arXiv:2601.01504v1 [hep-th] 4 Jan 2026

作为自旋链的点粒子

Viacheslav Krivorol[△,λ,*]

△)理论与数学物理研究所，

莫斯科国立罗蒙诺索夫大学，俄罗斯莫斯科 *119991*

λ)高等经济大学，俄罗斯莫斯科乌萨乔娃街 *6* 号，*119048*

摘要。 本文综述了一种近期发展起来的研究黎曼流形上自由点粒子的方法，该方法基于 Kirillov 轨道方法、几何量子化以及拉格朗日子流形的几何。我们讨论如下情形：给定一个嵌入余伴随轨道乘积中的拉格朗日子流形 $\mathcal{M}$，以及一个在该子流形上取得最小值的哈密顿量 H，这样的构型会自然地在 $\mathcal{M}$ 上诱导出自由点粒子动力学。支配这一动力学的度量，正是由 H 在其最小值附近的二次展开所精确定义的。量子化后，这一对应关系建立了 $L^2(\mathcal{M})$与相应的自旋链希尔伯特空间之间的联系，并确立了 $L^2(\mathcal{M})$ 上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子与自旋哈密顿量之间的谱等价。本文给出了这一构造的具体示例，涵盖在复平面、二维球面、旗流形和双曲平面上运动的粒子。

*电子邮箱：v.a.krivorol@gmail.com

目录

1. 引言 3 **2. 从自旋链到 σ 模型：基本思想 7**

2.1. 经典部分 .7 2.2. 量子化 .10

3. 示例 **11**

3.1. 双曲面上的粒子 $\mathbb{C}$ 作为两个振子.11 3.2. 粒子 $\mathbb{S}^2$ 和 $\mathbf{SU}(2)$ 自旋链.12 3.3. 旗流形和 $\mathbf{SU}(n)$ 自旋链.19 3.4. 双曲面上的粒子和 $\mathbf{SL}(2,\ \mathbb{R})$ 自旋链.21

1. 引言

设 $\mathcal{M}$ 是一个黎曼流形。我们研究的核心对象是其上的量子自由点粒子 $\mathcal{M}$。从数学角度看，相应的哈密顿量与拉普拉斯型算子相关 $-\triangle$这些算子通常作用于向量丛的平方可积截面$\mathbf{E}$上的 $\mathcal{M}$。这类算子包括作用于函数的拉普拉斯-贝尔特拉米算子 $L^2(\mathcal{M})$、作用于向量丛截面的博赫纳（或磁）拉普拉斯算子 $L^2(\mathcal{M},\ \mathbf{E})$，以及作用于微分形式 Ω 的拉普拉斯-德拉姆算子$^\bullet(\mathcal{M})$等。在谱几何 [Wey12；Kac66；GT10] 中的主要问题之一是研究谱问题

$$-\triangle\Psi = E\Psi\,. \tag{1.1}$$

然而，实践表明，这个谱问题既丰富多彩，又颇具挑战性。事实上，它构成一个二阶椭圆偏微分方程，而目前不存在通用的求解算法。实际上，只有对称性“足够高”的流形才能精确求解此问题，相关参考文献见[BK25b]中的引言。本文旨在综述一种可能的研究方法，该方法在很大程度上受到量子物理的启发。

事实上，正如前文所述，谱问题（1.1）具有非常富有成果的物理诠释。许多拉普拉斯型算子可作为量子哈密顿量[1]，其形式为 $H = -\triangle$，对应于所谓的一维σ 模型。这些模型描述了在黎曼流形上运动的基本上自由的粒子的动力学$\mathcal{M}$，粒子还可能与其他几何结构耦合。这类理论的标准作用量形式为

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\int \big(g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j\big)\mathrm{d}t + \int \mathcal{A} + (\text{fermions})\,, \tag{1.2}$$

其中，q^i 是 $\mathcal{M}$上的坐标，$g_{ij}(q)$ 是度量张量的分量，而 $\mathcal{A}$是 $\mathcal{M}$上的1-形式[2]，可解释为磁场的矢量势。为了得到

[1]量子化中的排序歧义实际上可能会为哈密顿量引入一个标量曲率加性项 [Wag24]。不过，我们将不考虑这一项，因为本文关注的是齐性空间上的不变度量，在这类空间上曲率为常数。[2]有趣的是，在一些物理情形中，1-形式 $\mathcal{A}$ 并非全局定义，但作用量 $\mathcal{S}$ 仍然定义良好 [WY75；Alv85]。球面上的狄拉克单极子就是这类情形中最简单的例子 [Dir31]。

量子化后作用于微分形式的拉普拉斯型算子，通常以超对称的方式引入费米子 [Smi20]。在这种情形下，方程（1.1）可解释为相应量子σ模型的定态薛¨定谔方程。

到目前为止，这种重新表述将有助于我们为拉普拉斯算子的谱问题找到一种更有效的表示。具体而言，它将帮助我们把在某个流形上对拉普拉斯算子进行对角化的问题，转化为求某种特定自旋链的哈密顿量特征值的问题。本文将量子自旋链定义为这样一种量子力学系统：其希尔伯特空间由某些李群的不可约表示的张量积构成。在某些情况下，这种重新表述可以极大地简化谱问题，并采用自旋模型中常用的新方法，例如 Bethe Ansatz [Sla18]。在这一形式体系中，转而采用振子表示通常很方便 [Per86], ，这使我们能够将问题简化为利用海森堡代数的升降算符进行计算。从物理角度看，这种方法也有益处，因为它为点粒子提供了一种新的整体量子化方案，也就是说，它不依赖流形上的特定坐标片。这为研究某些可能具有重要意义的领域开辟了新的机会，例如研究 AdS粒子 [BJO24]，甚至是 BMS粒子 [BDH25; BO15]。此外，正如我们稍后将看到的，这种方法有时能够将非紧余切丛的量子化简化为某些紧流形的量子化；在几何量子化的背景下，这本身就很有意义 [Wer23; Kir01]。在复数情形下，我们有时可以将调和分析 [Hel81] 中的问题完全置于复代数几何 [GH78]的框架内重新表述。

因此，正如前文所述，本文旨在建立两个乍看之下毫不相关的问题之间的联系：

$$\text{1D Sigma Models} \quad \leftrightsquigarrow \quad \text{Spin Chains}\,. \tag{1.3}$$

其基本思路是将粒子的相空间 $\mathrm{T}^*\mathcal{M}$ ——直接对其进行量子化可能颇具挑战——替换为若干个更简单的流形的乘积，而这些流形的几何量子化是已知的。具体而言，所使用的流形经过量子化后会给出某个群的单个不可约酉表示，这对应于可能的最简单或最小希尔伯特空间。正如我们从几何量子化理论中了解到的那样，geo met-

ric 量子化要使所得的希尔伯特空间成为酉不可约表示，就需要对特定的辛流形进行几何量子化，这些流形称为余伴随轨道 $\mathcal{O}$ 并赋予自然的 Kirillov-Kostant-Souriau 辛形式[3] [Kir99]。在最常见的物理情形——单连通紧李群，例如 $\mathbf{SU}(n)$、$\mathbf{SO}(n)$和 $\mathbf{Sp}(2n)$——中，这一论断由博雷尔–魏尔–博特定理 [Bot90]具体体现。非正式地说，该定理断言，它们的有限维酉不可约表示可以实现在广义旗流形上某些线丛的全纯截面空间（或更一般地说，高阶层上同调）中。对于更广泛的一类群，轨道方法仍更多是一项指导原则，而非完整理论。不过，对于特定类型的群，例如幂零群 [Kir62]（例如海森堡群）和某些非紧群（例如 $\mathbf{SL}(2、\mathbb{R})$，参见 [NV25] 中的第 5.2 节 [Kir62]，其中有总结），仍存在类似的构造性结果。在本文中，我们将暂且搁置因缺乏全面的一般理论而产生的挑战，并假设我们已掌握能够给出所关注酉表示的特定轨道和量子化方法。

从轨道方法的角度来看，自旋链的经典对应物可以解释为一种力学系统，其相空间是特定余伴随轨道的乘积。反过来，$\mathcal{M}$ 上粒子的相空间是余切丛 $\mathrm{T}^*\mathcal{M}$。假设此类相空间与其对应哈密顿量之间存在对应关系，

$$\Big(\mathrm{T}^*\mathcal{M}\,,H_{\text{free particle}}\Big) \qquad \rightsquigarrow \qquad \Big(\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2\times\ldots\times\mathcal{O}_n\,,H_{\text{spin}}\Big), \tag{1.4}$$

对于某些余伴随轨道 $\mathcal{O}_i$ 以及定义在其乘积上的自旋链哈密顿量 H_{spin}，我们的目标是将量子化这一复杂对象——带有测地线哈密顿量的余切丛——替换为若干更简单的辛流形（即余伴随轨道）的乘积，并为其赋予一个“自旋”哈密顿量。对这一对应关系进行量子化后，便得到如下形式的关系

$$\Big(L^2(\mathcal{M})\,,-\triangle\Big) \qquad \rightsquigarrow \qquad \Big(\mathsf{V}_1\otimes\mathsf{V}_2\otimes\ldots\otimes\mathsf{V}_n\,,H_{\text{spin}}\Big)\,, \tag{1.5}$$

其中每个 希尔伯特空间 V_i 通过对轨道 $\mathcal{O}_i$进行几何量子化而得到。在

[3]实际上，我们不会使用余伴随轨道及其辛结构的一般定义。相反，我们假定读者熟悉这样一个事实：在特定情况下，它们与一些众所周知的辛流形同构，例如球面、旗流形、双曲平面等。

理想情况下，这种对应关系意味着相应谱问题的等价性。具体而言，我们将讨论以下原理[4] [Byk13]:

> 如果粒子的构型空间可以拉格朗日嵌入到余伴随轨道的乘积中，并且在适当意义下，该嵌入可扩展为粒子与自旋链相空间之间的辛同胚，那么，在这个拉格朗日子流形上取到最小值的自旋哈密顿量，便会在该子流形上诱导出自由粒子的动力学；该子流形所带的度量由自旋哈密顿量的动量二次项给出。

要为这些想法提供完整的数学严谨性颇具挑战；在正文中，我们尝试至少部分地将其形式化。尽管目前尚缺乏针对这类推理的完全一般化理论，但已有若干具体实例能够严格确立这种对应关系。

现在，我们简要回顾与本文综述相关的思想发展史。首先是 D. Haldane 的工作[5], ，他指出，在大自旋极限下，反铁磁$\mathbf{SU}(2)$ 无限自旋链的低能有效理论是著名的 $(1+1)$维$\mathbf{O}(3)$ 非线性 σ 模型，并由拓扑 θ项 [Hal83a；Hal83b]。后来，D. Bykov 从辛几何和拉格朗日几何的角度提出了对这一构造的数学诠释 [Byk12；Byk13]；在第2节中，我们将沿用这两篇论文中后一篇的思路。

随后，研究重点转向了更易处理且在数学上更为严格的一维情形。在[6] [BK24], D. Bykov 和 A. Kuzovchikov 构造了$\mathbf{SU}(n)$"全对全" n位点自旋链，其大自旋极限给出旗流形上的一维 sigma 模型；我们将在第3.2节和3.3节回顾这一构造。在同一篇工作及其后续研究 [BK25b], 中，他们进一步展示了如何运用代数方法求得赋予各种不变度量的旗流形上的拉普拉斯–贝尔特拉米算子的谱，并以完全旗 $\mathcal{F}_3$为例解决了一般情形。论文 [BK25a] 则通过构造若干相关的拉格朗日嵌入，开始研究各向同性旗流形嵌入$\mathbf{SO}$ 和$\mathbf{Sp}$ 共轭

[4]这项工作进一步印证了"辛几何信条" [魏81]：万物皆为拉格朗日子流形。[5]这一洞见是霍尔丹诺贝尔奖贡献的重要组成部分；参见《2016年诺贝尔物理学奖科学背景》第 5 节。现代阐述可参见综述[ABW22]及其中的参考文献。[6]简要概述见 [Kuz25]。

轨道；该工作与作者合作完成，论文 [BKK25] 还引入了 $\mathcal{N} = 2$和 $\mathcal{N} = 4$ 超对称 $\mathbf{SU}(n)$ 自旋链，其连续极限对应于超对称一维旗流形 sigma 模型。

第3.1 节和3.4节给出了该主题的新例子。在这些例子中，我们将 $\mathbb{C}$ 上的粒子量子化为由两个升降算符代数构成的“海森堡链”，并为这一数学事实提供物理解释：正、负离散级数表示的张量积$\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$ 的空间同构于双曲平面 [Rep78]上的平方可积函数空间。在随后的一篇合作论文中 [BK26] 我们将对这些例子展开更深入的分析。

此外，若能将此处讨论的理论拓展到更广泛的背景中，也会很有意义，例如研究无限群——如环群、BMS 群或 Virasoro–Bott 群 [KW09] ——以及场论、无限自旋链、（反）德西特型空间上的粒子等。若能建立该理论与其他几何量子化方法之间的联系，也将大有裨益，例如拉格朗日流形的 WKB 量子化 [BW97] 以及混合经典-量子形式 [LRS24]。另一个值得探索的方向是研究更多拉格朗日嵌入的潜在应用，例如 [Tyu25a；Tyu21；Tyu25b；Mir04]。

2. 从自旋链到 σ 模型：一般思路

2.1. 经典部分 假设我们希望建立如下形式的关系（1.4），联系黎曼流形上的自由粒子[7] $\mathcal{M}$，其度量为 g，以及相空间为若干余伴随轨道的乘积的经典自旋链 $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \ldots \times \mathcal{O}_n$，其由适当的哈密顿量支配。本节将介绍一种适用于特定假设的方法。

第一个假设是存在一个拉格朗日嵌入

$$\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \ldots \times \mathcal{O}_n \tag{2.1}$$

关于 Kirillov-Kostant-Souriau 形式之和。如果存在这样的嵌入，它便以如下方式将点粒子的运动学与经典自旋链的运动学联系起来：

[7]为简单起见，我们在本节假设该粒子不受磁场或费米子等其他结构的相互作用。

如下。根据著名的 *Darboux–Weinstein* 定理 [Wei71], 存在一个开邻域 $U(\mathrm{T}^*\mathcal{M})$，它位于余切丛的零截面附近 $\mathcal{M}$，另有一个开邻域 $U(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \ldots \times \mathcal{O}_n)$，它位于拉格朗日像 $\mathcal{M}$ 附近，使这两个邻域辛同胚:

$$U(\mathrm{T}^*\mathcal{M}) \simeq U(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \ldots \times \mathcal{O}_n)\,. \tag{2.2}$$

第二个假设是，$U(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \ldots \times \mathcal{O}_n)$在余伴随轨道乘积中“足够稠密”。从直观上说，这意味着

$$U(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \ldots \times \mathcal{O}_n) \simeq \frac{\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \ldots \times \mathcal{O}_n}{\text{some “small” closed submanifolds}}\,. \tag{2.3}$$

正如我们将在下文看到的，$U(\mathrm{T}^*\mathcal{M})$ 同样可以通过对动量进行缩放来逼近整个余切丛 $\mathrm{T}^*\mathcal{M}$，因为动量位于线性纤维中。因此，核心思想是，拉格朗日嵌入的存在（2.1）能够使流形上的粒子运动学与自旋链的运动学实现“几乎完全”的匹配。

现在让我们转向这种对应关系的动力学方面。具体而言，轨道乘积上的动力学如何诱导出拉格朗日子流形上的动力学? 将轨道乘积上的李维尔 1-形式记为 $\theta_\lambda = \lambda\theta$，其中 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是相对于参考 1-形式 θ 的形式尺度参数。我们构造中的另一个要素是一个哈密顿量 $\lambda^2 H_{\text{spin}}$，其全局最小值恰好位于拉格朗日子流形 $\mathcal{M}$ 上。不失一般性，我们可以令 H_{spin} 在 $\mathcal{M}$ 上的值为零。于是，自旋链的经典作用量为

$$\mathcal{S} = \int \left(\theta_\lambda - \lambda^2 H_{\text{spin}} \mathrm{d}t\right). \tag{2.4}$$

由于“几乎是辛同胚”（2.2），我们可以引入正则坐标q^i 和动量 p_i，它们由轨道乘积上的邻域 $U(\mathrm{T}^*\mathcal{M})$诱导而来。此外，由于 $H_{\text{spin}}(q,\ p)$ 在由零截面 $\mathcal{M}$定义的 $\{p_i = 0\}$上取到最小值，因此可以将其按动量展开为泰勒级数，且首项为二次项。由此，作用量（2.4）具有如下形式

$$\mathcal{S}[p,q] = \int \mathrm{d}t \left(\lambda p_i \dot{q}^i + \frac{\lambda^2 g^{ij}(q) p_i p_j}{2} + O\left(\lambda^2 p^3\right)\right), \tag{2.5}$$

其中， $g^{ij}(q)$ 表示自旋哈密顿量展开式中二次部分的系数。于是，作用量中的第二项类似于构型空间为 $\mathcal{M}$ 的自由点粒子的测地线哈密顿量，

$$H_{\text{free particle}} = \frac{g^{ij}(q)p_i p_j}{2} \,. \tag{2.6}$$

然而，有两个障碍使我们无法直接将该系统与点粒子等同起来。首先，我们存在阶为 $O(\lambda^2 p^3)$的修正项。其次，动量 p只属于邻域 $U(\mathrm{T}^*\mathcal{M})$，而非整个余切丛 $\mathrm{T}^*\mathcal{M}$。通过以下重标度技巧，可以同时解决这两个问题：将动量重标度为 $p \to \lambda^{-1}p$，然后取极限 $\lambda \to \infty$。在此极限下， $U(\mathrm{T}^*\mathcal{M})$扩展至整个 $\mathrm{T}^*\mathcal{M}$，高阶修正项 $O(\lambda^{-1}p^3)$ 则受到抑制。因此，我们恢复了点粒子在[8] 上的标准一阶作用量 $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}t \left(p_i \dot{q}^i + \frac{g^{ij}(q)p_i p_j}{2} \right) \simeq \frac{1}{2} \int \mathrm{d}t \left(g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \right) . \tag{2.7}$$

这也意味着，在所谓的“大自旋”极限[9]$\lambda \to \infty$下，运动学关系变为

$$\mathrm{T}^*\mathcal{M} \text{ “}\simeq\text{” } \lim_{\lambda \to \infty} \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \ldots \times \mathcal{O}_n \,. \tag{2.8}$$

因此，将经典点粒子改写为经典自旋链的步骤可概括如下:

1. 找到一个拉格朗日嵌入（2.1），并利用它确定零截面的相应邻域，从而建立辛同胚（2.2）。确保轨道乘积中的邻域足够大，参见（2.3）。

2. 选择轨道乘积上的一个哈密顿量，使其在拉格朗日子流形上达到全局最小值，并且其泰勒展开中的二次部分（2.6）定义所需的度量。

[8]请注意，几何参数 λ 在自由粒子和自旋链中扮演着不同的角色。在经典自旋链中， λ 对辛形式进行缩放；而对于自由粒子，它决定达布–魏因斯坦邻域的大小。[9]如果 $U(\mathrm{T}^*\mathcal{M})$ 已经与 $\mathrm{T}^*\mathcal{M}$ 辛同胚，且哈密顿量是纯二次的，那么就不必取极限 $\lambda \to \infty$。为保持记号统一，我们仍保留这一记法，同时注意到有时可以省略它。

2.2. 量子化 在前一节中，我们在经典情形下建立了黎曼流形上的点粒子与自旋链之间的联系。现在我们转向其量子对应形式。

在上述假设下对关系式（2.8）进行量子化[10] 可得量子运动学关系

$$L^2(\mathcal{M}) \simeq \lim_{\lambda\to\infty} \left(\mathsf{V}_1^\lambda \otimes \mathsf{V}_2^\lambda \otimes \ldots \otimes \mathsf{V}_n^\lambda\right), \tag{2.9}$$

其中，每个表示 V_i^λ都由余伴随轨道的几何量子化得到 $\mathcal{O}_i$。这里， λ 起到表示参数的作用，例如自旋。我们假设，在（2.3）中排除的“小子流形”不会显著影响几何量子化过程。

请注意，明确构造这个同构可能颇为微妙。通常，每个 V_i^λ都实现为某个分布 $\mathcal{P}$ 下的极化截面空间，该分布属于定义在E_i 之上 $\mathcal{O}_i$的某个线丛，见 [Wer23；Kir01]。因此，所需的同构归结为构造一个映射[11]

$$\Gamma(\mathscr{E}_1 \boxtimes \mathscr{E}_2 \boxtimes \ldots \boxtimes \mathscr{E}_n, \mathcal{P}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{M}) \tag{2.10}$$

从外张量积丛的极化截面空间映射到 $\mathcal{M}$上的光滑函数。构造这样的映射通常涉及几个步骤：在稠密开集 $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \ldots \times \mathcal{O}_n/\mathcal{D}$, 上对丛进行适当的平凡化；其中， $\mathcal{D}$ 是（2.3）中被排除的“小”子流形；还包括极化变换，以及将丛限制（拉回）到拉格朗日子流形 $\mathcal{M}$上。

量子化后预期的动力学关系形式如下

$$\mathsf{Spec}(-\triangle) \simeq \lim_{\lambda\to\infty} \mathsf{Spec}_\lambda(H_{\text{spin}}), \tag{2.11}$$

其中 Spec 表示作用于.....上的算子的谱（即特征值集合）

[10]几何量子化通常会对 λ施加整性条件。为简单起见，我们假设归一化满足 $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$。[11]丛$\mathsf{E}_1 \boxtimes \mathsf{E}_2 \boxtimes \ldots \boxtimes \mathsf{E}_n$ 在轨道乘积上通常是非平凡的，但在稠密开子集 $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \ldots \times \mathcal{O}_n/\mathcal{D}$上通常可以平凡化。正如第3.2节所示，这种平凡化对于将截面与函数对应起来至关重要。

$L^2(\mathcal{M})$，并且 Specλ 表示.....的谱[12] 作用于 $\mathsf{V}_1^\lambda \otimes \ldots \otimes \mathsf{V}_n^\lambda$。这一关系为计算复杂黎曼流形上的 $-\triangle$的谱提供了一种强大的新工具。

3. 示例

尽管将自旋链映射为流形上的粒子这一通用过程看起来相当复杂，且依赖于诸多假设，本节旨在通过一系列具体示例说明这一构造。

3.1. 粒子在 $\mathbb{C}$ 作为两个振子 作为一个热身示例，我们来考察复平面上的自由粒子。其作用量很简单：

$$\mathcal{S}[q] = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\, |\dot{q}|^2\,, \tag{3.1}$$

其中，q 是 $\mathbb{C}$上的复坐标。通过引入复动量 p，我们可以将此作用量改写为一阶形式：

$$\mathcal{S}[p,q] = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\Big(i\bar{p}\dot{q} - ip\dot{\bar{q}} - |p|^2\Big)\,. \tag{3.2}$$

现在进行线性变量代换

$$p = z - \bar{w}\,, \qquad q = z + \bar{w}\,, \tag{3.3}$$

其中 z 和 w 是新的复坐标。此变换将式（3.2）中的动能项对角化。于是，该作用量等价于

$$\mathcal{S}[z,w] = \int \mathrm{d}t\Big(i\bar{z}\dot{z} + i\bar{w}\dot{w} - |z-\bar{w}|^2\Big)\,. \tag{3.4}$$

这个作用量在我们的框架中有一种自然的解释。注意，粒子的构型空间 $\mathbb{C}_{\mathrm{conf}} \simeq \{p=0\} = \{z=w\}$ 嵌入到 $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ 中，并且相对于辛形式 $\omega = i\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z} + i\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\bar{w}$是一个拉格朗日子流形。

[12]严格来说，大 λ 极限需要谨慎地进行泛函分析处理，例如用谱测度来描述。然而，在所有已知的例子中（见第 3.2节），包含关系$\mathsf{Spec}_\lambda(H_{\mathrm{spin}}) \subset \mathsf{Spec}_{\lambda+1}(H_{\mathrm{spin}})$ 成立，因此可以从集合论的角度将该极限理解为直接极限。

此外，哈密顿量 $H = |z-w|^2$ 在 $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ 上恰好在 $\mathbb{C}_{\text{conf}}$处取得全局最小值。最后， $\mathbb{C}$ 将其视为相空间时，可识别为海森堡代数[13], 中的一个余伴随轨道，参见 [LO24]。因此，按照[14] 第2.1节的一般方法，我们将平面上的粒子改写为与海森堡群相关联的双站点非紧致经典“自旋链”。

该模型的量子化（3.4）是直接的。由于辛结构，坐标 z 和 w 被量子化为两个相互独立的振子 a 和b，满足标准的对易关系 $[a,\ a^\dagger] = 1$ 以及 $[b,\ b^\dagger] = 1$。在巴格曼–福克空间 $\mathsf{B}\big(\mathbb{C}^2\big)$ 中表示它们是

$$a^\dagger = z\,, \qquad a = \frac{\partial}{\partial z}\,, \qquad b^\dagger = w\,, \qquad b = \frac{\partial}{\partial w}\,, \qquad z,w\in\mathbb{C}\,. \tag{3.5}$$

在此表示中，波函数是关于 z 和 w的整函数，而希尔伯特空间测度为

$$\mathrm{d}\mu = e^{-|z|^2-|w|^2}\mathrm{d}^2z\,\mathrm{d}^2w\,. \tag{3.6}$$

特征值以及哈密顿量 $H = \big(a-b^\dagger\big)\big(a^\dagger-b\big)$ 的特征函数为

$$\Psi_\alpha(z,w) = \exp\big(zw+\alpha z-\overline{\alpha}w\big)\,, \qquad H\Psi_\alpha = |\alpha|^2\Psi_\alpha\,, \tag{3.7}$$

这再现了平面上的自由粒子的连续谱。为了恢复标准的平面波，将 $\mathsf{B}\big(\mathbb{C}^2\big)$ 通过映射等距嵌入 $L^2\big(\mathbb{C}^2\big)$是方便的：

$$\Psi(z,w) \longmapsto \widetilde{\Psi}(z,\overline{z},w,\overline{w}) = e^{-\frac{1}{2}|z|^2-\frac{1}{2}|w|^2}\Psi(z,w)\,. \tag{3.8}$$

现在，在 $L^2\big(\mathbb{C}^2\big)$ 上限制到拉格朗日子流形 $\{z=w\}$ 是良定义的，从而得到

$$\widetilde{\Psi}_\alpha(z,\overline{z},w,\overline{w})\Big|_{w=\overline{z}} = e^{i\,\mathrm{Im}(\alpha z)} \qquad - \qquad \text{plane waves on } \mathbb{C}\,. \tag{3.9}$$

3.2. 球面上的粒子 $\mathbb{S}^2$ 与 $\mathbf{SU}(2)$ 自旋链 一个更具非平凡性的例子，是在大自旋极限下，将二维球面 $\mathbb{S}^2\simeq\mathbb{CP}^1$ 上的自由粒子表示为一个双站点$\mathbf{SU}(2)$ XXX 自旋链。按照前一节概述的一般方法，起点是将球面拉格朗日嵌入到余伴随轨道的乘积中。

[13]复平面 $\mathbb{C}$ 甚至可以视为中心扩张的 $\mathbf{ISO}(2)$ 余伴随轨道。[14]在这个特定示例中，无需进行形式上的“尺度趋大极限” $\lambda\to\infty$ ，也无需排除某些“较小的”子流形。

由于 $\mathbf{SU}(2)$ 是球面的等距群，自然会考虑它的余伴随轨道。$\mathbf{SU}(2)$ 的所有余伴随轨道本身都是球面，并配备有与体积形式成比例的辛形式。这些球面可以方便地用 $\mathbb{C}^2$ 中的单位长度复向量进行参数化，其中向量按相位等价（“Hopf纤维化参数化”）。

因此，我们将乘积 $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ 作为经典自旋链相空间，并赋予其辛形式

$$\omega_\lambda = i\lambda\big(\mathrm{d}\overline{z} \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}\overline{w} \wedge \mathrm{d}w\big)\,, \qquad |z|^2 = |w|^2 = 1\,, \tag{3.10}$$

其中，二分量复向量 z 和 w 分别参数化第一个和第二个球面，并默认对 $\mathbb{C}^2$ 指标求和。以下拉格朗日嵌入是构造的核心。

命题。 由方程[15]定义的 $\big(\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1, \omega_\lambda\big)$ 子流形

$\overline{z} \cdot w = 0$ 是拉格朗日子流形，且与一个球面微分同胚。

通过将方程$z \cdot w = 0$ 参数化为 $w_i = \varepsilon_{ij} z^j$，即可直接验证这一结论，其中 ε_{ij} 是二维 Levi-Civita符号。理解这一嵌入在非齐次坐标下的形式也很有帮助。将$z = [1, z_{\mathrm{inh}}]$ 和 $w = [w_{\mathrm{inh}}, -1]$参数化后，条件 $z \cdot w = 0$ 变为 $z_{\mathrm{inh}} = w_{\mathrm{inh}}$，由此将球面嵌入乘积中，形式为 $z_{\mathrm{inh}} \mapsto (z_{\mathrm{inh}}, z_{\mathrm{inh}})$。

如前所述，Darboux–Weinstein 定理表明，这样的拉格朗日嵌入可以扩展为如下形式的辛同胚（2.8）。精确表述如下。

定理。 ([BK24]) 存在一个辛同胚[16]

$$\mathrm{T}^*\mathbb{CP}^1 \simeq \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\big(\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1, \omega_\lambda\big)}{\{\det \mathcal{Z} = 0\}}\,, \tag{3.11}$$

其中，$\mathcal{Z}$ 2×2 矩阵的列向量为 z 和 w。

[15]此处及下文中，对于向量 $u, v \in \mathbb{C}^n$，我们用 $v \cdot u$ 表示标准厄米内积。[16]关于大 λ 极限的表述应理解如下：在有限的 λ下，我们得到一个映到 Darboux-Weinstein 管状邻域 $U_\lambda\big(\mathrm{T}^*\mathbb{CP}^1\big)$ 上的辛同胚，其线性尺度随 λ变化。取 $\lambda \to \infty$ 会将该邻域扩展到整个 $\mathrm{T}^*\mathbb{CP}^1$。

现在我们简述证明，并解释为何需要取大 λ极限，以及为何必须去掉行列式簇 $\mathfrak{D} \simeq \{\det \mathcal{Z} = 0\}$。粗略地说，$\mathbf{T}^*\mathbb{CP}^1$ 上的坐标由 $\left(\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1, \omega_\lambda\right)$ 通过对 $\mathcal{Z}$ 作极分解而得到，具体如下。首先，将坐标重新缩放为 $z \to \lambda^{-\frac{1}{2}} z$和 $w \to \lambda^{-\frac{1}{2}} w$。内积的格拉姆矩阵 $G := \mathcal{Z}^\dagger \mathcal{Z}$ 随后具有如下形式

$$G = \begin{pmatrix} \lambda & \overline{z} \cdot w \\ \overline{w} \cdot z & \lambda \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

其中我们使用了重新缩放后的归一化 $|z|^2 = |w|^2 = \lambda$。思路是引入一个新的"动量"变量 $K := z \cdot w$。然而，柯西–施瓦茨不等式给出了约束 $\lambda^2 \geqslant |K|^2$，只有在极限 $\lambda \to \infty$ 下，该约束才对所有有限的 K 成立。此外，若 $\det \mathcal{Z} \neq 0$，则存在唯一的极分解

$$\mathcal{Z} = U\sqrt{G}\,, \tag{3.13}$$

其中 U 是一个 $\mathbf{SU}(2)$ 矩阵，除去一个无关紧要的相位$e^{i\varphi J_3}$后，可将其参数化为（参见 [BZ17]中的公式 (6.51)）

$$U(q) = e^{qJ_-} e^{-\ln(1+|q|^2)J_3} e^{-\overline{q}J_+} = \frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{q} \\ q & 1 \end{pmatrix}, \qquad q \in \mathbb{C}\,. \tag{3.14}$$

这里 $J_\pm$ 以及 J_3 表示 $\mathfrak{su}(2)$ 的基本表示的嘉当基 .

该定理的实质是断言，该映射 $(z,\ w) \mapsto (q,\ K)$ 给出了到 $\mathbf{T}^*\mathbb{CP}^1$的坐标变换，其中 K 起到（复）动量的作用，而 q则是球面上的（复）立体投影坐标。证明的其余部分在于直接验证该映射确实是辛同胚。将辛形式（3.10）用 $\mathcal{Z}$ 表示为 $\omega_\lambda = i\mathsf{Tr}\big(\mathrm{d}\mathcal{Z}^\dagger \wedge \mathrm{d}\mathcal{Z}\big)$，并代入分解式（3.13），经过直接计算可得

$$\omega_\lambda = i\,\mathrm{d}\mathsf{Tr}\big(G\,U^\dagger \mathrm{d}U\big) = i\,\mathrm{d}\left(\frac{K\mathrm{d}q}{1+|q|^2}\right), \tag{3.15}$$

这里我们利用了这样一个事实：球面作为拉格朗日子流形嵌入其两个副本中。引入正则动量 $p = \big(1+|q|^2\big)^{-1} K$ 最终得到由 $\mathbf{T}^*\mathbb{CP}^1$诱导的达布坐标，从而完成证明。 □

我们已经介绍了运动学；现在是将哈密顿量引入其中的时候了。回顾一下，一般的规定要求在 $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ 上存在一个实函数，并且该函数在拉格朗日球面 $\{z \cdot w = 0\}$上取得最小值。最简单的候选函数是 $H = |z \cdot w|^2$。这是对第3.1节中哈密顿量的自然推广，因为它可以用非齐次坐标表示为

$$H = \frac{|\overline{z}_{\text{inh}} - w_{\text{inh}}|^2}{\big(1 + |z_{\text{inh}}|^2\big)\big(1 + |w_{\text{inh}}|^2\big)} \,. \tag{3.16}$$

因此，我们得到了重标度变量下的经典自旋链作用量 :

$$\mathcal{S}[z, w] = \int \Big(i\overline{z} \cdot \dot{z} + i\overline{w} \cdot \dot{w} - |\overline{z} \cdot w|^2 \Big) \mathrm{d}t \,, \qquad |z|^2 = |w|^2 = \lambda \,. \tag{3.17}$$

事实证明，这个最简单的选择实际上是最佳选择。通过直接进行变量替换 $(z,\ w) \mapsto (q,\ p)$ 并在极限 p 下利用运动方程消去 $\lambda \to \infty$，可以证明作用量（3.17）等价于球面σ模型作用量

$$\mathcal{S}[q] = \int \mathrm{d}t \left(\frac{\dot{q}\dot{\overline{q}}}{\big(1 + |q|^2\big)^2} \right) . \tag{3.18}$$

验证这一等价关系所需的计算，与上述定理证明中的推理几乎完全相同。

现在我们继续对理论（3.17）进行正则量子化。动能项的辛结构使 z 和 w 量子化为两个双分量升降算符 a 和 b，它们满足标准的对易关系

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \,, \qquad [b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij} \,. \tag{3.19}$$

因此，希尔伯特空间是由四个振子构成的福克空间。向量 $|z|^2 = |w|^2 = \lambda$ 上的约束被量子化为福克空间中对占据数的约束：

$$a^\dagger \cdot a := a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 = \lambda \mathbb{1} \,, \qquad b^\dagger \cdot b := b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2 = \lambda \mathbb{1} \,, \tag{3.20}$$

其中 $\mathbb{1}$ 是恒等算符。这导出了量子化条件 $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$。同一条件也可以在几何量子化的框架下推导出来

通过要求 $\exp\left(i\int\theta_\lambda\right)$ 在全局上定义良好，参见 [Alv85; ABW22]。事实上，很容易看出，由（3.20）约束的福克空间与 $\mathsf{V}_{\frac{\lambda}{2}}\otimes\mathsf{V}_{\frac{\lambda}{2}}$ 同构，其中 $\mathsf{V}_{\frac{\lambda}{2}}$ 是 $\frac{\lambda}{2}$ 的自旋表示。这与一般事实相符：半径为 λ 的球面的几何量子化恰好给出表示 $\mathsf{V}_{\frac{\lambda}{2}}$。该表示实现为球面上全纯线丛 $\mathcal{O}(\lambda)$ 的全纯整体截面空间。具体而言，这些截面是次数为 λ 的齐次多项式，定义在 $\mathbb{CP}^1$ 的齐次坐标上；$\mathbf{SU}(2)$ 通过对齐次坐标向量进行自然的矩阵乘法作用，从而不可约地作用于这些多项式。

最后，哈密顿量被量子化为算子 $H=\left(a^\dagger\cdot b\right)\left(b^\dagger\cdot a\right)$，它可以（相差一个加法常数）与 XXX 哈密顿量等同

$$H=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{3}S^m\otimes S^m \tag{3.21}$$

通过所谓的*Schwinger-Wigner* 映射 [ABW22]

$$S^m\otimes\mathbb{1}=a^\dagger\cdot\sigma^m\cdot a:=a_i^\dagger\sigma^m_{ij}a_j\,,\qquad \mathbb{1}\otimes S^m=b^\dagger\cdot\sigma^m\cdot b:=b_i^\dagger\sigma^m_{ij}b_j\,. \tag{3.22}$$

这里，S^m 表示 $\mathfrak{su}(2)$ 在 $\mathsf{V}_{\frac{\lambda}{2}}$ 表示中的第 m 个生成元，而 σ^m 是泡利矩阵。利用公式可以验证这一对应关系

$$\sum_{m=1}^{3}\sigma^m\otimes\sigma^m=2\mathbb{P}_{12}-\mathbb{1}\,,\qquad \mathbb{P}_{12}(v\otimes u):=u\otimes v\,, \tag{3.23}$$

因为

$$\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{3}S^m\otimes S^m=\left(a^\dagger\otimes b^\dagger\right)\left(\sum_{m=1}^{3}\sigma^m\otimes\sigma^m\right)\left(a\otimes b\right)=\left(a^\dagger\cdot b\right)\left(b^\dagger\cdot a\right)-\frac{\lambda^2}{2}\,, \tag{3.24}$$

其中我们使用了约束条件（3.20）。

为什么这些内容有用？注意，哈密顿量 $H=\left(a^\dagger\cdot b\right)\left(b^\dagger\cdot a\right)$ 作用于希尔伯特空间

$$\mathscr{H}\simeq\mathsf{V}_{\frac{\lambda}{2}}\otimes\mathsf{V}_{\frac{\lambda}{2}}\simeq\bigoplus_{k=0}^{\lambda}\mathsf{V}_k\,. \tag{3.25}$$

它可以通过以下形式的特征函数显式对角化

$$\Psi_k = T_{i_1 i_2 \ldots i_k j_1 j_2 \ldots j_k} a^\dagger_{i_1} a^\dagger_{i_2} \ldots a^\dagger_{i_k} b^\dagger_{j_1} b^\dagger_{j_2} \ldots b^\dagger_{j_k} \left(\varepsilon_{ij} a^\dagger_i b^\dagger_j\right)^{\lambda-k} |0\rangle\,, \tag{3.26}$$

其中， T 是实现 V_k 表示的对称 $2k$ 阶张量， ε_{ij} 是完全反对称张量，并默认对重复指标求和。相应的特征值为 $H\Psi_k = k(k+1)\Psi_k$，其中 $k = 0$，……， λ。这恰好与球面上拉普拉斯–贝尔特拉米算子的谱一致，截断于前 λ 个调和函数的层级。因此，完全符合这一总体思路，极限 $\lambda \to \infty$ 通过纯代数方法（而非求解二阶椭圆偏微分方程）恢复了球面上 $-\triangle$ 的完整谱。

该方法还可以重构球谐函数本身。特征函数（3.26）可实现为全纯线丛的截面 $\mathcal{O}(\lambda)\boxtimes\mathcal{O}(\lambda)$，其底空间为$\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$:

$$\Psi_k(z,w) = T_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_k} z^{i_1} \ldots z^{i_k} w^{j_1} \ldots w^{j_k} \left(\det \mathcal{Z}\right)^{\lambda-k}, \qquad \det \mathcal{Z} := \varepsilon_{ij} z^i w^j\,. \tag{3.27}$$

一个可能的困难在于， Ψ_k 是轨道乘积上的丛的截面，而球谐函数则是定义在拉格朗日球面上的函数。解决这一问题的关键是，根据（3.11），我们实际关注的是丛 $\mathcal{O}(\lambda) \boxtimes \mathcal{O}(\lambda)$ 在开稠密子集 $\mathcal{X} := \left(\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1\right)/\mathcal{D}$, 上的限制，其中除子 $\mathcal{D}$ 是 $\det \mathcal{Z}$的零点集。根据构造， $\left(\det\ \mathcal{Z}\right)^\lambda$是 $\mathcal{X}$上 $\mathcal{O}(\lambda) \boxtimes \mathcal{O}(\lambda)$ 的处处不为零的截面。因此，该截面使丛在$\mathcal{X}$上平凡化；每个截面 $s \in \Gamma\big(\mathcal{O}(\lambda) \boxtimes \mathcal{O}(\lambda), \mathcal{X}\big)$ 都可写成 $s(z, w) = f(z,w)\big(\det\ \mathcal{Z}\big)^\lambda$，其中 $f(z,w)$是 $\mathcal{X}$上的普通函数。最后一步是将 $f(z,w)$限制到由 $z \cdot w = 0$定义的拉格朗日子流形上。

–

命题。 这些函数

$$Y_k = \left.\left(\frac{\Psi_k(z,w)}{\left(\det \mathcal{Z}\right)^\lambda}\right)\right|_{\overline{z}\cdot w=0} \tag{3.28}$$

是球谐函数。

通过将约束 $z\cdot w = 0$ 参数化为 $w^i = \varepsilon^{ij} z_j$， 可以直接验证这一点。 –

在这种参数化下，

$$Y_k = \frac{\widetilde{T}^{j_1\dots j_k}_{i_1\dots i_k} z^{i_1}\overline{z}_{j_1}\dots z^{i_k}\overline{z}_{j_k}}{|z|^{2k}}\,, \tag{3.29}$$

其中 $\widetilde{T}$ 由 T 和 ε 张量得到，是一个关于上下指标缩并后无迹的张量。这类函数是经典球谐函数刻画的复数类比：球谐函数是调和齐次多项式在球面上的限制（参见 [Byk23] 以及 [BS23]中的定理 1）。其核心思想是，我们的形式体系实际上将一个调和分析问题转化为一个复分析和代数几何问题。

3.2.1. $\mathbb{S}^2$ 考虑对上一节讨论的双格点 XXXSU(2) 自旋链稍作修改。假设其他一切保持不变，唯有两个格点上的自旋不再相等；也就是说，希尔伯特空间为 $\mathsf{V}_{\frac{\lambda}{2}}\otimes\mathsf{V}^{\frac{\lambda+\mathfrak{q}}{2}}$，其中 $\mathfrak{q}\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$是一个额外参数。等价地，我们将约束条件（3.20）替换为

$$a^\dagger\cdot a = \lambda\mathbb{1}\,,\qquad b^\dagger\cdot b = (\lambda+\mathfrak{q})\mathbb{1}\,. \tag{3.30}$$

于是自然会产生一个问题：这个经过修改的自旋链在 $\lambda\to\infty$ 极限下（固定 $\mathfrak{q}$）是否对应某种 σ 模型？答案是肯定的。只需稍作调整，重复上一节的计算即可证明，在大自旋极限下，该模型与耦合了电荷为 $\mathfrak{q}$ 的磁单极场的 $\mathbb{CP}^1$ σ 模型一致。这意味着磁联络$\mathcal{A}$ 的曲率由 $\mathrm{d}\mathcal{A} = \mathfrak{q}\,\omega_{\mathrm{FS}}$ 给出，其中 ω_{FS} 是球面上经过适当归一化的 Fubini–Study 形式。

该模型的谱同样可以通过代数方法求得。特征函数 $\Psi^{\mathfrak{q}}_k$ 与（3.26）中的特征函数类似，构造方式的唯一差别在于 $\Psi^{\mathfrak{q}}_k$ 包含k 种类为 a 的量子，以及 $k+\mathfrak{q}$ 种类为 b 的量子。例如，基态为

$$\Psi^{\mathfrak{q}}_0 = T_{i_1\dots i_{\mathfrak{q}}} b^\dagger_{i_1}\dots b^\dagger_{i_{\mathfrak{q}}}\big(\varepsilon_{ij}a^\dagger_i b^\dagger_j\big)^\lambda|0\rangle \quad\in\quad \mathsf{V}_{\frac{\mathfrak{q}}{2}}\,. \tag{3.31}$$

这复现了最低朗道能级（LLL）量子化 [Iva08], 其数学对应物被称为 Berezin–Toeplitz 量子化 [Sch10]。不难验证 $H\Psi^{\mathfrak{q}}_k = k(k+1+\mathfrak{q})\Psi^{\mathfrak{q}}_k$，这与作用于线丛 $\mathcal{O}(\mathfrak{q})$ [Kuw88]的球面上的 Bochner（磁）拉普拉斯算子的谱相一致。

3.3. 旗流形与 SU(n) 自旋链本节将介绍关于旗流形上的粒子及其对应自旋链的结果。回顾一下，旗流形$\mathcal{F}_{n_1,\ldots,n_k}$ 是 k 中复维数为 $\mathbb{C}^n$ 的两两正交的线性子空间 n_i的模空间，其中 $n = n_1 + \ldots + n_k$ [ABW22]。为简化讨论，我们将主要关注完全旗的情形 $\mathcal{F}_n$，其中每个 $n_i = 1$。

所需的拉格朗日嵌入[17] 具有如下形式

$$\mathcal{F}_n \hookrightarrow \Big(\underbrace{\mathbb{CP}^{n-1} \times \ldots \times \mathbb{CP}^{n-1}}_{n \text{ times}}, \omega_\lambda \Big) , \quad \omega_\lambda = i\lambda \big(\mathrm{d}\bar{z}_1 \wedge \mathrm{d}z_1 + \ldots + \mathrm{d}\bar{z}_n \wedge \mathrm{d}z_n \big) , \tag{3.32}$$

其中，每个 $z_i \in \mathbb{C}^n$ 满足如下识别 $z_i \sim e^{i\varphi_i} z_i$ ，并且归一化 $|z_i|^2 = 1$定义了 i份 $\mathbb{CP}^{n-1}$。嵌入的构造如下。由于 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 中的一个点对应于 $\mathbb{C}^n$的一个一维子空间，$\big(\mathbb{CP}^{n-1}\big)^{\times n}$ 中的一个点就是由 n 个这样的子空间构成的有序集合。通过施加这些子空间两两正交的条件，可以将完全旗流形嵌入其中。此外，对于归一化相同的 Fubini–Study 形式之和，该嵌入是拉格朗日的。这便得到 (3.11) 的以下推广：

定理。 ([BK24]) 存在一个辛同胚

$$\mathrm{T}^*\mathcal{F}_n \simeq \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\big(\mathbb{CP}^{n-1} \times \ldots \times \mathbb{CP}^{n-1}, \omega_\lambda\big)}{\{\det \mathcal{Z} = 0\}} , \tag{3.33}$$

其中 $\mathcal{Z}$ 是列向量为 z_i 的 $n \times n$ 矩阵。

此定理的证明基本上重复了第 3.2 节给出的计算。

现在我们对（3.33）两边进行量子化。复射影空间 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 是 **SU**(n)的特殊余伴随轨道；对其进行几何量子化，可得到线丛 $\mathcal{O}(\lambda)$的全纯截面空间，该空间具有完全对称 $\mathfrak{su}(n)$表示的结构。因此，（3.33）的量子对应式为

$$L^2(\mathcal{F}_n) \simeq \lim_{\lambda\to\infty} \Big(\underbrace{\mathsf{V}_{\frac{\lambda}{2}} \otimes \ldots \otimes \mathsf{V}_{\frac{\lambda}{2}}}_{n \text{ times}} \Big) , \tag{3.34}$$

[17]对于一般旗流形 $\mathcal{F}_{n_1,\ldots,n_k}$ ，必须考虑将其嵌入到格拉斯曼流形 $\mathbf{Gr}(n_1, n) \times \ldots \times \mathbf{Gr}(n_k, n)$的乘积中，其中每个 $\mathbf{Gr}(n_i, n)$ 都配备唯一的（相差一个比例因子）**SU**(n) 不变自然辛形式，它是对 Fubini–Study 形式的推广。相应**SU**(n) 轨道的几何量子化给出由矩形杨图标记的 $\mathfrak{su}(n)$ 表示。

其中，$\mathbf{V}_{\frac{1}{2}}^{\lambda}$ 表示与由长度为 λ 的单行杨图对应的完全对称 $\mathfrak{su}(n)$ 表示。

在 $\mathcal{F}_n$ 的拉格朗日嵌入像上取得全局最小值的最简单经典哈密顿量为

$$H = \sum_{i>j=1}^{n} \alpha_{ij} |\overline{z}_i \cdot z_j|^2 , \qquad \alpha_{ij} \in \mathbb{R} . \tag{3.35}$$

还可以证明，由式（3.33）右侧定义、哈密顿量为式（3.35）的经典自旋链，等价于在 $\mathcal{F}_n$ 上按度量 运动的经典粒子

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i>j=1}^{n} \frac{|\overline{u}_i \cdot \mathrm{d}u_j|^2}{\alpha_{ij}} , \qquad \overline{u}_i \cdot u_j = \delta_{ij} , \qquad u_i \sim e^{i\phi_i} u_i , \tag{3.36}$$

其中，u_i 定义了完全旗流形中按序排列的第 i 条线。该度量形式还要求系数 α_{ij} 严格为正。

利用第 3.2 节讨论的 Schwinger–Wigner 振子表示，对式（3.35）进行量子化，得到自旋 $\frac{\lambda}{2}$ $\mathbf{SU}(n)$ 哈密顿量 –

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i<j=1}^{n} \alpha_{ij} \sum_{k=1}^{\dim \mathfrak{su}(n)} S_i^k S_j^k , \tag{3.37}$$

其中 S_i^k 是 k在自旋链第 $\mathfrak{su}(n)$ 个格点上，自旋$\frac{\lambda}{2}$ 表示[18] 中的 i阶生成元。注意，这会得到一种高度非局域的“全连接”自旋链[19]。根据第（2.2）节概述的一般逻辑，哈密顿量（3.37）的谱应在 $\lambda \to \infty$极限下重现度量（3.36）中拉普拉斯–贝尔特拉米算子的谱。事实上，这种对谱问题的重新表述非常有成效。例如，最近有人使用贝特 ansatz 方法，求得了 $-\triangle$ 在 $\mathcal{F}_3$上的谱，其中度量为一般的不变度量 [BK25b], ；而此前只有

[18]若在每个格点上取不同的对称表示，就会得到具有至多 $n-1$ 个独立磁单极荷的旗流形 σ 模型，这是对第 3.2 节情形的推广。磁单极的数量可以这样解释： $H^2(\mathcal{F}_n) \simeq \mathbb{Z}^{n-1}$，其中生成元是在自然嵌入 $\mathcal{F}_n \hookrightarrow \left(\mathbb{CP}^{n-1}\right)^n$ 下，对射影空间上与 Fubini–Study 形式成正比的 2-形式作拉回所得。注意这里有 $\mathbb{Z}^{n-1}$ ，而非 $\mathbb{Z}^n$ ，因为拉格朗日嵌入（3.32）在上同调生成元之间施加了一个关系 $\omega_\lambda = 0$ 。

[19]这类模型有时称为“自旋网络”。

最简单的特殊情形 $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{13}$ 已为人所知。

3.4. 双曲面上的粒子与 SL(2, ℝ) 自旋链在这一简短的节中，我们介绍另一个例子，其中涉及非紧群 $\mathbf{SU}(1,1) \simeq \mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$余伴随轨道。为简洁起见，我们只讨论构造中的运动学方面。尽管讨论范围有限，它仍提供了一种简单方法，可推导出关于无限维表示的相当非平凡的结果。

双曲（罗巴切夫斯基）平面的庞加莱 圆盘模型 $\mathbb{H}$ 是配备以下度量的单位圆盘 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}q\mathrm{d}\overline{q}}{\big(1-|q|^2\big)^2}\,, \qquad |q|<1\,. \tag{3.38}$$

这里的 q 是非齐次坐标的双曲类比。还有两种与陪集表示 $\mathbb{H} \simeq \mathbf{SU}_{(1,1)}\,\mathbf{U}_{(1)}$ 相关的"齐次"参数化。第一种记为 $\mathbb{H}_+$，由一个复二维向量 $z \in \mathbb{C}^2$定义，该向量在相位 $z \sim e^{i\varphi}z$下视为等同，并满足不定归一化条件 $z\eta z = 1$，其中 $\eta = \mathsf{diag}[1,-1]$ 是平直的闵可夫斯基度量。第二种 $\mathbb{H}_-$由一个满足 $w \sim e^{i\phi}w$ 和 $w\eta w = -1$的二维向量 w 给出。作为光滑流形，$\mathbb{H}_+$和 $\mathbb{H}_-$ 显然是辛同胚的，但 $\mathbf{SU}(1,1)$ 作用——它们仅通过矩阵乘法旋转 z 和w ——并不等价[20]，，这会影响量子化。

双曲平面本身是$\mathbf{SU}(1,1)$的一个余伴随轨道。因此，考虑经典自旋链相空间 $\big(\mathbb{H}_+ \times \mathbb{H}_-, \omega_\lambda\big)$，其辛形式为

$$\omega_\lambda = i\lambda\big(\mathrm{d}\overline{z}\wedge\eta\mathrm{d}z - \mathrm{d}\overline{w}\wedge\eta\mathrm{d}w\big)\,. \tag{3.39}$$

所要证明的是，存在一个拉格朗日嵌入

$$\mathbb{H} \hookrightarrow \big(\mathbb{H}_+ \times \mathbb{H}_-, \omega_\lambda\big) \qquad \text{defined by} \qquad \overline{z}\eta w = 0\,. \tag{3.40}$$

使用与第3.2节类似的方法，可以证明这个嵌入

[20]换言之，该辛同胚不是等变的。

诱导出辛同胚[21]

$$\mathrm{T}^*\mathbb{H} \simeq \left(\mathbb{H}_+ \times \mathbb{H}_-, \omega_\lambda\right). \tag{3.41}$$

这是一个既不需要大 λ 极限，也不需要切除任何子流形的例子。原因如下。如第 3.2 节所述，大 λ 极限是为了在紧余伴随轨道与非紧余切丛之间获得一个“辛同胚”，而切除行列式簇则是为了平凡化某些量子线丛。在这里，这两个步骤都不需要，因为轨道本身是非紧且可缩的。

量子化　关系式（3.41）导出了一个有趣的表示论结果：

$$L^2(\mathbb{H}) \simeq \mathcal{D}_s^+ \otimes \mathcal{D}_s^-, \tag{3.42}$$

其中 $\mathcal{D}_s^\pm$ 表示相同（但除此之外任意可容许的）“自旋” [Kit17] 的正、负离散级数表示 $s = \frac{1}{2}(1+\lambda)$。这重现了 [Rep78]不久前的一个结果。该对应关系的动力学方面留待未来研究 [BK26]。

致谢

我由衷感谢 Dmitri Bykov 和 Andrew Kuzovchikov；若没有他们至关重要的讨论与贡献，这项工作便不可能完成。我也要感谢 Mikhail Markov、Ivan Sechin 和 Nikolai Tyurin，他们提出了宝贵的意见。本工作源自为在圣彼得堡斯捷克洛夫数学研究所分部（PDMI）和北京数学科学与应用研究院（BIMSA）所作报告准备的笔记，感谢 Anton Selemenchuk 和 Andrii Liashyk 促成这些报告。本工作部分内容是在访问 BIMSA 期间完成的，感谢 Anton Pribytok 邀请我前往。此项工作得到俄罗斯科学基金会项目（编号 25-72-10177）的资助。

[21]实现适当变量替换所需的关键技术工具是不定极分解 [Bol+97]。

参考文献

[ABW22] I. Affleck、D. Bykov 和 K. Wamer。《旗流形σ模型：自旋链与可积理论》。Phys. Rept. 953（2022），第 1–93 页。arXiv：2101.11638[hep-th].[Alv85] O. Alvarez。《拓扑量子化与上同调》。Commun. Math. Phys. 100（1985），第 279 页。[BDH25] X. Bekaert、L. Donnay 和 Y. Herfray。《BMS粒子》。Phys. Rev. Lett. 135.13（2025），第 131602 页。arXiv：2412.06002 [hep-th].[BJO24] T. Basile、E. Joung 和 T. Oh。《由余伴随轨道导出的显式协变世界线作用量。第一部分：一般理论与向量描述》。JHEP 01（2024），第 018 页。arXiv：2307.13644 [hep-th].[BK24] D. Bykov 和 A. Kuzovchikov。《旗流形上的经典与量子粒子》。Class. Quant. Grav. 41.20（2024），第 205009 页。arXiv：2404.15900 [hep-th].[BK25a] D. Bykov 和 A. Kuzovchikov。《余伴随轨道的各向同性嵌入与磁测地流》（2025）。arXiv：2503.08646 [math.DG].[BK25b] D. Bykov 和 A. Kuzovchikov。《由 Gaudin 自旋链导出的σ模型》（2025）。arXiv：2508.20889 [hep-th].[BK26] D. Bykov 和 V. Krivorol。《常曲率空间上粒子的相干态量子化》（2026），即将出版。[BKK25] D. Bykov、V. Krivorol 和 A. Kuzovchikov。《余伴随轨道上的振子演算与指标定理》。Lett. Math. Phys. 115.5（2025），第 101 页。arXiv：2412.21024 [hep-th].[BO15] G. Barnich 和 B. Oblak。《三维 BMS 群札记：II. 余伴随表示》。JHEP 03（2015），第 033 页。arXiv：1502.00010 [hep-th].[Bol+97] Y. Bolshakov、C. V. van der Mee、A. Ran、B. Reichstein 和 L. Rodman。《有限维不定标量积空间中的极分解：一般理论》。Linear Algebra and its Applications 261.1（1997），第 91–141 页。[Bot90] R. Bott。《关于诱导表示》。《俄罗斯数学评论》45.3（1990）。[BS23] D. Bykov 和 A. Smilga。《单极谐波，定义于 $\mathbb{CP}^{n-1}$》。SciPost Phys. 15.5（2023），第 195 页。arXiv：2302.11691 [hep-th].

[BW97] S. M. Bates 和 A. J. Weinstein。《量子化几何讲义》。第 8 卷。伯克利数学讲义。加利福尼亚州伯克利：美国数学会，1997 年，第 137 页。[Byk12] D. Bykov。“通过拉格朗日嵌入实现 Haldane 极限”。《核物理B辑》855（2012），第 100–127 页。arXiv：1104.1419 [hep-th]。[Byk13] D. Bykov。“反铁磁自旋链的几何”。《数学物理通讯》322（2013），第 807–834 页。arXiv：1206.2777 [hep-th]。[Byk23] D. Bykov。“σ 模型作为 Gross–Neveu 模型。II”。《理论与数学物理》 217.3 （ 2023 ），第 1842–1854 页。arXiv：2310.15394 [hep-th]。[BZ17] I. Bengtsson 和 K. Zyczkowski。《量子态几何：量子纠缠导论》。第 2 版。剑桥大学出版社，2017。[Dir31] P. A. M. Dirac。“电磁场中的量子化奇点”，《伦敦皇家学会会刊 A 辑》133.821（1931），第 60–72 页。[GH78] P. Griffiths 和 J. Harris。《代数几何原理》。1994 年重印。John Wiley & Sons, Inc.，1978。[GT10] O. Giraud 和 K. Thas。“聆听鼓的形状：等谱性的数学与物理方面”。《现代物理评论》82（2010），第 2213–2255 页。[Hal83a] F. D. M. Haldane。“大自旋海森堡反铁磁体的非线性场论：一维易轴奈尔态的半经典量子化孤子”。《物理评论快报》50（1983），第 1153–1156 页。[Hal83b] F. Haldane。“一维海森堡反铁磁体的连续统动力学：与 O(3)非线性σ模型的对应”。《物理快报A辑》93.9（1983），第 464–468 页。[Hel81] S. Helgason。《齐性空间调和分析专题》。第 13 卷。《数学进展》。波士顿—巴塞尔—斯图加特：Birkhäuser，1981 年，第 ix +142 页。[Iva08] E. Ivanov。“超对称化朗道模型”。《理论与数学物理》154（2008），第 349–361 页。arXiv：0705.2249 [hep-th]。[Kac66] M. Kac。“能否听出鼓的形状？”《美国数学月刊》73.4（1966），第 1–23 页。[Kir01] A. A. Kirillov。“几何量子化”。《动力系统 IV》。V. I. Arnold 和 S. P. Novikov 编。第 4 卷。《数学科学百科全书》。柏林、海德堡：Springer，2001。

[Kir62] A. A. Kirillov。《幂零李群的酉表示》。《俄罗斯数学评论》17.4（1962），第 53 页。[Kir99] A. Kirillov。“轨道方法的优点与缺点”。《美国数学会通报》36.4（1999），第 433–488 页。⁀[Kit17] A. Kitaev。“关于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 表示的笔记”（2017）。arXiv：1711.08169[hep-th]。[Kuw88] R. Kuwabara。“ 复射影空间上线丛上的薛定谔算子谱 ”。《东北数学杂志》40.2（1988），第 199–211 页。[Kuz25] A. Kuzovchikov。“旗流形上的力学”。国际超对称与量子对称性研讨会。（2025）。arXiv：2502.20397 [hep-th]。[KW09] B. Khesin 和 R. Wendt。《无限维群的几何》。2009。[LO24] I. A. Lahlali 和 J. A. O’Connor。“陪集对称性与余伴随轨道”。（2024）。arXiv：2411.05918 [hep-th]。[LRS24] A. Liashyk、N. Reshetikhin 和 I. Sechin。《经典可积背景上的量子可积系统》（2024）。arXiv：2405.17865 [math-ph]。[Mir04] A. E. Mironov。“ $\mathbb{C}^n$ and $\mathbb{CP}^n$中的哈密顿极小与极小拉格朗日流形新例子”。《数学文集》195.1（2004），第 85–96 页。[NV25] G. Neri 和 L. Varrin。“量子角对称性的轨道方法”。《物理评论D辑》112.10（2025），第 104010 页。arXiv：2507.10683 [hep-th]。[Per86] A. Perelomov。《广义相干态及其应用》。《理论与数学物理》。Springer-Verlag Berlin Heidelberg，1986。[Rep78] J. Repka。“SL2(R)酉表示的张量积”。《美国数学杂志》100.4（1978），第 747–774 页。[Sch10] M. Schlichenmaier。“紧致 Kähler 流形的 Berezin-Toeplitz 量子化：成果综述”。《数学物理进展》2010（2010），第 927280 页。arXiv：1003.2523[math.QA]。[Sla18] N. A. Slavnov。《代数 Bethe Ansatz》。（2018）。arXiv：1804.07350 [math-ph]。[Smi20] A. V. Smilga。《透过超对称眼镜看微分几何》。WSP，2020。[Tyu21] N. Tyurin。“格拉斯曼流形中的 Mironov 环实例”。《西伯利亚数学杂志》62（2021），第 370–376 页。

[Tyu25a] N. Tyurin.《充足除子与拉格朗日子流形》。Steklov 数学研究所论文集 329 (2025)，第 217–231 页。[Tyu25b] N. A. Tyurin.《Gr(r,n)中的哈密顿极小拉格朗日子流形示例》。Izv. Math. 89.2 (2025)，第 359–371 页。[Wag24] F. Wagner.《曲余切丛上的量子力学探索》。Class. Quant. Grav. 41.4 (2024)，第 045006 页。arXiv：2112.06758 [gr-qc]。[Wei71] A. Weinstein.《辛流形及其拉格朗日子流形》。Advances in Mathematics 6.3 (1971)，第 329–346 页。[Wei81] A. Weinstein.《辛几何》。美国数学学会通报 5.1 (1981)，第 1–13 页。[Wer23] K. Wernli.《几何量子化六讲》。PoS Modave2022 (2023)，第 005 页。arXiv：2306.00178 [math-ph]。[Wey12] H. Weyl.《线性偏微分方程特征值的渐近分布定律（及其在空腔辐射理论中的应用）》。Mathematische Annalen 71.4 (1912)，第 441–479 页。[WY75] T. T. Wu 和 C. N. Yang.《不可积相位因子的概念与规范场的整体表述》。《物理评论D辑》12 (1975)。编者：J.-P. Hsu 和 D. Fine，第 3845–3857 页。