此处将显示与文章类型相符的横幅

arXiv:2601.01494v1 [physics.flu-dyn] 4 Jan 2026

非马尔可夫均匀各向同性合成湍流中的标量混合

Pratyush S. Awasthi、Joaquim P. Jossy、Amitabh Bhattacharya 和 Prateek Gupta, †
印度理工学院德里分校应用力学系，豪兹卡斯，新德里 110017，印度。

（收到日期：xx；修订日期：xx；接受日期：xx）

我们表明，速度场的非马尔可夫性是湍流混合的一项基本属性。我们通过合成生成的随机速度场中的被动标量混合来证明这一点。为每个空间尺度分别引入速度去相关时间尺度（随机扫掠），会得到本质上非马尔可夫的速度场，其有限时间记忆按 τ^{-5} 衰减（对于衰减谱），而非呈指数衰减（马尔可夫情形）；后者可通过为所有空间尺度引入一个恒定时间尺度得到，且与滤波函数无关。我们刻画了马尔可夫场与非马尔可夫合成场的拉格朗日混合统计量，并将其与相应的不可压缩直接数值模拟（DNS）进行比较。我们还利用 DNS 和合成场研究了施密特数范围为 $\mathrm{Sc} \leqslant 1$ 时的扩散性被动标量混合。对于低施密特数，两种合成场都能重现 $-17/3$ 标量谱；然而，与非马尔可夫场相比，马尔可夫场严重低估了衰减模拟中的平均梯度，以及统计稳定模拟中的标量方差生成率和耗散。我们还始终将结果与配套的三维 DNS 进行比较，以说明合成场中非马尔可夫性的必要性，因为只有这样才能捕捉混合动力学。

关键词：

1. 引言

混合是指在搅拌和分子扩散的共同作用下，标量梯度重新分布并趋于均匀化的动态过程（Zhou 2024；Jossy &Gupta 2025）。湍流搅拌的作用可在施加了浓度梯度的统计稳态系统（Yeung 和 Sreenivasan 2014）中研究，也可在衰减系统中研究；在后者中，研究的是初始不均匀浓度场的均匀化（Yeung 和 Sreenivasan 2013）。在稳态混合设置中，搅拌与扩散之间的平衡体现了混合过程。相比之下，非稳态混合设置的特点是先由搅拌主导混合，随后由扩散主导平滑化。

† 通讯电子邮箱：prgupta@iitd.ac.in

摘要不得延伸至第 2 页

本研究阐明了时间相关性对稳态和非稳态混合设置中混合动力学的影响。

大尺度含能涡旋对湍流中小尺度涡旋的平流作用称为随机扫掠效应（Tennekes 1975）。Gorbunova 等（2021）使用直接数值模拟表明，去相关时间在大波数下按 k^{-1} 衰减，而不是经典的 $k^{-2/3}$，这说明大尺度涡旋决定了时间去相关。对于均匀各向同性湍流（HIT），Tennekes（1975）证明，欧拉时间谱在高频下超过其拉格朗日对应谱。在此基础上，Yeung 和 Sawford（2002）利用随机扫掠框架阐明了与混合与弥散相关的拉格朗日统计，并表明这一概念可扩展至被动标量。增强搅拌的一种拉格朗日度量是由局部有限时间李雅普诺夫指数（FTLEs）所捕捉的指数拉伸（Aref 2020; Toussaint等2000）。G¨otzfried等（2019）比较了欧拉描述和拉格朗日描述下的被动标量混合，并表明平均混合时间——定义为在非稳态混合设置中搅拌占主导地位的持续时间——由压缩性局部有限时间李雅普诺夫指数决定。

合成湍流场旨在重现湍流的基本动力学特征，同时避免求解完整纳维–斯托克斯方程所需的计算开销。除了实际用途外，这类模型还能为理解湍流内在机制提供宝贵见解（Juneja 等，1994）。Batchelor 等（1959）预测，在高雷诺数和低标量扩散率条件下，均匀各向同性湍流会产生具有特征 –17/3 标度的被动标量谱，该标度适用于扩散（黏性–对流）范围。Holzer与Siggia（1994）证明，二维随机生成的高斯速度场在用于混合被动标量时，能够重现这一 –17/3 标度。Jossy 等（2025）将这一合成场框架扩展到三维，但发现这类场无法复现由纳维–斯托克斯方程生成的湍流流动的搅拌效能。本文提出了生成均匀各向同性湍流场的方法，使其能够复现非合成湍流场的混合效率。本文表明，与早期构建的马尔可夫场相比，非马尔可夫三维均匀合成速度场在混合被动标量方面更接近湍流。下一节将概述构建非马尔可夫合成场的理论基础，并介绍数值实现。随后，我们将在§ 3 中讨论结果，并在§ 4中总结研究发现。

2. 理论与数值模拟

2.1. 三维时间相关非马尔可夫合成场

Careta *et al.*（1994）利用奥恩斯坦–乌伦贝克过程提出了二维均匀各向同性速度场。Jossy *et al.*（2025）将该方法扩展用于生成三维均匀各向同性速度场。在本研究中，我们将 Jossy *et al.*（2025）提出的三维合成速度场扩展为三维非马尔可夫均匀各向同性速度场。我们在谱空间中定义矢量势 $\hat{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{k},t)$，其为具有不同衰减时间尺度的乌伦贝克–奥恩斯坦过程，表示为：

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{k},t)}{dt} = -\frac{\hat{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{k},t)}{\tau(\boldsymbol{k})} + \frac{\hat{Q}(\boldsymbol{k})}{\tau(\boldsymbol{k})}\hat{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{k},t), \tag{2.1}$$

其中，$\tau(\boldsymbol{k})$ 是随谱变化的时间尺度，$\hat{Q}(\boldsymbol{k})$ 是用于实现所需能谱的滤波核，而 $\hat{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{k},t)$ 是 $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{r},t)$ 的傅里叶变换；后者是一个 δ 函数

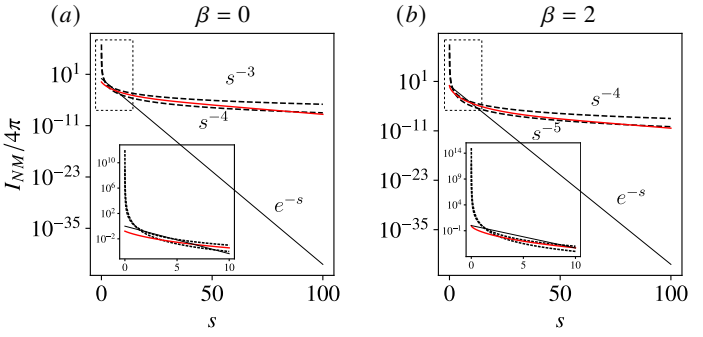

图1：对比式（2.12）中的时间相关积分与 e^{-s}、$1/s^3$ 和 $1/s^4$。指数衰减的时间相关性对应于马尔可夫矢量势。显然，式（2.1）定义了非马尔可夫矢量势。

cor相关白噪声向量，其均值为零，其相关张量定义如下

$$\langle \chi_i(\boldsymbol{x},t)\chi_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t+s)\rangle = 2\epsilon\delta_{ij}\delta(\boldsymbol{r})\delta(s), \tag{2.2}$$

^ 其中 ϵ 是白噪声的强度，() 表示傅里叶空间中的相应量。傅里叶空间中的矢量势解为

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{k},t) = \hat{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{k},0)e^{-\frac{t}{\tau(\boldsymbol{k})}} + \int_0^t \frac{\hat{Q}(\boldsymbol{k})}{\tau(\boldsymbol{k})}\hat{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{k},t')e^{\frac{t-t'}{\tau(\boldsymbol{k})}}dt', \tag{2.3}$$

其中时间相关张量定义为，

$$\langle \hat{\eta}_p^*(\boldsymbol{k},t)\hat{\eta}_q(\boldsymbol{k},t+s)\rangle = |\hat{Q}|^2\frac{2\epsilon\delta_{pq}e^{-s/\tau(\boldsymbol{k})}}{(2\pi)^3\tau(\boldsymbol{k})^2}\int_0^t\int_0^{t+s}\delta(t'-t'')e^{\frac{t'+t''-2t}{\tau(\boldsymbol{k})}}\,dt'\,dt''. \tag{2.4}$$

当， $t\to\infty$时，上述表达式给出，

$$\lim_{t\to\infty}\langle \hat{\eta}_p^*(\boldsymbol{k},t)\hat{\eta}_q(\boldsymbol{k},t+s)\rangle = \frac{2\epsilon\delta_{pq}|\hat{Q}|^2}{(2\pi)^3\tau(\boldsymbol{k})}e^{-s/\tau(\boldsymbol{k})}. \tag{2.5}$$

为了估算合成场的速度自相关时间尺度（特定尺度的去相关时间），我们将上述表达式代入

$$\phi_{ii}(\boldsymbol{k},s) = \langle \hat{\boldsymbol{u}}^*(\boldsymbol{k},t)\cdot\hat{\boldsymbol{u}}^*(\boldsymbol{k},t+s)\rangle = k^2\left\langle \hat{\eta}_p^*\hat{\eta}_q\right\rangle - k_m k_l\left\langle \hat{\eta}_m^*\hat{\eta}_l\right\rangle, \tag{2.6}$$

得到

$$\tau_c = \frac{\int_0^\infty \phi_{ii}(\boldsymbol{k},s)ds}{\phi_{ii}(\boldsymbol{k},0)} = \tau(\boldsymbol{k}). \tag{2.7}$$

方程（2.7）证实，长度尺度为 $1/|\boldsymbol{k}|$的速度场去相关时间尺度由 τ（$\boldsymbol{k}$）量化。速度 ϕ_{ii}（$\boldsymbol{k}$， s）的傅里叶变换的自相关与能谱 E（k）之间的关系为（Batchelor 1953），

$$E(k) = 2\pi k^2\phi_{ii} = \frac{k^4\epsilon|\hat{Q}|^2}{\pi^2\tau}, \tag{2.8}$$

其中 $k = |\boldsymbol{k}|$。通过使用滤波核 ^ $Q(\boldsymbol{k})$，可获得所需的动能谱空间变化，其定义为

$$\hat{Q}_I(\boldsymbol{k}) = (1+\ell^2k^2)^{-n}, \tag{2.9}$$

其中l 表示长度尺度。下标 $()_I$ 表示这种形式的 ^ Q 用于

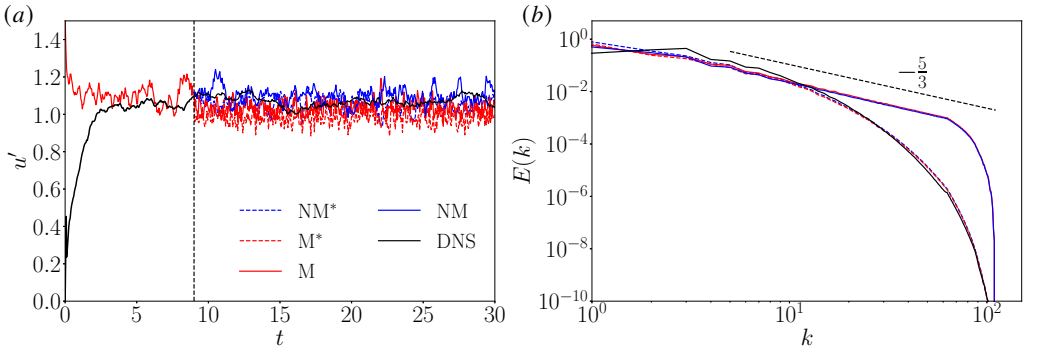

图2：比较不同速度场的（a）均方根演化。（b）不同速度场的动能谱。对于直接数值模拟，$k_{\max}\eta \approx 1$。76。两幅图的图例相同。

直接数值模拟	**马尔可夫** DS1、DS2 MS1*、MS2、MS4、MS8、MS16* NMS1*、NMS2、NMS4、NMS8、NMS16*
非马尔可夫	**稳态** DS1、DS2 MS1*、MS2、MS4、MS8、MS16* NMS1*、NMS2、NMS4、NMS8、NMS16*
	衰减 DU1、DU2 MU1*、MU2、MU4、MU8、MU16* NU1*、NMU2、NMU4、NMU8、NMU16*

表1：直接数值模拟和合成湍流场模拟的参数空间。()* 表示模拟分别针对理想谱和匹配谱进行。案例名称中的数字等于标量的1/Sc。

在我们的合成场中实现所谓的理想谱，即对于$lk \gg 1$，$E(k) \sim k^{-5/3}$。对于变化的 $\tau(\boldsymbol{k})$（非常数），过程 $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}, t)$是一个非马尔可夫过程。在空间域中，时间相关性表示为，

$$\left\langle \eta_p(\boldsymbol{x},t)\eta_q(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t+s)\right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\left\langle \hat{\eta}_p^*(\boldsymbol{k},t)\hat{\eta}_q(\boldsymbol{k},t+s)\right\rangle e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{k}, \tag{2.10}$$

对于^可得 $Q_I(\boldsymbol{k})$由（2.9）得到，

$$C_{pq}^{\eta}(\boldsymbol{r},s) = \left\langle \eta_p(\boldsymbol{x},t)\eta_q(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t+s)\right\rangle = \frac{2\epsilon\delta_{pq}}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(1+\lambda^2k^2)^{-2n}}{\tau(\boldsymbol{k})}e^{-s/\tau(\boldsymbol{k})}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{k}, \tag{2.11}$$

这类似于Chaves等人（2003）研究的相关场。

方程（2.11）表明，对于变化的 $\tau(\boldsymbol{k})$，在某一空间点处，$\boldsymbol{\eta}$ 是一个非马尔可夫场，因为除非 $\tau(\boldsymbol{k})$ = 为常数（马尔可夫情形），否则该积分无法简化为指数衰减的时间相关性。正如我们在第 3 节所示，由于马尔可夫 $\boldsymbol{\eta}$ 产生的速度场会导致较弱的标量混合，而非马尔可夫速度场则表现出与湍流非常相似的混合动力学。如（2.7）所示，$\tau(\boldsymbol{k})$是尺度为 $1/|\boldsymbol{k}|$的速度与其历史失去相关性所需的时间。在流体动力学湍流的背景下，$\tau(\boldsymbol{k})$可以与特定长度尺度上的速度扰动在完全更新之前的驻留时间相比较。虽然可以证明波数为 k 的涡旋的时间尺度为 $\sim k^{-\frac{2}{3}}$（Pope 2001），但所谓的随机扫掠效应（Gorbunova 等人 2021；Yeung 和 Sawford 2002；Wilczek 和 Narita 2012）导致 $\tau \sim (u_0 k)^{-1}$ 其中 u_0 为大涡速度尺度。对 $\tau(\boldsymbol{k})$使用径向函数 = $1/k$以及（2.9）中的 $n = 5/3$，我们可以简化时间相关性中的积分

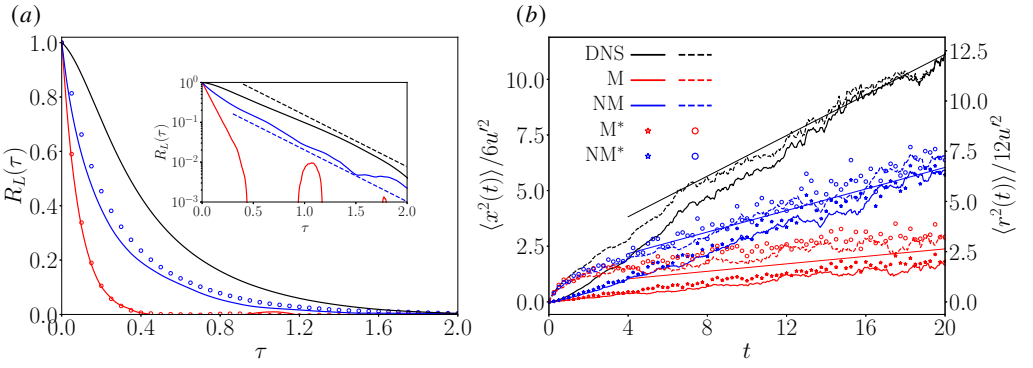

图3：（a）拉格朗日速度相关性；（b）马尔可夫、非马尔可夫和不可压缩受迫均匀各向同性湍流模拟中的单粒子（实线、空心星形）和粒子对（虚线、空心圆形）弥散。T_L 对于直接数值模拟：0.46；非马尔可夫：0.25；马尔可夫：0.08。

$\boldsymbol{\eta}$，$\boldsymbol{u}$，以及 $\nabla\boldsymbol{u}$ 如下：

$$I_{NM}(s) = \frac{4\pi}{C}\int_0^\infty k^{\beta+3}\left(1+\lambda^2k^2\right)^{-\frac{10}{3}} e^{-ks}dk, \tag{2.12}$$

其中 $\beta = 0$，2，4 对于 η、$\boldsymbol{u}$和 $\nabla\boldsymbol{u}$，分别如此。图1 显示了 $I_{NM}/4\pi$ 随s的变化。时间相关性衰减明显慢于 e^{-s}，从而证实了 $\boldsymbol{\eta}$ 场的非马尔可夫特性，因此 $\boldsymbol{u}$ 和 $\nabla\boldsymbol{u}$也具有这一特性。

2.2. 数值实现与混合模拟

利用上述构建的非马尔可夫场和三维不可压缩直接数值模拟，我们进行了被动标量混合的衰减模拟和统计平稳模拟。合成场的数值实现遵循 Careta等（1994），并采用（2.3）的时间离散化版本，得到

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{k}, t+\Delta t) = \hat{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{k}, t)e^{-\frac{\Delta t}{\tau(\boldsymbol{k})}} + \hat{Q}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{k}, t)\sqrt{\frac{\epsilon}{2\tau(\boldsymbol{k})(2\pi)^3}\left(1-e^{-\frac{2\Delta t}{\tau(\boldsymbol{k})}}\right)}, \tag{2.13}$$

其中，$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{k})$也是一个强度为单位值的 δ 相关高斯向量，且 $\hat{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{k}, 0) = \sqrt{\epsilon/\tau}\hat{Q}\hat{\chi}$。我们进行了两组合成速度混合模拟：马尔可夫合成速度场（$\tau(\boldsymbol{k}) = 0.1$（常数））和非马尔可夫合成速度场（$\tau(\boldsymbol{k}) = 1/k$）。马尔可夫场的取值 $\tau = 0.1$，是为了使 $E(k = 1)$与直接数值模拟值相近而选定的（参见图2）。Jossy等人（2025）已表明，当 $\tau = 0.01$时（可根据式（2.8）调整Q，以使 $E(k)$取值适当），场的混合程度很低。在 $\tau \to \infty$的极限下，我们将得到一个稳态场。值得注意的是，随机扫掠近似消除了与 τ取值相关的不确定性。对于上述每组，我们又进行了两组模拟：施加平均标量梯度的统计平稳标量混合，以及以初始化球形斑块为初始条件的衰减标量混合。为单独考察其对混合的影响（若有），我们还针对每组分别进行了两组模拟：采用理想动能谱 $k^{-5/3}$ 的合成场，其中使用了式（2.9）中定义的$\hat{}$ Q_I；以及动能谱与我们的直接数值模拟相匹配的合成场，我们对此使用

$$\hat{Q}_M = \hat{Q}_I e^{-6.2\left(\frac{k-10}{64\sqrt{3}-10}\right)^{1.05}}. \tag{2.14}$$

为了比较合成速度场所产生的混合机制，我们进行了三维

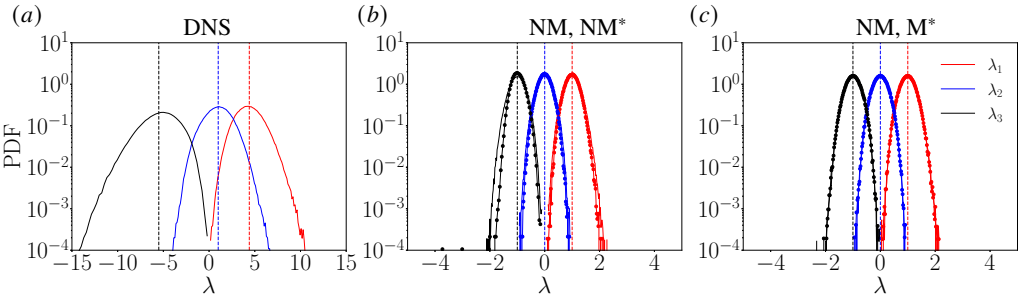

图 4：直接数值模拟和合成场的李雅普诺夫指数分布。

针对衰减和统计稳态混合情形的被动标量混合不可压缩直接数值模拟。我们求解受迫不可压缩纳维–斯托克斯方程，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \quad \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}. \tag{2.15a}$$

所有模拟均采用基于 P3DFFT 的三维并行傅里叶伪谱求解器进行++ 库（Pekurovsky 2012），在 192^3 网格上进行去混叠（$k_{\max} = 64$），并在$(2\pi)^3$ 区域内进行。在§ 3中，我们还讨论拉格朗日追踪统计；为此，我们采用 PETSc（May & Knepley 2017）实现的拉格朗日粒子追踪。外力 $\boldsymbol{f}$ 仅存在于低波数范围 $1 < k < 2\sqrt{3}$，其演化由类似于（2.1）（Eswaran & Pope 1988）所述的过程控制。合成速度场模拟的设置使其湍动能 κ 和 $u' = \sqrt{2\langle\kappa\rangle_x/3}$ 与图2（a）所示的结果相近，其中$\langle\rangle_x$ 表示空间平均值。图2（b）表明，合成场能够准确再现理想能谱和直接数值模拟能谱。由直接数值模拟或合成场获得的速度场均用于混合满足以下方程的标量：

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{\mathrm{ReSc}}\nabla^2\phi, \tag{2.16}$$

其中，Re 是特征雷诺数，Sc 是施密特数。为节省计算成本，我们仅对 Sc $= 1$ 和 1/2 进行直接数值模拟。在合成场和直接数值模拟中，我们均采用 Re $= 125$。

3. 结果

3.1. 拉格朗日统计

我们计算了合成场中拉格朗日粒子的单粒子相关、粒子对扩散和有限时间李雅普诺夫指数，并将其与直接数值模拟得到的结果进行比较。沿流体流线运动的粒子的位置由下式控制：

$$\boldsymbol{x}^+(t) = \boldsymbol{X} + \int_0^t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^+(s); s)ds, \tag{3.1}$$

其中，$\boldsymbol{X}$ 表示 $t = 0$处的初始位置。单粒子速度相关由（Sawford 2012）给出，

$$\left\langle \boldsymbol{u}^+(t) \cdot \boldsymbol{u}^+(t+\tau) \right\rangle = 2u'^2 R_L(\tau), \tag{3.2}$$

$$\left\langle \boldsymbol{x}^+(t) \cdot \boldsymbol{x}^+(t) \right\rangle - \left\langle \boldsymbol{x}^+(0) \cdot \boldsymbol{x}^+(0) \right\rangle = 6u'^2 \int_0^t \int_0^{t'} R_L(\tau)d\tau dt' = \left\langle x^2(t) \right\rangle, \tag{3.3}$$

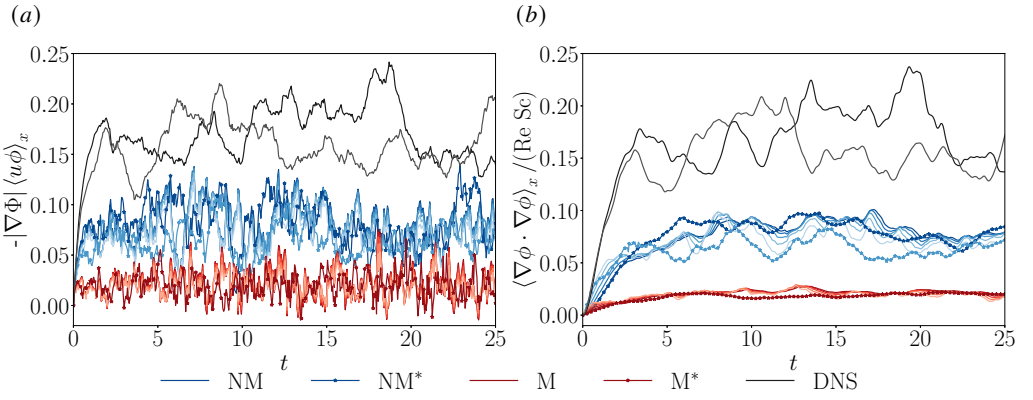

图5：采用 DNS、非马尔可夫速度场和马尔可夫速度场进行稳态标量混合时，各施密特数情形下（a）标量生成率和（b）标量耗散空间平均值的时间序列。

据此，拉格朗日积分时间尺度定义为，

$$T_L = \int_0^\infty R_L(\tau)d\tau. \tag{3.4}$$

对于 $t \gg T_L$，单粒子相关趋于 $6u'^2T_Lt$。类似地，可以根据两个粒子之间的间距计算粒子对扩散，

$$\boldsymbol{r}^+ = \boldsymbol{x}^+ - \boldsymbol{y}^+ = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y} + \int_0^t \left(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^+(s);s) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}^+(s);s)\right) ds. \tag{3.5}$$

对于 $t \gg T_L$，两个粒子的位置变得相互独立，因此 $\left\langle|\boldsymbol{r}^+(t) - \boldsymbol{r}^+(0)|^2\right\rangle \to 12u'^2T_L = \left\langle r^2(t)\right\rangle$。图3 总结了这些结果。与理想谱和匹配谱情况下的马尔可夫场相比，非马尔可夫速度场的拉格朗日积分时间尺度明显更接近 DNS。

基于拉格朗日位置，我们可以在每个粒子处定义变形梯度（Ottino1989），如下：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t) = \nabla_X \boldsymbol{x}^+, \tag{3.6}$$

其与速度梯度的关系为，

$$\frac{d\boldsymbol{F}}{dt} = \nabla\boldsymbol{u}^+ \cdot \boldsymbol{F}, \tag{3.7}$$

其中，拉格朗日速度梯度计算为 $\nabla\boldsymbol{u}^+(t) = \nabla\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^+(t);t)$。我们跟踪$\boldsymbol{F}(t)$及其QR分解，并采用预测-校正时间步进方法（G¨otzfried 等，2019）计算这些场的有限时间李雅普诺夫指数（FTLE）。图4显示了直接数值模拟和合成场的三个李雅普诺夫指数的分布。对于直接数值模拟，使用64^3 个粒子进行平均后，李雅普诺夫指数趋近于比值 $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 \approx 4.3 : 1 : -5.3$。正如 G¨otzfried 等（2019）所述，均匀各向同性湍流场倾向于沿一个方向压缩标量非均匀性，同时将其沿另一方向拉伸。最大和最小指数分别对应这两种变形。中间指数与三阶速度相关成正比（Balkovsky与Fouxon，1999年），由于直接数值模拟中的间歇性而非零。整体运动学使原本集中的非均匀性形成片状结构。尽管非马尔可夫合成场的弥散特性比马尔可夫场更接近直接数值模拟，但由于

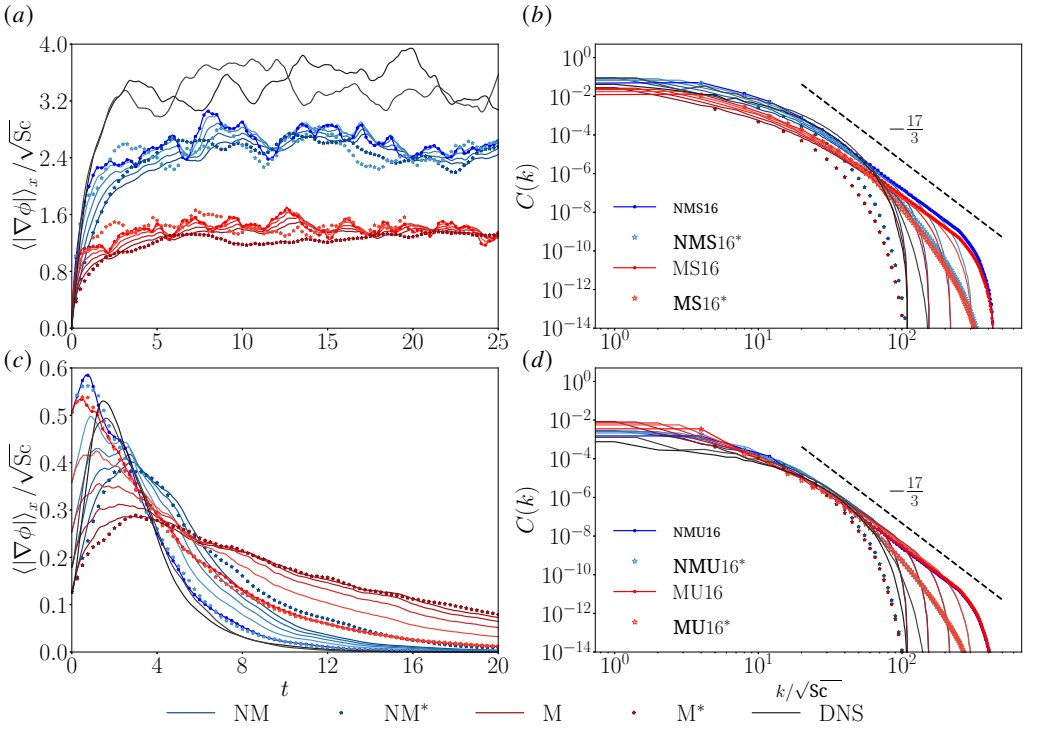

图6：$|\nabla\phi|_x$ 的时间序列，其中（a）为稳态情形，（c）为衰减情形；（b）为稳态标量混合的时间平均标量谱，以及（d）为 $t=3$处衰减混合的标量谱，并针对所有施密特数情形下的直接数值模拟、非马尔可夫速度场和马尔可夫速度场绘制了斜率为 −17/3的任意直线。

其固有的高斯性质，两种合成场的李雅普诺夫指数都趋近于比值 $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3\approx 1:0:-1$，且与谱无关。

3.2. 统计稳态标量场

我们采用直接数值模拟和合成场，通过求解浓度涨落来研究统计稳态设置下的混合特性，并假设恒定平均梯度为：

$$\frac{D\phi}{Dt}=-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\Phi+\frac{1}{\mathrm{ReSc}}\nabla^2\phi. \tag{3.8}$$

相应的标量涨落方差方程为（Yeung 和 Sreenivasan 2014）

$$\frac{d}{dt}\frac{\langle\phi^2\rangle_x}{2}=-\langle\boldsymbol{u}\phi\rangle_x\cdot\nabla\Phi-\frac{\langle|\nabla\phi|^2\rangle_x}{\mathrm{ReSc}}, \tag{3.9}$$

其中 $-\langle\boldsymbol{u}\phi\rangle_x\cdot\nabla\Phi$ 为生成率，$\langle|\nabla\phi|^2\rangle_x/\mathrm{ReSc}$ 为耗散。在本研究中，我们使用 $\nabla\Phi=(0.5,0,0)$。为覆盖不同的施密特数，我们使用同一个合成场以节省资源。两个 DNS（DS1、DS2）彼此独立地运行。图5展示了所有模拟中生成率和耗散的时间序列。非马尔可夫场的生成率（以及统计稳态下的耗散）比马尔可夫场更接近 DNS。图 6 展示了标量场的空间平均 $|\nabla\phi|$ 及其谱，定义为 $C(k)=|\hat{\phi}|^2/2$。随着施密特数降低，扩散效应在标量混合过程中占主导。因此，标量场长度

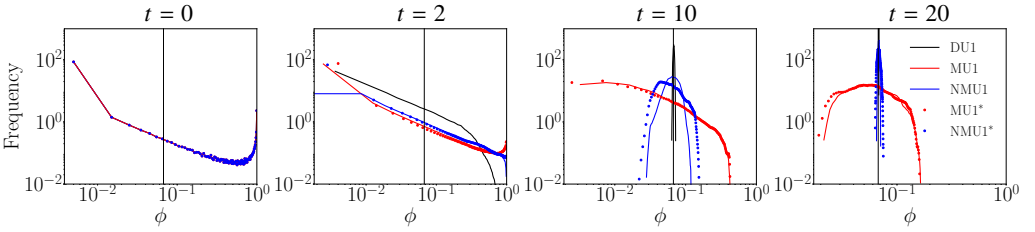

图 7：Sc = 1 情形下，直接数值模拟、非马尔可夫速度场和马尔可夫速度场在不同时刻的浓度概率密度函数。

尺度随着 √Sc 增大（给定 Re 保持不变），如图 6b 和 d 所示。在统计稳态下，NM16 和 M16 情况的标量谱均趋近于 Batchelor 等（1959）推导出的 -17/3 标度律。这表明，即使在马尔可夫合成场中，只要动能谱按 $k^{-5/3}$进行标度，也可以实现 -17/3 的标量谱指数。

3.3. 衰减混合

为研究衰减情形下的混合特性，我们将被动标量浓度初始化为一个球形团块，其定义为：

$$2\phi(\boldsymbol{x},0) = \tanh\left(5\left(S-\pi/2\right)\right), \tag{3.10}$$

其中 $S=\sqrt{(x-\pi)^2+(y-\pi)^2+(z-\pi)^2}$，并依据（2.16）演化。图 6c、d 展示了所有衰减情形下的空间平均 $|\nabla\phi|$ 和标量谱 $C(k)$。非马尔可夫情形下$\langle|\nabla\phi|\rangle_x$ 的时间演化与直接数值模拟中观察到的演化相符。另一方面，在所有马尔可夫情形下，标量梯度在很长一段时间内都得以维持，这表明速度场对标量场的搅拌作用非常弱。图 7所示的标量浓度空间直方图也清楚地体现了这一点：尽管在大时间下，马尔可夫场和非马尔可夫场的标量谱指数均趋近于 $-17/3$，但马尔可夫场导致均匀化延迟。这些结果再次表明，非马尔可夫性及合成速度场由此产生的时空相关性对混合过程起着重要作用。

4. 结论

我们证明，非马尔可夫性是湍流的一项重要特征，能够增强湍流混合。我们采用针对每个波数设置不同去相关时间的奥恩斯坦–乌伦贝克过程，展示了如何利用非马尔可夫高斯速度场改善马尔可夫速度模型的混合特性。采用随机扫掠近似时，我们使用与波数模成反比的去相关时间。我们证明，由此得到的合成速度场的时间相关性在相当大的时间延迟范围内按 τ^{-5} 衰减，从而证实了该速度场的非马尔可夫性质。与马尔可夫场相比，非马尔可夫场的拉格朗日速度相关性、单粒子相关性和粒子对扩散结果均更接近直接数值模拟。在欧拉描述中，对于所有施密特数，非马尔可夫场都表现出比马尔可夫场更好的标量混合特性（统计稳态情形下的生成率，以及衰减斑块混合中的混合时间）；不过，对于两种场，低施密特数下标量谱的指数均按 -17/3 标度。

利益声明。作者声明不存在利益冲突。

参考文献

Aref, Hassan 2020 混沌平流引起的搅拌。载于《哈密顿动力系统》，第725–745页。CRC出版社。Balkovsky, E & Fouxon, A 1999 Batchelor区制中拉格朗日统计的普适长时间特性及其在被动标量问题中的应用。《物理评论E》60 (4), 4164。Batchelor, GK, Howells, ID & Townsend, AA 1959 湍流流体中温度等对流量的小尺度变化：第二部分，大导热率的情形。《流体力学杂志》5 (1), 134–139。Batchelor, George Keith 1953 均匀湍流理论。剑桥大学出版社。Careta, A, Sagu´es, F & Sancho, JM 1994 随机对流下被动标量的扩散。《流体物理学》6 (1), 349–355。Chaves, Marta, Gawedzki, Krzysztof, Horvai, Peter, Kupiainen, Antti & Vergassola, Massimo 2003 高斯自相似速度系综中的拉格朗日弥散。《统计物理学杂志》113 (5), 643–692。Eswaran, Vinayak & Pope, Stephen B 1988 对湍流直接数值模拟中外力的考察。《计算机与流体》16 (3), 257–278。Gorbunova, Anastasiia, Balarac, Guillaume, Canet, L´eonie, Eyink, Gregory & Rossetto, Vincent 2021 三维均匀各向同性湍流中的时空相关性。《流体物理学》33 (4)。G¨otzfried, Paul, Emran, Mohammad S, Villermaux, Emmanuel & Schumacher, J¨org 2019 被动标量湍流混合的拉格朗日与欧拉参考系比较。《物理评论：流体》4 (4), 044607。Holzer, Mark & Siggia, Eric D 1994 被动标量的湍流混合。《流体物理学》6 (5), 1820–1837。Jossy, Joaquim P, Awasthi, Pratyush S & Gupta, Prateek 2025 均匀各向同性湍流引起的主动标量混合。《物理学D：非线性现象》p. 134926。Jossy, Joaquim P & Gupta, Prateek 2025 二维中随机弱激波引起的主动标量混合。《流体力学杂志》1007, A25。Juneja, A, Lathrop, DP, Sreenivasan, KR & Stolovitzky, G 1994 合成湍流。《物理评论E》49 (6), 5179。May, Dave A & Knepley, Matthew G 2017 DMSwarm：PETSc中的粒子。载于《欧洲地球科学联盟大会摘要》，第10133页。Ottino, Julio M 1989 混合运动学：拉伸、混沌与输运，，第3卷。剑桥大学出版社。Pekurovsky, Dmitry 2012 P3DFFT：用于三维傅里叶变换并行计算的框架。《SIAM科学计算杂志》34 (4), C192–C209。Pope, Stephen B 2001 《湍流》。《测量科学与技术》12 (11), 2020–2021。Sawford, Brian L 2012 4 湍流弥散与混合的拉格朗日视角，Brian L. Sawford和Jean-François Pinton。《湍流十讲》第132页。Tennekes, Henk 1975 各向同性湍流中的欧拉与拉格朗日时间微尺度。《流体力学杂志》67 (3), 561–567。Toussaint, Val´erie, Carriere, Philippe, Scott, Julian & Gence, Jean-No¨el 2000 混沌混合中被动标量的谱衰减。《流体物理学》12 (11), 2834–2844。Wilczek, Michael & Narita, Yasuhito 2012 基于随机扫掠假说并考虑平均流的湍流波数—频率谱。《物理评论E：统计、非线性与软物质物理》86 (6), 066308。Yeung, PK & Sawford, Brian L 2002 各向同性湍流中被动标量的随机扫掠假说。《流体力学杂志》459, 129–138。Yeung, PK & Sreenivasan, KR 2013 湍流混合中高分子扩散率被动标量的谱。《流体力学杂志》716, R14。Yeung, PK & Sreenivasan, KR 2014 极低施密特数下具有均匀平均梯度的湍流混合直接数值模拟。《流体物理学》26 (1)。Zhou, Ye 2024 流体动力学不稳定性与湍流：瑞利–泰勒、里希特迈耶–梅什科夫与开尔文–亥姆霍兹混合。剑桥大学出版社。

Rapids 文章不得超过此页长