arXiv:2601.01486v1 [math.DG] 4 Jan 2026

与导航数据相关的自然平行移动与联络

A. MEZRAG、Z. MUZSNAY 和 CS. VINCZE

摘要。本文探讨导航数据的几何框架，并利用黎曼平行性引入一种自然平行移动。由此得到的几何结构具有一些优良而自然的特征：自然平行移动是齐次的（但一般而言是非线性的），保持由导航数据构成的 Randers 型芬斯勒范数，且整体群是有限维的。

1. 引言

平行移动是出现在黎曼几何、芬斯勒几何和相对论等不同几何框架中的最重要几何概念之一。它可以通过不同的对象来引入，例如协变导数 [11, 16],或不同类型的联络 [5, 8]。通过考察沿闭路的平行移动，我们还可以得到一种相关的代数结构，称为整体群。整体群能够提供关于流形几何的重要信息，例如德拉姆分解定理 [4, 7]。在某些情况下，整体群是有限维群；但对于齐次（非线性）平行移动，也存在整体群为无限维的例子 [1, 13]。事实证明，对于芬斯勒流形，自然平行移动的整体群通常是无限维群 [9]。这一结果促使我们研究整体群为有限维的齐次平行移动。正如我们将看到的，这样的几何框架可以与流形上的导航数据相关联。

导航数据由一对 $(h,\ W)$ 组成，其中 h 是黎曼度量，而 W 是流形 M 上的光滑向量场。齐默尔曼导航问题是在向量场 W 所表示的风或水流影响下，求黎曼流形 $(M,\ h)$ 上行程时间最短的路径。D. Bao、C. Robles 和 Z. Shen 在 [2] 中证明，齐默尔曼导航问题等价于考虑兰德斯型芬斯勒度量的测地线。与导航数据相关的度量结构很容易理解（单位向量集合，即指标曲面，会被风 W 吹离），但仿射结构（平行移动）则不那么容易理解，也不那么自然 [15]。此外，即使度量结构相对简单，整体群也可能非常大 [10]。

因此，我们考虑导航数据的几何设置，并利用黎曼平行性引入一种自然平行移动。由此得到的几何具有一些优良且自然的特征：自然平行移动是齐次的（但通常是非线性的），保持由导航数据构成的 Randers 型芬斯勒范数，且整体群是有限维的。

日期：2026年1月6日。2020 数学主题分类。51D15, 53C60, 53C29, 53B40。关键词和短语。芬斯勒几何、导航数据、平行移动、联络、曲率。

2. 预备知识

在本文中， M 表示一个 C^∞类的连通微分流形，$\mathfrak{X}(M)$表示 M上的光滑向量场空间。M的一阶和二阶切丛分别记为$(TM,\ \pi,\ M)$和$(TTM,\ \tau,\ TM)$。 M上的局部坐标(x^i)诱导出 TM上的局部坐标$(x^i,\ y^i)$。 TM上的向量值1-形式 J，局部定义为 $J=\frac{\partial}{\partial y^i}\otimes dx^i$，称为 TM的自然近切结构。此外， TM 上的垂直向量场 $\mathcal{C}=y^i\frac{\partial}{\partial y^i}$ 称为Liouville向量场。

—

2.1. **联络**。 本节回顾 [8], 中介绍的联络理论的微分代数表述，我们将在下文中一直使用该表述。

定义 2.1。 M 上的一个联络 是 TM 上的一个(1-1)型张量场（即 $\Gamma\in\Psi^1(TM)$），满足 $J\Gamma=J$ 以及 $\Gamma J=-J$。如果$[\mathcal{C},\Gamma]=0$，则称该联络为齐次 联络；它在 $TM\setminus\{0\}$上是 $\mathcal{C}^\infty$的，并且在 TM上是 $\mathcal{C}^0$的。特别地，如果 Γ在切流形 TM （包括 0 截面）上是 $\mathcal{C}^1$的，则称其为线性联络。

如果 Γ 是一个联络，那么 $\Gamma^2=I$，而与特征值 -1对应的特征子空间就是垂直空间。因此，在任意非零 $z\in TM$处，我们有如下分裂

$$T_zTM=\mathcal{H}_z\oplus\mathcal{V}_z, \tag{2.1}$$

其中，所谓的水平空间 H_z 是对应于特征值+1的特征子空间。 Γ 在基底 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^\alpha},\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right\}$ 下的矩阵为

—— ——

$$\Gamma=\begin{pmatrix}\delta^\beta_\alpha & 0\\ -2\Gamma^\beta_\alpha & -\delta^\beta_\alpha\end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

其中， $\Gamma^\beta_\alpha=\Gamma^\beta_\alpha(x,\ y)$是称为联络系数的函数。若联络是齐次的（分别地，线性的），则系数 $\Gamma^\beta_\alpha(x,\ y)$关于 y是一次齐次的（分别地，线性的）。水平投影和垂直投影记为

$$\mathfrak{h}:=\tfrac{1}{2}(Id+\Gamma),\qquad \nu:=\tfrac{1}{2}(Id-\Gamma), \tag{2.3}$$

分别地。用局部坐标表示，我们有:

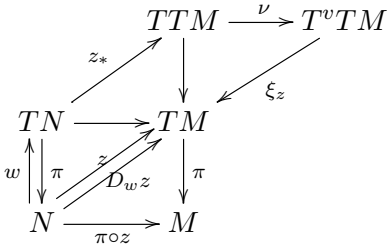
$$\mathfrak{h}\Big(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big)=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}-\Gamma^\beta_\alpha\frac{\partial}{\partial y^\beta},\qquad \mathfrak{h}\Big(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\Big)=0.$$

定义 2.2。给定两个流形 N和 M，设 $w\in\mathfrak{X}(N)$和 $z\in\mathfrak{X}_N(M)$，即 $z\colon N\to TM$，是光滑向量场。利用自然同构 $\xi_z\colon T^v_zTM\to T_{\pi(z)}M$， z 关于 w 的协变导数定义如下:

$$D_{w(x)}z=\xi_{z(x)}(\nu\circ z_*\circ w). \tag{2.4}$$

我们有以下图示:

(2.5)



特别地，对于 $N=M$和 $w,\ z\in\mathfrak{X}(M)$，我们有

$$D_wz=w^\alpha\left(\frac{\partial z^\beta}{\partial x^\alpha}+\Gamma^\beta_\alpha\big(x,z(x)\big)\right)\frac{\partial}{\partial x^\beta}. \tag{2.6}$$

如果 $N=[a,b]$ 是 $\mathbb{R}$的一个区间， $w=\frac{d}{dt}$和 $z\colon\ [a,b]\to TM$， $z(t)=\big(x(t)\ y(t)\big)$是沿曲线 $\gamma\colon\ [a,b]\to M$（即 $\gamma=\pi\circ z$）的向量场，我们得到：

$$D_{\frac{d}{dt}}z=\left(\frac{dy^\beta}{dt}+\Gamma^\beta_\alpha(x(t),y(t))\frac{dx^\alpha}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial x^\beta}. \tag{2.7}$$

定义 2.3。 沿曲线 γ 的向量场 z 称为平行 的，当且仅当 $D_{\frac{d}{dt}}z=0$。自平行曲线 是满足 $D_{\frac{d}{dt}}\gamma'=0.$ 的曲线 $\gamma\colon\ [a,b]\to M$

注 2.4。 根据定义2.2和2.3 可知，向量场 z 沿曲线 γ 平行 $\nu\circ z'=0$当且仅当 z'，也就是说 z' 是水平的；曲线 γ 是自平行曲线，当且仅当 $\nu\circ\gamma''=0$，也就是说 γ'' 是水平的。

2.2. **喷射与自平行曲线**。 向量场 $S\in\mathfrak{X}(TM)$ 称为喷射，当$JS=\mathcal{C}$ 且 $[\mathcal{C},S]=S$。局部地，喷射可表示如下

$$S=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}-2G^i\frac{\partial}{\partial y^i}, \tag{2.8}$$

其中，喷射系数 $G^i=G^i(x,\ y)$ 是关于纤维坐标的 2-齐次函数。

定义 2.5。 设 Γ 为一个齐次联络，并考虑其水平投影算子$\sim$ $\mathfrak{h}$。与该联络相关联的喷射 S 定义为 $S=\mathfrak{h}S$，其中 S 是任意一个喷射。

局部地，与联络（2.2）相关联的喷射系数为

$$G^\alpha=\tfrac{1}{2}y^\beta\Gamma^\alpha_\beta, \tag{2.9}$$

其中 $\Gamma^\alpha_\beta(x,y)$ 是联络系数。反过来，我们有一个与喷射 $\Gamma:=[J,S]$ 相关联的齐次联络 S。若喷射具有局部表达式（2.8），则联络系数为：

$$\Gamma^\alpha_\beta=\frac{\partial G^\alpha}{\partial y^\beta}.$$

喷射这一概念使我们能够以无坐标的方式讨论二阶微分方程组，如下所述：若参数化曲线 c 的速度场 $\dot c$ 是喷射 S 的积分曲线 S，则称该曲线为喷射的轨线，也就是说：

$$S\circ\dot c=\ddot c. \tag{2.10}$$

使用局部坐标， c 是喷射（2.8）的轨线，当且仅当它满足以下二阶微分方程组：

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2}+2G^\alpha\Big(x,\frac{dx}{dt}\Big)=0. \tag{2.11}$$

容易验证，与联络 Γ相关的喷射的路径是 Γ的自平行曲线。

2.3. **导航数据及其相关的芬斯勒结构**。

定义 2.6。 维数为 n的芬斯勒流形 是一个二元组（M， F），其中 M是一个维数为 n 的可微流形，且 $F\colon\ TM\to\mathbb{R}$ 满足：

(a) F在 $\mathcal{T}M:=TM\setminus\{0\}$上光滑且严格为正；(b) F 关于方向变量 y是一次正齐次的；(c) 度量张量 $g_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2E}{\partial y^i\partial y^j}$在 $\mathcal{T}M$上的秩为 n，其中 $E:=\frac{1}{2}F^2$是能量函数。

若 h 是黎曼度量，且 W 是黎曼长度为 $|W|^2 < 1$的光滑向量场，则称有序对(h, W)为 M上的导航数据。我们用 $\langle X, Y\rangle = h_x(X, Y)$和 $|X|^2 = h_x(X, X)$分别表示由黎曼度量h定义的内积和范数。

Th与导航数据 $(h,\ W)$ 相关的 Randers 型芬斯勒范数函数定义

$$\mathcal{F}(x, y) = \frac{\sqrt{\langle y, W\rangle^2 + \lambda\,|y|^2}}{\lambda} - \frac{\langle y, W\rangle}{\lambda} \tag{2.12}$$

其中 $x \in M$、 $y \in T_xM$ 和 λ 是光滑函数

$$\lambda = 1 - |W|^2 . \tag{2.13}$$

注 2.7。 令 $\mathcal{F}$ 为与导航数据 $(h,\ W)$ 相关的 Randers 范数。在任意点 $p \in M$，向量 V_p° 具有单位芬斯勒范数，当且仅当 $V_p^\circ - W_p$ 具有单位黎曼范数，即

$$\mathcal{F}(V_p^\circ) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|V_p^\circ - W_p\right| = 1. \tag{2.14}$$

3. 与导航数据相关的自然平行移动

定义 3.1. 设 c 是一条从 p 到 q的曲线，并假设 V_p° 是关于与导航数据 2.12）相关的 Randers 范数函数的单位向量，其中 (h, W)。我们将与导航数据 相关的自然平行移动 定义为导航数据 (h, W) 下 V_p°沿着c 的

$$\mathcal{P}(V_p^\circ) := \mathcal{P}_{Riemann}(V_p^\circ - W_p) + W_q, \tag{3.1}$$

其中 $\mathcal{P}_{Riemann}$ 是沿 c的黎曼平行移动。利用齐次性，我们将定义扩展到任意非零向量:

$$\mathcal{P}(V_p) := \mathcal{F}(V_p) \cdot \mathcal{P}\left(\tfrac{1}{\mathcal{F}(V_p)} V_p\right) \tag{3.2}$$

为简化记号，后文将使用 $\mathcal{P}_R$ 代替 $\mathcal{P}_{Riemann}$。由定义3.1 可立即得到以下

性质 3.2. 自然平行移动 (3.1) 是齐次的，但通常不是线性的，并且保持与导航数据 $\mathcal{F}$ 相关的 *Randers* 范数函数(h, W)。

证明。 平行移动的齐次性 $\mathcal{P}$ 由构造保证，但它不满足可加性，也就是说 $\mathcal{P}(U_p + V_p) \neq \mathcal{P}(U_p) + \mathcal{P}(V_p)$。因此 $\mathcal{P}$ 通常是非线性的。另一方面，设 c 是一条从 p 到 q的曲线，并设 V_p° 是关于 Randers 范数函数（2.12）的单位向量。利用芬斯勒范数与黎曼范数之间的关系（2.14），以及黎曼平行移动保持黎曼范数这一事实，可得

$$1 = \mathcal{F}(V_p^\circ) = \left|V_p^\circ - W_p\right| = \left|\mathcal{P}_R(V_p^\circ - W_p)\right| = \mathcal{F}\big((\mathcal{P}_R(V_p^\circ - W_p) + W_q\big) = \mathcal{F}\big(\mathcal{P}(V_p^\circ)\big) \tag{3.3}$$

这表明 $\mathcal{P}$ 保持单位向量的芬斯勒范数。利用平行移动 $\mathcal{P}$ 和范数函数 $\mathcal{F}$ 的齐次性，我们可以得出，任何切向量的芬斯勒范数在自然平行移动下都保持不变。

□

我们可以观察到，对于一条连接点 p 和 q的给定曲线 c，平行移动的值仅取决于 W 在 p 和 q 处的值，而不取决于 W 在端点之间的 c 上的值。

性质 3.3。 设(h, W)是流形 M上的导航数据。若 W相对于黎曼度量沿曲线 c 平行，则 c上的自然平行移动与黎曼平行移动重合。

证明。 事实上，设 c是一条从 p到 q的曲线，并假设 W沿曲线 c相对于黎曼度量 h平行。于是 $\mathcal{P}_R(W_p) = W_q$。设 $V_p^\circ \in T_pM$是 p处的芬斯勒单位向量。利用黎曼平行移动 $\mathcal{P}_R$的线性性：

$$\mathcal{P}(V_p^\circ) = \mathcal{P}_R(V_p^\circ - W_p) + W_q = \mathcal{P}_R(V_p^\circ) - \mathcal{P}_R(W_p) + W_q = \mathcal{P}_R(V_p^\circ), \tag{3.4}$$

这表明 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}_R$ 在芬斯勒单位向量上重合。由平行移动 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}_R$的齐次性可得结论。□

命题 3.4. 设 (h, W)是流形 M上的导航数据。与自然平行移动相关的整体群$\mathcal{H}ol(\mathcal{P})$ 同构于黎曼整体群 $\mathcal{H}ol(\mathcal{P}_R)$。特别地， $\mathcal{H}ol(\mathcal{P})$ 的整体群是有限维的。

证明。 取 $p = q$，经过直接计算可得整体群中各元素之间的一一对应关系$\varphi \leftrightarrow \varphi_R$，其中

$$\varphi(V_p) = \varphi_R(V_p) - \mathcal{F}(V_p)\left(\varphi_R(W_p) - W_p\right).$$

代入 $V_p = W_p$,

$$\varphi_R(W_p) = \frac{\varphi(W_p) - \mathcal{F}(W_p)W_p}{1 - \mathcal{F}(W_p)}$$

逆公式为

$$\varphi_R(V_p) = \varphi(V_p) + \mathcal{F}(V_p)\left(\frac{\varphi(W_p) - \mathcal{F}(W_p)W_p}{1 - \mathcal{F}(W_p)} - W_p\right) = \varphi(V_p) + \mathcal{F}(V_p)\frac{\varphi(W_p) - W_p}{1 - \mathcal{F}(W_p)}.$$

最后,

$$\begin{aligned}\psi \circ \varphi(V_p) &= \psi_R(\varphi(V_p)) - \mathcal{F}(\varphi(V_p))\left(\psi_R(W_p) - W_p\right)\\ &= \psi_R \circ \varphi_R(V_p) - \mathcal{F}(V_p)\left(\psi_R \circ \varphi_R(W_p) - \psi_R(W_p)\right) - \mathcal{F}(\varphi(V_p))\left(\psi_R(W_p) - W_p\right)\\ &= \psi_R \circ \varphi_R(V_p) - \mathcal{F}(V_p)\left(\psi_R \circ \varphi_R(W_p) - W_p\right)\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{F}(\varphi(V_p)) = \mathcal{F}(V_p)$。

□

注 3.5。 如 [9], 所示，由芬斯勒度量产生的齐次平行移动的整体群通常是无限维的，只有在特殊情形下才会出现有限维整体群。因此，将齐次（非线性）平行移动与有限维整体群联系起来尤其值得研究。正如前一个命题所示，自然平行移动具有这一独特性质。

4. 与自然平行性相关的几何量

如第2节所述，联络、协变微分和分裂（2.1）的概念都是与平行性相关的几何结构。本节将推导与相对于导航数据 $(h,\ W)$的自然平行移动相关联的这些几何对象。

4.1. **水平分布、联络**。如注2.4 所示，平行移动对应于沿水平曲线移动。因此，与平行性相关联的水平分布可以通过对平行向量场求微分得到：可能的切向方向都是水平的。我们可以利用这一性质来确定水平分布。

设 $A_{ij}^k = A_{ij}^k(x)$ 为黎曼度量 h 的 Levi-Civita联络 ∇^R 的联络系数：

$$\nabla^R_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = A_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{4.1}$$

考虑一条曲线 c_t，它位于 M，并令 $\mathcal{P}_t$ 为沿 c_t 的自然平行移动，而 $(\mathcal{P}_R)_t$为沿曲线 c_t、关于度量 h 的黎曼平行移动。于是，由公式（3.1）可得，对任意芬斯勒单位向量 $V_o \in T_{c_o}M$，沿 c_t 的相应平行向量场为

$$\mathcal{P}_t(V_0) = (\mathcal{P}_R)_t(V_0 - W_0) + W(c(t)), \tag{4.2}$$

其导数必须是水平的：

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}_t(V_0) \in \mathcal{H}_{(c_t, \mathcal{P}_t(V_0))}. \tag{4.3}$$

若平行向量场（4.2）在 (x^k, y^k) 中的坐标表达式为 $(c_t^k, \mathcal{P}_t(V_0)^k)$，则其导数为

$$(c_t^k, \mathcal{P}_t(V_0)^k, \dot{c}_t^k, \tfrac{d}{dt}[\mathcal{P}_t(V_0)]^k), \tag{4.4}$$

其中

$$\frac{d}{dt}[\mathcal{P}_t(V_0)]^k = \frac{d}{dt}\big[(\mathcal{P}_R)_t(V_0 - W_0) + W(c_t)\big]^k = -A_{ij}^k\, \dot{c}_t^i\, (\mathcal{P}_R)_t^j(V_0 - W_0) + \frac{\partial W^k}{\partial x^i}\dot{c}_t^i. \tag{4.5}$$

将自然平行性的联络系数记为 $\Gamma_i^k = \Gamma_i^k(x, y)$，与导航数据相关的水平投影算子为

$$\mathfrak{h}\colon TTM \to \mathcal{H} \quad (\subset TTM), \tag{4.6}$$

水平分布由以下向量场生成

$$\mathfrak{h}\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big) = \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}. \tag{4.7}$$

比较 (4.3)、(4.5) 和 (4.7)，得到

$$\Gamma_i^k(c_t, \mathcal{P}_t(V_0))\dot{c}_t^i = A_{ij}^k(c_t) \cdot \dot{c}_t^i \cdot [(\mathcal{P}_R)_t(V_0 - W_0)]^j - \dot{c}_t^i \frac{\partial W^k}{\partial x^i}\Big|_{c(t)}. \tag{4.8}$$

该公式对任意曲线 c 和任意参数 t 都成立，因此对任意点 c_t 以及由单位向量 $\dot{c}_o \in T_xM$ 表示的方向也成立。我们还注意到，对于 $t = 0$，有 $\mathcal{P}_o = (\mathcal{P}_R)_o = id$ 恒等变换。因此，在 $x = c_o$ 处得到

$$\Gamma_i^k(x, V_0) = A_{ij}^k(x)(V_0^j - W^j(x)) - \frac{\partial W^k}{\partial x^i}\Big|_x \tag{4.9}$$

对任意芬斯勒单位向量 V_0都成立。此外，根据齐次性，我们可以将其推广到任意向量（不一定是单位向量）：对任意 $y \in \mathcal{T}_xM$，都有一个芬斯勒单位向量$V_0 = \frac{1}{\mathcal{F}\ x\ (,y)} y$。因此

$$\Gamma_i^k(x, \tfrac{y}{\mathcal{F}(x,y)}) = A_{ij}^k(x) \cdot (\tfrac{1}{\mathcal{F}(x,y)} y^j - W^j(x)) - \frac{\partial W^k}{\partial x^i}\Big|_x, \tag{4.10}$$

或等价地

$$\Gamma_i^k(x, y) = A_{ij}^k(x) \cdot (y^j - \mathcal{F}(x, y)W^j(x)) - \mathcal{F}(x, y)\frac{\partial W^k}{\partial x^i}\Big|_x. \tag{4.11}$$

采用简化记法 $A_{ij}^k = A_{ij}^k(x)$ 和 $\mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(x,y)$，我们有

$$\Gamma_i^k(x,y) = A_{is}^k \cdot y^s - A_{is}^k \cdot \mathcal{F}(y) \cdot W^s - \mathcal{F}(y) \cdot \frac{\partial W^k}{\partial x^i}. \tag{4.12}$$

水平分布可以描述为由水平提升向量场张成的分布： $X \in T_xM$ 的水平提升 $l_{(x,y)}$: $T_xM \to \mathcal{H}_{(x,y)}$ 为

$$l_{(x,y)}(X) = l^R_{(x,y)}(X) + \mathcal{F}(x,y) \cdot \left(\nabla^R_X W\right)^v, \tag{4.13}$$

其中， $l^R_{(x,y)}$ 是黎曼水平提升，而$\nabla^R_X W$ 是风 W的黎曼协变导数的垂直提升。

定义 4.1. 设 (h, W) 是流形 M上的导航数据，且 $\mathfrak{h}$ 是与自然平行性相关的水平投影算子（4.6）。联络

$$\Gamma := 2\mathfrak{h} - \mathrm{Id}. \tag{4.14}$$

称为自然联络。自然联络的系数是（4.12）中给出的函数。

4.2. **与自然平行性相关的协变导数。** 沿曲线 c_t 的向量场 V_t若其导数是沿 V_t的 $\dot{c}(t)$的水平提升，则称为平行:

$$\dot{V}_t = l_{(c,V_t)}(\dot{c}), \tag{4.15}$$

或者等价地说，如果它的协变导数为零。由（2.7）可得协变导数的公式

$$\frac{\nabla V_t}{dt} = \left(\frac{dV_t^k}{dt} + \Gamma_i^k(c,V)\dot{c}^i\right)\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{4.16}$$

公式（4.16）使我们能够引入向量场的（非线性）协变导数V，相对于 X:

$$\nabla_X V = X^i\left(\frac{\partial V^k}{\partial x^i} + \Gamma_i^k(x,V)\right)\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{4.17}$$

映射

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) \qquad (X,Y) \to \nabla_X Y \tag{4.18}$$

是 $C^\infty(M)$ 关于第一个变量的线性函数，但关于第二个变量仅为 $\mathbb{R}$ 齐次。事实上， ∇ 不满足第二个变量上的可加性。平行性可以用（非线性）协变导数表述如下。

性质 4.2。 沿曲线 c 的向量场 $V(t)$ 平行，当且仅当 $\nabla_{\dot{c}} V = 0$。

性质 4.3。 与非线性平行性相关联的非线性协变微分（4.18）的坐标不变表达式为

$$\nabla_X Y = \nabla^R_X Y - \mathcal{F}(Y)\cdot\nabla^R_X W, \tag{4.19}$$

其中， ∇^R 是黎曼度量 h的列维-奇维塔联络。

注 4.4。 公式（4.19）表明，如果风 W 沿曲线平行，则黎曼平行移动 $\mathcal{P}_R$ 与自然平行移动 $\mathcal{P}$ 沿 c 曲线重合。此外， W 关于黎曼度量是平行的，当且仅当 $\nabla \equiv \nabla^R$。

研究自然平行性及其相关的协变微分，我们得到以下命题。

命题 4.5。 沿向量场 W 的积分曲线所作的协变微分相同，当且仅当 W 的积分曲线是黎曼测地线。

证明。 将 $X = W$ 代入公式（4.19），我们得到沿向量场 W 的积分曲线所作的协变导数相同，当且仅当 $\nabla^R_{\dot c} W = 0$，也就是说， W 的积分曲线是黎曼测地线。 □

命题 4.6。 W 的积分曲线是 ∇ 的预测地线（分别为测地线），当且仅当它们是 ∇^R的预测地线（分别为测地线）。

证明。 将 $X = Y = W$ 代入公式（4.19），得到

$$\nabla_W W = (1 - \mathcal{F}(W))\, \nabla^R_W W. \tag{4.20}$$

由于 W 是导航数据之一，因此

$$\mathcal{F}(W) = \frac{|W|}{1 + |W|} < 1, \tag{4.21}$$

并且，加速度向量场 $\nabla_{\dot c} W$ 和$\nabla^R_{\dot c} W$ 都与 $\dot c = W \circ c$ 成比例，如下所示：

$$\nabla_{\dot c} W(t) = \varphi(t)\dot c(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla^R_{\dot c} W(t) = \rho(t)\dot c(t), \tag{4.22}$$

with

$$\rho(t) = \frac{\varphi(t)}{1 - \mathcal{F}(\dot c(t))}. \tag{4.23}$$

由（4.22）可知， W 的积分曲线是自然联络 ∇ 的预测地线，当且仅当它们是联络 ∇^R 的预测地线；并且在 $\varphi(t) = \rho(t) = 0$的情况下， W 的积分曲线是 ∇的测地线，当且仅当它们是 ∇^R的测地线。

□

4.3. **挠率**。 在其论文 [8] 中，J. Grifone 运用 Frölichher-Nijenhuis 演算发展了联络理论。他引入了联络的弱挠率和强挠率的概念，分别记为 t 和 T。如果联络是齐次的，则 $t = 0$当且仅当 $T = 0$ （参见 [8, 推论 **1**。56]）。由于在自然平行性的情形下，所关联的联络是齐次的，因此强挠率消失当且仅当弱挠率为零；我们将由下式定义的向量值二形式简称为挠率：

$$t = \frac{1}{2}[J, \Gamma]. \tag{4.24}$$

其分量为

$$t^k_{ij} = \frac{\partial \Gamma^k_j}{\partial y^i} - \frac{\partial \Gamma^k_i}{\partial y^j}. \tag{4.25}$$

自然联络的挠率一般不为零。事实上，联络系数关于垂直方向的导数为

$$\frac{\partial \Gamma^k_i}{\partial y^j}(x, y) = A^k_{ij} - \mathcal{F}_{y^j} A^k_{is} W^s - \mathcal{F}_{y^j} \frac{\partial W^k}{\partial x^i}, \tag{4.26}$$

其中 $\mathcal{F}_{y^i} := \partial_{y^i} \mathcal{F}$。由此可得挠率

$$t^k_{ij} = (\mathcal{F}_{y^i} A^k_{js} - \mathcal{F}_{y^j} A^k_{is}) W^s + \mathcal{F}_{y^i} \frac{\partial W^k}{\partial x^j} - \mathcal{F}_{y^j} \frac{\partial W^k}{\partial x^i}, \tag{4.27}$$

或者以无坐标的方式表示为

$$t = d_J \mathcal{F} \wedge \nabla^R W, \tag{4.28}$$

其中右侧采用了垂直提升向量值1-形式的简化记法

$$\big[\nabla^R W\big](X) := (\nabla^R_X W)^v, \tag{4.29}$$

而楔积给出了定义如下的向量值二形式

$$[d_J\mathcal{F}\wedge\nabla^R W](X,Y)=d_J\mathcal{F}(X)\cdot\nabla^R W(Y)-d_J\mathcal{F}(Y)\cdot\nabla^R W(X), \tag{4.30}$$

或者等价地

$$[d_J\mathcal{F}\wedge\nabla^R W](X,Y)=JX(F)\cdot(\nabla^R_Y W)^v-JY(F)\cdot(\nabla^R_X W)^v. \tag{4.31}$$

由（4.28）可得

$$t\equiv 0 \iff d_J\mathcal{F}\wedge\nabla^R W=0. \tag{4.32}$$

（4.32）的几何刻画，即挠率为零，由命题 4.7 和定理 4.9给出。

命题 4.7。 自然联络的挠率恒为零，当且仅当W 关于黎曼度量是平行的，即 $\nabla^R W=0$。

为了证明该命题，我们需要以下引理。

引理 4.8。 设 $\rho\in\Psi^1(M)$ 是底流形 M上的一个向量值一形式。那么

$$\mathcal{F}_{y^i}\rho^k_j\circ\pi=\mathcal{F}_{y^j}\rho^k_i\circ\pi \tag{4.33}$$

当且仅当 $\rho^k_j=0$时，条件成立。

证明。 假设 (4.33) 成立。于是，利用芬斯勒度量函数的齐次性，对 y^i 进行缩并可得

$$\mathcal{F}\rho^k_j\circ\pi=\mathcal{F}_{y^j}y^i\rho^k_i\circ\pi, \tag{4.34}$$

或者等价地

$$\rho^k_j\circ\pi=\frac{1}{\mathcal{F}}\mathcal{F}_{y^j}y^i\rho^k_i\circ\pi. \tag{4.35}$$

对变量 y^l 求导，得到

$$\begin{aligned}0&=-\frac{1}{\mathcal{F}^2}\mathcal{F}_{y^l}\mathcal{F}_{y^j}y^i\rho^k_i\circ\pi+\frac{1}{\mathcal{F}}\mathcal{F}_{y^jy^l}y^i\rho^k_i\circ\pi+\frac{1}{\mathcal{F}}\mathcal{F}_{y^j}\rho^k_l\circ\pi\\&=-\frac{1}{\mathcal{F}^2}\mathcal{F}_{y^l}\mathcal{F}_{y^j}y^i\rho^k_i\circ\pi+\frac{1}{\mathcal{F}}\mathcal{F}_{y^jy^l}y^i\rho^k_i\circ\pi+\frac{1}{\mathcal{F}}\mathcal{F}_{y^j}\left(\frac{1}{\mathcal{F}}\mathcal{F}_{y^l}y^i\rho^k_i\circ\pi\right)=\frac{1}{\mathcal{F}}\mathcal{F}_{y^jy^l}y^i\rho^k_i\circ\pi.\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}_{y_jy_l}$ 是角度度量张量的分量（即黎曼-芬斯勒度量在指标丛上的限制），因此可得 $y^i\rho^k_i\circ\pi=0$；再对变量 y^j求导，便得到该 1-形式的分量为零。命题的逆向结论显然成立。□

命题 4.7 的证明。 利用方程（4.25）、（4.26）和（4.27），根据引理 4.8，在选取 $\rho(X)=\nabla^R_X W$ 后即可得到该结果。□

定理 4.9。 自然联络的挠率恒为零，当且仅当 *Randers*度量 $\mathcal{F}$ 是 *Berwald*型。

证明。 假设自然联络的挠率恒为零。于是，根据命题 4.7，挠率为零等价于向量场 W的平行性。若 W 相对于黎曼度量 h是平行的，则相对于黎曼度量 h 的自然平行移动与黎曼平行移动重合。自然平行移动保持芬斯勒范数函数$\mathcal{F}$。相对于黎曼度量h的黎曼平行移动也保持该函数。因此， $\mathcal{F}$ 是 Berwald型，其典范联络为 ∇^R 一个无挠线性联络，并且其平行移动保持芬斯勒度量函数 $\mathcal{F}$。

为证明逆命题，假设 Randers度量 $\mathcal{F}$ 是 Berwald型。我们采用以下记号：

$$\mathcal{F}(x,y)=\sqrt{\alpha_{ij}(x)y^iy^j}+\beta_i(x)y^i, \tag{4.36}$$

其中

$$\alpha_{ij}=\frac{1}{\lambda}h_{ij}+\beta_i\beta_j,\quad\text{and}\quad\beta_i=-\frac{1}{\lambda}h_{ik}W^k. \tag{4.37}$$

采用缩写 $\gamma_{ij}=h_{ij}/\lambda$，我们有

$$\alpha_{ij}=\gamma_{ij}+\beta_i\beta_j,\quad\text{and}\quad\beta_i=-\gamma_{ik}W^k. \tag{4.38}$$

特别地，

$$\alpha^{ij}=\gamma^{ij}-\frac{1}{1+\beta^s\beta_s}\beta^i\beta^j, \tag{4.39}$$

其中 $\beta^i=\gamma^{ik}\beta_k$。众所周知（例如参见 [17, 定理 1]），$\mathcal{F}$ 是 Berwald型，当且仅当 $\nabla^\alpha\beta=0$，其中 ∇^α 是黎曼度量 α的 Lévi-Civita 联络。用局部坐标表示，我们有

$$\partial_i\beta_j-\Gamma_{ij}^k\beta_k=0, \tag{4.40}$$

其中，函数 Γ_{ij}^k 是 ∇^α的Christoffel符号。特别地，

$$\partial_i\beta_j=\partial_j\beta_i. \tag{4.41}$$

由于 β 是一个协变常数1-形式，因此其对偶向量场相对于黎曼度量α_{ij}具有常长度：

$$\text{const}=\alpha^{ij}\beta_i\beta_j=\left(\gamma^{ij}-\frac{1}{1+\beta^s\beta_s}\beta^i\beta^j\right)\beta_i\beta_j=\frac{\beta^s\beta_s}{1+\beta^s\beta_s}=\frac{|W|_\gamma^2}{1+|W|_\gamma^2}=|W|^2. \tag{4.42}$$

因此，黎曼度量γ_{ij} 与 h_{ij} 之间的共形因子 λ是常数，并且 $\nabla^R=\nabla^\gamma$。利用

$$\alpha^{km}\beta_k=\left(\gamma^{km}-\frac{1}{1+\beta^s\beta_s}\beta^k\beta^m\right)\beta_k=\frac{1}{1+\beta^s\beta_s}\beta^m=\frac{1}{1+\beta^s\beta_s}\gamma^{km}\beta_k \tag{4.43}$$

我们有

$$\begin{aligned}0=&\partial_i\beta_j-\Gamma_{ij}^k\beta_k=\partial_i\beta_j-\tfrac{1}{2}\alpha^{km}\left(\partial_i\alpha_{jm}+\partial_j\alpha_{im}-\partial_m\alpha_{ij}\right)\beta_k\\=&\partial_i\beta_j-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{1+\beta^s\beta_s}\gamma^{km}\left(\partial_i\gamma_{jm}+\partial_j\gamma_{im}-\partial_m\gamma_{ij}\right)\beta_k\\&-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{1+\beta^s\beta_s}\gamma^{km}\left(\beta_m\left(\partial_i\beta_j+\partial_j\beta_i\right)+\beta_j\left(\partial_i\beta_m-\partial_m\beta_i\right)+\beta_i\left(\partial_j\beta_m-\partial_m\beta_j\right)\right)\beta_k\overset{(4.41)}{=}\\=&\partial_i\beta_j-\tfrac{1}{1+\beta^s\beta_s}A_{ij}^k\beta_k-\tfrac{\beta^s\beta_s}{1+\beta^s\beta_s}\partial_i\beta_j=\frac{1}{1+\beta^s\beta_s}\left(\partial_i\beta_j-A_{ij}^k\beta_k\right).\end{aligned}$$

因此，1-形式 β 相对于 h是平行的，也就是说，其对偶向量场是协变常数的：$\nabla^RW=0$ 并且，根据命题4.7，挠率恒等于零。□

定理4.10。向量场 W 相对于黎曼度量 h 具有常长度，当且仅当*Randers*度量 $\mathcal{F}$ 是*Wagner*型的。

证明。使用定理4.9证明中的记号，可知（例如参见 [17,定理 2]），$\mathcal{F}$ 是 Wagner 型的，当且仅当 β 的对偶向量场相对于黎曼度量 α具有常长度。通过计算即可立即得出该结论

$$\alpha^{ij}\beta_i\beta_j=\left(\gamma^{ij}-\frac{1}{1+\beta^s\beta_s}\beta^i\beta^j\right)\beta_i\beta_j=\frac{\beta^s\beta_s}{1+\beta^s\beta_s}=\frac{|W|_\gamma^2}{1+|W|_\gamma^2}=|W|^2.$$

保持芬斯勒度量的平行移动由线性联络给出

$$\nabla_X Y = \nabla^{\alpha}_X Y + \frac{\alpha(\nabla^{\alpha}_X \beta^{\sharp}, Y)\beta^{\sharp} - \alpha(Y, \beta^{\sharp})\nabla^{\alpha}_X \beta^{\sharp}}{|\beta^{\sharp}|^2_{\alpha}},$$

其中 ∇^{α} 是黎曼度量 α 的Levi-Civita联络，升算子是相对于 α定义的。容易看出，若对偶向量场的长度为常数，则 $\nabla\alpha = 0$ 且 $\nabla\beta^{\sharp} = 0$ 。因此，我们有 $\nabla\alpha = 0$ 和 $\nabla\beta = 0$，也就是说，Randers度量在相对于 ∇的平行移动下保持不变。

□

5. 自平行曲线，自然喷射

设$(h,\ W)$是流形 M上的导航数据。曲线 $c\colon I \to M$是关于自然平行性的自平行曲线，当且仅当其沿 $\dot{c}$ 着 c 的速度向量场相对于定义3.1中引入的平行性是平行的3.1。利用第 ∇ 4.2节中引入的协变导数4.2，可得 c 是自平行曲线，当且仅当

$$\nabla_{\dot{c}}\,\dot{c} = 0. \tag{5.1}$$

根据4.19式中 ∇关于黎曼度量 ∇^{R} 的列维-奇维塔联络 h 和向量场 W 的表达式，我们得到 c 关于自然平行结构是自平行的，当且仅当它满足

$$\nabla^{R}_{\dot{c}}\,\dot{c} - \mathcal{F}(\dot{c})\cdot\nabla^{R}_{\dot{c}}\,W = 0 \tag{5.2}$$

在局部坐标系中，我们得到二阶微分方程

$$\ddot{c}^k + \dot{c}^i\left(A^k_{ij}\dot{c}^j - \mathcal{F}(\dot{c})A^k_{ij}W^j - \mathcal{F}(\dot{c})\frac{\partial W^k}{\partial x^i}\right) = 0, \tag{5.3}$$

其中，A^k_{ij} 是列维-奇维塔联络 ∇^{R}的Christoffel符号。喷射

$$S = y^k\frac{\partial}{\partial x^k} - 2G^k(x,y)\frac{\partial}{\partial y^k} \tag{5.4}$$

对应于系统（5.3）的系数为

$$G^k(x,y) = \tfrac{1}{2}\left(A^k_{ij}y^iy^j - \mathcal{F}(x,y)y^iA^k_{ij}W^j - \mathcal{F}(x,y)y^i\tfrac{\partial W^k}{\partial x^i}\right). \tag{5.5}$$

定义5.1。具有系数（5.4）且对应于自然平行性的喷射（5.5）称为自然喷射，而由其生成的联络

$$\overline{\Gamma} := [J, S] \tag{5.6}$$

将称为自然对称联络。

注 5.2. 自然联络（4.14）与自然对称联络（5.6）通常并不相同。事实上，自然对称联络的挠率恒为零，但自然联络的挠率通常不为零。

引理 5.3. 方程

$$y^i\rho^k_i \circ \pi = \varphi(x,y)y^k \tag{5.7}$$

当且仅当 $\varphi(x,y) = \varphi(x)$ 且 $\rho^k_j(x) = \varphi(x)\delta^k_j$. 时，切流形上的零次齐次函数 φ 和底流形上的 *1*-形式 ρ满足该条件

证明。 首先，我们证明零次齐次函数 φ 仅取决于位置。对变量 y^l 求导，得到

$$\rho_l^k \circ \pi = \varphi_{y^l} y^k + \delta_l^k \varphi.$$

取 $k = l$

$$\rho_k^k \circ \pi = \varphi_{y^k} y^k + \delta_k^k \varphi,$$

其中 $y^k \varphi_{y^k} = 0$ ，因为 φ 是零次齐次的。因此

$$\varphi = \frac{\rho_k^k \circ \pi}{n} \quad \Rightarrow \quad \varphi(x, y) = \varphi(x)$$

仅取决于位置。最后，

$$y^i \rho_i^k \circ \pi = \varphi \circ \pi y^k \quad \Rightarrow \quad \rho_j^k(x) = \varphi(x) \delta_j^k$$

对变量 y^j求导。（该命题的逆命题显然成立。）□

定义 5.4. 向量场 W 称为关于黎曼度量 h 的共圆向量场，如果存在函数 $\varphi \in C^\infty(M)$使得

$$\nabla_X^R W = \varphi X, \tag{5.8}$$

对所有 $X \in \mathfrak{X}(M)$，其中 ∇^R 表示 h的列维-奇维塔联络。函数 φ 称为 W的势函数。

命题 5.5。 设 (h, W) 为导航数据。若且唯若 W 是关于 h的共圆向量场，自然喷射 S与对应于黎曼联络 ∇^R 的测地线方程的二次喷射 S^R 射影相关。

证明。 喷射 S 和 S^R 射影相关，当且仅当它们的路径作为点集重合，也就是说，它们在重新参数化意义下重合。众所周知，等价条件是存在一个正的一次齐次函数 P，使得 $S = S^R + P\mathcal{C}$。线性联络 ∇^R 的二次喷射 S^R 的局部表达式为

$$S^R = y^k \frac{\partial}{\partial x^k} - A_{ij}^k(x) y^i y^j \frac{\partial}{\partial y^k}. \tag{5.9}$$

因此，利用方程（5.4）、（5.5）和（5.9），射影等价性意味着存在一个正的一次齐次函数 $P(x,\ y)$ 使得

$$\mathcal{F}(x, y) y^i \rho_i^k(x) = P(x, y) y^k, \tag{5.10}$$

其中 $\rho(X) = \nabla_X^R W$。应用引理 5.3 以及 $\varphi = P/\mathcal{F}$，可知当且仅当 $P(x,\ y) = \varphi(x)\mathcal{F}(x,\ y)$ 时，喷射在射影意义下相关，即射影因子与 Randers度量 $\mathcal{F}$共形相关，并且 $\rho_j^k(x) = \varphi(x)\delta_j^k$。

□

例5.6。 令 M 为欧几里得单位球在 $\mathbb{R}^n$ 中的内部，并赋予标准欧几里得内积 $h_{ij} = \delta_{ij}$。若

$$W = -x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{5.11}$$

则有 $\nabla_X^R W = -X$ ，且自然喷射为

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \mathcal{F}(x, y)\mathcal{C}, \tag{5.12}$$

其中 C 是所谓的Liouville向量场，而Randers度量 $\mathcal{F}$ 与芬克度量重合 [14]。因此，自然喷射（5.12）可度量化为芬克度量的典范喷射。

例 5.6 尤其令人感兴趣，因为由自然平行性得到的测地结构是可度量化的。下一例表明，情况并不总是如此。

例5.7。 设 h是 $\mathbb{R}^2$上的欧几里得度量，定义为 $h_{ij}=\delta_{ij}$，并设风W 由无穷小旋转给出

$$W = x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}. \tag{5.13}$$

可以证明，水平向量场的李括号 $[\delta_1,\delta_2]$和 $\big[[\delta_1,\delta_2],\delta_2\big]$ (4.7) 给出相互独立的垂直方向，因此由水平向量场生成的分布为：

$$\mathcal{D}_{\mathcal{H}} := \big\langle \mathcal{H} \big\rangle_{Lie} = Span\big\{\delta_i,\, [\delta_{i_1},\delta_{i_2}],\, \big[\delta_{i_1},[\delta_{i_2},\delta_{i_3}]\big]\ldots\big\}, \tag{5.14}$$

称为整体性分布，它是4维的：包含整个水平空间和垂直空间，即

$$\mathcal{D}_{\mathcal{H}} = TTM. \tag{5.15}$$

如果相应的自然喷射是芬斯勒可度量化的，那么对应的芬斯勒范数函数 F 将是整体性不变函数 [6]。因此，对于任意 $X\in\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$，都应有 $\mathcal{L}_X F=0$。然而，由（5.15）可知， F 必须是常函数，由此产生矛盾。这表明，在这种情况下，自然喷射不是芬斯勒可度量化的。

刻画使自然平行性和兰德斯型芬斯勒度量 $\mathcal{F}$ 所关联的几何结构——例如平行移动、自平行曲线和喷射——彼此重合的导航数据（h， W），是一个自然的问题。最简单的情形是平行移动重合。我们有如下

性质5.8。 设（h， W）是流形 M上的导航数据。与之关联的 *Randers* 度量 $\mathcal{F}$ 所对应的平行移动与自然平行移动（3.1）重合，当且仅当 W 相对于 h平行。

证明。 假设平行移动重合。用 Grifone 的术语来说，与 $\mathcal{F}$关联的联络的挠率，因此自然联络（4.25）的挠率为零。由命题4.7 可得， W 相对于黎曼度量 h平行；再利用性质3.3 可知，三种平行移动——即自然平行移动、黎曼平行移动和芬斯勒平行移动（实际上是伯瓦尔德型，见定理4.9）——全部重合。 □

注5.9。 需要注意的是，Randers度量 $\mathcal{F}$ 的自平行曲线（分别地，喷射）可能与导航数据所对应的自然平行移动所产生的自平行曲线（分别地，喷射）重合，即使两者的平行移动本身并不相同。 5.6给出了这一现象的一个具体例子，其中导航数据 (h,W)包含一个向量场 W ，它相对于 h并非平行。这两种平行移动显然不同，因为自然平行移动的整体群是有限维的，而 $\mathcal{F}$（芬克度量）的整体已知是无限维的 [10]。下述命题将刻画在什么特定情况下，自然平行性与导航问题所对应的 Randers度量会产生相同的测地结构。

命题 5.10。 自然喷射 (5.4)与由导航数据$\mathcal{F}=\alpha+\beta$所关联的 *Randers*度量的测地喷射 (h,W) 当且仅当 W是关于黎曼度量 h的共圆向量场。

证明。 首先，假设 W 是关于黎曼˜度量 h的共圆向量场，并令 S 表示 Randers度量的测地喷射 $\mathcal{F}=\alpha+\beta$。根据 [3,˜公式 2。1],的喷射系数 S 可表示为

$$\tilde{G}^i=\tfrac{1}{2}y^jy^kA^i_{kj}+R_0y^i+\frac{R_{00}}{2}W^i-\frac{\mathcal{F}^2}{2}\left(S^i+R^i-RW^i\right)-\mathcal{F}\left(S^i_0+\frac{R}{2}y^i+R_0W^i\right)-\frac{R_{00}}{2\mathcal{F}}y^i,$$

其中 R_{ij} 和 S_{ij} 表示张量的分量

$$\mathcal{R}(X,Y)=\tfrac{1}{2}\left(h(\nabla^R_XW,Y)+h(X,\nabla^R_YW)\right),\quad \mathcal{S}(X,Y)=\tfrac{1}{2}\left(h(\nabla^R_XW,Y)-h(X,\nabla^R_YW)\right),$$

re别地，对于任意的 (0,2) 张量 $\mathcal{T}$，其张量分量为 T_{ij}，我们采用以下记号

$$T_j=W^iT_{ij},\quad T=W^jT_j,\quad T^i=h^{ij}T_j,\quad T^i_j=h^{il}T_{lj},\tag{5.16a}$$

$$T_0=y^iT_i,\quad T^i_0=y^jT^i_j,\quad T_{00}=y^iy^jT_{ij}.\tag{5.16b}$$

自然喷射的系数 (5.5) 可改写为

$$G^i=\frac{1}{2}y^jy^kA^i_{kj}-\frac{\mathcal{F}}{2}\left(R^i_0+S^i_0\right).\tag{5.17}$$

由 (5.8) 可得

$$R_{ij}=\varphi h_{ij},\quad R_{00}=\varphi h^2,\quad R^i_0=\varphi y^i,\quad S_{ij}=0.\tag{5.18}$$

因此，应用 [3, 公式 2。4] ，并取 $c=-\varphi/2$，可得

$$\tilde{G}^i=\frac{1}{2}y^jy^kA^i_{kj}-\frac{\mathcal{F}}{2}\varphi y^i=\frac{1}{2}y^jy^kA^i_{kj}-\frac{\mathcal{F}}{2}R^i_0\overset{(5.17)}{=}G^i.\tag{5.19}$$

˜因此， S 和 S 的喷射系数相同。

˜反过来，假设 Randers度量的自然喷射 S 与测地喷射 S 相同。那么

$$G^i=\tilde{G},\tag{5.20}$$

因此，

$$G^i(v)-G^i(-v)=\tilde{G}^i(v)-\tilde{G}^i(-v).\tag{5.21}$$

由于变量 v 中的二次项显然相互抵消，(5.21) 的左侧变为

$$G^i(v)-G^i(-v)=-\frac{R^i_0+S^i_0}{2}(v)\left(\mathcal{F}(v)+\mathcal{F}(-v)\right)=-\alpha(v)\left(R^i_0+S^i_0\right)(v).\tag{5.22}$$

类似地，(5.21) 的右侧为

$$\tilde{G}^i(v)-\tilde{G}^i(-v)=A\big(\mathcal{F}^2(v)-\mathcal{F}^2(-v)\big)-B\left(\mathcal{F}(v)+\mathcal{F}(-v)\right)-C\left(\frac{1}{\mathcal{F}(v)}+\frac{1}{\mathcal{F}(-v)}\right),\tag{5.23}$$

其中 (i) $A=\frac{1}{2}\left(S^i+R^i-RW^i\right)$ 不依赖于 y，（ii）$B=S^i_0+\frac{1}{2}Ry^i+R_0W^i$ 关于变量 y是线性的，（iii）$C=\frac{1}{2}R_{00}y^i$ 关于变量 y是三次项。

由于

$$\mathcal{F}^2(v)-\mathcal{F}^2(-v)=4\alpha(v)\beta(v),\quad \mathcal{F}(v)+\mathcal{F}(-v)=2\alpha(v),\quad \frac{1}{\mathcal{F}(v)}+\frac{1}{\mathcal{F}(-v)}=\frac{2\alpha(v)}{\alpha^2(v)-\beta^2(v)},$$

将（5.21）除以公因子 α（v），并利用（5.22）和（5.23）比较剩余项，可得 $\dfrac{R_{00}}{\alpha^2-\beta^2}y^i$ 必须是方向变量的线性函数。因此，函数

$$m:=\frac{R_{00}}{\alpha^2-\beta^2}\tag{5.24}$$

不依赖于方向变量。因此

$$R_{00} = \varphi h^2, \qquad R_{ij} = \varphi h_{ij}, \tag{5.25}$$

对于某个函数 $\varphi \in C^\infty(M)$。将 [3, 公式 2。4] 与 $c = -\varphi/2$结合，Randers 喷射˜的系数 S 化为

$$\tilde{G}^i = \frac{1}{2} y^j y^k A^i_{kj} - \mathcal{F} S^i_0 - \frac{1}{2}\mathcal{F}^2 S^i - \frac{1}{2}\varphi \mathcal{F} y^i. \tag{5.26}$$

将（5.20）与（5.17）和（5.26）结合使用，可得

$$\frac{1}{2}\left(R^i_0 + S^i_0\right) = S^i_0 + \frac{1}{2}\mathcal{F} S^i + \frac{1}{2}\varphi\, y^i. \tag{5.27}$$

Sinc由于 $\mathcal{F}$ 是该方程中唯一的非线性项，因此可得 $S^i = 0$，从而

$$\varphi\, y^i = R^i_0 - S^i_0. \tag{5.28}$$

对 y^j 求导，得到

$$\varphi \delta^i_j = R^i_j - S^i_j \quad \Rightarrow \quad \varphi h_{ij} = R_{ij} - S_{ij}. \tag{5.29}$$

T这意味着（5.8），因此 W 是一个势函数为 φ的共圆向量场 . □

比较命题 5.5和命题 5.10 可得如下结果 .

推论 5.11. 自然喷射的测地线与由导航数据 (h, W) 所对应的 *Randers*度量 $\mathcal{F}$的测地线重合，当且仅当它们与黎曼度量 h的测地线射影等价。

备注 5.12. 根据 [3], ，Randers度量具有各向同性 S-曲率，当且仅当 $R_{00} = \varphi h^2$，其中函数 $\varphi \in C^\infty(M)$。由此可得以下结果

推论5.13. 如果自然喷射与由导航数据所对应的 *Randers*度量的测地喷射重合，那么该 *Randers*度量具有各向同性 S-曲率。

证明. 如命题 5.10的证明所示，如果由导航数据所对应的自然喷射与 Randers 喷射重合，那么（5.25）成立。根据备注 5.12，这意味着 Randers度量具有各向同性 S-曲率。

□

6. 关于度量校正过程的说明 SSES

度量修正过程的目的是使联络适应度量环境。这个问题与芬斯勒几何的历史密切相关，而芬斯勒几何面临的首要挑战是发展出一种合适的联络概念。迄今为止，人们已经并仍在针对某些特殊情形尝试解决这一问题（例如，广义Berwald空间理论）。用 M. Matsumoto 的话说：“对于每一种几何表述，都存在一种最合适的芬斯勒联络”。在平行移动（3.1）的情形下，该过程以向量场 W 作为导航问题的初始数据之一。特别是，构造（3.1）可应用于黎曼度量 h的任意度量线性联络。因此，该修正过程将导航问题初始数据给出的度量线性联络变为Finsler非线性度量联络，其中芬斯勒度量函数是由导航问题导出的Randers型函数。与挠率无关的结果仍然成立。下面的例子展示了更一般情形下的一种不同的度量修正过程。关于这种平移-归一化过程的详细说明，可参见[12]在Finsler向量丛的一般背景下的相关内容。

例 6.1。 设 F 为一个芬斯勒度量函数，并考虑底流形上的线性联络 ∇^0 。度量修正过程

$$\mathcal{P}^c\colon T_pM \to T_qM, \quad \mathcal{P}^c(V_p) := \frac{F(V_p)}{F(\mathcal{P}^0(V_p))}\mathcal{P}^0(V_p), \tag{6.1}$$

其中， $\mathcal{P}^0$ 是相对于 ∇^0沿 c的平行移动，它给出了切空间之间保持芬斯勒度量函数不变的齐次（非线性）平行移动。设 $V_t := \mathcal{P}_t^c(V_p)$为平行向量场，并考虑其在 $t=0$ 处的导数，以根据联络系数给出诱导的水平分布：

$$\frac{dV_t^k}{dt} = F(V_p)\left(-\frac{1}{F^2(\mathcal{P}_t^0(V_p))}\frac{dF(\mathcal{P}_t^0(V_p))}{dt}[\mathcal{P}_t^0(V_p)]^k + \frac{1}{F(\mathcal{P}_t^0(V_p))}\frac{d[\mathcal{P}_t^0(V_p)]^k}{dt}\right),$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{dF(\mathcal{P}_t^0(V_p))}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial x^l}\circ\mathcal{P}_t^0(V_p)\left(x^l\circ\mathcal{P}_t^0(V_p)\right)' + \frac{\partial F}{\partial y^l}\circ\mathcal{P}_t^0(V_p)\left(y^l\circ\mathcal{P}_t^0(V_p)\right)'\\ &= \dot{c}^l(t)\frac{\partial F}{\partial x^l}\circ\mathcal{P}_t^0(V_p) - \dot{c}^i(t)V_t^jA_{ij}^l(c(t))\frac{\partial F}{\partial y^l}\circ\mathcal{P}_t^0(V_p) = \dot{c}^i(t)\left(\delta_i^0F\right)\circ\mathcal{P}_t^0(V_p),\end{aligned}$$

其中函数A_{ij}^k 是 ∇^0 的Christoffel符号，并且

$$\delta_i^0 = \frac{\partial}{\partial x^i} - V_t^jA_{ij}^l(c(t))\frac{\partial}{\partial y^l}.$$

因此

$$\left.\frac{dV_t^k}{dt}\right|_{t=0} = -\dot{c}^i(0)\left(\frac{\delta_i^0F}{F}(V_p)V^k(p) + V^j(p)A_{ij}^k(c(0))\right)$$

并且因此，水平分布之间的关系为

$$\Gamma_i^k = \frac{\delta_i^0F}{F}y^k + y^jA_{ij}^k \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{h} = \mathfrak{h}^0 - \frac{d_{\mathfrak{h}^0}F}{F}\otimes\mathcal{C}.$$

相关喷射

$$S = S^0 - \frac{S^0F}{F}\mathcal{C}$$

射影等价。

致谢：作者谨向审稿人致谢，感谢他们提出的建设性意见，这些意见有助于改进本文。

参考文献

[1] M. Asma 和 Z. Muzsnay。恒曲率球对称射影芬斯勒度量的整体。*J. Geom. Anal.*，34(8)：第257号论文，15页，2024年。[2] D. Bao、C. Robles 和 Z. Shen。黎曼流形上的泽尔梅洛导航。*J. Differential Geom.*，66(3)：377–435，2004年。[3] X. Cheng、Z. Shen。标量旗曲率的兰德斯度量。*J. Aust. Math. Soc.*，87：359–370，2009年。[4] G. de Rham。关于黎曼空间的可约性。*Comment. Math. Helv.*，26：328–344，1952年。[5] C. Ehresmann。可微纤维空间中的无穷小联络。载于布尔巴基研讨会，第*1*卷，第153–168页，报告第24号。法国数学会，巴黎，1995年。[6] S. G. Elgendi 和 Z. Muzsnay。喷射的 h(2)-变分性与可度量化性的自由度。*Differential Geom. Appl.*，54（A辑）：194–207，2017年。[7] J.-H. Eschenburg 和 E. Heintze。黎曼流形的唯一分解。*Proc. Amer. Math. Soc.*，126(10)：3075–3078，1998年。[8] J. Grifone。近切结构与联络。I。*Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*，22 334，1972 1 287( ): – 。[9] B. Hubicska、V. S. Matveev 和 Z. Muzsnay。几乎所有芬斯勒度量的整体群都是无限维的。*The Journal of Geometric Analysis*，31(6)：6067–6079，2021年6月。[10] B. Hubicska 和 Z. Muzsnay。恒曲率射影平坦兰德斯二维流形的整体群。*Differential Geometry and its Applications*，73：101677，2020年。

[11] S. Kobayashi 和 K. Nomizu。微分几何基础。第*I*卷。Wiley经典文库。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1996年。1963年原版的重印本，Wiley-Interscience出版物。[12] L. Kozma 和 S. Baran。关于芬斯勒点空间上的度量齐次联络。德布勒森数学出版物，49(1-2)：59–68，1996年。[13] Z. Muzsnay 和 P. T. Nagy。具有无限维最大整体群的芬斯勒二维流形。*Differential Geom. Appl.*，39：1–9，2015年。[14] T. Okada。关于具有恒负曲率的射影平坦芬斯勒空间模型*Tensor (NS)*，40：117–123，1983年。[15] C. Robles。恒曲率兰德斯空间中的测地线。美国数学会汇刊，359(4)：1633–1651，2007年。[16] M. Spivak。微分几何综合导论。第*I*卷。Publish or Perish, Inc.，威尔明顿，特拉华州，第二版，1979年。[17] C. Vincze。关于具有半对称相容线性联络的兰德斯流形。*Indagationes Mathematicae*，26(2)：363–379，2015年。

Asma Mezrag，德布勒森大学数学研究所，匈牙利德布勒森电子邮箱：asma1998mezrag@gmail.com

Zoltán Muzsnay，德布勒森大学数学研究所，匈牙利德布勒森网址：
https://math.unideb.hu/en/dr-zoltan-muzsnay电子邮箱：muzsnay@science.unideb.hu

Csaba Vincze，德布勒森大学数学研究所，匈牙利德布勒森网址：
https://math.unideb.hu/dr-vincze-csaba电子邮箱：csvincze@science.unideb.hu