ 矩阵与一个 $n \times 0$ 空矩阵相乘，所得结果是一个空的 $m \times 0$ 矩阵。

综合以上观察，我们可以得出结论：**StMat(C)** 是一个严格对称幺半范畴，其中每个对象 U 都带有一个相干自然幺半结构 $(U, \triangleright_U, \curlywedge_U)$，因此，根据 Fox 定理，**StMat(C)** 是一个有限余积范畴。

引理 12. 设 **C** 是一个 *PCA* 富集范畴。**StMat**(**C**) 是 *PCA*-富集的。

证明。 在证明富化之前，回顾式（10）中的 $(\wp\triangleleft_P, \curlyvee_P)$ 结构是很方便的。对于 $P = \bigoplus_{k=1}^{n} U_k$，$p\triangleleft_P$ 是下图所示的（$2n \times n$）矩阵

$$\begin{pmatrix} p\cdot id_{U_1} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & & \\ & & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & p\cdot id_{U_n} \\ (1-\text{段落})\cdot \text{标识}_U & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & & \\ & & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & (1-p)\cdot id_{U_n} \end{pmatrix}$$

而 $\curlyvee_U$ 是空的 $0 \times (n+1)$矩阵。表 2 中的公理由矩阵乘法得出。例如，在$U \in \mathbf{C}$的情形下，结合律公理$p \triangleleft$-as（即$p\triangleleft_U; (\wp\triangleleft_U \oplus id_U) = \tilde{p}\triangleleft_U; (id_U \oplus \tilde{\wp}\triangleleft_U)$，其中 $\tilde{p} = pq$ 且 $\tilde{q} = p(1-q)\,1-pq$）由下列计算得出。

$$\wp\triangleleft_U; (\wp\triangleleft_U \oplus id_U) = \begin{pmatrix} q\cdot id_U & \emptyset \\ (1-q)\cdot id_U & \emptyset \\ \emptyset & 1\cdot id_U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p\cdot id_U \\ (1-p)\cdot id_U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pq\cdot id_U \\ p(1-q)\cdot id_U \\ (1-p)\cdot id_U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{p}\cdot id_U \\ \tilde{q}(1-\tilde{p})\cdot id_U \\ (1-\tilde{p})(1-\tilde{p})\cdot id_U \end{pmatrix}$$

这等于

$$\tilde{p}\triangleleft_U;(id_U\oplus\tilde{q}\triangleleft_U)=\begin{pmatrix}1\cdot id_U & \emptyset\\ \emptyset & \tilde{q}\cdot id_U\\ \emptyset & (1-\tilde{q})\cdot id_U\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{p}\cdot id_U\\ (1-\tilde{p})\cdot id_U\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{p}\cdot id_U\\ \tilde{q}(1-\tilde{p})\cdot id_U\\ (1-\tilde{p})(1-\tilde{p})\cdot id_U\end{pmatrix}$$

一般情形$P=\bigoplus^{n}_{k=1}U_k$也可类似地得到。公理$_p\triangleleft$-idem 显然成立，因为根据 PCA 公理 1，有$p\cdot id_{U_i}+(1-p)\cdot id_{U_i}=id_{U_i}$。公理$_p\triangleleft$-nat 的证明如下：对于$M\colon U\to V$

$$M;{}^{p}\triangleleft_V=\begin{pmatrix}p\cdot M\\ (1-p)\cdot M\end{pmatrix}M={}^{p}\triangleleft_U;M\oplus M$$

其中$p\cdot M$表示这样一个矩阵：其（j，i）项由$p\cdot M_{ji}$给出。最后，$\downarrow$-nat 显然成立，因为一个$m\times n$矩阵与$n\times 0$空矩阵相乘，所得为$m\times$空矩阵。因此，我们可以汇总上述观察，得出结论：每个对象$U\in$**StMat(C)** 都配备了一个余PCA结构（U，${}^{p}\triangleleft_U$，$\downarrow_U$），并满足表 2 中的公理。

富化：**StMat(C)** 中每个对象上的幺半群和余PCA结构如下诱导出一个 PCA-富化。对于任意一对对象P和Q以及态射M、M'：$P\to Q$，定义

$$M+_p M'={}^{p}\triangleleft_P;(M\oplus M');\triangleright_Q$$

矩阵乘法意味着

$$M+_p M'_{ji}=(p\cdot M_{ji}+(1-p)\cdot M'_{ji})=M_{ji}+_p M'_{ji}$$

而$\bigstar_{P,\ Q}$由$\downarrow_P$给出；$\uparrow_Q$它是一个$(m\times n)$矩阵，其$(j,\ i)$-项由$\bigstar_{A_i,\ B_j}$给出。

式 (3) 中的 PCA-富化方程是通过相容且自然的幺半群和余 PCA 结构的公理得到的。例如，式 (3) 中的第一个方程$N;(M+_pM')=(N;M+_pN;M')$，对于$N\colon P'\to P$，可如下推导：

$$\begin{aligned}N;(M+_p M') &= N;({}^{p}\triangleleft_P;(M\oplus M');\triangleright_Q)\\ &= {}^{p}\triangleleft_{P'};(N\oplus N);(M\oplus M');\triangleright_Q && \text{(axiom }{}^{p}\triangleleft\text{-nat)}\\ &= {}^{p}\triangleleft_{P'};(N;M\oplus N;M');\triangleright_Q && \text{(monoidal structure)}\\ &= (N;M)+_p(N;M')\end{aligned}$$

引理13。 设**C**是一个 *PCA*-富集范畴。**StMat**(**C**)具有凸二元积。

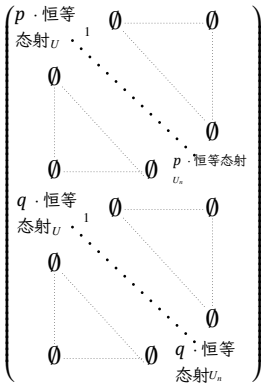
证明。设$M_1\colon P\to Q_1$和$M_2\colon P\to Q_2$是 StMat(C) 中的两个态射，且$p,q\in[0,1]$满足$p+q\le 1$，其中$P=\bigoplus^{n}_{k=1}U_k$，$Q_1=\bigoplus^{m_1}_{k=1}V_k$，且$Q_2=\bigoplus^{m_2}_{k=1}V'_k$。现在考虑$Q_1\oplus Q_2$，其中$\pi_1\colon Q_1\oplus Q_2\to Q_1$和$\pi_2\colon Q_1\oplus Q_2\to Q_2$由以下给出

$(m_1 \times (m_1 + m_2))$ 和 $(m_2 \times (m_1 + m_2))$ 矩阵

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \cdot id_{V_1} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & & & \emptyset & & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 \cdot id_{V_{m_1}} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \cdot id_{V_1'} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & & \emptyset & & & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \cdot id_{V_{m_2}''} \end{pmatrix}$$

分别对应于（恒等态射$_{Q_1} \oplus$!$_{Q_2}$）和（!$_{Q_1} \oplus$恒等态射$_{Q_2}$）。现在，由（$2n \times n$）矩阵给出的态射 $p \triangleleft_P$ with$p = p,q$



矩阵乘法表明

$$p \triangleleft_P ; (M_1 \oplus M_2); \pi_1 = p \cdot M_1 \qquad p \triangleleft_P ; (M_1 \oplus M_2); \pi_2 = q \cdot M_2$$

现在，若H: $P \to Q_1 \oplus Q_2$是**StMat(C)**中的一个态射，且H; $\pi_1 = p \cdot M_1$和$H; \pi_2 = (1 - p) \cdot M_2$, ，那么

$$H_{ji} = p \cdot M_{ji}$$

对于每个$j = 1, \ldots, m_1$以及$i = 1, \ldots, n$以及

$$H_{ji} = q \cdot M'_{(j-m_1)i}$$

对于每个 j $= m_1 + 1$, ..., $m_1 + m_2$ 以及 i $= 1$, ..., n。因此，H $\equiv p \triangleleft_P$; ($M_1 \oplus M_2$)。注意，如果 p $= 1$（从而 q $= 0$），那么 p $\triangleleft_P$ 是 ι_1 def= (id$_{Q_1} \oplus$!$_{Q_2}$); 如果 p $= 0$（从而 q $= 1$），那么 p $\triangleleft_P$ 是 ι_2 def= (!$_{Q_1} \oplus$id$_{Q_2}$)。

证明（命题 *4* 的证明）。函子 **StMat(*F*)** 是严格幺半的，并且保持幺半群和 co-pca对象，因此根据命题 2，它是凸 biprod-范畴的一个态射。

证明（定理 *2* 的证明）。设 **C** 是一个 PCA 富集范畴，**D** 是一个凸双积范畴，并考虑一个 PCA 富集函子 $F : \mathbf{C} \to U(\mathbf{D})$。单位 $\eta : \mathbf{C} \to \mathbf{StMat(C)}$ 是对象上恒等的函子，它将态射 $f \in \mathbf{C}[U,V]$ 映射为一个 (1×1) 矩阵，其元素为 $1 \cdot f$。

函子 $\mathrm{F}^\sharp : \mathrm{StMat(C)} \to \mathrm{D}$ 将对象 $\bigoplus^n \mathrm{k}=1 \mathrm{U}_k$ 映射为 $\bigoplus^n \mathrm{k}=1 \mathrm{F}(\mathrm{U}_k)$，并将态射 $\mathrm{M} : \bigoplus^n \mathrm{k}=1 \mathrm{U}^k \to \bigoplus^m \mathrm{k}=1 \mathrm{V}_k$（它对应于一个元素为 $\mathrm{M}^{ji} = \mathrm{p}_{ji} \cdot \mathrm{f\,ji}$ 的矩阵）映射为 D 中如下构造得到的态射：我们先定义矩阵某一列的像，再注意到 M 是其各列的余配对，记作 $\mathrm{M}_{\bullet i}$，其中 $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}$，并将 $\mathrm{F}^\sharp(\mathrm{M})$ 定义为各列像的余配对。第 i 列 $\mathrm{M}_{\bullet i}$ 的解释定义为由 m 元凸积通过向量 $\mathrm{p} = (\mathrm{p}_{1i}, \ldots, \mathrm{p}_{mi})$ 及 D 中的态射 $\mathrm{F}(\mathrm{f}^{ji})$ 所诱导的态射；根据引理 2，该态射存在。$\mathrm{F}^\sharp$ 定义良好，因为对于 $\mathrm{M} \equiv \mathrm{M}'$，有 $\mathrm{M\,ji} = \mathrm{p\,ji} \cdot \mathrm{f\,ji} = \mathrm{p}'_{ji} \cdot \mathrm{f}\,'\mathrm{ji} = \mathrm{M}'_{ji}$。现在，对于 $\mathrm{k} = 1, \ldots \mathrm{m}$

$$
\begin{aligned}
F^\sharp(M'_{\bullet i}); \pi_k &= p'_{ki} \cdot F(f'_{ki}) && \text{（定义 } F^\sharp(M'_{\bullet i})\text{）} \\
&= F(p'_{ki} \cdot f'_{ki}) && (F \text{ PCA-enriched}) \\
&= F(p_{ki} \cdot f_{ki}) && (M \cong M') \\
&= p_{ki} \cdot F(f_{ki}) && (F \text{ PCA-enriched})
\end{aligned}
$$

并且，**D** 中的凸积的泛性质蕴含 $F^\sharp(M'_{\bullet i}) = F^\sharp(M_{\bullet i})$，因此，由**D**中余积的泛性质可得 $F^\sharp(M') = F^\sharp(M)$。此外，简单计算可知，对于每个对象 $U \in \mathbf{StMat(C)}$，$F^\sharp$ 保留幺半群和余 PCA 结构，即有：

- $F^\sharp(\not\rhd_U) = \not\rhd_{F(U)}$，且 $F^\sharp(\not\downarrow_U) = \not\downarrow_{F(U)}$；
- $F^\sharp(\not\triangleright_U) = \not\triangleright_{F(U)}$，且 $F^\sharp(\not\uparrow_U) = \not\uparrow_{F(U)}$；
- 对于每个 f: $U \to V$ 中的 f，$F^\sharp(1 \cdot f) = F(f)$。

因此，由命题 2 可知 $F^\sharp$ 是凸双积范畴的态射。它还是满足 η 的唯一态射；$F^\sharp = F$，因为任何其他满足 η 的态射 $G : \mathbf{StMat(C)} \to \mathbf{D}$，若有 $G = F$，则由命题 9 和 4 可知，它必须保留余积和凸积。因此，$F^\sharp = G$，因为 M 的每一列都是由 m 元凸积通过 $\boldsymbol{p} = (p_{1i}, \ldots, p_{mi})$ 以及固定 i 对应的态射 f^{ji} 所诱导的态射。

证明（命题 5 的证明）。回顾一下，根据定理 2 的证明中的记号，余单位 ϵ 由 $\mathrm{id}^\sharp \mathrm{C}$ 得到。满性源于这样的事实：按构造，C 中的每个态射 $\mathrm{f} : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ 都等于 $\epsilon(\eta(\mathrm{f}))$。通过观察可得忠实性：如果对于 StMat(U(C)) 中的两个矩阵 M、M′，$\epsilon(\mathrm{M}) = \epsilon(\mathrm{M}')$，其中 $\mathrm{M}' : \bigoplus^n \mathrm{k}=1 \mathrm{U}^k \to \bigoplus^m \mathrm{k}=1 \mathrm{V}_k$，且其元素满足 $\mathrm{M\,ji} = \mathrm{p\,ji} \cdot \mathrm{f}^{ji}$，$\mathrm{M}'_{ji} = \mathrm{p}'_{ji} \cdot \mathrm{f}\,'\mathrm{ji}$，那么 M 的各列经过 ϵ 的像所得到的余配对，等于 M′的各列经过 ϵ 的像所得到的余配对。C 中余积的泛性质随即确保，对于 M 和 M′ 的每个 i-列，分别记为 $\mathrm{M}_{\bullet i}$ 和 $\mathrm{M}'_{\bullet i}$，其中 $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}$，都有 $\epsilon(\mathrm{M}_{\bullet i}) =$

$\epsilon(M'_{\bullet i})$。现在，由于 $\epsilon(M_{\bullet i})$ 是通过 $f_{1i}, \ldots, f_{mi}$ 作用下的 m 元凸积所诱导的态射，其中 $p = (p_{1i}, \ldots, p_{mi})$；而 $\epsilon(M'_{\bullet i})$ 是通过 $f'_{1i}, \ldots, f'mi$ 作用下的 m 元凸积所诱导的态射，其中 $p' = (p'_{1i}, \ldots, p'_{mi})$，因此对于 $\epsilon(M_{\bullet i})$；$\pi j = p\,ji \cdot f^{ji} = p'_{ji} \cdot f'ji = \epsilon(M'_{\bullet i})\pi j$，其中 $j = 1, \ldots, m$。于是，$M\,ji \equiv M'_{ji}$，因此它们在 StMat(U(C)) 中相等。

F 第5节的附录

证明（定理 *3* 的证明）。由以下定义 $+_p$ 和 $\star$ （13）可立即得出**PCA** 满足公理$_p$ ◁-as、$_p$ ◁-idem 和$_p$ ◁-sym。由此可知**T(C)** 是以 **PCA** 为富化的范畴，这一点很容易通过利用$_p$ ◁、 ▷、 $\curlywedge$ 和 $\curlyvee$ 的自然性证明，参见例如 [2]。

由 $\curlyvee$ 和 $\curlywedge$的自然性立即可知，0 既是始对象也是终对象：公理（ $\curlywedge$-nat）和（$\curlyvee$-nat）。

由于根据图 1 中的公理，P **T(C)** 中的每个对象都配备了一个自然且相容的幺半群，因此由 [16], 可知， $\oplus$ 是一个带有余积注入的余积

$$\iota_1 \stackrel{\text{def}}{=} id_{P_1} \oplus \curlyvee_{P_2} : P_1 \to P_1 \oplus P_2 \quad \text{and} \quad \iota_2 \stackrel{\text{def}}{=} \curlyvee_{P_1} \oplus id_{P_2} : P_2 \to P_1 \oplus P_2.$$

回顾一下（例如参见 [35, 第 6 章。4]），t: $P_1 \to Q$和 s : $P_2 \to Q$的余配对定义为

$$[t, s] \stackrel{\text{def}}{=} (f \oplus g); \triangleright_Q$$

因此 $[id_Q, id_Q] = \triangleright_Q$。

我们的主要技术工作将在下文的命题 11 中说明，即证明 $\oplus$ 也是一个带有投影的凸积

$$\pi_1 \stackrel{\text{def}}{=} id_{P_1} \oplus \curlywedge_{P_2} : P_1 \oplus P_2 \to P_1 \quad \text{and} \quad \pi_2 \stackrel{\text{def}}{=} \curlywedge_{P_1} \oplus id_{P_2} : P_1 \oplus P_2 \to P_2.$$

而 t: $P \to Q_1$ 和 s : $P \to Q_2$ 的凸配对定义为

$$< t, s >_{1,0} \stackrel{\text{def}}{=} t \oplus \curlyvee_{Q_2} \qquad < t, s >_{0,1} \stackrel{\text{def}}{=} \curlyvee_{Q_1} \oplus s \qquad < t, s >_{p,1-p} \stackrel{\text{def}}{=} {}_p\triangleleft_P; (t \oplus s) \text{ for } p \in (0, 1)$$

正如我们稍后将说明的， $< t, s >_{p,q}$ 且 $p + q < 1$ 的情形可直接由上述情形推出。

在深入证明命题 11 之前，注意到定义 2 中的 (5) 可由上述 ι_i 和 π_1 的定义、公理 ($\curlywedge$-nat) 和 ($\curlyvee$-nat)（对于情形$i = j$），以及 (13) 中 $\star$ 的定义（对于情形 $i \neq j$）轻易推出。相反，定律 (6) 则由 $< f,g >_{p,1-p}$ 和 ▷ 的刻画以及 (13) 中 $+_p$ 的定义推出。

最后，要证明 $\langle t_1, \ldots t_n \rangle_p = p \triangleleft^n_U; \bigoplus^n i_{=1}\, t_i$，只需容易验证，对所有 i，($p \triangleleft^n_U$; $\bigoplus^n i_{=1}\, t_i$); $\pi_i = p_i \cdot t_i$，其中第 i 个投影 $\pi_i : \bigoplus^n j_{=1}\, U_j \to U_i$ 定义为 ($\circ \bigoplus^{i-1}_{=1} j\ U_J$) $\oplus$ $id_{U_i} \oplus (\circ \bigoplus^n j_{=i+1}\, U_J)$。

命题 11 的证明在很大程度上依赖于一个标准形结果（引理 21），以及 **T(C)** 上的富化具有可消去性这一事实；也就是说，若 $p \cdot t = p \cdot s$，则 t = s （引理 4）。本附录余下部分的结构如下：我们先介绍一些初步结果，然后介绍一些关于标准形的结果，接着讨论消去性，最后讨论凸积。

F.1 预备结果

下面汇集了若干我们将频繁用到的简单结果。

引理 14. 设$\mathsf{t}: P \to Q$ 是$\mathbf{T}(\mathbf{C})$ 中的一个态射。那么，对于所有 $p \in (0,1)$，$p \cdot \mathsf{t} = {}^{p}\!\lhd_{P}; (\mathsf{t} \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{P})$。

证明。

$$
\begin{aligned}
p \cdot \mathsf{t} &= p +_{p} \star_{P,Q} && \text{(def. of } p \cdot -\text{)} \\
&= {}^{p}\!\lhd_{P}; (\mathsf{t} \oplus \star_{P,Q}); \rhd_{Q} && (13) \\
&= {}^{p}\!\lhd_{P}; (\mathsf{t} \oplus (\overset{\downarrow}{\circ}_{P}; \overset{\uparrow}{\circ}_{Q})); \rhd_{Q} && (13) \\
&= {}^{p}\!\lhd_{P}; (\mathsf{t} \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{P}); (id_{Q} \oplus \overset{\uparrow}{\circ}_{Q}); \rhd_{Q} && \text{(Symmetric Monoidal Category)} \\
&= {}^{p}\!\lhd_{P}; (\mathsf{t} \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{P}); id_{Q} && (\rhd\text{-un}) \\
&= {}^{p}\!\lhd_{P}; (\mathsf{t} \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{P}) && \text{(Category)}
\end{aligned}
$$

引理 15. 设$\mathsf{s} = (\mathsf{s}_1 \oplus \mathsf{s}_2); \rhd$ 是$\mathbf{T}(\mathbf{C})$ 中的一个态射。那么 $r \cdot \mathsf{s} = (r \cdot \mathsf{s}_1 \oplus r \cdot \mathsf{s}_2); \rhd$。

证明。 假设 s 的类型为$P_1 \oplus P_2 \to Q$，并注意到

$$
\begin{aligned}
r \cdot \mathsf{s} &= {}^{r}\!\lhd_{P_1 \oplus P_2}; (\mathsf{s} \oplus \overset{\downarrow}{\circ}) && \text{(Lemma 14)} \\
&= ({}^{r}\!\lhd_{P_1} \oplus {}^{r}\!\lhd_{P_2}); (id_{P_1} \oplus \sigma_{P_1,P_2} \oplus id_{P_2}); (\mathsf{s} \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{P_1} \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{P_2}) && (\lhd\text{-coh}) \\
&= ({}^{r}\!\lhd_{P_1} \oplus {}^{r}\!\lhd_{P_2}); (id_{P_1} \oplus \sigma_{P_1,P_2} \oplus id_{P_2}); (((\mathsf{s}_1 \oplus \mathsf{s}_2); \rhd_{Q}) \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{P_1} \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{P_2}) && \text{(Hypothesis)} \\
&= ({}^{r}\!\lhd_{P_1} \oplus {}^{r}\!\lhd_{P_2}); (id_{P_1} \oplus \sigma_{P_1,P_2} \oplus id_{P_2}); (\mathsf{s}_1 \oplus \mathsf{s}_2 \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{P_1} \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{P_2}); \rhd_{Q} && \text{(Sym. Mon. Cat.)} \\
&= ({}^{r}\!\lhd_{P_1} \oplus {}^{r}\!\lhd_{P_2}); (\mathsf{s}_1 \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{P_1} \oplus \mathsf{s}_2 \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{P_2}); \rhd_{Q} && \text{(Symmetric Monoidal Category)} \\
&= ({}^{r}\!\lhd_{P_1}; (\mathsf{s}_1 \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{P_1})) \oplus ({}^{r}\!\lhd_{P_2}; (\mathsf{s}_2 \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{P_2})); \rhd_{Q} && \text{(Symmetric Monoidal Category)} \\
&= (r \cdot \mathsf{s}_1) \oplus (r \cdot \mathsf{s}_2); \rhd_{Q} && \text{(Lemma 14)}
\end{aligned}
$$

引理 16. 设 $\mathsf{t} = {}^{p}\!\lhd; (\mathsf{t}_1 \oplus \mathsf{t}_2)$ 是 $\mathbf{T}(\mathbf{C})$中的一个态射。则：

1. $\mathsf{t}; (id \oplus \overset{\downarrow}{\circ}) = p \cdot \mathsf{t}_1$; *2.* $\mathsf{t}; (\overset{\downarrow}{\circ} \oplus id) = (1-p) \cdot \mathsf{t}_2$;

3. 对所有 $r \in (0,1)$，$r \cdot \mathsf{t} = {}^{p}\!\lhd; (r \cdot \mathsf{t}_1 \oplus r \cdot \mathsf{t}_2)$。

证明。 由富化的定义，结论 1 和 2 立即可得。

下面证明 $\mathsf{t}_1 :: P \to Q_1$ 和 $\mathsf{t}_2 : P \to Q_2$ 的第 3 点。

$$
\begin{aligned}
r \cdot \mathsf{t} &= {}^{r}\!\lhd; (\mathsf{t} \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{Q_1 \oplus Q_2}) && \text{(Lemma 14)} \\
&= {}^{r}\!\lhd; ({}^{p}\!\lhd; (\mathsf{t}_1 \oplus \mathsf{t}_2) \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{Q_1 \oplus Q_2}) && \text{(Hypthesis)} \\
&= {}^{r}\!\lhd; (({}^{p}\!\lhd; (\mathsf{t}_1 \oplus \mathsf{t}_2)) \oplus ({}^{p}\!\lhd; (\overset{\downarrow}{\circ}_{Q_1} \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{Q_2}))) && (\overset{\downarrow}{\circ}\text{-coh} + {}^{p}\!\lhd\text{-idem}) \\
&= {}^{r}\!\lhd; ({}^{p}\!\lhd \oplus {}^{p}\!\lhd); ((\mathsf{t}_1 \oplus \mathsf{t}_2) \oplus (\overset{\downarrow}{\circ}_{Q_1} \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{Q_2})) && \text{(Symmetric Monoidal Categories)} \\
&= {}^{p}\!\lhd; ({}^{r}\!\lhd \oplus {}^{r}\!\lhd); (id \oplus \sigma \oplus id); ((\mathsf{t}_1 \oplus \mathsf{t}_2) \oplus (\overset{\downarrow}{\circ}_{Q_1} \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{Q_2})) && ({}^{p}\!\lhd\text{-nat} + \text{Sym. Mon. Cat.}) \\
&= {}^{p}\!\lhd; ({}^{r}\!\lhd \oplus {}^{r}\!\lhd); ((\mathsf{t}_1 \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{Q_1}) \oplus (\mathsf{t}_2 \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{Q_2})) && \text{(Symmetric Monoidal Categories)} \\
&= {}^{p}\!\lhd; (({}^{r}\!\lhd; (\mathsf{t}_1 \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{Q_1})) \oplus ({}^{r}\!\lhd; (\mathsf{t}_2 \oplus \overset{\downarrow}{\circ}_{Q_2}))) && \text{(Symmetric Monoidal Categories)} \\
&= {}^{p}\!\lhd; (r \cdot \mathsf{t}_1 \oplus r \cdot \mathsf{t}_2) && \text{(Lemma 14)}
\end{aligned}
$$

引理 17. 设 $t = {}_p\triangleleft;(t_1 \oplus t_2)$ 和 $s = {}_q\triangleleft;(s_1 \oplus s_2)$。若 $t_1 = {}_{qp} \cdot s_1$ 且 $\_ {}^{1-}{}_{p\,1-q} \cdot t_2 = s_2$，则 $t = s$。

证明。

$$
\begin{aligned}
t &= {}_p\triangleleft;(\frac{q}{p} \cdot s_1 \oplus t_2) && \text{(Lemma 16.1)}\\
&= {}_p\triangleleft;({}_{\frac{q}{p}}\triangleleft \oplus id);(s_1 \oplus \overset{\downarrow}{\circ} \oplus t_2) && \text{(Lemma 14)}\\
&= {}_q\triangleleft;(id \oplus {}_{\frac{p-q}{1-q}}\triangleleft);(s_1 \oplus \overset{\downarrow}{\circ} \oplus t_2) && ({}_p\triangleleft\text{-as})\\
&= {}_q\triangleleft;(id \oplus ({}_{\frac{1-p}{1-q}}\triangleleft;\sigma));(s_1 \oplus (\overset{\downarrow}{\circ} \oplus t_2)) && ({}_p\triangleleft\text{-sym})\\
&= {}_q\triangleleft;(id \oplus ({}_{\frac{1-p}{1-q}}\triangleleft));(s_1 \oplus t_2 \oplus \overset{\downarrow}{\circ}) && \text{(Symmetric Monoidal Category)}\\
&= {}_q\triangleleft;(s_1 \oplus \frac{1-p}{1-q} \cdot t_2) && \text{(Lemma 16.2)}\\
&= s && \text{(Hypothesis)}
\end{aligned}
$$

F.2 标准形

现在我们将证明若干个标准形结果，这些结果对于命题 11 的证明至关重要。为此，我们需要固定一些记号。

对于所有自然数 $n \in \mathbb{N}$ 和 $p_1, \ldots, p_n \in (0,1)$，满足 $\sum_{i=1}^{n} p_i \leq 1$，可以如下定义 ${}_{\boldsymbol{p}}\triangleleft_P \colon P \to \bigoplus_{i=1}^{n+1} {}_i P$：

$$
(n=0):\ {}_{\boldsymbol{p}}\triangleleft_P \overset{\text{def}}{=} id_U \qquad (n=k+1):\ {}_{\boldsymbol{p}}\triangleleft_P \overset{\text{def}}{=} {}_p\triangleleft_P;(id_P \oplus {}_{\frac{\boldsymbol{p}'}{1-p_1}}\triangleleft_P) \tag{21}
$$

其中 $\boldsymbol{p}' = p_2, \ldots, p_n$。
注意，${}_{\boldsymbol{p}}\triangleleft_P$ 与 (14) 中给出的 ${}_{\boldsymbol{p}}\triangleleft_P^n$ 定义不同，但本节余下部分需要采用这种表述。

类似地，对于所有自然数 $n \in \mathbb{N}$，可以如下定义 $\triangleright_U^n := \bigoplus^n {}_{i=1} P \to P$：

$$
(n=0):\ \triangleright_P^0 \overset{\text{def}}{=} \overset{\downarrow}{\circ}_P \qquad (n+1):\ \triangleright_P^{n+1} \overset{\text{def}}{=} (id_P \oplus \triangleright_P^n);\triangleright_P. \tag{22}
$$

引理 18（预范式）。每个态射 $t\colon \oplus_{i=1}^{n} U_i \to \oplus_{i=1}^{m} V_i \in \mathbf{T}(\mathbf{C})$ 均可写为 $t_1;t_2;t_3;t_4$，其中：

$-\,t_1$ 由片段 $|\, p\triangleleft_U \,|\, id_0 \,|\, id_U \,|\, t;t \,|\, t \oplus t \,|\, \sigma^{\oplus}{}_{U,V}$ 得到 $-\,t_2$ 由片段 $|\, \overset{\downarrow}{\circ}_U \,|\, id_0 \,|\, id_U \,|\, t;t \,|\, t \oplus t \,|\, \sigma^{\oplus}{}_{U,V}$ 得到 $-\,t_3$ 由片段 $|\, c \,|\, id_0 \,|\, id_U \,|\, t;t \,|\, t \oplus t \,|\, \sigma^{\oplus}{}_{U,V}$ 得到 $-\,t_4$ 由片段 $|\, \triangleright_U \,|\, \overset{\downarrow}{\circ}_U \,|\, id_0 \,|\, id_U \,|\, t;t \,|\, t \oplus t \,|\, \sigma^{\oplus}{}_{U,V}$ 得到

证明。利用自然性，可以先将所有 $_p\triangleleft$ 移到左侧。然后将所有 $\overset{\downarrow}{\circ}$ 移到左侧，直到遇到 $_p\triangleleft$（注意，由于 $\overset{\downarrow}{\circ}$ 不是 $_p\triangleleft$ 的单位，$\overset{\downarrow}{\circ}$ 仍位于 $_p\triangleleft$ 的右侧）。同样，也可以将所有 $\triangleright$ 和 $\overset{\downarrow}{\circ}$ 移到右侧。

引理 19。设 $t\colon U \to V$ 是 $\mathbf{T}(\mathbf{C})$ 中的一个态射。则以下情况之一成立：

– $\mathrm{t}=\star_{A,B}$;– 存在 $c \in \mathbf{C}[U,V]$ 使得$\mathrm{t} = \overline{c}$;– 存在互不相同的 $c_1,\ldots,c_n \in \mathbf{C}[U,V]$ 以及$\boldsymbol{p} = p_1,\ldots,p_{n+1}$ 使得

$$\mathrm{t} = \rho_{\triangleleft_A};((\bigoplus_{i=1}^{n} \overline{c_i}) \oplus \curlyvee_U);\triangleright_V^n.$$

证明。根据引理 18，$\mathrm{t} = \mathrm{t}_1;\mathrm{t}_2;\mathrm{t}_3;\mathrm{t}_4$。利用 $\sigma^{\oplus}$U,V 的自然性（见表3），可以将 $\sigma^{\oplus}$U,V 的所有出现逐步移到右侧，直到遇到 $\triangleright_V$。利用 $\mathrm{p}\ \triangleleft_U$ 的结合性和对称性，可以将每个 c_i 和 $\star_{U,V}$ 的所有多次出现收集成 $\mathrm{p}\ \triangleleft_U;(\mathrm{c}_i \otimes \mathrm{c}_i)$ 的形式，然后利用幂等公理和关于 $\triangleright_U$的公理将其化简为一次 c_i。接着再次利用 $\mathrm{p}\ \triangleleft_U$ 的结合性和对称性，可以将所有出现移至 $\mathrm{p}\ \triangleleft_U$ 的形式，其中某个向量 $\mathrm{p} = (\mathrm{p}_1,\ldots,\mathrm{p}_n)$，同理，$\triangleright_V$ 的所有出现也可化为 $\triangleright_V^n$ 的形式。

引理 20。 $\mathbf{T}(\mathbf{C})$ 中形如$\mathrm{t}: U \to V$ 的态射与 $\mathcal{D}_{\leq}(\mathbf{C}[U,V])$之间存在双射。

证明。 根据引理 19，每个态射 $f: U \to V$ 都属于以下形式之一：

– $\mathrm{t} = \star_{U,V}$;– 存在 $c \in \mathbf{C}[U,V]$，使得 $\mathrm{t} = \overline{c}$；– 存在互不相同的 $c_1,\ldots,c_n \in \mathbf{C}[U,V]$ 以及 $\boldsymbol{p} = p_1,\ldots,p_n$ 使得

$$\mathrm{t} = \rho_{\triangleleft_U};((\bigoplus_{i=1}^{n} \overline{c_i}) \oplus \curlyvee_U);\triangleright_V^n.$$

前两种情况分别对应零次分布和 c 上的狄拉克分布。第三种情况对应定义在态射集合$\{c_1,\ldots,c_n\}$上的次分布 $\boldsymbol{p}$，其中 p_i 是c_i的概率。如果 t 和 $\mathrm{t}' = \rho\triangleleft_U;((\bigoplus^{n'}{}_{j=1} c'_i) \oplus \curlyvee_U);\triangleright^{n'}{}_V$ 被映射到同一个次分布，那么有$n = n'$、$p_i = q_i$，且对于所有$i = 1,\ldots,n$，都有 $c_i = c'_i$。

引理 21. 设$\mathrm{t}: U \to \bigoplus^{n}{}_{i=1} V_i$ 是$\mathbf{T}(\mathbf{C})$中的一个态射。那么，

– *either* $\mathrm{t} = \curlyvee_U;\curlyvee_{\bigoplus_{i=1}^{n} V_i}$,
– *or there exists* $j \in 1\ldots n$ *and* $\mathrm{t}_j: U \to V_j$ *such that* $\mathrm{t} = \curlyvee_{\bigoplus_{i=1}^{j-1} V_i} \oplus \mathrm{t}_j \oplus \curlyvee_{\bigoplus_{i=j+1}^{n} V_i}$,
– *or for all* $j \in 1\ldots n$, *there exists* $\mathfrak{s}_1: U \to \bigoplus_{i=1}^{j} V_i$ *and* $\mathfrak{s}_2: U \to \bigoplus_{i=j+1}^{n} V_i$ *such that* $\mathrm{t} = \rho\triangleleft_{;}(\mathfrak{s}_1 \oplus \mathfrak{s}_2)$.

证明。 我们有 $\mathrm{t} = \mathrm{t}_1;\mathrm{t}_2;\mathrm{t}_3;\mathrm{t}_4$，其中 t_i 如引理 18 所规定。我们考虑两种不同情形：要么 $\mathrm{t}_1 = id_U$，要么 $\mathrm{t}_1 \neq id_U$。

假设 $\mathrm{t}_1 = id_U: U \to U$。那么 t_2 是一个定义域为U 的态射，因此 $\mathrm{t}_2 = \curlyvee_U$ 或 $\mathrm{t}_2 = id_U$。

– 如果 $\mathrm{t}_2 = \curlyvee_U: U \to 0$，那么 t_3 是定义域为 0 的态射。这意味着 t_3 应为 $id_0: 0 \to 0$，而 t_4 是类型为 $0 \to \bigoplus^{n}{}_{i=1} V_i$ 的态射。后一个事实意味着 $\mathrm{t}^4 = \curlyvee_{\oplus^{n}{}_{i=1} V_i}$。因此 $\mathrm{t} = \curlyvee_U;\curlyvee_{\oplus^{n}{}_{i=1} V_i}$。

– 如果 $t_2 = \mathrm{id}_U : U \to U$，那么 t_3 应具有类型 $U \to V_j$，因此它必定是 id_U 或 c。我们接下来讨论 c 的情形，id_U 的情形完全相同。由于 $c : U \to V_j$，那么 t_4 应具有类型 $V\,j \to \bigoplus^{n} i_{=1} V_i$。这意味着 $t_4 = \bigoplus^{j-1}_{=1} i\ V_i \oplus \mathrm{id}^{V_j} \oplus \bigoplus^{n}_{=} i\ j_{+1} V_i$。因此 $t = c$；$\bigoplus^{j-1}_{=1} i\ V_i \oplus \mathrm{id}^{V_j} \oplus \bigoplus^{n}_{=} i\ j_{+1} V_i$，根据对称幺半范畴的定律，这等于 $\bigoplus^{j-1}_{=1} i\ V_i \oplus c \oplus \bigoplus^{n}_{=} i\ j_{+1} V_i$。因此 t 属于第二种形式。

现在考虑 $t_1 \neq \mathrm{id}_U$ 的情况。对于任意 $j \in 1 \ldots n$，t_4 可以写成 $\triangleright^{x}_{P} \oplus \triangleright^{y} Q$，其中 x、y $\in \mathbb{N}$，$P = \bigoplus^{j} i_{=1} V_i$，且 $Q = \bigoplus^{n} i_{=j+1} V_i$，并且 $\triangleright^{x}_{P} : \bigoplus^{x} k_{=1} P \to P$ 和 $\triangleright^{y} Q : \bigoplus^{y} k_{=1} Q \to Q$ 是 (22) 中定义的态射。

现在，t_3 的余定义域应为 $\bigoplus^{x} k_{=1} P \oplus \bigoplus^{y} k_{=1} Q$。由于 t 的定义域为 U，$t_1$; t_2 对某个 $z \in \mathbb{N}$ 具有类型 $U \to \bigoplus^{z} i_{=1} U$。由于 t_3 中的态射保持定义域和余定义域的大小，我们有：t_3 的定义域可写为 $\bigoplus^{x} k_{=1} (\bigoplus^{j} i_{=1} U) \oplus \bigoplus^{y} k_{=1} (\bigoplus^{n} i_{=j+1} U)$。这意味着对于某个 $t_3^1 : \bigoplus^{x} k_{=1} (\bigoplus^{j} i_{=1} U) \to \bigoplus^{x} k_{=1} (\bigoplus j\ i_{=1} V\ j)$，有 $t_3 = t_3^1 \oplus t_3^2$，且 $t_3^2 : \bigoplus^{y} k_{=1} (\bigoplus^{j} i_{=1} U) \to \bigoplus^{y} k_{=1} (\bigoplus^{n} i_{=j+1} V_n)$。

现在，t_2的陪域应为 $\bigoplus^{x} k_{=1} (\bigoplus^{j} i_{=1} U) \oplus \bigoplus^{y} k_{=1} (\bigoplus^{n} i_{=j+1} U)$。由于形状为 t_2的态射只能使陪域的大小减小，因此对于某些 $x' \geq j$ 和 $y' \geq n-j+1$，t_2的定义域为 $\bigoplus^{x} k_{=1} (\bigoplus^{x'} i_{=1} U) \oplus \bigoplus^{y} k_{=1} (\bigoplus^{y'} i_{=1} U)$。由此可知，$t_2 = t_2^1 \oplus t_2^2$，其中某个 $t_2^1 : \bigoplus^{x} k_{=1} (\bigoplus^{x'} i_{=1} U) \to \bigoplus^{x} k_{=1} (\bigoplus^{j} i_{=1} U)$，以及 $t_2^2 : \bigoplus^{y} k_{=1} (\bigoplus^{y'} i_{=1} U) \to \bigoplus^{y} k_{=1} (\bigoplus^{n} i_{=} j_{+1} U)$。

现在，t_1 的类型为 $U \to \bigoplus^{x} k_{=1} (\bigoplus^{x'} i_{=1} U) \oplus \bigoplus^{y} k_{=1} (\bigoplus^{y'} i_{=1} U)$。注意，后一个对象不同于 U，因为 $t_1 \neq \mathrm{id}_U$。利用 (R-as) 和 (R-sym)，t_1 可以写成 $p \lhd (t_1^1 \oplus t_1^2)$ 的形式，其中 $t_1^1 : U \to \bigoplus^{x} k_{=1} (\bigoplus^{x'} i_{=1} U)$，且 $t_1^2 : U \to \bigoplus^{y} k_{=1} (\bigoplus^{y'} i_{=1} U)$。

总而言之，$t = {}^{p}\lhd (\ (t_1^1; t_2^1; t_3^1; \triangleright^{x}_{P}) \oplus (t_1^2; t_2^2; t_3^2; \triangleright^{y} Q)\ )$ 属于第三种形式。

证明（引理*3*的证明）。通过反复应用引理21。

F.3 可消去性

为了证明可消去性，我们首先考虑类型为 $U \to V$ 的态射，其中 U、V 是 **C** 的对象。

引理 22。对于所有 $r \in (0,1)$，以及所有 s、$t : U \to V$，若 $r \cdot s = r \cdot t$，则 $s = t$。

证明。由引理 20，我们知道 $\mathbf{T}(\mathbf{C})[U,V] = \mathcal{D}_{\leq}(\mathbf{C}[U,V])$。众所周知（例如，参见[43]），对于所有集合 X，$\mathcal{D}_{\leq}(X)$ 都是可消 pca。

接下来，我们考虑类型为 $U \to \bigoplus^{n}_{i=1} V_i$ 的态射，其中 U、V_i 是 **C** 的对象。

引理 23. 对于所有 $n \in \mathbb{N}$、所有 $r \in (0,1)$，以及所有 $s, t : U \to \bigoplus^{n}_{i=1} V_i$，若 $r \cdot s = r \cdot t$，则 $s = t$。

证明。我们对 n 使用归纳法。

基例 $n = 0$，显然，因为 $\bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ 是终对象 0。

对于归纳情形 $n + 1$，我们利用引理 21，并考虑以下情形：

$$\mathfrak{s} = {}^{q}\triangleleft;(\mathfrak{s}_1 \oplus \mathfrak{s}_2) \qquad \text{and} \qquad \mathfrak{t} = {}^{p}\triangleleft;(\mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2) \tag{23}$$

对于 $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{t}_1 : U \to \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$，以及 $\mathfrak{s}_2, \mathfrak{t}_2 : U \to V_{n+1}$。其他情形显然。

根据引理 16.3，我们有：

$$r \cdot \mathfrak{s} = {}^{q}\triangleleft;(r \cdot \mathfrak{s}_1 \oplus r \cdot \mathfrak{s}_2) \qquad \text{and} \qquad r \cdot \mathfrak{t} = {}^{p}\triangleleft;(r \cdot \mathfrak{t}_1 \oplus r \cdot \mathfrak{t}_2) \tag{24}$$

由于根据假设 $r \cdot \mathfrak{s} = r \cdot \mathfrak{t}$，因此以下两者都成立：

$$r \cdot \mathfrak{s};(id \oplus \mathfrak{0}) = r \cdot \mathfrak{t};(id \oplus \mathfrak{0}) \qquad \text{and} \qquad r \cdot \mathfrak{s};(\mathfrak{0} \oplus id) = r \cdot \mathfrak{t};(\mathfrak{0} \oplus id).$$

因此，由（24）、引理 16.1 和引理 2 可得

$$q \cdot r \cdot \mathfrak{s}_1 = p \cdot r \cdot \mathfrak{t}_1 \qquad \text{and} \qquad (1-q) \cdot r \cdot \mathfrak{s}_2 = (1-p) \cdot r \cdot \mathfrak{t}_2. \tag{25}$$

现在有三种情形：$p = q$、$p > q$ 以及 $p < q$。

若 $p = q$，则根据归纳假设有 $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{t}_1$，根据引理 22 有 $\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{t}_2$。于是，由（23）可得 $\mathfrak{s} = \mathfrak{t}$。

若 $p > q$，则可将（25）改写为

$$p \cdot r \cdot \frac{q}{p} \cdot \mathfrak{s}_1 = p \cdot r \cdot \mathfrak{t}_1 \qquad \text{and} \qquad (1-q) \cdot r \cdot \mathfrak{s}_2 = (1-q) \cdot r \cdot \frac{1-p}{1-q} \cdot \mathfrak{t}_2.$$

因此，根据归纳假设有 $\frac{q}{p} \cdot \mathfrak{s}_1 = \mathfrak{t}_1$，并且根据引理 22，有 $\mathfrak{s}_2 = \frac{1-p}{1-q} \cdot \mathfrak{t}_2$。由（23）和引理 17 可得 $\mathfrak{s} = \mathfrak{t}$。情形 $p < q$ 是对称的

最后，我们可以考虑一般情形。

证明（引理 *4* 的证明）。令 $P = \bigoplus_{i=1}^{n} U_i$。我们对 n 使用归纳法。基例 $n = 0$ 显然成立，因为 $\bigoplus_{i=1}^{n} U_i$ 是始对象 0。

对于归纳情形 $n + 1$，由于 **T(C)** 有有限余积，不妨假设

$$\mathfrak{s} = (\mathfrak{s}_1 \oplus \mathfrak{s}_2);\triangleright_Q \qquad \text{and } \mathfrak{t} = (\mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2);\triangleright_Q \tag{26}$$

存在某个 $\mathfrak{s}_2, \mathfrak{t}_2 : U_{n+1} \to Q$ 以及 $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{t}_1 : P' \to Q$，其中 $P' = \bigoplus_{i=1}^{n} U_i$。此外请注意，余积泛性质意味着

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{t} \text{ iff } \mathfrak{s}_1 = \mathfrak{t}_1 \text{ and } \mathfrak{s}_2 = \mathfrak{t}_2. \tag{27}$$

由引理 15，我们有 $r \cdot \mathfrak{s} = (r \cdot \mathfrak{s}_1) \oplus (r \cdot \mathfrak{s}_2);\triangleright_Q$ 以及 $r \cdot \mathfrak{t} = (r \cdot \mathfrak{t}_1) \oplus (r \cdot \mathfrak{t}_2);\triangleright_Q$。因此由 (27) 可得

$$r \cdot \mathfrak{s}_1 = r \cdot \mathfrak{t}_1 \qquad \text{and} \qquad r \cdot \mathfrak{s}_2 = r \cdot \mathfrak{t}_2$$

由上方最右侧的结果和引理 23，我们推出 $\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{t}_2$。由上方最左侧的结果和归纳假设，我们推出 $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{t}_1$。根据 (27)，有 $\mathfrak{s} = \mathfrak{t}$。

F.4 凸积

现在，在$p \in \{0,1\}$的情况下，证明 $\langle \mathsf{t}, \mathsf{s} \rangle_{p,\,1-p}$ 是唯一的中介态射相当容易。由以下结果可立即得出。

引理 24. 设$\mathsf{t}: U \to Q \oplus R$ 是**T(C)**中的一个态射。

1. 若$\mathsf{t};(id_Q \oplus \mathsf{!}_R) = \mathsf{s}$且$\mathsf{t};(\mathsf{!}_Q \oplus id_R) = \mathsf{!}_U;\mathsf{?}_R$，则$\mathsf{t} = \mathsf{s} \oplus \mathsf{?}_R$;
2. 若$\mathsf{t};(id_Q \oplus \mathsf{!}_R) = \mathsf{!}_U;\mathsf{?}_Q$且$\mathsf{t};(\mathsf{!}_Q \oplus id_R) = \mathsf{s}$，则$\mathsf{t} = \mathsf{?}_Q \oplus \mathsf{s}$;

证明。 我们证明第一点；第二点同理。

首先，注意 t 应为引理 21 中的某种形式。唯一棘手的情形是第三种形式 (iii) $\mathsf{t} = {}^{p}\!\lhd_U; (\mathsf{t}_1 \oplus \mathsf{t}_2)$，其中$\mathsf{t}_1: U \to Q$ 且$\mathsf{t}_2 : U \to R$。由于

$$
\begin{aligned}
\mathsf{!}_U;\mathsf{?}_R = \mathsf{t};(\mathsf{!}_Q \oplus id_R) & && \text{(Hypothesis)}\\
= {}^{p}\!\lhd_U;(\mathsf{t}_1 \oplus \mathsf{t}_2);(\mathsf{!}_Q \oplus id_R) & && \text{(iii)}\\
= {}^{p}\!\lhd_U;((\mathsf{t}_1;\mathsf{!}_Q) \oplus \mathsf{t}_2) & && \text{(Symmetric Monoidal Category)}\\
= {}^{p}\!\lhd_U;(\mathsf{!}_U \oplus \mathsf{t}_2) & && (\mathsf{!}\text{-nat})\\
= (1-p)\cdot \mathsf{t}_2 & && \text{(引理 16.2)}
\end{aligned}
$$

由于 $(1-p)\cdot(\mathsf{!}_U;\mathsf{?}_R) = \mathsf{!}_U;\mathsf{?}_R$ 也成立，根据可消去性（引理 4），我们有 $\mathsf{t}_2 = \mathsf{!}_U;\mathsf{?}_R$。因此

$$
\begin{aligned}
\mathsf{s} \oplus \mathsf{?}_R = (\mathsf{t};(id_Q \oplus \mathsf{!}_R)) \oplus \mathsf{?}_R & && \text{(hypothesis)}\\
= ({}^{p}\!\lhd_U;(\mathsf{t}_1 \oplus \mathsf{t}_2);(id_Q \oplus \mathsf{!}_R)) \oplus \mathsf{?}_R & && \text{(iii)}\\
= ({}^{p}\!\lhd_U;(\mathsf{t}_1 \oplus (\mathsf{t}_2;\mathsf{!}_R))); \oplus \mathsf{?}_R & && \text{(Symmetric Monoidal Category)}\\
= ({}^{p}\!\lhd_U;(\mathsf{t}_1 \oplus (\mathsf{!}_U;\mathsf{?}_R;\mathsf{!}_R))); \oplus \mathsf{?}_R & && (\mathsf{t}_2 = \mathsf{!}_U;\mathsf{?}_R)\\
= ({}^{p}\!\lhd_U;(\mathsf{t}_1 \oplus \mathsf{!}_U)) \oplus \mathsf{?}_R & && (\mathsf{!}\text{-nat})\\
= {}^{p}\!\lhd_U;(\mathsf{t}_1 \oplus (\mathsf{!}_U;\mathsf{?}_R)) & && \text{(对称幺半范畴)}\\
= {}^{p}\!\lhd_U;\ (\mathsf{t}_1 \oplus \mathsf{t}_2) & && (\mathsf{t}_2 = \mathsf{!}_U;\mathsf{?}_R)\\
= \mathsf{t} & && \text{(iii)}
\end{aligned}
$$

上述引理可推广到任意箭头，如下所示。证明在很大程度上依赖于**T(C)** 具有余积。

引理 25. 设$\mathsf{t}: P \to Q \oplus R$ 是**T(C)** 中的一个态射，其中 $P = \bigoplus_{i=1}^{n} U_i$。

1. *If* $\mathsf{t};(id_Q \oplus \mathsf{!}_R) = \mathsf{s}$ *and* $\mathsf{t};(\mathsf{!}_Q \oplus id_R) = \mathsf{!}_P;\mathsf{?}_R$ *then* $\mathsf{t} = \mathsf{s} \oplus \mathsf{?}_R$;
2. *If* $\mathsf{t};(id_Q \oplus \mathsf{!}_R) = \mathsf{!}_P;\mathsf{?}_Q$ *and* $\mathsf{t};(\mathsf{!}_Q \oplus id_R) = \mathsf{s}$ *then* $\mathsf{t} = \mathsf{?}_Q \oplus \mathsf{s}$;

证明。 证明通过对n进行归纳法得出。基例$n = 0$ 显然成立，因为$\bigoplus_{i=1}^{0} U_i$ 是始对象 0 。

对于归纳情形$n+1$，由于**T(C)**具有有限余积，我们可以假设 $t = (t_1 \oplus t_2);\ \triangleright_{Q\oplus R}$ 其中 $t_1 : \bigoplus^n_{i=1} U_i \to Q \oplus R$ 且 $t_2 : U_{n+1} \to Q \oplus R$，以及 $s = (s_1 \oplus s_2);\ \triangleright_Q$ 其中 $s_1 : \bigoplus^n_{i=1} U_i \to Q$ 且 $s_2 : U_{n+1} \to Q$。

现在，若 $t;\ (\text{恒等}_Q \oplus \curlywedge_R) = s$，则可得

$$t_1 \oplus t_2;\ \triangleright_{Q\oplus R};\ (id_Q \oplus \curlywedge_R) = t_1 \oplus t_2;\ (id_Q \oplus \curlywedge_R) \oplus (id_Q \oplus \curlywedge_R);\ \triangleright_Q \qquad (\text{公理 } \triangleright\text{-nat})$$

因此 $t_1;\ (\text{恒等}_Q \oplus \curlywedge_R) = s_1$ 且 $t_2;\ (\text{恒等}_Q \oplus \curlywedge_R) = s_2$。同理，由 $t;\ (\curlywedge_Q \oplus \text{恒等}_R) = \curlywedge_P;\ \curlyvee_R$，利用公理 $\triangleright$-nat 和 $\curlywedge$-coh，可得 $t_1;\ (\curlywedge_Q \oplus \text{恒等}_R) = \curlywedge_{\bigoplus^n_{i=1} U_i};\ \curlyvee_Q$ 以及 $t_2;\ (\curlywedge_Q \oplus \text{恒等}_R) = \curlywedge_{U_{n+1}};\ \curlyvee_R$。因此，根据归纳假设，可得 $t_1 = s_1 \oplus \curlyvee_R$，并由引理 24 得到 $t_2 = s_2 \oplus \curlyvee_R$。现在，结论可由下述方式得到

$$\begin{aligned}
t_1 \oplus t_2;\ \triangleright_{Q\oplus R} &= (s_1 \oplus \curlyvee_R) \oplus (s_2 \oplus \curlyvee_R);\ \triangleright_{Q\oplus R} \\
&= (s_1 \oplus \curlyvee_R) \oplus (s_2 \oplus \curlyvee_R);\ (id_Q \oplus \sigma_{R,Q} \oplus id_R);\ \triangleright_Q \oplus \triangleright_R && \text{(axiom } \triangleright\text{-coh)} \\
&= (s_1 \oplus s_2);\ \triangleright_Q \oplus \curlyvee_R && \text{(axiom } \triangleright\text{-nat)} \\
&= s \oplus \curlyvee_R
\end{aligned}$$

证明 $\langle t_1, t_2 \rangle_{p,\ 1-p}$ 在 $p \in (0, 1)$ 的情况下是凸配对依赖于可消去性。我们首先证明 $t_1 : U \to P$ 和 $t_2 : U \to Q$ 的情形，其中 U 是 **C** 中的一个对象

引理 *26.* 设 $t_1 : U \to P$ 和 $t_2 : U \to Q$ 是 *T(C)* 中的态射，且 $p \in (0, 1)$。那么 $_p\triangleleft_U;\ (t_1 \oplus t_2) : U \to P \oplus Q$ 是唯一的态射 t，使得 $p \cdot t_1 = t;\ (id_P \oplus \curlywedge_Q)$，并且 $(1-p) \cdot t_2 = t;\ (\curlywedge_P \oplus id_Q)$。

证明。首先注意到，根据引理 16.1 和引理 2，我们有 $_p\triangleleft_U;\ (t_1 \oplus t_2);\ (id_P \oplus \curlywedge_Q) = p \cdot t_1$，并且 $_p\triangleleft_U;\ (t_1 \oplus t_2);\ (\curlywedge_P \oplus id_Q) = (1-p) \cdot t_2$。

现在我们需要证明，$_p\triangleleft_U;\ (t_1 \oplus t_2)$ 是具有此性质的唯一态射。我们证明：如果 (a) $p \cdot t_1 = t;\ (id_P \oplus \curlywedge_Q)$ 且 (b) $(1-p) \cdot t_2 = t;\ (\curlywedge_P \oplus id_Q)$，那么 $t = {}_p\triangleleft_U;\ (t_1 \oplus t_2)$。

注意，t 可以是引理 21 中的几种形式之一。唯一相关的情形是最后一种：$t = {}_{p'}\triangleleft_U;\ (t'_1 \oplus t'_2)$。根据 (a)、(b)、引理 16.1 和引理 2，可得

$$p \cdot t_1 = p' \cdot t'_1 \text{ and } (1-p) \cdot t_2 = (1-p') \cdot t'_2.$$

现在有三种情形：

– 若 $p = p'$，则根据引理 4，$t_1 = t'_1$ and $t_2 = t'_2$。因此，$t = {}_p\triangleleft_U;\ (t_1 \oplus t_2)$。– 若 $p > p'$，则我们可以将上述等式改写为 $p \cdot t_1 = p \cdot p' \cdot t'_1$ and $(1-p') \cdot t_2 = (1-p') \cdot t'_2$。因此，根据引理 4，可得 $t_1 = p' \cdot t'_1$ and $\frac{1-p}{1-p'} \cdot t_2 = t'_2$。进而，根据引理 17，$t = {}_p\triangleleft_U;\ (t_1 \oplus t_2)$。– 情形 $p < p'$ 与上面一种情形对称。

上述引理可如下推广到任意态射。证明实质上依赖于**T(C)**具有余积这一事实。

引理 *27*。设 $t_1 : \bigoplus^n i_{=1} U_i \to P$ 和 $t_2 : \bigoplus^n i_{=1} U_i \to Q$ 是 *T(C)* 中的态射，且 $p \in (0, 1)$。则存在唯一的态射 $t : \bigoplus^n i_{=1} U_i \to P \oplus Q$，使得 $p \cdot t_1 = t$；$(id_P \oplus \bot_Q)$ 且 $(1 - p) \cdot t_2 = t$；$(\bot_P \oplus id_Q)$。

证明。 证明通过对n进行归纳法。当$n = 0$ 时显然成立，因为 $\bigoplus^0 {}_{i=1} U_i$ 是始对象 0。

我们考虑$n + 1$的情形。由于**T(C)**具有余积，因此

$$\mathrm{t}_1 = (\mathrm{s}_1^1 \oplus \mathrm{s}_1^2); \triangleright_P \qquad \text{and} \qquad \mathrm{t}_2 = (\mathrm{s}_2^1 \oplus \mathrm{s}_2^2); \triangleright_Q \tag{28}$$

对于 $\mathrm{s}_1^1 : \bigoplus^n {}_{i=1} U_i \to P$，$\mathrm{s}_1^2 : U_{n+1} \to P$，$\mathrm{s}_2^1 : \bigoplus^n {}_{i=1} U_i \to Q$，$\mathrm{s}_2^2 : U_{n+1} \to Q$。

根据归纳假设，存在唯一的态射 $\mathrm{t} : \bigoplus^n {}_{i=1} U_i \to P \oplus Q$，使得

$$\mathrm{t}; (id_P \oplus \bot_Q) = p \cdot \mathrm{s}_1^1 \qquad \text{and} \qquad \mathrm{t}; (\bot_P \oplus id_Q) = (1 - p) \cdot \mathrm{s}_2^1 \tag{29}$$

现在我们关注 $\mathrm{t} \oplus (\rho_{\triangleleft U_{n+1}}; (\mathrm{s}_1^2 \oplus \mathrm{s}_2^2)); \triangleright_{P \oplus Q} : \bigoplus_{=1}^{n+1} {}_i U_i \to P \oplus Q$。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{t} \oplus (\rho_{\triangleleft U_{n+1}}; (\mathrm{s}_1^2 \oplus \mathrm{s}_2^2)); \triangleright_{P \oplus Q}; (id_P \oplus \bot_Q) \\
&= ((\mathrm{t}; (id_P \oplus \bot_Q)) \oplus (\rho_{\triangleleft U_{n+1}}; (\mathrm{s}_1^2 \oplus \mathrm{s}_2^2); (id_P \oplus \bot_Q))); \triangleright_{P \oplus Q} && \text{(nat. of } \triangleright_{P \oplus Q}) \\
&= ((\mathrm{t}; (id_P \oplus \bot_Q)) \oplus (\rho_{\triangleleft U_{n+1}}; (\mathrm{s}_1^2 \oplus \bot_{U_{n+1}}))); \triangleright_{P \oplus Q} && \text{(nat. of } \bot) \\
&= ((\mathrm{t}; (id_P \oplus \bot_Q)) \oplus p \cdot \mathrm{s}_1^2); \triangleright_{P \oplus Q} && \text{(Lemma 14)} \\
&= (p \cdot \mathrm{s}_1^1 \oplus p \cdot \mathrm{s}_1^2); \triangleright_{P \oplus Q} && (29) \\
&= p \cdot ((\mathrm{s}_1^1 \oplus \mathrm{s}_1^2); \triangleright_{P \oplus Q}) && \text{(Lemma 15)} \\
&= p \cdot \mathrm{t}_1 && (28)
\end{aligned}$$

类似的计算可证明 $\mathrm{t} \oplus (\rho_{\triangleleft U_{n+1}}; (\mathrm{s}_1^2 \oplus \mathrm{s}_2^2)); \triangleright_{P \oplus Q}; (\bot_P \oplus \text{恒等态射}_Q) = (1 - p) \cdot \mathrm{t}_2$。

现在我们需要证明，$\mathrm{t} \oplus (\rho_{\triangleleft U_{n+1}}; (\mathrm{s}_1^2 \oplus \mathrm{s}_2^2)); \triangleright_{P \oplus Q}$ 是具有此性质的唯一态射。假设 $\mathrm{t}' : \bigoplus_{=1}^{n+1} {}_i U_i \to P \oplus Q$ 满足

$$\mathrm{t}'; (id_P \oplus \bot_Q) = p \cdot \mathrm{t}_1 \qquad \text{and} \qquad \mathrm{t}'; (\bot_P \oplus id_Q) = (1 - p) \cdot \mathrm{t}_2 \tag{30}$$

由于**T(C)**具有余积 $\mathrm{t}' = (\mathrm{t}'_1 \oplus \mathrm{t}'_2); \triangleright_{P \oplus Q}$，其中 $\mathrm{t}'_1 : \bigoplus^n {}_{i=1} U_i \to P \oplus Q$ 且 $\mathrm{t}'_2 : U_{n+1} \to P \oplus Q$。利用 $\triangleright_{P \oplus Q}$ 的自然性，可以直接得到

$$\mathrm{t}'; (id_P \oplus \bot_Q) = ((\mathrm{t}'_1; (id_P \oplus \bot_Q)) \oplus (\mathrm{t}'_2; (id_P \oplus \bot_Q))); \triangleright_{P \oplus Q}. \tag{31}$$

现在，有

$$\begin{aligned}
((\mathrm{t}'_1; (id_P \oplus \bot_Q)) \oplus (\mathrm{t}'_2; (id_P \oplus \bot_Q))); \triangleright_{P \oplus Q} &= \mathrm{t}'; (id_P \oplus \bot_Q) && (31) \\
&= p \cdot \mathrm{t}_1 && (30) \\
&= (p \cdot \mathrm{s}_1^1 \oplus p \cdot \mathrm{s}_1^2); \triangleright_{P \oplus Q} && \text{(derivation above)}
\end{aligned}$$

因此，根据余积的泛性质，我们可以得出

$$t'_1;(id_P \oplus \curlywedge_Q) = p \cdot s^1_1 \qquad \text{and} \qquad t'_2;(id_P \oplus \curlywedge_Q) = p \cdot s^2_1. \tag{32}$$

通过对称的论证，可得

$$t'_1;(\curlywedge_P \oplus id_Q) = (1-p) \cdot s^1_2 \qquad \text{and} \qquad t'_2;(\curlywedge_P \oplus id_Q) = (1-p) \cdot s^2_2. \tag{33}$$

现在，由 (32) 和 (33) 中最左侧的方程，以及 t 是满足 (29) 的唯一对象这一事实，可得 $t'_1 = t$。

由引理 26，$_p\triangleleft_{U_{n+1}}$；$(s^2_1 \oplus s^2_2)$ 是唯一的态射 $h\colon U_{n+1} \to P \oplus Q$，满足$h$；$(id_P \oplus \curlywedge_Q) = p \cdot s^2_1$，且 h；$(\curlywedge_P \oplus id_Q) = (1-p) \cdot s^2_2$。因此，(32) 和 (33) 中最右侧的方程意味着 $t'_2 = {}^p\triangleleft_{U_{n+1}}$；$(s^2_1 \oplus s^2_2)$。这证明了 $t' = t \oplus (\curlywedge_{U_{n+1}};(s^2_1 \oplus s^2_2))$；$\triangleright_{P\oplus Q}$。

我们终于可以陈述主要结果了。

命题 11。T(C) 具有凸积。

证明。我们需要证明：对于所有态射 $t_1\colon R \to P$ 和 $t_2\colon R \to Q$，以及所有p、$q \in [0,1]$，只要满足$p+q \le 1$，就存在唯一的 $t : R \to P \oplus Q$，使得 $t;\pi_1 = p \cdot t_1$且 $t;\pi_2 = q \cdot t_2$。

当 $p = 1$ 或 $q = 1$ 时，由引理 25 得证。当 $p, q \in (0,1)$ 且 $p + q = 1$ 时，由引理 27 得证。当 $p, q \in (0,1)$ 且 $p + q < 1$ 时，可轻易由前一种情况推出：若 $p \ge 1 - q$，可取 $\langle f, g\rangle_{p,q} = \langle f, q_{1-p} \cdot g\rangle_{p,1-p}$。若 $p \le 1 - q$，可取 $\langle f, g\rangle_{p,q} = \langle p_{1-q} \cdot f, g\rangle_{1-q,q}$。

F.5 命题 6 的证明

我们以命题 6 的证明作为本附录的结尾。这个证明在考虑图示语言时很有用（见第 7 节）。首先，我们需要以下结果。

命题 *12.* 给定一个范畴 *C* 及 *T(C)* 上的同余关系 $\sim$，则函子 $Q_\sim\colon T(C) \to T(C)_\sim$ 满足以下性质：若 $[p_1 \cdot f_1]_\sim = [q_1 \cdot g_1]_\sim$ 且 $[p_2 \cdot f_2]_\sim = [q_2 \cdot g_2]_\sim$，则 $[\langle f_1, f_2\rangle_{(p_1,p_2)}]_\sim = [\langle g_1, g_2\rangle_{(q_1,q_2)}]_\sim$。

证明。在继续证明之前，我们先作一个简单的观察：若 $[f]_\sim = [g]_\sim$，则对于所有 $p \in [0,1]$，都有 $[p \cdot f]_\sim = [p \cdot g]_\sim$。事实上，

$$\begin{aligned} p \cdot f &= \curlyvee;(f \oplus \curlywedge) && \text{(Thm. 3)} \\ &\sim \curlyvee;(g \oplus \curlywedge) && \text{(by } [f]_\sim = [g]_\sim) \\ &= p \cdot g \end{aligned}$$

因此 $[p \cdot f]_\sim = [p \cdot g]_\sim$。$p = 0$ 和 $p = 1$ 的情况显然成立。现在，定义 $r_i \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f_i \text{ if } p_i \le q_i \\ g_i \text{ else,} \end{cases}$ $u_i \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} p_i \text{ if } p_i \le q_i \\ q_i \text{ else,} \end{cases}$ 并考虑 $\langle r_1, r_2\rangle_{(u_1,u_2)}$。我们证明$[\langle f_1, f_2\rangle_{(p_1,p_2)}]_\sim = [\langle r_1, r_2\rangle_{(u_1,u_2)}]_\sim = [\langle g_1, g_2\rangle_{(q_1,q_2)}]_\sim$。不失一般性，我们可以

假设 $p_1 \leq q_1$ 且 $q_2 \leq p_2$,, 因此 $\langle r_1, r_2\rangle_{(u_1,u_2)} = \langle f_1, g_2\rangle_{(p_1,q_2)}$。第一个等式如下得出:

$$\begin{aligned}
\langle f_1, f_2\rangle_{(p_1,p_2)} &= {}^{p_2}\!\triangleleft; (f_1 \oplus ({}^{\frac{p_2}{1-p_2}}\!\triangleleft; (f_2 \oplus \text{ó}))) && \text{(Thm. 3)}\\
&\sim {}^{p_2}\!\triangleleft; (f_1 \oplus ({}^{\frac{q_2}{1-p_2}}\!\triangleleft; (g_2 \oplus \text{ó}))) && \text{(by } [p_2 \cdot f_2]_\sim = [q_2 \cdot g_2]_\sim\text{)}\\
&= \langle f_1, g_2\rangle_{(p_1,q_2)}
\end{aligned}$$

因此 $[\langle f_1, f_2\rangle_{(p_1,p_2)}]_\sim = [\langle f_1, g_2\rangle_{(p_1,q_2)}]_\sim$。第二个等式如下得到:

$$\begin{aligned}
\langle g_1, g_2\rangle_{(q_1,q_2)} &= {}^{q_2}\!\triangleleft; (g_1 \oplus ({}^{\frac{q_2}{1-q_2}}\!\triangleleft; (g_2 \oplus \text{ó}))) && \text{(Thm. 3)}\\
&= {}^{q_2}\!\triangleleft; (g_2 \oplus ({}^{\frac{q_1}{1-q_2}}\!\triangleleft; (g_1 \oplus \text{ó}))) && ({}^{p}\!\triangleleft\text{-as} + {}^{p}\!\triangleleft\text{-sym})\\
&\sim {}^{q_2}\!\triangleleft; (g_2 \oplus ({}^{\frac{p_1}{1-q_2}}\!\triangleleft; (f_1 \oplus \text{ó}))) && \text{(by } [p_1 \cdot f_1]_\sim = [q_1 \cdot g_1]_\sim\text{)}\\
&= {}^{p_1}\!\triangleleft;\ \ (f_1 \oplus ({}^{\frac{q_2}{1-p}}\!\triangleleft;\ \ (g_2 \oplus \text{ó}))) && ({}^{p}\!\triangleleft\text{-as} + {}^{p}\!\triangleleft\text{-sym})\\
&= \langle f_1, g_2\rangle_{(p_1,q_2)}
\end{aligned}$$

因此 $[\langle g_1, g_2\rangle_{(q_1,q_2)}]_\sim = [\langle f_1, g_2\rangle_{(p_1,q_2)}]_\sim$

证明（命题 6 的证明）。由于 ~ 是同余关系，**T(C)**$_\sim$ 是一个幺半范畴，而$Q_\sim$ 是一个幺半函子。对象 0 是**T(C)**$_\sim$中的始对象和终对象
因为在**T(C)**中也是如此。图A $[\iota$ $\overset{A\oplus B]_\sim}{\underset{1}{\rightarrow}}$ $A \oplus B$ $[\iota$ $^{A\oplus B}$
$\overset{2}{\leftarrow}$ $]_\sim$ B 是 A 和 B 的余积，因为对于每一对态射 [f]$_\sim$: A →X 和 [g]$_\sim$: B →X，都存在态射[(f ⊕g); ▷$_X$]$_\sim$ 使得 [$\iota_1^{A\oplus B}$]$_\sim$; [(f ⊕g); ▷$_X$]$_\sim$ = [f]$_\sim$ 且 [ι_B]$_\sim$; [(f ⊕g); ▷$_X$]$_\sim$ = [g]$_\sim$。这样的态射是满足此性质的唯一态射；事实上，如果 [h]: A ⊕ B →X 满足[$\iota_1^{A\oplus B}$]$_\sim$; [h]$_\sim$ = [f]$_\sim$ 且 [$\iota_2^{A\oplus B}$]$_\sim$; [h]$_\sim$ = [g]$_\sim$，那么 T(C) 中的余积蕴含存在 f ′、g′，使得 h ≔ [f′、g′]; ▷$_X$然后

$$\begin{aligned}
[\iota_1^{A\oplus B}]_\sim; [h]_\sim &= [\iota_1^{A\oplus B}]_\sim; [[f', g']; \triangleright_X]_\sim && (h \coloneqq [f', g']; \triangleright_X)\\
&= [f']_\sim && (\sim \text{ congruence relation})\\
&= [f]_\sim && \text{(by hp.)}
\end{aligned}$$

同理 $[\iota_2^{A\oplus B}]_\sim; [h]_\sim = [g']_\sim = [g]_\sim$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
[h]_\sim &= [[f', g']; \triangleright_X]_\sim\\
&= [f']_\sim \oplus [g']_\sim; [\triangleright_X]_\sim && \text{(}\sim\text{同余关系)}\\
&= [f]_\sim \oplus [g]_\sim; [\triangleright_X]_\sim && \text{(above equalities)}\\
&= [(f \oplus g); \triangleright_X]_\sim && \text{(}\sim\text{同余关系)}
\end{aligned}$$

T(C)$_\sim$ 也富化于凸代数。事实上，对于所有 X、Y ∈T(C)$_\sim$，定义[f]$_\sim$ +$_p$ [g]$_\sim$ def= [f +$_p$ g]$_\sim$，对所有 [f]$_\sim$、[g]$_\sim$ ∈T(C)$_\sim$(X, Y) 以及 p ∈ [0, 1]。这是良定义的，因为若 [f]$_\sim$ = [f′]$_\sim$ 且 [g]$_\sim$ = [g′]$_\sim$，则

$$\begin{aligned}
[f +_p g]_\sim &= [{}^{p}\!\triangleleft_X; (f \oplus g); \triangleright_Y]_\sim && \text{(Thm. 3)}\\
&= [{}^{p}\!\triangleleft_X]_\sim; ([f]_\sim \oplus [g]_\sim); [\triangleright_Y]_\sim && \text{(}\sim\text{同余关系)}\\
&= [{}^{p}\!\triangleleft_X]_\sim; ([f']_\sim \oplus [g']_\sim); [\triangleright_Y]_\sim && \text{(根据 } [f]_\sim = [f']_\sim \text{ 和 } [g]_\sim = [g']_\sim\text{)}\\
&= [f' +_p g']_\sim
\end{aligned}$$

而 $\star_{X,Y}$ 只是 $[\star_{X,Y}]_\sim$。PCA 的公理得以满足，因为它们在 T(C) 中成立，且 $\sim$ 是一个同余关系。现在我们证明，在 T(C) 中，$A \xleftarrow{[\pi_1]_\sim} A \oplus B \xrightarrow{[\pi_2]_\sim} B$ 也是一个二元凸积。事实上，给定 $[f]_\sim : X \to A$ 和 $[g]_\sim : X \to B$，以及 $p_1, p_2 \in [0,1]$ 使得 $p_1 + p_2 \leq 1$，我们证明存在唯一的 $[h]_\sim : X \to A \oplus B$，使得 $[h]_\sim ; [\pi_1]_\sim = p_1 \cdot [f]_\sim$ 且 $[h]_\sim ; [\pi_2]_\sim = p_2 \cdot [g]_\sim$。令 $h \text{ def } = \langle f, g \rangle_{(p_1,p_2)}$ 即可得到存在性。对于唯一性，假设还存在一个具有相同性质的 $[h']_\sim$。那么，根据定理 3，$h' = \langle f', g' \rangle_{(q_1,q_2)}$，其中某些 $f' : X \to A$、$g' : X \to B$ 和 $q_1, q_2 \in [0,1]$ 满足 $q_1 + q_2 \leq 1$。现在，由于 $[h']_\sim ; [\pi_1]_\sim = [q_1 \cdot f']_\sim = [p_1 \cdot f]_\sim$ 且 $[h']_\sim ; [\pi_2]_\sim = [q_2 \cdot g']_\sim = p_2 \cdot [g]_\sim$，根据命题 12，我们有 $[h']_\sim = [\langle f, g \rangle_{(p_1,p_2)}]_\sim$。因此，$\langle [f], [g] \rangle_{(p_1,p_2)} := [\langle f, g \rangle_{(p_1,p_2)}]$ 是具有所需性质的唯一态射。另请注意，根据定义，$[f]_\sim +_p [g]_\sim = [\triangleleft]; ([f]_\sim \oplus [g]_\sim); [\triangleright]_\sim$。$Q_\sim$ 是一个凸双积函子，这是因为它是 PCA-富集的，并且保留余积。

G 第 7 节附录

证明（引理 *6* 的证明）。对 $n \in \mathbb{N}$ 进行归纳，证明

对于所有 n、$m \in \mathbb{N}$，以及所有带 $s, t : A^n \to A^m$，若对于所有 $b \in \mathbf{B}[1, A^n]$，都有 $b; s \sim b; t$，则 $s \sim t$。

对于基例 $n = 0$，只有一个 $b \in \mathbf{B}[1, A^0]$，，即 id_1。因此这是显然的。

现在考虑 $n + 1$ 的情形。取 $s, t : A^{n+1} \to A^m$ 为两条带，使得对于所有 $b \in \mathbf{B}[1, A^{n+1}]$，

$$b; s \sim b; t. \tag{34}$$

我们有，对于所有 $b' \in \mathbf{B}[1, A^n]$

$$\begin{aligned}
b'; s_0 &= b'; (\boxed{0} \otimes id_{A^n}); s && \text{(def. of } s_0\text{)} \\
&= (\boxed{0} \otimes b'); s && \text{(Symmetric Monoidal Category)} \\
&\sim (\boxed{0} \otimes b'); t && (34) \\
&= b'; (\boxed{0} \otimes id_{A^n}); t && \text{(Symmetric Monoidal Category)} \\
&= b'; t_0 && \text{(def. of } t_0\text{)}
\end{aligned}$$

由于 s_0, t_0 的类型为 $A^n \to A^m$，我们可以应用归纳假设，推出 $s_0 \sim t_0$。通过对称的论证，我们有 $s_1 \sim t_1$。现在，只需使用带的公理 (17) 的编码

$$\begin{aligned}
s &\sim (id_A \otimes (\boxed{n}; s_1 \otimes s_0)); \boxed{m} && \text{(ax. (17))} \\
&\sim (id_A \otimes (\boxed{n}; t_1 \otimes t_0)); \boxed{m} && (s_0 \sim t_0,\ s_1 \sim t_1) \\
&\sim t && \text{(ax. (17))}
\end{aligned}$$