arXiv:2601.01476v1 [physics.flu-dyn] 4 Jan 2026

惯性重力波的波湍流：海洋谱理论

Michal Shavit[1]†、Oliver B¨uhler[1] 和 Jalal Shatah[1]

[1]纽约大学库朗数学科学研究所，美国纽约州 10012

（收到日期：xx；修订日期：xx；接受日期：xx）

我们运用动理学波理论，推导出适用于所有频率（包括近惯性频率）的海洋内波二维经验 Garrett–Munk谱。该推导直接基于具有恒定层结和旋转的二维 Boussinesq系统控制方程。与以往研究相比，我们的结果有所改进：避开了正则变量的使用；在非静力色散关系中充分考虑科里奥利参数；从动力学中滤除平衡流分量；利用能量和两个分量伪动量的守恒定律，将碰撞积分化为非常简洁的形式；给出了碰撞积分精确的收敛条件；并找到了唯一的尺度不变湍流波谱，对应于从小波数到大波数的湍流通量。最后这一步是在科里奥利参数很小但不为零的极限下完成的。

主要结果是，任何非零的科里奥利参数都能消除非旋转问题的奇异性；而色散关系和相互作用系数的齐次性本身就足以表明，谱可分离为垂向波数和频率的函数。在二维动力学的限制下，这为内波湍流提供了一个与海洋观测相符的理论框架。

关键词：内波、旋转流体中的波、海洋学。

1. 引言

我们介绍深海内波宽带谱的重要性，并概述动理学波理论用于模拟此类谱形成的方法。随后讨论一些概念上的障碍，这些障碍使该领域的进展比动力学理论的其他应用更为困难。接着，我们介绍近期提出的方法如何克服了其中大多数障碍，尽管目前仅限于二维空间。针对较小但非零的科里奥利参数所获得的详细数值结果，给出了与观测谱整个频率范围相符的二维波谱，其中也包括近惯性频率处显著的峰值。

1.1. 海洋内波

内重力波是深海中能量向小尺度传递、促使其跨越等密度面发生海洋混合的主要途径之一（MacKinnon 等 2017；Whalen 等

† 通讯邮箱：ms14479@nyu.edu

2020）；众所周知，这对全球海洋环流在长时间尺度上的运行至关重要。然而，相关波动的变化速度极快、尺度极小，全球环流模型根本无法直接解析，因此必须结合理论和观测对其动力学行为及其引发的混合进行参数化。这就需要采取统计方法来辨析波的平均功率谱。在这方面，人们特别关注到，宽带海洋波谱在整个海洋中的形状和振幅都惊人地相似，并且与著名的 Garrett–Munk（GM）谱非常接近（Garrett & Munk 1979年；Munk 1981；Ferrari & Wunsch 2009年）。作为参考，这是一个在 $(\omega,\ m)$ 空间中可分离的谱，其中 $\omega \geqslant f$ 为频率， m 为垂向波数，其典型形式为

$$e_{GM}(\omega, m)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}m = \frac{C_0}{m^2}\frac{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}m}{\omega\sqrt{\omega^2 - f^2}}. \tag{1.1}$$

这里， $C_0 > 0$ 为常数， f 为科里奥利参数。该形式的 GM 谱在所有频率下均有效，但仅适用于垂向波长介于 $10 - 1000$米之间的情形。这是因为在较大尺度上，海洋的有限水深效应不可忽略；而在较小尺度上，由于剪切不稳定造成的耗散，谱会迅速衰减。

尽管已知的内波主要源于风强迫和粗糙地形上的潮汐相互作用，且这两种强迫在频率上都非常狭窄，分别在惯性频率和半日潮频率处达到峰值，GM 谱却仍普遍存在。自此以后，近乎单色且空间分布不均匀的波强迫机制如何在整个海洋中形成相当普适的宽带谱，一直是物理海洋学中的一个长期谜题（Olbers 1983）。

1.2. 动理学波理论

解释宽带谱如何从窄带强迫中产生的一种可能理论，是共振波-波相互作用的动力学理论。该理论最初是在地球物理学中针对表面波发展起来，随后被应用于内波（例如 Hasselmann 1966；McComas & Bretherton 1977；Lvov & Tabak 2001；Lvov等 2010；Dematteis & Lvov 2023；Lanchon & Cortet 2023；Labarre 等 2024a，b），其中共振相互作用发生在波三元组之间。这种波湍流理论假设，流场由许多振幅很小、彼此弱相互作用的波模态组成。大多数波-波相互作用都是非共振的，因此对波谱影响甚微；但其中一部分共振相互作用（即波模态的非线性组合能以精确频率共振地激发另一个波模态）则能显著改变谱振幅。值得注意的是，这些假设可以系统地转化为一种湍流闭合方案，进而得到一个称为动力学方程的非线性积分方程。该方程通过碰撞积分描述谱内共振相互作用，并刻画能谱的缓慢非线性演化。

这类理论的基本推导及其运作机制如今已广为人知，并见于教科书（例如 Zakharov 等人2012；Nazarenko 2011；Galtier，2022）。这些理论最重要的非平凡成果，是预测了所谓 Zakharov–Kolmogorov 谱所具有的独特幂律指数。这些谱描述了波能量如何在远离强迫尺度和耗散尺度的惯性波数带中级联。与标准流体动力学湍流中广为人知的 Kolmogorov 谱不同，这些幂律可以依据动力学方程从第一性原理推导出来。

1.3. 内波特有的障碍

尽管前景可观，但由于种种原因，要对海洋内波作出明确预测一直很困难。首先，动理学波理论在可用典范哈密顿系统中常见变量表述的系统上发展得最为成熟。然而，相关流体系统众所周知属于非典范哈密顿系统，无法纳入这种描述（Salmon 1988）。其次，对于各向同性系统，理论预测最为有力；在这类系统中，无论是波色散关系还是最终形成的波谱，都不存在特殊方向。只有在色散关系为单项式的情况下（例如 $\omega = k^a m^b$，其中 ω 是波频率，$(k,\ m)$ 是多维波数向量的分量，而 $(a,\ b)$ 是一些指数），考虑各向异性效应才相对简单。但著名的内波色散关系并非如此（见 §2.2）

$$\omega^2 = \frac{N^2 k^2 + f^2 m^2}{k^2 + m^2}, \tag{1.2}$$

其中，N 是浮力频率，f 是科里奥利参数，而（$k,\ m$）分别是水平波数和垂直波数。这促使人们尝试在某些极限条件下用单项式形式对其进行近似，例如忽略 f^2 并采用静力近似 $\omega^2 \approx N^2 k^2/m^2$。值得注意的是，尽管这种近似对海洋波谱的某些部分而言是准确的，但对其他部分却会造成极大偏差；而且，动理学波理论的方法具有整体性，必然涉及整个谱范围。在零旋转条件下，$k = 0$ 对应慢模态；将其纳入其中，与推导动力学方程时的一项基本假设（例如波的初始分布具有高斯性）不相容。第三，海洋内波场受到科里奥利力的强烈影响，也就是说，相关波为同时受层结 N 和旋转 f影响的惯性重力波。两种截然不同的重要动力机制同时存在，使问题更加复杂，例如，这会阻碍前文所述的单项式近似尝试。第四，在存在旋转的情况下，要描述仅由内波构成且不含平衡涡旋运动的流场也变得更加困难。这一条件从根本上与流场位涡（PV）梯度的缺失有关；若$f \neq 0$，这便是一项非平凡的判据。

1.4. 我们的研究成果

在这项问题的研究中（相关成果见 Shavit等人（2024、2025）及本文），我们在上述四个方面都取得了根本性进展；事实上，我们认为，在 $f \ll N$ 条件下，我们已经解决了二维湍流惯性重力波的问题。取得这一进展的代价是，我们将研究限制在垂直平面内的二维运动，这样做在概念和数值方面有若干优势。可以说，这样做并不会遗漏明显的三维效应，因此我们认为这是朝着更普遍地解决该问题迈出的有益一步。不过，必须明确指出这一限制。

关于第一点，我们遵循 Ripa（1981）的做法，不考虑正则变量，而是直接基于线性系统的正规模展开控制方程来构建理论。这些正规模构成完整系统的一组完备集，并且关于总能量彼此正交。这样便能直接表述模态振幅的精确演化，并将所有二次守恒律明确地写出。随后，我们利用系统中能量和伪动量固有的守恒律，得到一个形式相对简单、便于进一步分析的动力学方程，它的

形式相对简单，便于进一步分析。关于第二点，我们采用完整的色散关系，并允许谱具有任意角向依赖。借鉴 Balk (2000) 提出的重要方法，我们只需利用色散关系和动力学方程关于波数的齐次性即可做到这一点。关于第三点，我们通过考察伪动量水平和垂直分量的精确守恒律，充分考虑了科里奥利力；这在该领域尚属创新。最后，关于第四点，我们明确将研究限制在一个近似波流形上，即从一开始就令线性位涡为零。我们表明，这会对一般守恒律产生一定影响，但不会影响与动力学方程相关的共振相互作用。

基于这一方法，我们在 Shavit 等人（2024）中证明，非旋转二维系统中湍流惯性区谱的唯一幂律候选是形如 $e(k,\ m) = C_0 K^{-3} g(\theta)$ 的谱密度，其中使用了极坐标（$k,\ m$） $= K(\cos\ \theta,\ \sin\ \theta)$。这是通过对碰撞积分进行详细分析实现的，并假设对于这类谱，碰撞积分是收敛的。值得注意的是，在这一阶段无需确定正确的角向依赖 $g(\theta)$。该论文还描述了将动力学方程形式扩展到旋转情形的方法，但这比非旋转情形复杂得多。Shavit 等人（2025）的后续研究旨在寻找非旋转情形下相关的角向依赖 $g(\theta)$。当 $f = 0$ and $k = 0$ 出现在（1.2）中时，零频模态的存在要求考虑一个正则化频率域，动力学方程才能成立。具体做法是切除一个接近零频率的小扇区；随后，我们在这一正则化区域内寻找湍流谱。之后逐步减小频率切除区域的宽度，并获得了非常清晰的数值收敛，收敛到形如

$$e(k, m) = C_0 K^{-3} \omega(\theta)^{-2} \tag{1.3}$$

得到了这一结果。这是一项全新的成果，与此前计算得到的所有二维谱都不同。值得注意的是，将其改写为 $(m,\ \omega)$-空间上的密度后，该谱恰好与 $m^{-2}\omega^{-2}$ 成正比；这正是大垂向波数和高频率下 GM 谱（1.1）的形式。据我们所知，这是首次从动力学波理论推导出与二维 GM 谱相容的二维谱。随后，一项针对无旋转二维 Boussinesq 方程的 DNS 研究在弱波湍流区间内证实了这一谱（Labarre 与 Shavit（2024））。

在本研究中，我们允许 $f \neq 0$ ，并对旋转碰撞积分进行了更为详尽的研究。关键在于， $|\omega|$ 现在被限制在 N 和 f 之间，因此严格不为零，从而排除了零频波。换言之，无论旋转多么微弱，旋转的存在都会提供一个物理频率截断，消除非旋转情形中的发散问题。这样便可以确定碰撞积分的精确收敛判据，而此前只能形式上假定其收敛。为此付出的代价是，旋转情形中的碰撞积分性质要复杂得多。对于 f/N的任意取值，我们无法辨识出湍流惯性区谱；但当其取值非常小时，数值证据充分表明，该谱再次由(1.3)给出。将其转换为(m, ω)空间中的谱密度，可得

$$C_0 K^{-3} \omega(\theta)^{-2}\, \mathrm{d}k\mathrm{d}m \propto m^{-2}\, \frac{\mathrm{d}\omega \mathrm{d}m}{\omega\sqrt{\omega^2 - f^2}}, \tag{1.4}$$

该谱即为具有完整频率依赖关系的GM谱，对所有频率均适用，包括近惯性频率。据我们所知，这是首次实现这一点。我们还表明，m 和ω 中的湍流谱密度具有可分离性，这一点已经由色散关系和动力学方程关于波数的齐次性所蕴含。这进一步支持了经验GM谱的另一项关键性质。

本文的安排如下。第 2 节介绍控制方程、守恒定律、波的模态展开及其共振相互作用。第 3 节推导动力学方程并讨论其形式性质，随后详细研究碰撞积分的收敛性。第 3.3 节和第 4 节介绍寻找湍流谱的数值方法。第 5 节给出一些总结性评述，附录则介绍共振流形的参数化细节。

2. 控制方程

在竖直 xz 切片中的二维 Boussinesq系统，可通过令完整 Boussinesq系统中所有 y 导数为零得到。在存在旋转的情况下，速度场仍为三维，即在 xz 平面内外方向上存在非零的 v 速度。控制方程可以用一种非标准但实用的形式写为

$$\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} + P_x = fv, \quad \frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t} + P_z = b, \quad u_x + w_z = 0 \tag{2.1}$$

and

$$\frac{\mathrm{D}(fv)}{\mathrm{D}t} + f^2 u = 0, \quad \frac{\mathrm{D}b}{\mathrm{D}t} + N^2 w = 0. \tag{2.2}$$

这里，$\mathbf{u} = (u,\ v,\ w)$ 是沿 $(x,\ y,\ z)$ 方向的速度分量，b 是浮力，P 是压力除以参考密度，f 是科里奥利参数，N 是浮力频率。假设 f 和 N 均为常数，且 $N > f > 0$。典型的海洋态为 $N/f \geqslant 40$。

方程（2.2）强调了竖直方向的浮力 b 与水平方向的惯性力 fv 之间的相似性。事实上，二维方程在旋转九十度后保持对称

$$(x, z) \to (z, -x), \quad (u, w) \to (w, -u), \quad (fv, b) \to (b, -fv), \quad (f, N) \to (N, f). \tag{2.3}$$

完整的三维 Boussinesq系统并不具有这种精确对称性（Veronis，1970）。因此，存在两个物质不变量，即

$$S = N^2 z + b \quad \text{and} \quad M = f^2 x + fv \quad \text{such that} \quad \frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = 0. \tag{2.4}$$

因此，S 和 M 的等值线构成一张随物质运动的曲线网格，它能自动呈现 xz平面上的流映射。此外，精确的位涡（PV）为

$$Q = (\nabla \times \mathbf{u} + f\hat{\mathbf{z}}) \cdot \nabla(N^2 z + b) = fN^2 + fb_z + N^2 v_x + v_x b_z - v_z b_x = \frac{1}{f} J(M, S) \tag{2.5}$$

其中雅可比矩阵 $J(M,\ S) = M_x S_z - M_z S_x$。因此，位涡与随物质运动的曲线网格的面积元成正比。若位涡为常数，则 $(M,\ S)$-网格的面积处处相同；这正是完全由

内波构成的流动所对应的情形。下面我们使用

$$q = (Q - fN^2)/N^2 = v_x + \frac{f}{N^2} b_z + \frac{1}{N^2} J(v, b), \tag{2.6}$$

其单位与涡度相同；当PV等于其背景值fN^2时，它为零。总的来说，我们将该系统视为描述一个面积保持的二维速度场（$u,\ w$）在由旋转和层结引起的二维恢复体力（$fv,\ b$）作用下的动力学。

2.1. 守恒定律

在适当的边界条件下，该系统守恒熟知的二次能量

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int \left(u^2 + v^2 + w^2 + \frac{b^2}{N^2} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}z. \tag{2.7}$$

值得注意的是，$v^2 = (fv)^2/f^2$也可以视为可用势能的一部分，与 b^2/N^2同等重要。众所周知（Scinocca & Shepherd 1992），非旋转系统守恒水平伪动量

$$\mathcal{P}_x = \int \frac{b(u_z - w_x)}{N^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}z. \tag{2.8}$$

鲜为人知的是，即使存在旋转，$\mathcal{P}_x$ 也守恒，但此时仅当PV均匀时才成立，即 $q = 0$ 处处成立（B¨uhler 等1999年）。事实上，直接推演可得

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \left(\frac{b(u_z - w_x)}{N^2} \right) + \nabla \cdot \mathbf{F} + vq = 0 \tag{2.9}$$

其中通量矢量

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{N^2} + u^2 - v^2 - w^2 - \frac{v^2 b_z}{N^2} \right), uw - \frac{f}{N^2} bv + \frac{v^2 b_x}{2N^2} \right). \tag{2.10}$$

由对称性 (2.3) 可知，形式如下的垂直伪动量

$$\mathcal{P}_z = - \int \frac{v(u_z - w_x)}{f} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}z \tag{2.11}$$

在相同条件下也严格守恒，这一点似乎此前尚未被认识到。具体而言，守恒要求源项 vq 在 (2.9) 中的积分为零。分部积分得到

$$vq = \frac{1}{2}(v^2)_x + \frac{f}{N^2} v b_z + \frac{1}{2N^2} J(v^2, b) = \ldots - \frac{f}{N^2} b v_z, \tag{2.12}$$

其中最后一项是在周期区域上不会自动积分为零的唯一一项。该项与旋转有内在联系。

2.2. 线性模态

在周期区域中，通过要求所有场均正比于 $\exp(i[kx + mz - \omega t])$ 并代入线性化方程，可以求得线性模态；这些模态构成一个完备集，可用于分解任意时刻的流动。色散关系有三个根。其中一个是零根 $\omega = 0$，描述一种定常流。该模态没有面内速度 $u^b = w^b = 0$，但具有 $fv^b = P^b_x$ 和 $b^b = P^b_z$，也就是说，存在地转平衡和静力平衡。因此，这种定常模态通常被称为

平衡模态。因而，平衡模态的线性位涡 q^b 为

$$q^b = v_x^b + \frac{f}{N^2} b_z^b = \frac{1}{f}\left(P_{xx}^b + \frac{f^2}{N^2} P_{zz}^b\right). \tag{2.13}$$

在周期区域中，这建立了零均值函数 q^b 与 P^b之间唯一可逆的映射，因此可以根据线性位涡诊断出平衡模态。特别是，当 $q^b = 0$ 处处成立时，平衡模态为零。平衡模态具有非零能量，但伪动量为零。在二维流动中，线性平衡模态也是非线性定常解，但在三维中则并非如此。

线性内波满足齐次色散关系

$$\omega^2 = \frac{N^2 k^2 + f^2 m^2}{k^2 + m^2} = N^2 \cos^2\theta + f^2 \sin^2\theta, \tag{2.14}$$

其中，第二种形式使用了极坐标 $\mathbf{k} = K(\cos\theta,\ \sin\theta)$。以下这一点至关重要：

$$N^2 \geqslant \omega^2 \geqslant f^2 > 0, \tag{2.15}$$

也就是说，$|\omega|$ 有界且严格为正。我们通过写出下式，明确考虑式 (2.14) 中符号相反的两个分支

$$\omega = \sigma\,\hat{\omega} \quad \text{where} \quad \hat{\omega} = +\sqrt{N^2\cos^2\theta + f^2\sin^2\theta} \tag{2.16}$$

而 $\sigma = \pm 1$ 表示 ω的符号。† 一般而言，内波具有非零伪动量；对一个平面内波在一个波长范围内积分，可得著名关系

$$(\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_z) = \frac{(k, m)}{\omega}\,\mathcal{E} \tag{2.17}$$

伪动量矢量与波能量之间的关系。波模态的线性位涡

$$q^w = v_x^w + \frac{f}{N^2} b_z^w = 0 \tag{2.18}$$

对所有$\mathbf{k} = (k,\ m)$。

(2.18) 的一个重要推论是，总能量在所有波模态以及所有平衡模态之间均具有正交性。这是因为经过分部积分后，混合能量项

$$v^b v^w + \frac{1}{N^2} b^b b^w = P_x^b v^w / f + \frac{1}{N^2} P_z^b b^w = \ldots - P^b/f\left(v_x^w + \frac{f}{N^2} b_z^w\right) \tag{2.19}$$

根据 (2.18)，积分结果为零。因此，至少在线性理论下，任意时刻的总能量都可以唯一地分解为波动分量和平衡分量。遗憾的是，总伪动量矢量并非如此，其中诸如以下的混合项

$$\frac{b^b}{N^2}(u_z^w - w_x^w) = \frac{1}{N^2} P_z^b (u_z^w - w_x^w) \tag{2.20}$$

在积分后未必为零。从物理上说，当波与平衡模态在物理空间中重叠时，这种正交性的缺失与平衡模态存在时伪动量不守恒有关。可以通过一个思想实验来说明这一点：考虑一个紧支撑波包的线性动力学，并且该波包

† 这一约定与 Shavit *et al.*（2024，2025）不同。在后者中，对于 $f = 0$，分支的选择可以连续地与左行波或右行波相联系。如果 $f \neq 0$，则无法做到这一点。

加入了一个局地平衡流，使得在 $t=0$ 处，浮力 $b=b^b+b^w=0$。这意味着水平伪动量 $\mathcal{P}_x=0$ 起初为零。然而，随着波包向外传播，它将表现出一个非零的 $\mathcal{P}_x$，其值由（2.17）给出；与此同时，稳态平衡模态留在原处，且伪动量为零。因此，如果波包与平衡模态重叠，伪动量既不守恒，也不能在波模态与平衡模态之间相加。

2.3. 限制到波流形

我们关注孤立弱内波的长期动力学，即不存在额外平衡流的情形。严格来说，我们希望施加非线性位涡约束，使 $q\equiv 0$ 在整个区域内成立，这样它便会在非线性动力学中守恒。对于小振幅弱内波，我们所能做到的最好程度，是根据线性理论 先验地令 $q^b=0$，从而消除平衡流分量。因此，我们只允许波振幅非零，并且只追踪波-波相互作用，这就是我们对限制到波流形的定义。

我们使用希腊指标 $\alpha=(\sigma_\alpha,\ \mathbf{k}\alpha)$ 来标识波模态；实性条件意味着 α 和 $-\alpha=(-\sigma_\alpha,\ -\mathbf{k}\alpha)$ 指的是同一个物理波模态。按照 Ripa（1981）的做法，完整非线性系统的复波振幅 $Z_\alpha(t)$ 的演化方程为

$$\dot{Z}_\alpha+i\omega_\alpha Z_\alpha=\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma}V_\alpha^{\beta\gamma}Z_\beta^*Z_\gamma^*. \tag{2.21}$$

这里，$V_\alpha^{\beta\gamma}=V_\alpha^{\gamma\beta}$是实值的波-波相互作用系数，且仅当满足三波组条件时才非零

$$k_\alpha+k_\beta+k_\gamma=0\quad\text{and}\quad m_\alpha+m_\beta+m_\gamma=0 \tag{2.22}$$

对于二维波数向量 $\mathbf{k}=(k,m)$，上述条件成立。因此，相互作用三元组的波数向量构成三角形。振幅满足实性条件 $Z_{-\alpha}=Z_\alpha^*$，且其缩放方式使得 $E_\alpha=|Z_\alpha|^2=E_{-\alpha}$ 表示波模态 α的能量。根据 Galerkin截断的标准论证，每个三元组的二次能量分别守恒（例如，Salmon，1998）。这意味着

$$V_\alpha^{\beta\gamma}+V_\beta^{\alpha\gamma}+V_\gamma^{\alpha\beta}=0. \tag{2.23}$$

为简洁起见，下文在明确讨论特定三元组 (α,β,γ) 时，我们记作 $V_\alpha=V_\alpha^{\beta\gamma}$。利用色散关系，我们可以将 Shavit等 （2024）的式（31）改写为形式优美且完全对称的精确表达式

$$V_\alpha=\frac{\mathbf{k}_\beta\times\mathbf{k}_\gamma}{K_\alpha K_\beta K_\gamma}\left\{\frac{N^2}{2\sqrt{8}}\left(s_\alpha+s_\beta+s_\gamma\right)\left(s_\beta-s_\gamma\right)+\frac{f^2}{2\sqrt{8}}\left(r_\alpha+r_\beta+r_\gamma\right)\left(r_\beta-r_\gamma\right)\right\}. \tag{2.24}$$

这里，$K=|\mathbf{k}|$、$\mathbf{k}_\beta\times\mathbf{k}^\gamma=\mathbf{k}_\gamma\times\mathbf{k}_\alpha=\mathbf{k}_\alpha\times\mathbf{k}^\beta$ 是三角形（2.22）的有向面积的两倍，而 $(s,r)=(k,m)/\omega$ 是“慢度”向量的分量。此表达式对所有三元组仍然成立，即迄今尚未用到频率共振条件。只有慢度差会受到 (α,β,γ) 的循环置换影响，这立即证明了（2.23）。

现在，在 Shavit等人（2024）的非旋转情形中，每个波三元组的水平伪动量sE 也分别守恒，因此得出

$$s_\alpha V_\alpha+s_\beta V_\beta+s_\gamma V_\gamma=0. \tag{2.25}$$

当 $f = 0$ 时，这可由式（2.24）得出，但其他情况下则不成立。同样，垂直伪动量 rE 守恒意味着

$$r_\alpha V_\alpha + r_\beta V_\beta + r_\gamma V_\gamma = 0, \tag{2.26}$$

这一关系仅在 $N = 0$ 时成立，其他情况下则不成立。这表明，与能量守恒不同，由于此前讨论过的正交性缺失，要实现精确的伪动量守恒，还必须同时考虑平衡模态的模态振幅。不过，将讨论限制在共振三元组后，这一不理想的情况便能彻底解决。

2.4. 共振三元组

现在我们将讨论限制在共振波三元组上

$$\omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma = 0 \tag{2.27}$$

并证明对于这些三元组，三个约束条件（2.23、2.25、2.26）能够同时满足。事实上，这个超定系统存在如下非平凡解

$$\frac{V_\alpha}{\omega_\alpha} = \frac{V_\beta}{\omega_\beta} = \frac{V_\gamma}{\omega_\gamma}, \tag{2.28}$$

此时，（2.25）和（2.26）便化为三角条件（2.22）。为了从（2.24）证明（2.28），我们只考虑 N^2 项，因为 f^2 项可按相同方法处理。考虑

$$\frac{V_\alpha}{\omega_\alpha} = \frac{\mathbf{k}_\beta \times \mathbf{k}_\gamma}{K_\alpha K_\beta K_\gamma} \left\{ \frac{N^2}{2\sqrt{8}} \left(s_\alpha + s_\beta + s_\gamma\right) \frac{\left(s_\beta - s_\gamma\right)}{\omega_\alpha} \right\} \tag{2.29}$$

然后

$$\frac{s_\beta - s_\gamma}{\omega_\alpha} = \frac{\frac{k_\beta}{\omega_\beta} - \frac{k_\gamma}{\omega_\gamma}}{\omega_\alpha} = \frac{k_\beta \omega_\gamma - k_\gamma \omega_\beta}{\omega_\alpha \omega_\beta \omega_\gamma}. \tag{2.30}$$

这是三维叉积的第一个分量

$$\left(k_\alpha, k_\beta, k_\gamma\right) \times \left(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\gamma\right) \tag{2.31}$$

乘以一个在 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ 的置换下完全对称的因子。对另外两个分量重复这一过程，得到

$$\left(\frac{V_\alpha}{\omega_\alpha}, \frac{V_\beta}{\omega_\beta}, \frac{V_\gamma}{\omega_\gamma}\right) = A \left(k_\alpha, k_\beta, k_\gamma\right) \times \left(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\gamma\right) \tag{2.32}$$

其中有一个完全对称的 A。现在，对于共振三元组，$(k_\alpha,\ k_\beta,\ k_\gamma)$ 和 $(\omega_\alpha,\ \omega_\beta,\ \omega_\gamma)$ 都与 (1，1，1) 正交，因此它们的三维叉积平行于 (1，1，1)，这就证明了 (2.28)。f^2 项可用同样的论证得出，只需用垂直波数 m 替换水平波数 k。由此可知，对于共振三元组

$$\left(V_\alpha, V_\beta, V_\gamma\right) = \left(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\gamma\right) \Gamma \tag{2.33}$$

成立，其中 a

$$\Gamma = \frac{\mathbf{k}_\beta \times \mathbf{k}_\gamma}{K_\alpha K_\beta K_\gamma} \left\{ \frac{N^2}{2\sqrt{8}} \left(s_\alpha + s_\beta + s_\gamma\right) \frac{\left(s_\beta - s_\gamma\right)}{\omega_\alpha} + \frac{f^2}{2\sqrt{8}} \left(r_\alpha + r_\beta + r_\gamma\right) \frac{\left(r_\beta - r_\gamma\right)}{\omega_\alpha} \right\} \tag{2.34}$$

尽管表面上看并非如此，但它在 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ 中完全对称。

3. 动力学方程与湍流谱

在 Shavit等（2024）中，我们推导了一个动力学方程，用于描述平均波能量密度 $e_\alpha(t) = e(\sigma_\alpha,\ \mathbf{k}_\alpha,\ t) = \langle E_\alpha \rangle$ 的缓慢演化，假设 $0 < f < N/2$并排除平衡模态。方括号表示对初始高斯统计系综 $\langle Z_\alpha^*(0) Z_\beta(0) \rangle = \delta_{\alpha\beta} e_\alpha(0)$ 取平均。我们取大区域和长非线性时间的联合动力学极限，从而得到动力学方程

$$\partial_t e_\alpha = St_\alpha = \pi \int\limits_{\omega_{\alpha\beta\gamma}} \omega_\alpha \, \Gamma^2 (\omega_\alpha e_\beta e_\gamma + \omega_\beta e_\alpha e_\gamma + \omega_\gamma e_\alpha e_\beta). \tag{3.1}$$

在此极限下，式 (2.21) 中的离散求和由对共振流形的积分取代：

$$\int\!\!\!\!\!\!= \int \mathrm{d}\beta \mathrm{d}\gamma \; \delta(\omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma) \delta \left(\mathbf{k}_\alpha + \mathbf{k}_\beta + \mathbf{k}_\gamma \right), \tag{3.2}$$

其中 $\int\!\!\!\!\!\!\mathrm{d}\beta = \sum_{\sigma_\beta = \pm 1} \int\limits^{\omega_{\alpha\beta\gamma}} \mathrm{d}k^\beta$ 等。碰撞积分遍及所有能与 α 形成共振三元组的模态 (β, γ)。实性条件意味着 $e_\alpha = e_{-\alpha}$，因此我们始终只考虑 $\sigma_\alpha = 1$，从而 $\omega_\alpha > 0$。对于 β 和 γ，两个分支都相关，但我们可以根据需要使用 $e(-1, \mathbf{k}\ t) = e(+1, -\mathbf{k}\ t)$，将所有内容表示为 $e(\mathbf{k}\ t) \equiv e(+1, \mathbf{k}\ t)$ 的形式。总之，能谱由一个与正频率分支 $\omega > 0$ 相关的单一函数 $e(\mathbf{k}\ t) \geqslant 0$ 描述，而诸如 e_β 这样的简写指的是 $e(\sigma_\beta \mathbf{k}_\beta, t)$。

3.1. 动力学方程的形式性质

我们列举若干关于式 (3.1) 的有用标准结论；只要假设 St_α 和 $\int St_\alpha \mathrm{d}\alpha$ 收敛，这些结论便很容易得出。这些形式性质有助于理解动力学方程的一般行为。收敛问题将在 §3.2 中讨论。

首先，式 (3.1) 守恒总波能量和两个赝动量分量，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int (1, s_\alpha, r_\alpha) \, e_\alpha \, \mathrm{d}\alpha = 0. \tag{3.3}$$

对于能量而言，将式 (3.1) 的被积函数改写为以下形式即可看出这一点

$$\omega_\alpha \, \Gamma^2 \left(\frac{\omega_\alpha}{e_\alpha} + \frac{\omega_\beta}{e_\beta} + \frac{\omega_\gamma}{e_\gamma} \right) e_\alpha e_\beta e_\gamma, \tag{3.4}$$

这表明被积函数等于 ω_α 乘以一个关于（α、β、γ）完全对称的余项。对 α 积分后，所有希腊字母现在都可以自由重新标记，因此我们可以将总积分改写为由（α、β、γ）的循环置换所得到的原积分的三份副本的平均值。形式上，这三个积分随后可以合并为一个积分，其中 ω_α 被替换为（$\omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma$）/3。然而，这在共振流形上为零，由此证明了能量守恒。同样的论证也适用于赝动量分量，例如，$s_\alpha \omega_\alpha = k_\alpha$ 和（$k_\alpha + k_\beta + k_\gamma$）在共振流形上也为零。这是波动力学理论中的一个重要标准论证。在数值模拟中，将动力学方程截断到有限波数范围后，这些守恒定律仍然成立。其成立的条件是，只考虑所有成员都落在截断范围内的三元组。这比一个众所周知的事实略弱：Galerkin截断的Boussinesq系统的直接数值模拟能够保持二次不变量的精确守恒。

其次，(3.1)满足如下形式的不可逆熵定律

$$H=\int \ln e_\alpha \,\mathrm{d}\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\int \frac{St_\alpha}{e_\alpha}\,\mathrm{d}\alpha \geqslant 0. \tag{3.5}$$

值得注意的是，这里的熵密度是 $\ln\, e_\alpha$，而不是 $e_\alpha \ln e_\alpha$，这意味着熵定律仅适用于严格正的分布 $e_\alpha > 0$。式（3.5）的有效性可通过将式（3.1）除以 e_α，对 α积分，对循环置换取平均，并重新合并为单个积分得出。由此，式（3.4）可改写为以下非负表达式

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\omega_\alpha}{e_\alpha}+\frac{\omega_\beta}{e_\beta}+\frac{\omega_\gamma}{e_\gamma}\right)^2 \Gamma^2 e_\alpha e_\beta e_\gamma, \tag{3.6}$$

这证明了式（3.5）。与将动力学方程解释为非线性扩散方程相一致，碰撞积分在 e_α 较小的区域自然趋于为正，而在 e_α相对较大的区域则趋于为负。事实上，如果 $e_\alpha = 0$，那么式（3.1）的被积函数中只有一个与 ω_α^2 成正比的正项，因此 $e_\alpha \geqslant 0$得以保持。

第三，分布 $e_\alpha = (A + Bs_\alpha + Cr_\alpha)^{-1}$（常数为（$A$， B， C））是式（3.1）的平凡稳态，因为它们使式（3.4）的被积函数在共振流形上为零。这些统计平衡态也是能量和伪动量固定时的最大熵态，因此是有限波数域内数值初值问题的自然渐近终态。

第四，如果总波数区域被划分为两个互斥且共同穷尽整个区域的子域 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，那么从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的非线性能量交换便可通过 $\int_{\mathcal{B}} St_\alpha \mathrm{d}\alpha$明确量化。特别是，

$$\mathit{\Pi}_0(K,t)=\int\limits_{K_\alpha>K} St_\alpha\, K_\alpha \mathrm{d}K_\alpha \mathrm{d}\theta_\alpha \tag{3.7}$$

它表示能量从圆 $|\mathbf{k}_\alpha| = K$ 内部向外部的径向通量。无论谱是否各向同性、系统是否处于稳态，这一结论都成立。

3.2. 碰撞积分的收敛

这里我们考察 St_α 和 $\int St_\alpha \mathrm{d}\alpha$ 的收敛性如何依赖于 $e(\mathbf{k})$（此处省略与讨论无关的时间依赖性）。固定 $\mathbf{k}_\alpha \neq 0$，并考察 St_α的收敛性。当 $\omega_\alpha > 0$ 时，共振条件 $\Omega \equiv \omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma = 0$意味着 $(\omega_\beta,\omega_\gamma)$ 中至少有一个为负，因此 $\sigma_\beta = \sigma_\gamma = -1$ 或 $\sigma_\beta = -\sigma_\gamma$。波数中的狄拉克δ函数意味着，对 $\mathrm{d}\gamma$ 的积分只需令$\mathbf{k}_\gamma = -(\mathbf{k}_\alpha + \mathbf{k}_\beta)$ 处处成立，此后 St_α 便相当于对$\mathbf{k}_\beta$进行二维积分。一般而言，共振条件 $\Omega = 0$ 随后会在$\mathbf{k}_\beta$平面上选定一条线，而St_α 则化为沿该线的积分。由于频率狄拉克δ函数和/或极限 $K_\beta \to \infty$ 与 $K_\beta \to 0$，可能会出现收敛问题。

我们最感兴趣的是以下形式的奇异分布

$$e(\mathbf{k}) = e(K,\theta) = C_0 K^{-a} g(\theta) \tag{3.8}$$

其中柯尔莫哥洛夫常数为 $C_0 > 0$，幂律指数为 $-a$，有界函数$g(\theta) \geqslant 0$ 用于描述各向异性。值得注意的是，(3.8) 包含 $\mathbf{k}_\alpha$ 各分量的单项式幂律，此外还包含许多其他函数。

3.2.1. 频率狄拉克δ函数的收敛

频率狄拉克δ函数的自变量为

$$\Omega(\mathbf{k}_\beta) = \omega_\alpha + \sigma_\beta\hat{\omega}(\mathbf{k}_\beta) + \sigma_\gamma\hat{\omega}(-(\mathbf{k}_\alpha + \mathbf{k}_\beta)) \tag{3.9}$$

而收敛的一个充分条件是 $\Omega = 0$ 蕴含 $|\nabla_{\mathbf{k}_\beta}\Omega| \neq 0$。根据$\sigma_\beta\sigma_\gamma$ 的符号，当$\mathbf{k}_\beta$ 处的群速度 $\mathbf{c_g} = \nabla_{\mathbf{k}}\hat{\omega} \neq 0$ 等于$\mathbf{k}_\gamma$处群速度的正值或负值时，这一条件可能不成立。由此可见，根据色散关系（2.16），$\mathbf{c_g}(\mathbf{k})$与 $1/K$ 成正比，并沿以$\mathbf{k} = 0$为圆心的同心圆指向。具体而言，$\mathbf{c_g} = 0$ 位于两个坐标轴上，而$\mathbf{c_g}$ 则从垂直轴 $k = 0$ 上的频率最小值f 指向水平轴 $m = 0$上的频率最大值 N。因此，$\mathbf{c_g}(\mathbf{k}) \neq 0$ 可逆，故$\mathbf{c_g}(\mathbf{k}_\beta) = \pm\mathbf{c_g}(\mathbf{k}_\gamma)$蕴含$\mathbf{k}_\beta = \pm\mathbf{k}_\gamma$。但这样一来，$(\mathbf{k}_\alpha,\mathbf{k}_\beta,\mathbf{k}_\gamma)$共线，且其频率绝对值相同且非零，这意味着共振不可能发生。

剩下的特殊情况中，只有在魔性共振三元组处才可能出现$\mathbf{c_g}(\mathbf{k}_\beta) = \mathbf{c_g}(\mathbf{k}_\gamma) = 0$

$$(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\gamma) = (N - f, f, -N) \tag{3.10}$$

其中$\mathbf{k}_\beta = (0, -m_\alpha)$、$\mathbf{k}_\gamma = (-k_\alpha, 0)$和$\hat{\omega}(k_\alpha, m_\alpha) = N - f$。然而，对于这个三元组，$\Omega(k_\beta, m_\beta)$的二阶导数矩阵是正定的，这意味着 $\Omega = 0$ 是 Ω的一个孤立零点和局部最小值。在这种特殊情况下，充分条件并不成立，但狄拉克δ函数仍然收敛，这一点可以通过对 xy平面上的示例 $\delta(x^2+y^2)$积分来验证。结论是，对于有限的 K_β，频率狄拉克δ函数不会导致收敛问题。

3.2.2. 大或小 K_β时的收敛

我们考察在固定$\mathbf{k}_\alpha \neq 0$时，$K_\beta \to \infty$ 的收敛性。在此极限下$\mathbf{k}_\gamma \approx -\mathbf{k}_\beta$，因此 $|\omega_\beta| \approx |\omega_\gamma|$，这意味着只有当 $\omega_\alpha > 2f$ 和$(\omega_\beta,\omega_\gamma)$均为负且近似等于 $-\omega_\alpha/2$时，才可能发生共振。这类三元组属于参数次谐波共振（McComas & Bretherton，1977年）。我们首先考察式（2.34）中的 Γ如何随 $K_\beta \gg 1$变化。前因子有界于 $1/K_\beta$，所有频率都与 $\pm\omega_\alpha$成正比，总慢度之和有界于 K_α，慢度差有界于 K_β，因此在此极限下 $\Gamma \sim K_\alpha$保持有界。对于式（3.8）这类衰减分布，e_α 远大于 e_β 或e_γ，因此在式（3.1）中，与$e_\beta e_\gamma$ 成正比的项相较于 $e_\alpha e_\beta \sim K_\beta^{-a}$ 可以忽略。最后，由于群速度按 $1/K_\beta$衰减，频率狄拉克δ函数按 K_β 缩放。这样便得到一个与 $K_\beta^{1-a}\,\mathrm{d}K_\beta$成正比的线积分；若 $a > 2$，则它在 $K_\beta \to \infty$ 时收敛。

反之，如果在固定的 $\mathbf{k}_\alpha \neq 0$ 下 $K_\beta \to 0$，那么 $\mathbf{k}_\gamma \approx -\mathbf{k}_\alpha$，因此 $|\omega_\gamma| \approx \omega_\alpha$。共振于是意味着 $\omega_\gamma \approx \omega_\alpha$ 和 $\omega_\beta \approx -2\omega_\alpha$；当 $\omega_\alpha < N/2$ 时，这种情况是可能的。这也是一个参数次谐波不稳定三元组。重复前面的步骤可得 $\Gamma^2 \sim K_\beta^2$、主导能量项 $e_\alpha e_\beta \sim K_\beta^{-a}$，以及一个随 K_β 缩放的狄拉克δ函数，这是因为主导的 $|\mathbf{c_g}(\mathbf{k}_\beta)| \propto 1/K_\beta$。由此留下一个与 $K_\beta^{3-a}\,\mathrm{d}K_\beta$ 成正比的线积分；若 $a < 4$，则该积分在 $K_\beta \to 0$ 时收敛。

总体结论是，对于满足以下条件的奇异分布类 (3.8)，碰撞积分 St_α 在固定的 $\mathbf{k}_\alpha \neq 0$ 下收敛：

$$2 < a < 4. \tag{3.11}$$

我们注意到，在推导（3.11）时，频繁使用了严格下界 $|\omega| \geqslant f > 0$。对于（3.8）而言，St_α 的收敛并不意味着 $\int St_\alpha \mathrm{d}\alpha$ 的收敛。换言之，对于这类奇异分布，不能假定全局能量守恒具有其最简单的形式（3.3）；这与（3.11）所暗示的原点附近无限能量含量相一致。

3.2.3. 自相似碰撞积分

幂律分布（3.8）使 St_α 的整个被积函数成为波数的齐次函数，从而可以提取出碰撞积分的精确自相似形式。将（3.8）代入（3.1），按 $|\mathbf{k}_\alpha| = K_\alpha$ 对（$\mathbf{k}_\beta$,$\mathbf{k}_\gamma$）进行缩放，并利用被积函数中所有因子的波数齐次性（ I^2 的次数为二，频率狄拉克δ函数的次数为零， $-2a$ for$^{e_\beta e_\gamma}$ 的次数为 $-2a$ ，以及 $\mathrm{d}\mathbf{k}_\beta$ 的次数为二），即可得到

$$St_\alpha = St(K_\alpha, \theta_\alpha) = K_\alpha^{4-2a}\ St(1, \theta_\alpha). \tag{3.12}$$

这里， $St(1,\ \theta_\alpha)$ 是在单位圆 $\mathbf{k}_\alpha = (\cos\ \theta_\alpha,\ \sin\theta_\alpha)$ 上计算得到的碰撞积分，它隐式地依赖于指数 a 以及式（3.8）中的角向依赖 $g(\cdot)$。我们已经证明，当 $K_\alpha = 1$ 时 St_α 存在，因此（3.12）表明，对所有有限非零的 K_α， St_α 均成立。值得注意的是， $\int St_\alpha \mathrm{d}\alpha$ 不存在，因为它在零点（$a > 3$）、无穷远处（$a < 3$）或两者（$a = 3$）发散。

顺便指出一个特别的发现：若 $a = 4$，则（3.1、3.8、3.12）形式上允许存在如下形式的时间依赖可分离解： $e(\mathbf{k}\ t) = K^{-4}g(\theta,\ t)$。这些解是否具有物理意义尚不清楚；它们出现在收敛区间（3.11）的边界处，但无疑为动力学方程的数值模拟提供了一个非平凡的检验。

3.3. 湍流谱

接下来，我们着手解决核心问题：寻找形如 (3.8) 的湍流谱，它对应于动力学方程的一个稳态，并具有从小波数向大波数的非零谱能量通量。原则上，要维持这样的稳态，需要在小波数处施加强迫，在大波数处施加阻尼。这是数值模拟中的标准设置，而 (3.8) 则是远离强迫和耗散区域的惯性区内预期的谱形状。实际上，对于区间 (3.11)，波数空间中任何不包含原点附近一块区域的部分都包含有限的波能量，因此惯性区可以延伸至无限波数，无需明确考虑大波数耗散（也就是说，按照波动湍流理论的术语，惯性区具有‘有限容量’）。因此，(3.1) 被替换为

$$\partial_t e_\alpha = St_\alpha + F_\alpha \tag{3.13}$$

其中，强迫函数 $F_\alpha \geqslant 0$ 的支撑集位于原点附近的一个小邻域内，例如，当某个 $\epsilon \ll 1$满足 $K_\alpha > \epsilon$ 时， $F_\alpha = 0$ ；并且我们可以假设，强迫幅度经过缩放，使得净输入率 $\int F_\alpha \mathrm{d}\alpha$ 与 ε无关。

在稳态下，可知 $St_\alpha = -F_\alpha$，也就是说，除了强迫区域内碰撞积分恰好抵消强迫之外，其他地方的碰撞积分均为零。于是，对于所有$K > \varepsilon$，式（3.7）中的径向能量通量 $\Pi_0(K)$ 都是常数，且等于净输入率。问题在于，是否可能找到一种稳态谱，使其在远场 $K_\alpha \gg \varepsilon$ 具有（ 3.8 ）的形式，同时又能在强迫区域内及其附近加以修正，从而使能量含量有限，并满足其中的 $St_\alpha = -F_\alpha \leqslant 0$ 。我们提出了三种不同的论证，均强烈表明，只有一种幂律可能成为这样的解。

这一方向上的首个成果由 Shavit 等人（2024）提出，将 Zakharov 等人（2012）关于各向同性波湍流的碰撞积分的标准论证，扩展到本文的强各向异性情形。具体而言，研究采用了 Balk（2000）提出的重要齐次性方法，以证明对于特殊值

$$a_0 = 3 \tag{3.14}$$

角度平均

$$\overline{St(1,\theta_\alpha)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} St(1,\theta_\alpha)\,\mathrm{d}\theta_\alpha \tag{3.15}$$

为零，前提是 $St(1,\ \theta_\alpha)$ 首先存在，而我们知道这里确实如此。值得注意的是，这一结果无需确定谱的角向依赖；事实上，如果 $a=3$，则已证明对于 $g(\cdot)$ 的< стиль id='6'>任何有界取值，角度平均均为零。更一般地，采用相同的构造可得

$$a_0 = a_V + d - a_\omega/2, \tag{3.16}$$

其中，$a_V = 1$是相互作用系数的齐次次数，$d=2$ 是空间维度，$a_\omega = 0$ 是频率的齐次次数（Shavit 等2024）。

基于自相似碰撞积分计算径向能量通量 (3.7)，可以得到关于 (3.14) 的第二个启发式论证；当 $a>3$ 时，该积分在大波数处收敛（Shavit 等 2025）。这一论证的动机来自 (3.13)，以及对 e_α 在原点附近、但非远场处的奇异行为预期变化。这导出

$$\Pi_0(K) = -\frac{K^{6-2a}}{6-2a} 2\pi C_0^2\ \overline{St_\theta}, \tag{3.17}$$

其中 $St_\theta = St(1,\ \theta_\alpha)/C_0^2$。这表明，对于满足 $St_\theta = 0$的稳态，除可能在特殊值 $a=3$处外，自相似径向通量为零；在该特殊值处，或许可以从式（3.17）的不定式中取出一个非零极限。同样，这一论证并未涉及谱的角向依赖 $g(\cdot)$。

第三个启发式论证来自总能量守恒，这意味着如果 $\int St_\alpha \mathrm{d}\alpha$ 收敛，它就必须为零。式（3.12）中的角度平均 St_α 对所有 K_α 都具有相同的符号，因此若照字面理解，这将意味着对于任意 $g(\cdot)$，$St_\theta = 0$。然而，如前所述，式（3.12）的总积分要么在原点处代数发散（若 $a>3$），要么在无穷远处代数发散（若 $a<3$），因此在这些情况下无法推断出关于 St_θ 的结论。这两个范围在 $a=3$ 处相接，此时发散仅为对数发散。这再次表明 $a=3$ 具有特殊性，并且此时由能量守恒可得 $St_\theta = 0$。

综上所述，这些论据强烈表明，$a=3$ 是湍流谱唯一相关的幂律指数。顺带一提，这个值恰好位于收敛区间 $2<a<4$的正中间；这在各向同性波湍流中似乎相当常见（Zakharov 等，2012），而且这种情况似乎也适用于当前的强各向异性情形。

最后，要使这一构造成立，一个必要条件是：在强迫区域 $K_\alpha < \varepsilon$ 内，谱 (3.8) 可以被大幅修改，而对St_α 远场区域 $K_\alpha \gg \varepsilon$的影响可以忽略不计。根据 §3.2.2 中针对较小 K_β 已提出的考量，显然当前情形满足这一条件。具体而言，若$K_\alpha = O(1)$，那么在强迫区域 $K_\beta < \varepsilon$ 内，与$\mathbf{k}^\beta$ 相连的唯一三元组是满足 $\omega_\beta = -2\omega_\alpha$的参数亚谐波不稳定性三元组。如前所述，若 $\omega_\alpha > N/2$，则不存在此类三元组，因此，对于足够小的 ε，整个高频扇区 $\omega_\alpha > N/2$ 实际上都与强迫区域严格隔离。若 $\omega_\alpha < N/2$，则强迫区域内确实存在三元组成员，它们沿着直线 $|\omega_\beta| = 2\omega_\alpha$分布；但如前所示，它们的总贡献积分仅为 $\int_0^\varepsilon K_\beta^{3-a}\,\mathrm{d}K_\beta = O(\varepsilon)$，可以忽略不计。这个界限基于可谓最糟糕的情形：将奇异幂律谱一直延伸到波数空间的原点附近。实际上，真实谱在原点附近要小得多，这进一步支持了这一结论。因此，与

小型强迫区域的相互作用在远场中确实可以忽略，因此形如 (3.8) 的惯性区谱可以作为那里的解。

4. 谱的角向部分

必须通过数值方法求出稳态湍流谱 (3.8) 的角向部分 $g(\theta)$。这需要对碰撞积分中的共振流形进行参数化，再进行数值计算，以确保所有角度下均满足 $St_\theta = 0$ 。这项颇具挑战性的工作详见附录 §5。实际上，搜索必须有所限制，才能在对 $g(\theta)$假定的某种函数形式中找到最优参数，这需要一定的灵感和猜测。

Shavit 等 (2025) 对非旋转情形 $f = 0$进行了这项工作，但波数空间垂直轴上的零频波导致该处的碰撞积分出现奇异行为。研究者通过一种临时的方法解决了这一问题：移除垂直轴周围一小段频率范围 $\delta > 0$ ，从而得到下界 $|\omega| \geqslant \delta$ ，使碰撞积分得以收敛。一种函数形式

$$g(\theta) = \hat{\omega}(\theta)^{2b} \tag{4.1}$$

其中，假定 $\hat{}\omega(\theta)$ 是式（2.14）的正根。值得注意的是，形如（4.1）的谱还具有额外的对称性，例如 $g(\theta + \pi) = g(\theta)$，这意味着任意方向上都不存在净波传播，因此净伪动量的两个分量均为零。通过针对 θ 的许多不同测试值计算 St_θ，得到了最优指数 b。随后，将 δ 减小后重复这一数值过程，并获得了非常有力的数值证据，表明当 $\delta \to 0$ 时 $b \to -1$ 收敛。这得到了正则化湍流谱 $e = C_0 K^{-3}/\omega^2 = (C_0/N^2)K^{-3}/\cos^2\theta$。正如引言中所指出的，对于较大的 ω/f，该谱与二维 GM 谱一致。然而，在较小频率下，该谱沿波数空间中的整个垂直轴具有不可积奇异性，因此 δ 可以任意小但不能为零。

对于旋转情形 $f \neq 0$，我们保留了相同的函数形式 (4.1)，并采用了相同的数值方法，不过这需要对旋转共振流形进行复杂得多的参数化。† 我们的想法是，任何非零的 f/N 都可作为一种自然的物理正则化因子，将频率限制在远离零的位置，从而避免我们在非旋转情形中遇到的奇异性。采用这种有限的参数搜索策略，我们未能找到有限 f/N值下令人信服的湍流解；但我们获得了非常有力的数值证据，表明在无穷小旋转 $f/N \to 0$ 的极限下， $b = -1$会再次出现。我们的计算固定了 $a = 3$，并随着 f/N 减小，寻找使碰撞积分在一组不同测试频率 $\omega(\theta)$处为零的指数 b 。当然，若要存在解，同一个指数 b 应当适用于所有测试频率。我们发现，对于有限的 f/N ，不同角度 θ对应的 b 值各不相同；但有明确证据表明，在 $f/N \to 0$的极限下，所有角度的结果都收敛到 $b = -1$ ，见图1。由此得到极限湍流谱

$$\lim_{f/N \to 0} e(K, \theta) = C_0\, K^{-3} \omega(\theta)^{-2}. \tag{4.2}$$

对于任何非零的 f/N ，该谱在垂直轴上均可积，这对于

† 旋转共振流形是一个复杂的解析对象，这一点可以从以下事实中看出：如果 $f \to N/2$ ，共振流形就会消失。

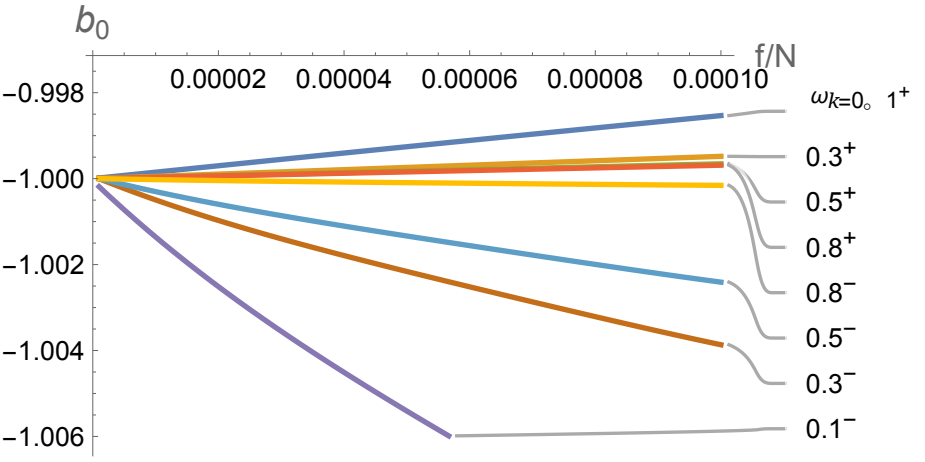

图1：我们使用 (3.8)，令 $a = 3$，并在 $g(\theta) = \omega(\theta)^{2b}$ 中寻找幂律指数$b \to b_0$的收敛，令 $f/N \to 0$。为便于数值计算，我们将 St_θ 分成从上方和下方收敛的部分 $St_\theta^{\pm}$。对于各种测试频率 ω_k，我们通过数值计算确定使 $St_{\theta_k}^{\pm}$ 为零的取值 $b^{\pm}$；并将它们绘制为 f/N 的函数。我们发现，随着旋转减弱，$b^{\pm}$ 都趋近于 $b_0 = -1$。

其物理相关性。这让人联想到在非旋转情形中遇到的正则化奇点。

从技术上讲，无穷小旋转可视为一种正则化项，将低频波与零频平衡模态区分开来。在 $f/N = 0$ 处，这些频率在线 $\theta = \pi/2$ 上相接，因此用于推导动力学方程的基本假设失效。例如，高斯性假设不再成立，且$\left\langle Z_{(+,0,m)} Z^*_{(-,0,m)} \right\rangle \neq 0$，见（Shavit 等 2025）。从这一角度看，采用无穷小旋转是对我们先前方法的推广：此前我们在慢模态周围引入了一种临时正则化项，并求得正则化项宽度趋于零时的湍流谱。在这里，我们明确表明，旋转在慢模态周围起到物理正则化因子的作用，因此湍流谱自然地呈现为 (4.2)。我们再次指出，利用完整的色散关系，将 $C_0 K^{-3} \omega(\theta)^{-2}$ 转换为 $(\omega,\ m)$ 空间中的密度，可得 (1.4)，即所有频率下的 GM 谱 (1.1)。

5. 总结

我们从二维旋转分层 Boussinesq 方程出发，提供了一条基于第一原理、通向观测到的内波谱的推导路径。关键要素包括：通过施加线性位涡约束，明确限制在波流形上，从而消除平衡模态；一个共振动力学方程，其相互作用系数在共振流形上分解为 $V_\alpha = \omega_\alpha \Gamma$，使能量和伪动量守恒一目了然；以及色散关系和相互作用系数的齐次性，这选定了唯一的携通量稳态，其形式为 $e(K,\ \theta) = C_0 K^{-3} g(\theta)$。在这一框架下，大尺度上的窄带强迫为有限容量的惯性区供能；在该惯性区中，强迫和小尺度耗散的具体细节变得无关紧要，谱则由动力学方程本身的结构决定。

映射 将这一齐次解转换为观测变量（$\omega,\ m$）表明 at

湍流谱必然是可分离的：测度转换为垂向因子 m^{-2} 与频率因子 ω^{-2} 的乘积，再乘以雅可比因子$\omega/\sqrt{\omega^2-f^2}$，从而在整个频率范围内得到 GM 谱。值得注意的是，任何不同的角度依赖关系 $g(\theta)\neq\omega^{-2}$ 仍会在 $(\omega,\ m)$ 空间中产生可分离的谱密度。

微弱但非零的旋转通过消除与慢模态的相互作用，使问题变得正则化；在严格的非旋转情形下，这些相互作用是奇异的。从这一视角看，弱旋转极限并非一项次要的技术假设，而是一种机制：它既选定了GM定律，也控制着谱在惯性频率附近的组织方式。

这些结果具有若干概念层面的意义。首先，观测到的内波谱可分离性并非经验上的巧合：它直接源于齐次性以及动力学方程存在一个湍流型、承载通量的解。其次，旋转是与慢模态相互作用的一种自然调节机制，它清晰地区分了内波动力学与平衡运动，并阐明了惯性频率附近能量交换的组织方式。第三，将齐次性分析扩展到三维，表明存在一个承载通量的解 $e=C_0K^{-4}g(\theta,\ \phi)$，以极坐标表示。这里仅已知指数 $a=4$ 。通过假设水平各向同性（或对方位角 ϕ取平均），该谱在 $(\omega,\ m)$ 空间中再次变得可分离，而极坐标雅可比因子则平滑了二维情形中出现的惯性奇异性。

致谢。本研究得到 Simons基金会和 Simons波浪湍流合作项目的支持。OB 获得了美国国家科学基金会 DMS-2406767 项目的额外资助。MS 获得了 Schmidt Futures基金会的额外资助。

附录 A. 共振流形及碰撞积分的积分

回想一下，动力学方程为

$$\dot{e_\alpha}=St_\alpha \tag{A 1}$$

$$=\pi\int d\beta d\gamma\omega_\alpha\Gamma^2_{\alpha\beta\gamma}\left(\omega_\beta e_\alpha e_\gamma+\omega_\gamma e_\beta e_\alpha+\omega_\alpha e_\beta e_\gamma\right)\delta\left(\mathbf{k}_\alpha+\mathbf{k}_\beta+\mathbf{k}_\gamma\right)\delta\left(\omega_\alpha+\omega_\beta+\omega\gamma\right). \tag{A 2}$$

在极坐标 ar 中，共振流形由以下三个方程给出

$$K_\alpha\sin\theta_\alpha+K_\beta\sin\theta_\beta+K_\gamma\sin\theta_\gamma=0, \tag{A 3}$$

$$K_\alpha\cos\theta_\alpha+K_\beta\cos\theta_\beta+K_\gamma\cos\theta_\gamma=0, \tag{A 4}$$

$$\omega_\alpha+\omega_\beta+\omega_\gamma=0. \tag{A 5}$$

第三个方程表明，同一分支的波之间不存在相互作用。前两个方程确定

$$K_\beta=K_\alpha\frac{\cos\theta_\alpha\sin\theta_\gamma-\sin\theta_\alpha\cos\theta_\gamma}{\cos\theta_\gamma\sin\theta_\beta-\cos\theta_\beta\sin\theta_\gamma}=K_\alpha\frac{\sin\left(\theta_\gamma-\theta_\alpha\right)}{\sin\left(\theta_\beta-\theta_\gamma\right)} \tag{A 6}$$

$$K_\gamma=-K_\alpha\frac{\cos\theta_\alpha\sin\theta_\beta-\sin\theta_\alpha\cos\theta_\beta}{\cos\theta_\gamma\sin\theta_\beta-\cos\theta_\beta\sin\theta_\gamma}=-K_\alpha\frac{\sin\left(\theta_\beta-\theta_\alpha\right)}{\sin\left(\theta_\beta-\theta_\gamma\right)}=K_\alpha\frac{\sin\left(\theta_\alpha-\theta_\beta\right)}{\sin\left(\theta_\beta-\theta_\gamma\right)} \tag{A 7}$$

约束条件 $0 < K_\beta$, K_γ限制了角度积分 $0 \leqslant \theta_\beta$, $\theta_\gamma \leqslant 2\pi$ to

$$1 : \sin(\theta_\beta - \theta_\gamma) > 0 : \sin(\theta_\alpha - \theta_\beta) > 0 \& \sin(\theta_\gamma - \theta_\alpha) > 0 \tag{A 8}$$
$$2 : \sin(\theta_\beta - \theta_\gamma) < 0 : \sin(\theta_\alpha - \theta_\beta) < 0 \& \sin(\theta_\gamma - \theta_\alpha) < 0 \tag{A 9}$$

取 $0 \leqslant \theta_\alpha \leqslant \pi/2$, (A 8) 给出

$$0 \leqslant \theta_\beta - \theta_\gamma \leqslant \pi \ or \ -2\pi \leqslant \theta_\beta - \theta_\gamma \leqslant -\pi \tag{A 10}$$
$$0 \leqslant \theta_\alpha - \theta_\beta \leqslant \pi \ or \ -2\pi \leqslant \theta_\alpha - \theta_\beta \leqslant -\pi \tag{A 11}$$
$$0 \leqslant \theta_\gamma - \theta_\alpha \leqslant \pi \tag{A 12}$$

(A 8) 中的式 (2) 给出

$$\pi \leqslant \theta_\beta - \theta_\gamma \leqslant 2\pi \ or \ -\pi \leqslant \theta_\beta - \theta_\gamma \leqslant 0 \tag{A 13}$$
$$-\pi \leqslant \theta_\alpha - \theta_\beta \leqslant 0 \tag{A 14}$$
$$\pi + \theta_\alpha \leqslant \theta_\gamma \leqslant 2\pi \ or \ 0 \leqslant \theta_\gamma \leqslant \theta_\alpha \tag{A 15}$$

A.1. $\theta_\alpha = 0, \omega_\alpha = N$

这里我们详细说明 $\theta_\alpha = 0$和 $\omega_\alpha = N$情形下共振流形的参数化；一般 θ_α 情形见Mathematica笔记本。

(A 8) 中式 (1) 给出的积分限

$$\pi \leqslant \theta_\beta \leqslant \min\{\pi + \theta_\gamma, 2\pi\}, \tag{A 16}$$
$$0 \leqslant \theta_\gamma \leqslant \pi. \tag{A 17}$$

式 (2) 关于交换 $\beta \leftrightarrow \gamma$具有对称性。为求解共振条件 $\omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma = 0$，我们将积分变量由角度改为正频率。令 $\beta = (\pm, \mathbf{p})$，并记

$$\omega_p = \sqrt{N^2 \cos^2\theta_k + f^2 \sin^2\theta_k} \tag{A 18}$$

then

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta_\beta = \int_{\min\{\omega_2,\omega_1\}}^{\max\{\omega_2,\omega_1\}} \frac{\omega_p d\omega_p}{(N^2 - f^2)\,|\cos\theta_p|\,|\sin\theta_p|} = \int_{\min\{\omega_2,\omega_1\}}^{\max\{\omega_2,\omega_1\}} \frac{\omega_p d\omega_p}{\sqrt{\omega_p^2 - f^2}\sqrt{N^2 - \omega_p^2}}. \tag{A 19}$$

（A 16）给出了三个区域

$$B1 : 0 \leqslant \theta_\gamma \leqslant \pi/2, \pi \leqslant \theta_\beta \leqslant \pi + \theta_\gamma,$$
$$B2 : \pi/2 \leqslant \theta_\gamma \leqslant \pi, \pi \leqslant \theta_\beta \leqslant \pi + \pi/2,$$
$$B3 : \pi/2 \leqslant \theta_\gamma \leqslant \pi, \pi + \pi/2 \leqslant \theta_\beta \leqslant \pi + \theta_\gamma$$

令 $\beta = (\pm, \mathbf{p})$ 和 $\gamma = (\pm, \mathbf{q})$。B1、B2、B3 仅在（+, −, −）上有解，这确定了 $\omega_p = \omega_k - \omega_q$ 以及剩余的积分

$$B1 : f < \omega_q < 0.5\omega_k = 0.5N,$$
$$B2 : f < \omega_q < \omega_k - f = N - f,$$
$$B3 : \omega_k/2 < \omega_q < \omega_k - f = N - f.$$

碰撞积分 (3.1) 现在化简为一维积分

$$St_k = \pi\omega_k \int d\omega_q J(\omega_q)\, \Gamma^2_{\alpha\beta\gamma} \left(\omega_k e_p e_q - \omega_p e_k e_q - \omega_q e_p e_q\right), \tag{A 20}$$

其中

$$I^2_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\left(V^{\beta\gamma}_{\alpha}\right)^2}{\omega^2_\alpha} \propto \frac{\left(\cos\theta_\beta \sin\theta_\gamma - \sin\theta_\beta \cos\theta_\gamma\right)^2}{K_\alpha \omega^2_\alpha} \left(K^2_\gamma - K^2_\beta + f^2 s^z_\alpha \left(s^z_\gamma - s^z_\beta\right) + N^2 s^x_\alpha \left(s^x_\gamma - s^x_\beta\right)\right) \tag{A 21}$$

$$= \frac{\left(\cos\theta_\beta \sin\theta_\gamma - \sin\theta_\beta \cos\theta_\gamma\right)^2}{K_\alpha \omega^2_\alpha} \times \tag{A 22}$$

$$\left(K^2_\gamma - K^2_\beta + f^2 K_\alpha \frac{\sin\theta_\alpha}{\omega_k}\left(K_\gamma \frac{\sin\theta_\gamma}{-\omega_q} - K_\beta \frac{\sin\theta_\beta}{-\omega_p}\right) + N^2 K_\alpha \frac{\cos\theta_\alpha}{\omega_k}\left(K_\gamma \frac{\cos\theta_\gamma}{-\omega_q} - K_\beta \frac{\cos\theta_\beta}{-\omega_p}\right)\right) \tag{A 23}$$

以及雅可比矩阵

$$J\left(\omega_q\right) = \frac{1}{\left|\cos\theta_\gamma \sin\theta_\beta - \cos\theta_\beta \sin\theta_\gamma\right|} \frac{\omega_p}{\sqrt{\omega^2_p - f^2}\sqrt{N^2 - \omega^2_p}} \frac{\omega_q}{\sqrt{\omega^2_q - f^2}\sqrt{N^2 - \omega^2_q}} \tag{A 24}$$

with $\omega_p = \omega_k - \omega_q$, 绝对波数 K_β, K_γ 由（A 6）给出，并位于 B1 上:

$$\cos\theta_p = -\sqrt{\frac{\omega^2_p - f^2}{N^2 - f^2}},\ \sin\theta_p = -\sqrt{\frac{N^2 - \omega^2_p}{N^2 - f^2}},\ \cos\theta_q = \sqrt{\frac{\omega^2_q - f^2}{N^2 - f^2}},\ \sin\theta_q = \sqrt{\frac{N^2 - \omega^2_q}{N^2 - f^2}} \tag{A 25}$$

B2:

$$\cos\theta_p = -\sqrt{\frac{\omega^2_p - f^2}{N^2 - f^2}},\ \sin\theta_p = -\sqrt{\frac{N^2 - \omega^2_p}{N^2 - f^2}},\ \cos\theta_q = -\sqrt{\frac{\omega^2_q - f^2}{N^2 - f^2}},\ \sin\theta_q = \sqrt{\frac{N^2 - \omega^2_q}{N^2 - f^2}} \tag{A 26}$$

B3:

$$\cos\theta_p = \sqrt{\frac{\omega^2_p - f^2}{N^2 - f^2}},\ \sin\theta_p = -\sqrt{\frac{N^2 - \omega^2_p}{N^2 - f^2}},\ \cos\theta_q = -\sqrt{\frac{\omega^2_q - f^2}{N^2 - f^2}},\ \sin\theta_q = \sqrt{\frac{N^2 - \omega^2_q}{N^2 - f^2}}. \tag{A 27}$$

碰撞积分的一维积分采用数值方法计算，并包含在 Mathematica笔记本中。

REFERENCES

Balk, AM 2000 *Physica D:* 论弱湍流的柯尔莫哥洛夫–扎哈罗夫谱。 *Nonlinear Phenomena* **139** 1 2 137 157 (-), – .Bühler, Oliver, McIntyre, Michael E & Scinocca, John F 1999 论到达中间层的剪切生成重力波。第一部分：波的生成。 *Journal of the atmospheric sciences* **56** 21 3749 3763 ( ), – .

Dematteis, Giovanni & Lvov, Yuri V. 2023 波湍流中能量通量的结构。 *Journal of Fluid Mechanics* **954**, A30.Ferrari, Raffaele & Wunsch, Carl 2009 海洋环流动能：储库、源与汇。 *Annual Review of Fluid Mechanics* **41 (1)**, 253–282. Galtier, Sébastien 2022 *Physics of wave turbulence.* 剑桥大学出版社。Garrett, Christopher & Munk Walter 1979 *Annual review* , 海洋内波。 ( ), – *of fluid mechanics* **11** 1 339 369 .Hasselmann, Klaus 1966 波 - 波散射过程的费曼图与相互作用规则。 *Reviews of Geophysics* **4(1)**, 1–32.

Labarre, Vincent, Augier, Pierre, Krstulovic, Giorgio & Nazarenko, Sergey 2024*a* 有涡旋模态和无涡旋模态分层流中的内重力波。 *Physical Review Fluids* **9** 2 024604 ( ), .Labarre, Vincent, Lanchon, Nicolas, Cortet, Pierre-Philippe, Krstulovic, Giorgio& Nazarenko, Sergey 2024*b* 论超越静力学状态的内重力波动力学。 *Journal of Fluid Mechanics* **998**, A17. Labarre, Vincent & Shavit Michal 2024 2 *arXiv preprint* , d 内重力波湍流。 *arXiv:2412.20534* .Lanchon, Nicolas & Cortet, Pierre-Philippe 2023 非局域内重力波湍流的能谱。 *Physical Review Letters* **131** (26), 264001.Lvov, Yuri V, Polzin, Kurt L, Tabak, Esteban G & Yokoyama, Naoto 2010 海洋内波场：尺度不变谱理论。 *Journal of Physical Oceanography* **40** 12 2605 2623 ( ), – .Lvov, Yuri V & Tabak, Esteban G 2001 哈密顿形式体系与海洋内波的 Garrett–Munk 谱。 *Physical review letters* **87** (16), 168501.MacKinnon, Jennifer A, Zhao, Zhongxiang, Whalen, Caitlin B, Waterhouse, Amy F,Trossman, David S, Sun, Oliver M, Laurent, Louis C St, Simmons, Harper L,Polzin, Kurt, Pinkel, Robert & others 2017 内波驱动海洋混合的气候过程团队。 *Bulletin of the American Meteorological Society* **98** (11), 2429–2454.McComas, C Henry & Bretherton, Francis P 1977海洋内波的共振相互作用。 *Journal of Geophysical Research* **82** (9), 1397–1412. Munk, WH 1981 内波与小尺度过程。 *Evolution of physical oceanography* . Nazarenko, Sergey 2011 *Wave turbulence*, , 第 825 卷。施普林格科学与商业媒体。Olbers, Dirk J 1983 海洋内波场模型。 *Reviews of Geophysics* **21** (7), 1567–1606.Ripa, P 1981 论地球物理波之间非线性波—波相互作用理论。*Journal of Fluid Mechanics* **103**, 87–115. Salmon, Rick 1988 哈密顿流体力学。 *Annual review of fluid mechanics* **20** (1), 225–256.Salmon, Rick 1998 *Lectures on geophysical fluid dynamics*. 牛津大学出版社。Scinocca, JF & Shepherd, TG 1992 二维非弹性方程的非线性波活动守恒定律与哈密顿结构。 *Journal of Atmospheric Sciences* **49** 1 5 28 ( ), – .Shavit, Michal, Bühler, Oliver & Shatah, Jalal 2024 不定号不变量塑造湍流级联。 *Physical Review Letters* **133**(1), 014001.Shavit, Michal, Bühler, Oliver & Shatah, Jalal 2025二维内重力波的湍流谱。 *Physical Review Letters* **134** (5), 054101. Veronis, George 1970 *Annual Review of Fluid Mechanics* **2** 1 37 66 旋转流体与分层流体之间的类比。( ), – .Whalen, Caitlin B, De Lavergne, Casimir, Naveira Garabato, Alberto C, Klymak,Jody M, MacKinnon, Jennifer A & Sheen, Kathy L 2020 内波驱动混合：主导过程及其对气候的影响。**1** 11 606 621 *Nature Reviews Earth & Environment* ( ), – .

Zakharov, Vladimir E L'vov Victor S & Falkovich Gregory 2012 *Kolmogorov spectra of turbulence I: Wave turbulence* , , , . 施普林格科学与商业媒体。