arXiv:2601.01517v1 [gr-qc] 4 Jan 2026

具有指定 ADM 参数的多个黑洞形成的柯西数据

Dawei Shen 和 Jingbo Wan

2026年1月6日

摘要

我们给出一种简单构造，可生成光滑、渐近平坦的真空初始数据，用以模拟相对论性坍缩的 N 体系统；对于每个分量，均可独立指定 ADM 能量、线动量和角动量，但须满足类时条件 $\mathbf{E} > |\mathbf{P}|$。初始数据不含俘获面，而其未来演化则包含多个因果独立的俘获区域，这些区域由初始切片上的局部子集动态形成。特别是，对于具有相互远离且相对运动的坍缩分量的数据，其最大延拓预计将产生包含多个黑洞的时空。

1 引言

数学广义相对论中的一个核心问题是，哪些光滑、渐近平坦的爱因斯坦真空方程柯西数据会导致黑洞形成。虽然像克尔族这样的定态黑洞已得到充分研究，但对于其演化会产生黑洞的初始数据结构，人们所知甚少，尤其是涉及多个黑洞的构型。

这一方向上的一项重大突破归功于 Christodoulou [9], ，他证明了俘获面可以由正则特征数据动态形成。此方法随后在 [1, 2, 5, 18, 19]中得到进一步发展。在柯西框架下，Li和Yu [25] 构造了光滑的渐近平坦真空初始数据，其未来发展包含一个俘获面。Li和Mei [24] 将这一结果拓展为一种构造真空时空的方法，使其展现由柯西数据形成黑洞的过程。在我们先前的工作 [29], 中，我们构造了光滑的柯西初始数据，其未来发展包含多个因果独立的俘获区域，且初始时不存在任何俘获面。另请参阅 [15], 与 E. Giorgi 的合作成果，其中构造了多个坍缩（带电）玻色子星的初始数据。每个俘获区域都源自初始切片上的一个局部子集；然而，这些坍缩分量的相对论参数并未涉及。根据构造， [15, 29]中得到的初始数据集由多个质量集中体构成，其 ADM 能量给定，且质心彼此相距甚远。这些数据经过有限时间演化后，会形成若干彼此相距甚远的三维黑洞，其线动量和角动量都很小。类比牛顿引力，这些黑洞预计会合并为一个黑洞。因此，人们并不预期长期演化会呈现多个黑洞。

本文旨在解决这一局限。受 Carlotto-Schoen 在 [4] 中引入的锥形拼接方法（另见 Mao-Tao [27]）启发，我们提出了一个简单的框架，其中每个坍缩区域都以一个 Kerr 区域为模型，并可独立指定其 ADM能量、线动量和角动量，同时满足类时条件 $\mathbf{E} > |\mathbf{P}|$。初始数据保持光滑且不存在俘获面，而其未来发展则包含多个动态形成、相对论参数可控的俘获区域。

我们的方法利用了爱因斯坦真空方程的微分同胚不变性，以及由此产生的约束方程的不确定性。从概念上讲，我们将广义相对论视为狭义相对论加上受控的低阶修正。Kerr 初始数据采用 Kerr-Schild 坐标，其 ADM 荷被整理成一种在庞加莱群作用下协变变换的形式。这样便可分离出精确的狭义相对论变换律，同时对其余低阶项加以控制，使拼接定理得以应用。环形拼接将 Kerr黑洞核心替换为短脉冲坍缩区域，而锥形拼接则将不同的受 boost 的Kerr区域局部化并彼此分隔。由此得到的数据可视为一族相对论坍缩 N–体初始数据。

设 $(\Sigma,\ g)$ 为一个三维黎曼流形，且 k 是Σ上的对称二阶张量。爱因斯坦真空约束方程为

$$\begin{aligned} R(g) + (\mathrm{tr}_g\, k)^2 - |k|_g^2 &= 0, \\ \mathrm{div}_g(k - \mathrm{tr}_g\, k\, g) &= 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 ∇ 表示 g 的 Levi-Civita联络， $R(g)$ 表示其标量曲率。根据 Choquet-Bruhat 和 Choquet-Bruhat-Geroch 的局部存在定理 [7, 8],，任意满足 $(\Sigma、\ g、\ k)$的解（1.1）都存在唯一的全局最大双曲发展 $(\mathcal{M},\ \mathbf{g})$，满足

$$\mathbf{Ric}(\mathbf{g})_{\mu\nu} = 0, \tag{1.2}$$

其中 $(\Sigma,\ g)$ 等距嵌入，且第二基本形式为 k。

现在我们引入用于定位塌缩区域的几何记号。对于 $\omega \in \mathbb{S}^2$、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 和 $y \in \mathbb{R}^3$，定义

$$C_{\omega,\theta}(y) := \{x \in \mathbb{R}^3 : \angle(x - y, \omega) < \theta\},$$

它是 $\mathbb{R}^3$ 中的实心锥，其中心为 y，中心向量为 ω，角度为 θ。我们采用简写$C_{\omega,\ \theta} := C_{\omega,\ \theta}(0)$。此外，记 $B_r(x)$ 为中心位于 x 、欧几里得半径为 r的球。

我们的主要结果如下定理所述。

定理 1.1。 设 $N \in \mathbb{N}$和 $s \geqslant 3$。对每个 $I = 1, \ldots, N$，指定参数

$$(\mathbf{E}_I, \mathbf{P}_I, \mathbf{J}_I) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{E}_I > |\mathbf{P}_I|,$$

并选取 N 个两两不相交的圆锥 C_{ω_I,θ_I}，使得 $\omega_I \in \mathbb{S}^2$ 和 $0 < \theta_I < \frac{\pi}{2}$。那么存在参数

$$(\delta_I, R_I, \mathbf{c}_I, y_I) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \qquad I = 1, \ldots, N,$$

以及一个初始数据组 $(\mathbb{R}^3, g, k)$，它满足爱因斯坦约束方程 (1.1)，并具有以下性质：

1. 局部结构：对每个 $I \in \{1,\ 2, \ldots, N\}$,

$$\begin{aligned} (g,k) &= (e,0) \qquad in\ \ B_{(1-2\delta_I)R_I}(\mathbf{c}_I), \\ (g,k) &= (g_I,k_I) \qquad in\ \ B^c_{32R_I}(\mathbf{c}_I) \cap \big(C_{\omega_I,\frac{1}{2}\theta_I}(y_I) \cup B_{\frac{1}{2}}(y_I)\big), \end{aligned} \tag{1.3}$$

其中 (g_I, k_I)表示以 $\mathbf{c}_I$ 为中心、*ADM*能量为 $\mathbf{E}_I$、线动量为 $\mathbf{P}_I$、角动量为 $\mathbf{J}_I$ 的 *Kerr*初始数据。见图 *1*。

2. 解析控制：在拼接区域中，我们有

$$\begin{aligned} R_I^{-1}\|g - e\|_{H^s(B_{64R_I}(\mathbf{c}_I)\setminus\overline{B_{R_I}}(\mathbf{c}_I))} + \|k\|_{H^{s-1}(B_{64R_I}(\mathbf{c}_I)\setminus\overline{B_{R_I}}(\mathbf{c}_I))} &\lesssim 1, \\ \|(g-e,k)\|_{H_b^{s,\delta}\times H_b^{s-1,\delta+1}(\Omega_I)} &\lesssim 1, \end{aligned} \tag{1.4}$$

其中

$$\Omega_I := \overline{\big(C_{\omega_I,\theta_I}(y_I) \cup B_1(y_I)\big)\setminus\big(C_{\omega_I,\frac{1}{2}\theta_I}(y_I) \cup B_{\frac{1}{2}}(y_I)\big)}. \tag{1.5}$$

3. 未来俘获曲面：对于每个 $I \in \{1, 2, \ldots\ldots, N\}$，在未来依赖域 $D^+(B_{R_I}(\mathbf{c}_I))$ 中会形成一个俘获曲面。

4. 无初始俘获曲面： $(\mathbb{R}^3, g, k)$ 不含俘获面。

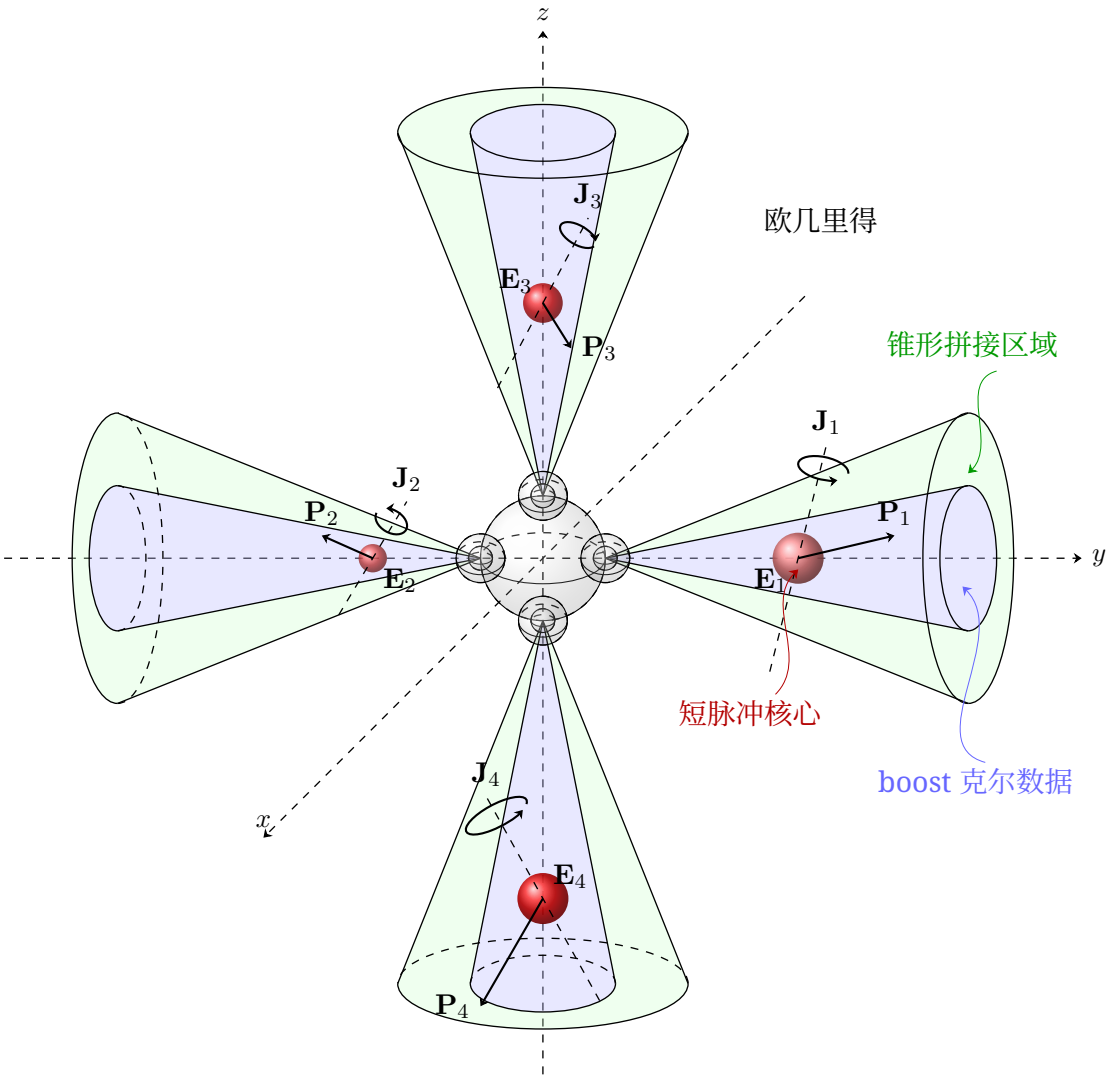

图 1：定理 1.1 的示意图。每个坍缩分量都支撑在互不相交的锥形扇区 $C_{\omega_I,\theta_I}(y_I)$ 中。数据在 $B_{(1-2\delta_I)R_I}(\mathbf{c}_I)$ 内恰为欧几里得数据；在每个锥形区域 $B^c_{32R_I}(\mathbf{c}^I) \cap \left(C_{\omega_I,\frac{1}{2}\theta_I}(y_I) \cup B_{\frac{1}{2}}(y_I)\right)$ 中，则与具有指定 ADM 参数 $(\mathbf{E}_I, \mathbf{P}_I, \mathbf{J}_I)$ 的 boosted Kerr 初始数据集一致。最内侧的短脉冲核心取代 Kerr 内部，并在未来区域 $D^+(B_{R_I}(\mathbf{c}_I))$ 中产生一个俘获曲面。

从最终状态猜想的角度来看，定理1.1可以被视为对真空广义相对论中可容许的多分量坍缩初始数据构型的一种提议。最终状态图景的一个核心要素是 Schwarzschild 和 Kerr 族黑洞时空的非线性稳定性 [13, 14, 20, 21, 22, 23, 28]。关于这些进展及其在最终状态猜想中的作用的详细讨论，请参见 [17] 。

基于拼接及相关方法（例如 [10, 12, 16]）构造多黑洞初始构型，提供了一类互补的实例，但这些构造针对的是黑洞已存在于初始切片上的情形。相比之下，本研究聚焦于

从完全正则且不含俘获面的柯西数据出发，多个黑洞的动力学形成。

更准确地说，这里构造的初始数据起初不含俘获面，也不含黑洞区域；同时，对每个坍缩分量进行安排，使其未来依赖域中形成一个俘获面。与此同时，各坍缩区域均配备了可独立指定的 ADM能量、线动量和角动量参数，但须满足类时条件 $\mathbf{E} > |\mathbf{P}|$。从这个意义上说，定理 1.1 构造了一个相对论性坍缩 N体族：在守恒量层面，每个分量的行为都类似于狭义相对论中的有质量自旋粒子，但这些数据依据完全非线性的爱因斯坦真空方程演化。

一个基本问题是，这类数据的最大未来发展是否能够包含具有不同渐近参数的多个黑洞，而不是最终合并为单个黑洞。本文不研究长时间演化；不过，对 N–体的诠释在弱相互作用区域提出了一个具体的二体二分情形。当两个分量相距较远，且其质量相对于间距尺度较小时，它们的运动可以用狭义相对论运动学近似，并以牛顿势描述相互作用。这种混合描述根据守恒的能量-动量对和初始间距给出了一个明确的逃逸阈值，我们将在一维情形下于下文记录这一结果。

令 $(\mathbf{E}_1, \mathbf{P}_1)$ 和 $(\mathbf{E}_2, \mathbf{P}_2)$ 满足 $\mathbf{E}_i > |\mathbf{P}_i|$ （$i = 1,2$），记

$$m_i := \sqrt{\mathbf{E}_i^2 - |\mathbf{P}_i|^2}.$$

假设沿初始间距为 $d_{12} > 0$ 的分离轴作一维运动，且运动方向相反。我们引入混合总能量

$$\mathbf{E}_{\mathrm{tot}}(d) := \mathbf{E}_1(d) + \mathbf{E}_2(d) - \frac{m_1 m_2}{d},$$

其中，$\mathbf{E}_i(d)$ 表示第 i 个物体在分离距离为 d 时的相对论能量。在 $d = d_{12}$ 与 $d = \infty$ 之间守恒 $\mathbf{E}_{\mathrm{tot}}$，可得

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 - \frac{m_1 m_2}{d_{12}} = \mathbf{E}_1(\infty) + \mathbf{E}_2(\infty).$$

逃逸与并合之间的阈值对应于每个物体在无穷远处的动能均非负的情形，即对于 $i = 1,2$，有 $E_i(\infty) \geqslant m_i$ 。于是，逃逸条件可写为：[1]

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 - m_1 - m_2 \geqslant \frac{m_1 m_2}{d_{12}}. \tag{1.6}$$

受显式逃逸条件（1.6）以及如下预期的启发：次极端克尔时空描述动力学稳定的真空黑洞终态。我们针对定理 1.1 所产生的初始数据的最大未来发展，提出如下关于双体逃逸／并合二分的猜想。

猜想1.2 （双体逃逸/并合阈值）。 固定

$$(\mathbf{E}_1, \mathbf{P}_1, \mathbf{J}_1),\ (\mathbf{E}_2, \mathbf{P}_2, \mathbf{J}_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{E}_i > |\mathbf{P}_i|,$$

[1]在非相对论区域 $|P_i| \ll m_i$中，这简化为牛顿判据

$$\frac{|\mathbf{P}_1|^2}{2m_1} + \frac{|\mathbf{P}_2|^2}{2m_2} \geqslant \frac{m_1 m_2}{d_{12}},$$

因此，1.6）给出了经典逃逸条件所预期的相对论修正。

并设定 $m_i := \sqrt{\mathbf{E}_i^2 - |\mathbf{P}_i|^2}$。此外，假设满足次极端性条件

$$|\mathbf{J}_i| < m_i^2, \qquad i = 1, 2.$$

假设线性动量共线且方向相反。令 $d_{12} > 0$ 表示定理1.1中两个中心之间的欧氏距离，并令 $(\mathbb{R}^3, g, k)$ 表示相应的初始数据。那么，存在一个普适常数 $\kappa > 0$，使得当 d_{12} 相对于拼接尺度和短脉冲参数足够大时，以下结论成立：

(i) 逃逸。若

$$d_{12} \geqslant \kappa \frac{m_1 m_2}{(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) - (m_1 + m_2)},$$

则最大未来发展包含两个互不相交的黑洞区域，每个区域都渐近于一个克尔时空，其 *ADM* 参数与 $(\mathbf{E}_i, \mathbf{P}_i, \mathbf{J}_i)$接近。

(ii) 并合。若

$$d_{12} \leqslant \kappa^{-1} \frac{m_1 m_2}{(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) - (m_1 + m_2)},$$

则未来事件视界是连通的。

本文其余部分安排如下。第2 节回顾 ADM 荷的定义以及 [26, 27]的无障碍拼接结果。第3 节在 Kerr-Schild 坐标中计算克尔度规$\mathbf{g}_{m,a}$ 的局部化 ADM 荷。第4 节通过识别两个卡西米尔不变量，证明$\mathrm{ISO}^+(1,3)$– 轨道$\mathbf{g}_{m,a}$ 实现了具有指定 ADM 荷的所有 boost 克尔数据。第5节利用上述要素以及 [29]中的良好准备的短脉冲切片构造，证明定理1.1 。

致谢。 作者感谢 Elena Giorgi、Sergiu Klainerman 和 Jérémie Szeftel 对这项工作的关注。J.W. 得到 ERC-2023 AdG 101141855 BlaHSt 的资助。

2 初始数据拼接

设 (Σ, g, k) 是一个满足（1.1）的初始数据组。引入新变量

$$h_{ij} := g_{ij} - e_{ij} - \delta_{ij} \operatorname{tr}_e(g - e), \qquad \pi_{ij} := k_{ij} - \delta_{ij} \operatorname{tr}_e k. \tag{2.1}$$

以下所有迹、指标升高和缩并均相对于欧几里得度规 e进行。逆关系为

$$g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij} \operatorname{tr}_e h, \qquad k_{ij} = \pi_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij} \operatorname{tr}_e \pi. \tag{2.2}$$

用这些变量，爱因斯坦真空约束（1.1）可示意性地写为

$$P(h, \pi) = \Phi(h, \pi) \tag{2.3}$$

其中 P 是主线性部分

$$P(h, \pi) := (\partial_i \partial_j h^{ij}, \partial_i \pi^{ij}), \qquad \Phi(h, \pi) := (M(h, \pi), N^j(h, \pi)),$$

并且 Φ 收集了 (h 中的二次项， π， ∂h， $\partial \pi$):

$$M(h, \pi) = h \cdot \partial^2 h + \partial h \cdot \partial h + \pi \cdot \pi, \qquad N^j(h, \pi) = (h \cdot \partial \pi)^j + (\partial h \cdot \pi)^j.$$

2.1 相对于区域的荷的定义

设 $(g,\ k)$ 是定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的渐近平坦数据，以典范坐标 x^i 表示，并具有欧几里得背景 e。对于任意闭曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$，我们定义局部化 ADM 荷（通量）为

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[(g,k);S] &:= \frac{1}{2}\int_S (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii})\nu^j \, dS,\\
\mathbf{P}_i[(g,k);S] &:= \int_S (k_{ij} - \delta_{ij}\,\mathrm{tr}_e\, k)\nu^j \, dS,\\
\mathbf{C}_l[(g,k);S] &:= \frac{1}{2}\int_S \Big(x_l(\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) - \delta_{il}(g-e)_{ij} + \delta_{jl}(g-e)_{ii}\Big)\nu^j \, dS,\\
\mathbf{J}_l[(g,k);S] &:= \int_S (k_{ij} - \delta_{ij}\,\mathrm{tr}_e\, k)Y_l^i\nu^j \, dS,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

其中，ν 表示相对于 S 的向外的欧几里得单位法向量，且 $Y_l^i := \epsilon_{lj}{}^i x^j$。我们将这些量汇集为荷向量

$$\mathbf{Q}[(g,k);S] := (\mathbf{E},\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\mathbf{P}_3,\mathbf{C}_1,\mathbf{C}_2,\mathbf{C}_3,\mathbf{J}_1,\mathbf{J}_2,\mathbf{J}_3)[(g,k);S]. \tag{2.5}$$

对于 $S = \partial B_r$，ADM 荷定义为

$$\mathbf{Q}_{ADM}[(g,k)] := \lim_{r\to\infty} \mathbf{Q}[(g,k);\partial B_r],$$

只要该极限存在。

由于我们将在环带区域上开展研究，因此还将引入平均荷。固定 $\eta \in C_c^\infty(0,\ \infty)$使其满足

$$\mathrm{supp}\,\eta \subset (1,2), \qquad \int_1^2 \eta(r)\,dr = 1,$$

并定义，对于 $r>0$,

$$\eta_r(r') := r^{-1}\eta(r^{-1}r').$$

对于 $\mathbf{Q} = (\mathbf{E},\ \mathbf{P},\ \mathbf{C},\ \mathbf{J})$，我们对 $A_r := B_{2r}\backslash B_r$ 设定如下：

$$\mathbf{Q}[(g,k);A_r] := \int_r^{2r} \eta_r(r')\mathbf{Q}[(g,k);\partial B_{r'}]\,dr'. \tag{2.6}$$

2.2 拼接定理

本小节中，我们记录一个重标度的环带拼接定理，以及一个针对真空约束方程的锥形拼接结果，这些结果取自 Mao-Oh-Tao [26]和 Mao-Tao [27]，并作了调整以满足本文所需的形式。

我们首先陈述一个重标度的环带拼接定理。

环带拼接定理（参见 [26] 的定理 *1.7*）。给定 $s > \frac{3}{2}$、$\Gamma > 1$ 和 $r > 0$，存在常数 $\varepsilon_o = \varepsilon_o(s、\Gamma) > 0$、$\mu_o = \mu_o(s、\Gamma) > 0$ 和 $C_o = C_o(s、\Gamma) > 0$，使得下述结论成立。设 $(g_{in}、k_{in}) \in H^s \times H^{s-1}(A_r)$ 和 $(g_{out}、k_{out}) \in H^s \times H^{s-1}(A_{32r})$ 是方程 *(1.1)* 的解。定义 $\Delta Q = (\Delta E\ \Delta P\ \Delta C\ \Delta J) \in \mathbb{R}^{10}$ 为

$$\Delta\mathbf{Q} = \mathbf{Q}[(g_{out},k_{out});A_{32r}] - \mathbf{Q}[(g_{in},k_{in});A_r]. \tag{2.7}$$

假设

$$\begin{aligned}
&\Delta\mathbf{E} > |\Delta\mathbf{P}|, \qquad &&\frac{\Delta\mathbf{E}}{\sqrt{(\Delta\mathbf{E})^2 - |\Delta\mathbf{P}|^2}} < \Gamma,\\
&r^{-1}\Delta\mathbf{E} < \varepsilon_o^2, \qquad &&r^{-1}(|\Delta\mathbf{C}| + |\Delta\mathbf{J}|) < \mu_o\Delta\mathbf{E},
\end{aligned} \tag{2.8}$$

and

$$r^{-2}\|g_{in}-e\|^2_{H^s(A_r)}+\|k_{in}\|^2_{H^{s-1}(A_r)}+r^{-2}\|g_{out}-e\|^2_{H^s(A_{32r})}+\|k_{out}\|^2_{H^{s-1}(A_{32r})}<\mu_o\Delta\mathbf{E}. \quad (2.9)$$

那么存在 $(g,\ k)\in H^s\times H^{s-1}(B_{64r}\backslash B_r)$ 满足 (1.1)，使得

$$(g,k)=(g_{in},k_{in})\ on\ A_r,\qquad (g,k)=(g_{out},k_{out})\ on\ A_{32r}, \quad (2.10)$$

and

$$r^{-2}\|g-e\|^2_{H^s(B_{64r}\backslash\overline{B_r})}+\|k\|^2_{H^{s-1}(B_{64r}\backslash\overline{B_r})}<C_o\Delta\mathbf{E}. \quad (2.11)$$

证明。应用 [26, 定理 1。7] 于重新缩放后的数据 $(g^{(r)}(x)、\ k^{(r)}(x))=(g(rx)、\ rk(rx))$，证明得证。□

对于锥形拼接结果，我们需要以下右逆算子。现在定义b–Sobolev 空间。

定义 2.1。对于 $s\in\mathbb{N},\ b$–*Sobolev* 空间 $H^s_b(\mathbb{R}^3)$ 由以下范数定义

$$\|u\|^2_{H^s_b(\mathbb{R}^3)}:=\sum_{k\leqslant s}\|\langle x\rangle^k\nabla^k u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

我们通过对偶性和插值将定义扩展到 $s\in\mathbb{R}$。对于 $\ell\in\mathbb{R}$，我们令 $H^{s、}{}_b{}^{\ell}:=\langle x\rangle^{-\ell}H^s_b$。就我们的目的而言，方便起见，令 $\mathcal{X}^{s、}{}_b{}^{\delta}:=H^{s、}{}_b{}^{\delta}\times H^{s-1、}{}_b{}^{\delta+1}$。

命题 2.2（**命题 9**）。设

$$\Omega_{int}:=\overline{(C_{\omega,\theta}\cup B_1)\backslash(C_{\omega,\theta_0}\cup B_{\frac12})}. \quad (2.12)$$

存在一个解算子

$$S_{int}:H^{s-2,\delta+2}_b(\Omega_{int})\to\mathcal{X}^{s,\delta}_b(\Omega_{int}):=H^{s,\delta}_b(\Omega_{int})\times H^{s-1,\delta+1}_b(\Omega_{int}),$$

对于 $s\in\mathcal{R}$ 和 $\delta<-\frac12$，使得对所有 $f\in C^\infty_c(\mathbf{\Omega}_{int})$,

$$\mathrm{supp}(S_{int}f)\subseteq\Omega_{int},\qquad PS_{int}f=f.$$

最后，我们陈述并证明一个适用于我们情形的锥形拼接定理，它是对Mao-Tao的定理 2]的轻微修改。

圆锥拼接定理。设 $0<\theta_0<\theta<\frac{\pi}{2},\ \delta<-\frac12,$– 以及 ω-$\in\mathbb{S}^2$。假设 $(g_0,\ k_0)$ 满足(1.1) 于 $C_{\omega,\theta}\cup B_1$ 并满足

$$\|(g_0-e,k_0)\|_{\mathcal{X}^{s,\delta}_b(\Omega_{int})}\leqslant\varepsilon, \quad (2.13)$$

当 $\varepsilon>0$ 充分小时，存在一个解 $(g,\ k)$，满足 (1.1) 定义在 $\mathbb{R}^3$ 上，使得

$$(g,k)=\begin{cases}(g_0,k_0) & in\ \ C_{\omega,\theta_0}\cup B_{\frac12},\\ (e,0) & in\ \ \mathbb{R}^3\backslash(C_{\omega,\theta}\cup B_1),\end{cases}$$

and

$$\|(g-e,k)\|_{\mathcal{X}^{s,\delta}_b(\Omega_{int})}\lesssim\varepsilon. \quad (2.14)$$

证明。令 χ 为一个截断函数，满足

$$\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{in } C_{\omega,\theta_0}\cup B_{\frac{1}{2}},\\ 0 & \text{in } \mathbb{R}^3\backslash(C_{\omega,\theta}\cup B_1).\end{cases}$$

令 $(h_0,\ \pi_0)$ 与 $(g_0,\ k_0)$ 通过 (2.1) 相关联。我们旨在求得 $(\widetilde{h},\ \widetilde{\pi})\in\mathcal{X}^{s,\ \delta}_{b}(\Omega_{int})$，使得以下关系成立：

$$P(\chi h_0+\widetilde{h},\chi\pi_0+\widetilde{\pi})=\Phi(\chi h_0+\widetilde{h},\chi\pi_0+\widetilde{\pi}). \tag{2.15}$$

令 $C_0>0$ 为一个固定常数，我们定义如下空间

$$\mathcal{X}:=\left\{(\widetilde{h},\widetilde{\pi})\in\mathcal{X}^{s,\delta}_{b}(\Omega_{int})\Big/\ \|(\widetilde{h},\widetilde{\pi})\|_{\mathcal{X}^{s,\delta}_{b}(\Omega_{int})}\leqslant C_0\varepsilon\right\},$$

以及定义在 $\mathcal{X}$ 上的如下算子：

$$T(\widetilde{h},\widetilde{\pi}):=S_{int}\left(\Phi(\chi h_0+\widetilde{h},\chi\pi_0+\widetilde{\pi})-P(\chi h_0,\chi\pi_0)\right).$$

因此，(2.15) 化为以下不动点问题：

$$(\widetilde{h},\widetilde{\pi})=T(\widetilde{h},\widetilde{\pi}). \tag{2.16}$$

~对于任意 $(h,\ \widetilde{\pi})\in\mathcal{X}$，由 (2.13) 可得

$$\|P(\chi h_0,\chi\pi_0)\|_{H^{s-2,\delta+2}_{b}(\Omega_{int})}\leqslant C\varepsilon,\qquad \|\Phi(\chi h_0+\widetilde{h},\chi\pi_0+\widetilde{\pi})\|_{H^{s-2,\delta+2}_{b}(\Omega_{int})}\lesssim\varepsilon^2,$$

其中 $C>0$ 与 C_0无关。应用命题 2.2，我们推得

$$\left\|S_{int}\left(\Phi(\chi h_0+\widetilde{h},\chi\pi_0+\widetilde{\pi})-P(\chi h_0,\chi\pi_0)\right)\right\|_{\mathcal{X}^{s,\delta}_{b}(\Omega_{int})}\leqslant C\varepsilon.$$

Thus，对于 C_0足够大，使得 $T(\mathcal{X})\subseteq\mathcal{X}$。接下来，根据命题2.2

$$\begin{aligned}\|T(h_1,\pi_1)-T(h_2,\pi_2)\|_{\mathcal{X}^{s,\delta}_{b}(\Omega_{int})}&=\|S_{int}\left(\Phi(\chi h_0+h_1,\chi\pi_0+\pi_1)-\Phi(\chi h_0+h_2,\chi\pi_0+\pi_2)\right)\|_{\mathcal{X}^{s,\delta}_{b}(\Omega_{int})}\\&\lesssim\|\Phi(\chi h_0+h_1,\chi\pi_0+\pi_1)-\Phi(\chi h_0+h_2,\chi\pi_0+\pi_2)\|_{H^{s-2,\delta+2}_{b}(\Omega_{int})}\\&\lesssim\varepsilon\,\|(h_1-h_2,\pi_1-\pi_2)\|_{\mathcal{X}^{s,\delta}_{b}(\Omega_{int})}.\end{aligned}$$

因此，T 是 $\mathcal{X}$上的压缩映射。根据巴拿赫不动点定理，存在唯一的$(h_*,\ \widetilde{\pi}_*)\in\mathcal{X}$使得（2.16）成立。我们定义

$$(h,\pi)=\begin{cases}(h_0,\pi_0), & \text{in } C_{\omega,\theta_0}\cup B_{\frac{1}{2}},\\ (\chi h_0+\widetilde{h}_*,\chi\pi_0+\widetilde{\pi}_*), & \text{in } \Omega_{int},\\ (0,0), & \text{in } \mathbb{R}^3\backslash(C_{\omega,\theta}\cup B_1).\end{cases}$$

令 $(g,\ k)$ 由 $(h,\ \pi)$ 通过（2.2）定义。由于（2.14）直接由构造得到，证明至此完成。

□

3 Kerr 初始数据的局部化 ADM 荷

In 在 Kerr-Schild 坐标 $(t,\ x,\ y,\ z)$中，克尔度规 $\mathbf{g}=\mathbf{g}_{m,\ a}$具有以下形式 :

$$\mathbf{g}_{\mu\nu}=\boldsymbol{\eta}_{\mu\nu}+2H\boldsymbol{\ell}_\mu\boldsymbol{\ell}_\nu, \tag{3.1}$$

其中 $\boldsymbol{\eta}$ 是闵可夫斯基度量。下文所用的一般 Kerr-Schild 恒等式及相关的 ADM 分解列于附录 A。更具体地说，Kerr 系数为 [2]

$$H = \frac{m\widetilde{r}^3}{\widetilde{r}^4 + a^2 z^2}, \qquad \boldsymbol{\ell} := \left(1, \frac{\widetilde{r}x + ay}{\widetilde{r}^2 + a^2}, \frac{\widetilde{r}y - ax}{\widetilde{r}^2 + a^2}, \frac{z}{\widetilde{r}}\right), \tag{3.2}$$

其中 $\widetilde{r} = \widetilde{r}(x, y, z) > 0$ 由下式隐式定义

$$\frac{x^2 + y^2}{\widetilde{r}^2 + a^2} + \frac{z^2}{\widetilde{r}^2} = 1. \tag{3.3}$$

定义 3.1. 对于张量场 X，记 $X = \mathbf{O}^p_q$，若

$$|\partial^l X| \lesssim \frac{(m + |a|)^p}{r^{q+l}}, \qquad \forall\, l \in \mathbb{N},$$

其中 $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 是欧几里得半径。

本节旨在计算由 $\mathbf{g}_{m,a}$ 在 $\Sigma_0 := \{t = 0\}$上诱导的初始数据的局部化 ADM 荷。这些局部化通量刻画了 Kerr 的狭义相对论荷主导项，同时精确控制低阶误差项；这对于描述它们在第 4 节的渐近庞加莱变换下的行为至关重要。

命题 3.2. 设 $(\Sigma_0, g, k) = (\mathbb{R}^3, g_{m,a}, k_{m,a})$ 为由 $\mathbf{g}_{m,a}$ 在 Σ_0上诱导的初始数据。那么，坐标球面 $\partial B_r \subset \Sigma_0$ 上的 *ADM* 通量满足

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(g,k); \partial B_r] &= 8\pi m + \mathbf{O}^3_2, & \mathbf{P}[(g,k); \partial B_r] &= \mathbf{O}^3_2, \\ \mathbf{C}[(g,k); \partial B_r] &= \mathbf{O}^3_1, & \mathbf{J}[(g,k); \partial B_r] &= 8\pi a m\, \mathbf{e}_z + \mathbf{O}^3_1. \end{aligned}$$

特别是，主导项与质量为 m 、自旋为 $am\mathbf{e}_z$的自旋粒子的狭义相对论能量和角动量一致，而其余量则按预期速率衰减。

3.1 局部化的 ADM 能量与质量中心

我们首先计算偶宇称荷（$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{C}$），它们仅取决于度量的渐近行为。在计算局部化的 $\mathbf{E}[(g,\ k); \partial B_r]$ 和 $\mathbf{C}[(g,\ k); \partial B_r]$之前，我们先推导以下基本恒等式，它们将在本节中反复使用。

引理 3.3. 设 $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 为欧几里得半径，$\alpha := (1 + 2H)^{-\frac{1}{2}}$ 为臂长函数。则有以下恒等式：

$$\begin{aligned} H &= \frac{m}{r}(1 + \mathbf{O}^2_2), & \boldsymbol{\ell}_i \partial_i H &= -\frac{m}{r^2} + \mathbf{O}^3_4, & \frac{x_j}{r}\partial_j H &= -\frac{m}{r^2} + \mathbf{O}^3_4, \\ \frac{x_j \boldsymbol{\ell}_j}{r} &= 1 + \mathbf{O}^2_2, & \partial_i \boldsymbol{\ell}_i &= \frac{2}{r} + \mathbf{O}^2_3, & \boldsymbol{\ell}_i \partial_i \boldsymbol{\ell}_j \frac{x_j}{r} &= \mathbf{O}^2_3, \\ \alpha &= 1 - \frac{m}{r} + \mathbf{O}^2_2. \end{aligned}$$

证明。 见附录B.1。 □

命题 3.4. 对于 $(\Sigma_0, g, k) = (\mathbb{R}^3, g_{m,\ a}, k_{m,\ a})$，有以下恒等式：

$$\mathbf{E}[(g,k); \partial B_r] = 8\pi m + \mathbf{O}^3_2, \qquad \mathbf{C}[(g,k); \partial B_r] = \mathbf{O}^3_1.$$

[2]例如，请参见 [10, 第 2 节1] 或 [26, 附录 A]。

证明。 我们首先展开 ADM能量的被积函数 $\mathfrak{e} := (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii})\nu^j$

$$\begin{aligned}\mathfrak{e} &= \big(\partial_i(2H\boldsymbol{\ell}_i\boldsymbol{\ell}_j) - \partial_j(2H\boldsymbol{\ell}_i\boldsymbol{\ell}_i)\big)\frac{x_j}{r} \\ &= 2(\boldsymbol{\ell}_i\partial_i H)\frac{x_j\boldsymbol{\ell}_j}{r} + 2H(\partial_i\boldsymbol{\ell}_i)\frac{x_j\boldsymbol{\ell}_j}{r} + 2H(\boldsymbol{\ell}_i\partial_i\boldsymbol{\ell}_j)\frac{x_j}{r} - 2\partial_j H\frac{x_j}{r},\end{aligned}$$

这里用到了以下事实： $\sum_{i=1}^3 \boldsymbol{\ell}_i^2 = 1$。 应用引理 3.3，得到

$$\mathfrak{e} = \left[-\frac{2m}{r^2} + \mathbf{O}_4^3\right](1+\mathbf{O}_2^2) + \frac{2m}{r}\left[\frac{2}{r} + \mathbf{O}_3^2\right](1+\mathbf{O}_2^2) + \frac{2m}{r^2} + \mathbf{O}_4^3 = \frac{4m}{r^2} + \mathbf{O}_4^3. \tag{3.4}$$

在 ∂B_r 上对其积分，得

$$\mathbf{E}[(g,k);\partial B_r] = \frac{1}{2}\int_{\partial B_r} \mathfrak{e} dS = 8\pi m + \mathbf{O}_2^3.$$

接下来，我们写出 ADM质心 $\mathfrak{c}_l$ 的被积函数

$$\mathfrak{c}_l := \left(x_l\partial_i g_{ij} - x_l\partial_j g_{ii} - \delta_{il}(g-e)_{ij} + \delta_{jl}(g-e)_{ii}\right)\nu^j = x_l\mathfrak{e} - 2H\boldsymbol{\ell}_l\boldsymbol{\ell}_j\frac{x_j}{r} + 2H\frac{x_l}{r}.$$

回顾引理3.3 和 （3.4）

$$H = \frac{m}{r}(1+\mathbf{O}_2^2), \qquad \boldsymbol{\ell}_j\frac{x_j}{r} = 1 + \mathbf{O}_2^2, \qquad \mathfrak{e} = \frac{4m}{r^2}(1+\mathbf{O}_2^2).$$

因此，得到

$$\mathfrak{c}_l = \frac{4mx_l}{r^2}(1+\mathbf{O}_2^2) - \frac{2m\boldsymbol{\ell}_l}{r}(1+\mathbf{O}_2^2) + \frac{2mx_l}{r^2}(1+\mathbf{O}_2^2) = \left[\frac{6mx_l}{r^2} - \frac{2m\boldsymbol{\ell}_l}{r}\right](1+\mathbf{O}_2^2).$$

取 $l=1$，2、3并应用（B.1），可推得

$$\mathfrak{c}_1 = \left[\frac{4mx}{r^2} - \frac{2amy}{r^3}\right](1+\mathbf{O}_2^2), \qquad \mathfrak{c}_2 = \left[\frac{4my}{r^2} + \frac{2amx}{r^3}\right](1+\mathbf{O}_2^2), \qquad \mathfrak{c}_3 = \frac{4mz}{r^2}(1+\mathbf{O}_2^2).$$

在 $\mathfrak{c}_l$ 上对 ∂B_r积分，我们可得

$$\mathbf{C}_l[(g,k);\partial B_r] = \frac{1}{2}\int_{\partial B_r}\mathfrak{c}_l dS = \mathbf{O}_1^3.$$

至此， 命题 3.4的证明完成。 □

3.2 局部化ADM动量和角动量

接下来，我们计算奇宇称荷（$\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{J}$），它们本质上取决于第二基本形式。在计算局部化通量 $\mathbf{P}[(g,k);\ \partial B_r]$ 和 $\mathbf{J}[(g,\ k);\ \partial B_r]$之前，我们先记录两个辅助引理。其证明推迟至附录 B.2和 B.3。

引理 3.5。 我们有以下表达式：

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}k_{ij} &= 2H\boldsymbol{\ell}_l\partial_l(H\boldsymbol{\ell}_i\boldsymbol{\ell}_j) + \partial_j(H\boldsymbol{\ell}_i) + \partial_i(H\boldsymbol{\ell}_j), \\ \alpha^{-1}\operatorname{tr}_e k &= 2(1+H)\boldsymbol{\ell}_l\partial_l H + 2H\partial_l\boldsymbol{\ell}_l.\end{aligned}$$

引理 3.6. 对于 $j=1,2,3$，我们有以下恒等式：

$$\boldsymbol{\ell}_i\partial_i\boldsymbol{\ell}_j = \mathbf{O}_3^2, \qquad \frac{x_i}{r}\partial_i\boldsymbol{\ell}_1 = -\frac{ay}{r^3} + \mathbf{O}_3^2, \qquad \frac{x_i}{r}\partial_i\boldsymbol{\ell}_2 = \frac{ax}{r^3} + \mathbf{O}_3^2, \qquad \frac{x_i}{r}\partial_i\boldsymbol{\ell}_3 = \mathbf{O}_3^2.$$

命题 3.7. 对于 $(\Sigma_0, g, k) = (\mathbb{R}^3, g_{m,a}, k_{m,a})$，我们有以下恒等式：

$$\mathbf{P}[(g,k);\partial B_r] = \mathbf{O}_2^3, \qquad \mathbf{J}[(g,k);\partial B_r] = 8\pi am\mathbf{e}_z + \mathbf{O}_1^3.$$

证明。由引理 3.5

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}k_{ij}\nu^j &= 2H\boldsymbol{\ell}_l\partial_l(H\boldsymbol{\ell}_i\boldsymbol{\ell}_j)\frac{x_j}{r} + \partial_j(H\boldsymbol{\ell}_i)\frac{x_j}{r} + \partial_i(H\boldsymbol{\ell}_j)\frac{x_j}{r}\\ &= \frac{2H}{r}\boldsymbol{\ell}_l\partial_l(H\boldsymbol{\ell}_j x_j\boldsymbol{\ell}_i) - \frac{2H^2}{r}\boldsymbol{\ell}_i + \frac{x_j\boldsymbol{\ell}_i}{r}\partial_j H + H\left(\frac{x_j}{r}\partial_j\boldsymbol{\ell}_i\right) + \frac{1}{r}\partial_i(H\boldsymbol{\ell}_j x_j) - \frac{H\boldsymbol{\ell}_i}{r}\\ &= \frac{2H}{r}\boldsymbol{\ell}_l\partial_l(H\boldsymbol{\ell}_j x_j\boldsymbol{\ell}_i) + \left(-\frac{2H^2}{r} - \frac{H}{r} + \frac{x_j}{r}\partial_j H\right)\boldsymbol{\ell}_i + H\left(\frac{x_j}{r}\partial_j\boldsymbol{\ell}_i\right) + \frac{1}{r}\partial_i(H\boldsymbol{\ell}_j x_j).\end{aligned}$$

接下来，利用引理 3.3 和 3.6

$$\begin{aligned}\frac{2H}{r}\boldsymbol{\ell}_l\partial_l(H\boldsymbol{\ell}_j x_j\boldsymbol{\ell}_i) &= \frac{2m}{r^2}(1+\mathbf{O}_2^2)\boldsymbol{\ell}_l\partial_l\left(m\boldsymbol{\ell}_i(1+\mathbf{O}_2^2)\right) = \frac{2m^2}{r^2}(1+\mathbf{O}_2^2)\boldsymbol{\ell}_l\partial_l\boldsymbol{\ell}_i + \mathbf{O}_5^4 = \mathbf{O}_5^4,\\ -\frac{2H^2}{r} - \frac{H}{r} + \frac{x_j}{r}\partial_j H &= -\left(\frac{2m^2}{r^3} + \frac{2m}{r^2}\right)(1+\mathbf{O}_2^2) = -\frac{2m}{r^2} - \frac{2m^2}{r^3} + \mathbf{O}_4^3,\\ \frac{1}{r}\partial_i(H\boldsymbol{\ell}_j x_j) &= \frac{m}{r}\partial_i(1+\mathbf{O}_2^2) = \mathbf{O}_4^3.\end{aligned}$$

因此，我们推得

$$\frac{1}{\alpha}k_{ij}\nu^j = \left(-\frac{2m}{r^2} - \frac{2m^2}{r^3}\right)\boldsymbol{\ell}_i + H\left(\frac{x_j}{r}\partial_j\boldsymbol{\ell}_i\right) + \mathbf{O}_4^3.$$

由引理3.5

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\operatorname{tr}_e k &= 2(1+H)\boldsymbol{\ell}_l\partial_l H + 2H\partial_l\boldsymbol{\ell}_l\\ &= 2\left(1+\frac{m}{r}+\mathbf{O}_3^3\right)\left(-\frac{m}{r^2}+\mathbf{O}_4^3\right) + \left(\frac{2m}{r}+\mathbf{O}_3^3\right)\left(\frac{2}{r}+\mathbf{O}_3^2\right)\\ &= \frac{2m}{r^2} - \frac{2m^2}{r^3} + \mathbf{O}_4^3.\end{aligned}$$

将$\mathbf{P}_i$的被积函数记为 $\mathfrak{p}_i := (k_{ij} - \delta_{ij}\operatorname{tr}_e k)\nu^j$，则得到

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}\mathfrak{p}_i &= \alpha^{-1}k_{ij}\nu^j - \alpha^{-1}\frac{x_i}{r}\operatorname{tr}_e k\\ &= \left(-\frac{2m}{r^2} - \frac{2m^2}{r^3}\right)\boldsymbol{\ell}_i + H\left(\frac{x_j}{r}\partial_j\boldsymbol{\ell}_i\right) - \frac{x_i}{r}\left(\frac{2m}{r^2} - \frac{2m^2}{r^3}\right) + \mathbf{O}_4^3\\ &= \left(-\frac{2m}{r^2} - \frac{2m^2}{r^3}\right)\boldsymbol{\ell}_i - \frac{2mx_i}{r^3} + \frac{2m^2x_i}{r^4} + \frac{mx_j}{r^2}\partial_j\boldsymbol{\ell}_i + \mathbf{O}_4^3.\end{aligned}$$

应用（B.1）和引理3.6，我们可推得

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}\mathfrak{p}_1 &= \left(-\frac{2m}{r^2} - \frac{2m^2}{r^3}\right)\left(\frac{x}{r} + \frac{ay}{r^2}\right) - \frac{2mx}{r^3} + \frac{2m^2x}{r^4} - \frac{may}{r^4} + \mathbf{O}_4^3,\\ &= -\frac{4mx}{r^3} - \frac{3may}{r^4} + \mathbf{O}_4^3.\end{aligned}$$

同理，我们有

$$\alpha^{-1}\mathfrak{p}_2 = -\frac{4my}{r^3} + \frac{3max}{r^4} + \mathbf{O}_4^3, \qquad \alpha^{-1}\mathfrak{p}_3 = -\frac{4mz}{r^3} + \mathbf{O}_4^3.$$

结合 $\alpha = 1 - \frac{m}{r} + \mathbf{O}_2^2$，这一事实，我们推得

$$\mathfrak{p}_1 = -\frac{4mx}{r^3} + \frac{4m^2x}{r^4} - \frac{3amy}{r^4} + \mathbf{O}_4^3, \qquad \mathfrak{p}_2 = -\frac{4my}{r^3} + \frac{4m^2y}{r^4} + \frac{3amx}{r^4} + \mathbf{O}_4^3,$$
$$\mathfrak{p}_3 = -\frac{4mz}{r^3} + \frac{4m^2z}{r^4} + \mathbf{O}_4^3.$$

在 ∂B_r 上对其积分，我们对 $i = 1$，2、3 得出

$$\mathbf{P}_i[(g,k);\partial B_r] = \int_{\partial B_r} \mathfrak{p}_i \, dS = \mathbf{O}_2^3.$$

接下来，将 $\mathbf{J}_l$ 的被积函数记为 $\mathfrak{j}_l := \mathfrak{p}_i Y_l^i$，我们有

$$\mathfrak{j}_1 = \mathfrak{p}_3 x_2 - \mathfrak{p}_2 x_3 = -\frac{3amxz}{r^4} + \mathbf{O}_3^3, \qquad \mathfrak{j}_2 = \mathfrak{p}_1 x_3 - \mathfrak{p}_3 x_1 = -\frac{3amyz}{r^4} + \mathbf{O}_3^3,$$
$$\mathfrak{j}_3 = \mathfrak{p}_2 x_1 - \mathfrak{p}_1 x_2 = \frac{3am(x^2+y^2)}{r^4} + \mathbf{O}_3^3.$$

在 ∂B_r 上从

$$\int_{\partial B_r} \frac{xz}{r^4} dS = 0, \qquad \int_{\partial B_r} \frac{yz}{r^4} dS = 0, \qquad \int_{\partial B_r} \frac{x^2+y^2}{r^4} dS = \frac{8\pi}{3},$$

我们得到

$$\mathbf{J}_1[(g,k);\partial B_r] = \int_{\partial B_r} \mathfrak{j}_1 dS = \mathbf{O}_1^3, \qquad \mathbf{J}_2[(g,k);\partial B_r] = \int_{\partial B_r} \mathfrak{j}_2 dS = \mathbf{O}_1^3,$$
$$\mathbf{J}_3[(g,k);\partial B_r] = \int_{\partial B_r} \mathfrak{j}_3 dS = 8\pi am + \mathbf{O}_1^3.$$

这就完成了命题3.7的证明。 □

结合命题3.4 和 3.7，这就完成了命题 3.2的证明。命题 3.2 中的这些显式公式以一种可直接与狭义相对论能量-动量和角动量相比较的形式，确定了 Kerr 的主导 ADM 荷，并将在下一节中用于描述它们在渐近庞加莱微分同胚下的变换。

4 庞加莱变换下的克尔时空

爱因斯坦真空方程具有微分同胚不变性；在渐近平坦情形下，渐近对称群可以视为正时向庞加莱群。本节通过显式坐标变换实现庞加莱群对克尔时空的诱导作用，并确定克尔-希尔德坐标下克尔初始数据所形成的轨道。

在局部化通量层面，这种作用与精确的狭义相对论变换定律一致，误差仅为低阶项。我们利用有限半径荷泛函来把握这种分离；这些泛函既能体现庞加莱协变性，也能捕捉其余项的衰减。

4.1 线性化爱因斯坦真空方程的荷

令 $(\mathcal{M}, \boldsymbol{\eta})$ 为闵可夫斯基时空，并令 $\dot{\mathbf{g}} = \mathbf{g} - \boldsymbol{\eta}$ 为$\mathcal{M}$上的光滑对称二阶张量。我们引入

$$\dot{\mathbf{H}}_{\alpha\beta} := \dot{\mathbf{g}}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}_{\alpha\beta} \operatorname{tr}_{\boldsymbol{\eta}} \dot{\mathbf{g}}.$$

The 爱因斯坦张量的线性化 $\mathbf{G}_{\mu\nu}[\mathbf{g}] = \mathbf{Ric}_{\mu\nu}[\mathbf{g}] - \frac{1}{2}\mathbf{R}[\mathbf{g}]\mathbf{g}^{\mu\nu}$在 $\boldsymbol{\eta}$处由下式给出

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{G}[\dot{\mathbf{g}}]_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\Big(- \nabla^{\gamma}\nabla_{\gamma}\dot{\mathbf{H}}_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha}\nabla^{\gamma}\dot{\mathbf{H}}_{\gamma\beta} + \nabla_{\beta}\nabla^{\gamma}\dot{\mathbf{H}}_{\gamma\alpha} - \boldsymbol{\eta}_{\alpha\beta}\nabla^{\gamma}\nabla^{\delta}\dot{\mathbf{H}}_{\gamma\delta}\Big). \tag{4.1}$$

设$\mathbf{X}$ 是 $(\mathcal{M}, \boldsymbol{\eta})$的一个Killing向量场。由 $\dot{\mathbf{g}}$ 和$\mathbf{X}$，我们定义2-形式

$$\begin{aligned}{}^{(\mathbf{X})}\mathbb{U}_{\alpha\beta}[\dot{\mathbf{g}}] := \frac{1}{2}\Big[&(-\nabla_{\alpha}\mathbf{H}_{\gamma\beta} + \nabla_{\beta}\mathbf{H}_{\gamma\alpha} + \boldsymbol{\eta}_{\gamma\alpha}\nabla^{\delta}\mathbf{H}_{\beta\delta} - \boldsymbol{\eta}_{\gamma\beta}\nabla^{\delta}\mathbf{H}_{\alpha\delta})\mathbf{X}^{\gamma} \\ &+ \mathbf{H}_{\gamma\alpha}\nabla^{\gamma}\mathbf{X}_{\beta} - \mathbf{H}_{\gamma\beta}\nabla^{\gamma}\mathbf{X}_{\alpha}\Big].\end{aligned} \tag{4.2}$$

直接计算可得

$$\nabla^{\alpha}\big({}^{(\mathbf{X})}\mathbb{U}_{\alpha\beta}[\dot{\mathbf{g}}]\big) = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{G}[\dot{\mathbf{g}}]_{\alpha\beta}\mathbf{X}^{\alpha}.$$

因此，对于任意边界为 $\partial\Omega$的区域 $\Omega \subset \mathcal{M}$ ，

$$\int_{\partial\Omega} \star\,{}^{(\mathbf{X})}\mathbb{U}[\dot{\mathbf{g}}] = \int_{\Omega} d\big(\star\,{}^{(\mathbf{X})}\mathbb{U}[\dot{\mathbf{g}}]\big) = -\int_{\Omega} \star\mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{G}[\dot{\mathbf{g}}](\mathbf{X}, \cdot), \tag{4.3}$$

其中 $\star$ 表示 $\boldsymbol{\eta}$的霍奇算子。设 $\Sigma = \{t = 0\}$ 是典范坐标 (t, x^i)中的一个类空超曲面，并设 $S \subset \Sigma$ 是一个闭合2-曲面。对于 $(\mathcal{M}, \boldsymbol{\eta})$的任意Killing向量场$\mathbf{X}$ ，我们定义线性化荷泛函

$$\mathbb{Q}[\dot{\mathbf{g}}; \mathbf{X}; S] := \int_{S} \star\,{}^{(\mathbf{X})}\mathbb{U}[\dot{\mathbf{g}}]. \tag{4.4}$$

特别地，给定一个时空 $(\mathcal{M},\mathbf{g})$ ，其在 Σ上的诱导数据为 (g, k) ，我们定义线性化能量-动量荷和角动量荷如下

$$\mathbb{P}_{\mu}[\dot{\mathbf{g}}; S] := \mathbb{Q}[\dot{\mathbf{g}}; \partial_{x^{\mu}}; S], \qquad \mathbb{M}_{\mu\nu}[\dot{\mathbf{g}}; S] := \mathbb{Q}[\dot{\mathbf{g}}; x_{\mu}\partial_{x^{\nu}} - x_{\nu}\partial_{x^{\mu}}; S]. \tag{4.5}$$

这些荷与相应的ADM通量一致:

$$(\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_i, \mathbb{M}_{0i}, \mathbb{M}_{ij})[\dot{\mathbf{g}}; S] = \big(\mathbf{E}, \mathbf{P}_i, \mathbf{C}_i, \epsilon^{l}{}_{ij}\mathbf{J}_l\big)[(g, k); S]. \tag{4.6}$$

上述内容是标准结果；例如，参见 [26]**的第2.5节**。最后，我们说明这些荷在庞加莱变换下的行为。设$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{m,\ a}$ 为克尔度规，并考虑变换

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + \xi^{\mu}. \tag{4.7}$$

对于 $r > 0$，记

$$S_r := \{t = 0\} \cap \{|x| = r\}, \qquad S'_r := \{t' = 0\} \cap \{|x'| = r\}.$$

则诱导的荷满足

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mu}[\dot{\mathbf{g}}; S'_r] &= \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\mathbb{P}_{\nu}[\dot{\mathbf{g}}; S_r] + O(r^{-1}), \\ \mathbb{M}_{\mu\nu}[\dot{\mathbf{g}}; S'_r] &= \Lambda_{\mu}{}^{\alpha}\Lambda_{\nu}{}^{\beta}\mathbb{M}_{\alpha\beta}[\dot{\mathbf{g}}; S_r] + (\xi_{\mu}\Lambda_{\nu}{}^{\alpha} - \xi_{\nu}\Lambda_{\mu}{}^{\alpha})\mathbb{P}_{\alpha}[\dot{\mathbf{g}}; S_r] + O(r^{-1}),\end{aligned} \tag{4.8}$$

其中 $\Lambda_{\mu}{}^{\nu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}$。庞加莱变换定律（4.8）可通过在 $\alpha = 1$ 和 $n = 3$中取 [11, Chruściel-Delay 的命题 E1] 得到。

4.2 庞加莱变换下的 Kerr 时空

受（4.6）启发，我们将领阶 ADM 荷 $(\mathbf{E}、\mathbf{P}、\mathbf{C}、\mathbf{J})$ 编码为一对 $(\mathbb{P},\ \mathbb{M})$使其在渐近庞加莱微分同胚下协变变换，从而将精确的狭义相对论变换与低阶修正区分开来。这种打包方式便于描述庞加莱作用及其在 Kerr 初始数据上的轨道。

定义 4.1. *A*状态是由以下一对量

$$(\mathbb{P},\mathbb{M}) \in \mathbb{R}^{1+3} \times \bigwedge^{2} \mathbb{R}^{1+3},$$

由荷 $(\mathbf{E}、\mathbf{P}、\mathbf{C}、\mathbf{J}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 编码：

$$\mathbb{P}_0 = \mathbf{E}, \qquad \mathbb{P}_i = \mathbf{P}_i, \qquad \mathbb{M}_{0i} = \mathbf{C}_i, \qquad \mathbb{M}_{ij} = \epsilon^{ijk}\,\mathbf{J}_k.$$

与 $(\mathbb{P},\mathbb{M})$ 相关联的泡利-卢巴anski向量定义为

$$\mathbb{W}^{\mu} := \frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathbb{P}_{\nu}\mathbb{M}_{\rho\sigma}, \qquad \epsilon^{0123} = 1. \tag{4.9}$$

引理 4.2. 对于由 $(\mathbf{E}、\mathbf{P}、\mathbf{C}、\mathbf{J})$确定的任意状态 $(\mathbb{P},\mathbb{M})$，泡利–卢巴*ński*矢量 $\mathbb{W}^{\mu} = (\mathbb{W}^0, \mathbf{W})$ 满足

$$\mathbb{W}^0 = \mathbf{P}_i\,\mathbf{J}_i, \qquad \mathbf{W}_i = -\mathbf{E}\,\mathbf{J}_i + \varepsilon_{ijk}\mathbf{P}_j\mathbf{C}_k, \qquad \mathbb{W}_{\mu}\mathbb{P}^{\mu} = 0.$$

证明。 由（4.9），可得

$$\mathbb{W}^0 = \frac{1}{2}\,\epsilon^{0\nu\rho\sigma}\,\mathbb{P}_{\nu}\mathbb{M}_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\,\epsilon^{0ijk}\,\mathbb{P}_i\mathbb{M}_{jk} = \frac{1}{2}\,\epsilon^{ijk}\,\mathbf{P}_i\,\epsilon_{jk\ell}\,\mathbf{J}_{\ell} = \delta^i_{\ell}\mathbf{P}_i\mathbf{J}_{\ell} = \mathbf{P}_i\mathbf{J}_i,$$

其中我们使用了 $\epsilon^{ijk}\epsilon_{jk\ell} = 2\delta^i_{\ell}$。接下来，对于 $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{W}^i &= \frac{1}{2}\,\epsilon^{i\nu\rho\sigma}\,\mathbb{P}_{\nu}\mathbb{M}_{\rho\sigma} \\
&= \frac{1}{2}\left(\epsilon^{i0jk}\,\mathbb{P}_0\mathbb{M}_{jk} + \epsilon^{ij0k}\,\mathbb{P}_j\mathbb{M}_{0k} + \epsilon^{ijk0}\,\mathbb{P}_j\mathbb{M}_{k0}\right) \\
&= -\frac{\mathbf{E}}{2}\,\epsilon^{ijk}\epsilon_{jk\ell}\,\mathbf{J}_{\ell} + \frac{1}{2}\,\epsilon^{ijk}\,\mathbf{P}_j\mathbf{C}_k + \frac{1}{2}\,\epsilon^{ijk}\,\mathbf{P}_j\mathbf{C}_k \\
&= -\mathbf{E}\,\mathbf{J}^i + \epsilon^{ijk}\,\mathbf{P}_j\mathbf{C}_k.
\end{aligned}$$

最后，我们计算

$$\mathbb{P}_{\mu}\mathbb{W}^{\mu} = \mathbf{E}\,\mathbb{W}^0 + \mathbf{P}_i\mathbf{W}_i = \mathbf{E}(\mathbf{P}_i\,\mathbf{J}_i) + \mathbf{P}_i(-\mathbf{E}\,\mathbf{J}_i + \epsilon_{ijk}\,\mathbf{P}_j\mathbf{C}_k) = 0.$$

这就完成了引理 4.2的证明。 □

定义 4.3。 正时向洛伦兹群定义为

$$\mathrm{SO}^+(1,3) := \{\Lambda \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{R}) \mid \Lambda^{\top}\boldsymbol{\eta}\Lambda = \boldsymbol{\eta},\ \Lambda^0{}_0 > 0\}.$$

正时向庞加莱群是半直积

$$\mathrm{ISO}^+(1,3) := \mathbb{R}^{1+3} \rtimes \mathrm{SO}^+(1,3),$$

$\mathrm{ISO}^+(1、\ 3)$ 是形如 $(\xi、\ \Lambda)$ 的有序对，其中

$$\xi \in \mathbb{R}^{1+3}, \qquad \Lambda \in \mathrm{SO}^+(1,3),$$

群乘法定义为

$$(\xi,\Lambda)\cdot(\eta,\Gamma)=(\xi+\Lambda\eta,\ \Lambda\Gamma).$$

(ξ,Λ) 的逆元为

$$(\xi,\Lambda)^{-1}=(-\Lambda^{-1}\xi,\ \Lambda^{-1}).$$

$(\xi,\Lambda)\in\mathrm{ISO}^+(1,3)$ 在时空 $\mathbb{R}^{1+3}$ 上的作用定义为

$$x\mapsto\Lambda x+\xi.$$

我们引入$\mathrm{ISO}^+(1,3)$ 在 $\mathbb{R}^{1+3}\times\bigwedge^2\mathbb{R}^{1+3}$.[3]上的如下表示

$$(\xi,\Lambda)\cdot(\mathbb{P},\mathbb{M}):=\Big(\Lambda_\mu{}^\nu\mathbb{P}_\nu,\ \Lambda_\mu{}^\alpha\Lambda_\nu{}^\beta\mathbb{M}_{\alpha\beta}+(\xi_\mu\Lambda_\nu{}^\alpha-\xi_\nu\Lambda_\mu{}^\alpha)\mathbb{P}_\alpha\Big). \tag{4.10}$$

现在证明以下引理，该引理确定了两个不变量。

引理 4.4。 设 $(\xi,\Lambda)\in\mathrm{ISO}^+(1,3)$。定义 $(\mathbb{P}',\mathbb{M}'):=(\xi,\Lambda)\cdot(\mathbb{P},\mathbb{M})$，并令 $\mathbb{W}'=\mathbb{W}'(\mathbb{P}',\mathbb{M}')$ 为 $(\mathbb{P}',\mathbb{M}')$的泡利-卢巴*anski*向量，则两个卡西米尔不变量为

$$\mathbb{P}'_\mu\mathbb{P}'^\mu=\mathbb{P}_\mu\mathbb{P}^\mu,\qquad \mathbb{W}'_\mu\mathbb{W}'^\mu=\mathbb{W}_\mu\mathbb{W}^\mu.$$

证明。 由（4.10），可得

$$\mathbb{P}'_\mu\mathbb{P}'^\mu=\boldsymbol{\eta}_{\mu\nu}\mathbb{P}'^\mu\mathbb{P}'^\nu=\boldsymbol{\eta}_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\mathbb{P}^\rho\mathbb{P}^\sigma=\boldsymbol{\eta}_{\rho\sigma}\mathbb{P}^\rho\mathbb{P}^\sigma=\mathbb{P}_\mu\mathbb{P}^\mu, \tag{4.11}$$

其中我们使用了 $\Lambda^\top\boldsymbol{\eta}\Lambda=\boldsymbol{\eta}$。接下来，根据定义 4.1 和（4.10）

$$\mathbb{W}'^\mu=\frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathbb{P}'_\nu\mathbb{M}'_{\rho\sigma}=\frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\Lambda_\nu{}^\alpha\mathbb{P}_\alpha\Lambda_\rho{}^\beta\Lambda_\sigma{}^\gamma\mathbb{M}_{\beta\gamma}+\frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,(\Lambda\mathbb{P})_\nu\big(\xi_\rho(\Lambda\mathbb{P})_\sigma-\xi_\sigma(\Lambda\mathbb{P})_\rho\big).$$

注意，以下恒等式成立:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,(\Lambda\mathbb{P})_\nu(\xi_\sigma(\Lambda\mathbb{P})_\rho-\xi_\rho(\Lambda\mathbb{P})_\sigma)=0,$$
$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\Lambda_\mu{}^\delta\Lambda_\nu{}^\alpha\Lambda_\rho{}^\beta\Lambda_\sigma{}^\gamma=\det(\Lambda)\,\epsilon^{\delta\alpha\beta\gamma}=\epsilon^{\delta\alpha\beta\gamma}\,.$$

因此，我们得到

$$\Lambda_\mu{}^\delta\mathbb{W}'^\mu=\frac{1}{2}\,\epsilon^{\delta\alpha\beta\gamma}\,\mathbb{P}_\alpha\mathbb{M}_{\beta\gamma}=\mathbb{W}^\delta,$$

这意味着 $\mathbb{W}'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu\mathbb{W}^\nu$。仿照（4.11）中的推导，我们得出 $\mathbb{W}'_\mu\mathbb{W}'^\mu=\mathbb{W}_\mu\mathbb{W}^\mu$。引理 4.4 的证明至此完成。 □

注 4.5。 李群 $\mathrm{ISO}^+(1,\ 3)$ 在 (4.10) 中定义的表示，通过在单位元处求导，诱导出李代数 $\mathfrak{iso}(1,3)$ 的一个表示：$=\mathbb{R}^{1+3}\rtimes\mathfrak{so}(1,\ 3)$:

$$(c,\Omega)\cdot(\mathbb{P},\mathbb{M})=\Big(\Omega_\mu{}^\alpha\mathbb{P}_\alpha,\ \Omega_\mu{}^\alpha\mathbb{M}_{\alpha\nu}+\Omega_\nu{}^\alpha\mathbb{M}_{\alpha\mu}+c_\mu\mathbb{P}_\nu-c_\nu\mathbb{P}_\mu\Big).$$

令 $U(\mathfrak{iso}(1,3))$ 表示 $\mathfrak{iso}(1,3)$ 的泛包络代数，并令 $Z(U(\mathfrak{iso}(1,3)))$ 为其中心。它同构于一个由两个代数独立的卡西米尔元生成的多项式代数，这两个元可表示为

$$\mathbb{P}_\mu\mathbb{P}^\mu\qquad and\qquad \mathbb{W}_\mu\mathbb{W}^\mu,$$

其中 $\mathbb{W}^\mu$ 是泡利–卢巴*ński*矢量，定义见 (4.9)。这些卡西米尔元素对应于 $\mathrm{ISO}^+(1,3)$–不变多项式函数，定义在 $\mathbb{R}^{1+3}\times\bigwedge^2\mathbb{R}^{1+3}$ 上，因此在每个庞加莱余伴随轨道上均为常数。

引理*4.4*通过作用 (4.10)直接验证了这一不变性，而命题*4.6*表明，在有质量自旋情形下，这两个不变量完全刻画了 $\mathrm{ISO}^+(1,3)$–轨道。关于这种余伴随轨道解释的物理学导向讨论，参见 *[3]*。

[3]Not可知，式 4.10中定义的表示与 余伴随表示 $\mathrm{ISO}^+(1,\ 3$).

命题 4.6. 设 $(\mathbb{P},\ \mathbb{M})$ 是由荷 $(\mathbf{E}$、$\mathbf{P}$、$\mathbf{C}$、$\mathbf{J})$所编码的状态。鉴于引理 4.4中的不变性，我们引入以下约束集：

$$\mathcal{R}_{\mathbb{P},\mathbb{M}}=\left\{(\mathbb{P}',\mathbb{M}')/\ \mathbb{P}'_0>0,\quad \mathbb{P}'_\mu\mathbb{P}'^\mu=\mathbb{P}_\mu\mathbb{P}^\mu,\quad \mathbb{W}'_\mu\mathbb{W}'^\mu=\mathbb{W}_\mu\mathbb{W}^\mu\right\}.$$

我们还将$\mathrm{Orb}_{\mathbb{P},\mathbb{M}}$表示为$\mathrm{ISO}^+(1,3)$– $(\mathbb{P},\mathbb{M})$ 在 $\mathbb{R}^{1+3}\times\bigwedge^2\mathbb{R}^{1+3}$中的轨道。于是，

$$\mathrm{Orb}_{\mathbb{P},\mathbb{M}}=\mathcal{R}_{\mathbb{P},\mathbb{M}}.$$

证明。 由引理4.4，我们有 $\mathrm{Orb}_{\mathbb{P},\mathbb{M}}\subseteq\mathcal{R}_{\mathbb{P},\mathbb{M}}$。现在证明反向包含，依次通过洛伦兹 boost、空间平移和空间旋转来完成。设 $(\mathbb{P}',\mathbb{M}')$ 为由荷 $(\mathbf{E}'$,$\mathbf{P}'$,$\mathbf{C}'$,$\mathbf{J}')$ 所编码的任意状态，满足

$$\mathbb{P}'_0>0,\qquad \mathbb{P}'_\mu\mathbb{P}'^\mu=\mathbb{P}_\mu\mathbb{P}^\mu,\qquad \mathbb{W}'_\mu\mathbb{W}'^\mu=\mathbb{W}_\mu\mathbb{W}^\mu.$$

洛伦兹 boost。我们首先定义

$$v_i:=\frac{\mathbf{P}'_i}{\mathbf{E}'},\qquad \gamma:=\frac{1}{\sqrt{1-|\vec{v}|^2}}=\frac{\mathbf{E}'}{\sqrt{\mathbf{E}'^2-|\mathbf{P}'|^2}}.$$

设 $B(\vec{v})$为由下列矩阵[4]定义的相应洛伦兹 boost

$$B(\vec{v}):=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\vec{v}^\top\\ -\gamma\vec{v} & I_3+(\gamma-1)\frac{\vec{v}\vec{v}^\top}{|\vec{v}|^2}\end{pmatrix}.$$

然后我们计算

$$\begin{aligned}B(\vec{v})\mathbb{P}'&=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\vec{v}^\top\\ -\gamma\vec{v} & I_3+(\gamma-1)\frac{\vec{v}\vec{v}^\top}{|\vec{v}|^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{E}'\\ \mathbf{P}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma(\mathbf{E}'-v^i\mathbf{P}'_i)\\ -\gamma\vec{v}\,\mathbf{E}'+\left(I_3+(\gamma-1)\frac{\vec{v}\vec{v}^\top}{|\vec{v}|^2}\right)\mathbf{P}'\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\gamma\frac{\mathbf{E}'^2-|\mathbf{P}'|^2}{\mathbf{E}'}\\ -\gamma\mathbf{P}'+\mathbf{P}'+(\gamma-1)\mathbf{P}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{\mathbf{E}'^2-|\mathbf{P}'|^2}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{-\mathbb{P}_\mu\mathbb{P}^\mu}\\ 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

记

$$(\mathbb{P}_B,\mathbb{M}_B):=(0,B(\vec{v}))\cdot(\mathbb{P}',\mathbb{M}'),$$

由引理 4.4可知

$$\mathbb{P}_B=(\sqrt{-\mathbb{P}_\mu\mathbb{P}^\mu},0,0,0),\qquad (\mathbb{W}_B)_\mu(\mathbb{W}_B)^\mu=\mathbb{W}_\mu\mathbb{W}^\mu.$$

空间平移。 记 $(\mathbf{E}_B,\ \mathbf{P}_B,\ \mathbf{C}_B,\ \mathbf{J}_B)$ 为状态 $(\mathbb{P}_B,\ \mathbb{M}_B)$的编码荷，我们引入以下平移：

$$\xi^\mu:=\left(0,\frac{\mathbf{C}_B}{\mathbf{E}_B}\right).$$

记 $(\mathbb{P}_T,\ \mathbb{M}_T):=(\xi,\ 0)\cdot(\mathbb{P}_B,\ \mathbb{M}_B)$，由（4.10）可知 $\mathbb{P}_T=\mathbb{P}_B$和

$$(\mathbb{M}_T)_{\mu\nu}=(\mathbb{M}_B)_{\mu\nu}+(\xi_\mu\delta_\nu{}^\alpha-\xi_\nu\delta_\mu{}^\alpha)(\mathbb{P}_B)_\alpha=(\mathbb{M}_B)_{\mu\nu}+(\xi^\mu\delta_\nu{}^0-\xi^\nu\delta_\mu{}^0)\mathbf{E}_B.$$

因此，我们推断

$$(\mathbb{M}_T)_{0i}=(\mathbf{C}_B)_i-\xi_i\mathbf{E}_B=0.$$

[4]这里，$\vec{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)^\top$ 是一个三维列向量，并且 $|\vec{v}|:=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$。

根据引理4.4， $(\mathbb{P}_T,\ \mathbb{M}_T)$ 满足：

$$\mathbb{P}_T = (\sqrt{-\mathbb{P}_\mu\mathbb{P}^\mu}, 0, 0, 0), \qquad (\mathbb{W}_T)_\mu(\mathbb{W}_T)^\mu = \mathbb{W}_\mu\mathbb{W}^\mu.$$

记 $(\mathbf{E}_T$、$\mathbf{P}_T$、$\mathbf{C}_T$、$\mathbf{J}_T)$ 为状态 $(\mathbb{P}_T, \mathbb{M}_T)$的荷，我们有

$$\mathbf{E}_T = \sqrt{-\mathbb{P}_\mu\mathbb{P}^\mu}, \qquad \mathbf{P}_T = 0, \qquad \mathbf{C}_T = 0.$$

空间旋转。 由于 $\{(\mathbb{M}_T)_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ 是一个 3×3 反对称矩阵，因此存在 $R\in SO(3)$使得

$$R\mathbb{M}_T R^\top = \begin{pmatrix} 0 & |\mathbf{J}_T| & 0 \\ -|\mathbf{J}_T| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

接下来，我们引入 Λ_R 由下式定义的洛伦兹变换

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}.$$

记 $(\mathbb{P}_R, \mathbb{M}_R) := (0, \Lambda_R)\cdot(\mathbb{P}_T, \mathbb{M}_T)$，我们有 $\mathbb{P}_R = \mathbb{P}_T$并且

$$(\mathbb{M}_R)_{\mu\nu} = (\Lambda_R)_\mu{}^\alpha(\Lambda_R)_\nu{}^\beta(\mathbb{M}_T)_{\alpha\beta}.$$

因此，我们推得

$$(\mathbb{M}_R)_{0i} = (\Lambda_R)_0{}^0(\Lambda_R)_i{}^j(\mathbb{M}_T)_{0j} = R_i{}^j(\mathbf{C}_T)_j = 0,$$
$$(\mathbb{M}_R)_{ij} = R_i{}^k R_j{}^l(\mathbb{M}_T)_{kl} = (R\mathbb{M}_T R^\top)_{ij}.$$

令 $(\mathbf{E}_R$、$\mathbf{P}_R$、$\mathbf{C}_R$、$\mathbf{J}_R)$ 为 $(\mathbb{P}_R, \mathbb{M}_R)$的编码荷，我们由式（4.12）推得

$$(\mathbf{J}_R)_1 = 0, \qquad (\mathbf{J}_R)_2 = 0, \qquad (\mathbf{J}_R)_3 = |\mathbf{J}_T|.$$

结合上述恒等式，我们推得

$$\mathbf{E}_R = \sqrt{-\mathbb{P}_\mu\mathbb{P}^\mu}, \qquad \mathbf{P}_R = 0, \qquad \mathbf{C}_R = 0, \qquad \mathbf{J}_R = (0, 0, |\mathbf{J}_R|).$$

此外，根据引理 4.4

$$\mathbb{W}_\mu\mathbb{W}^\mu = (\mathbb{W}_R)_\mu\mathbb{W}_R^\mu = |\mathbf{E}_R\,\mathbf{J}_R|^2 = -\mathbb{P}_\mu\mathbb{P}^\mu|\mathbf{J}_R|^2.$$

因此，我们得到

$$\mathbf{E}_R = \sqrt{-\mathbb{P}_\mu\mathbb{P}^\mu}, \qquad \mathbf{P}_R = 0, \qquad \mathbf{C}_R = 0, \qquad \mathbf{J}_R = \left(0, 0, \sqrt{-\frac{\mathbb{W}_\mu\mathbb{W}^\mu}{\mathbb{P}_\mu\mathbb{P}^\mu}}\right).$$

结论。 结合上述步骤，对于任意 $(\mathbb{P}',\ \mathbb{M}') \in \mathcal{R}_{\mathbb{P},\ \mathbb{M}}$，存在 $(\xi,\ \Lambda) := (0,\ \Lambda_R)\circ(\xi,\ 0)\circ(0,\ B(\vec{v}))\in \mathsf{ISO}^+(1,\ 3)$ 使得

$$(\xi,\Lambda)\circ\mathbb{P}' = (\sqrt{-\mathbb{P}_\mu\mathbb{P}^\mu}, 0, 0, 0), \qquad (\xi,\Lambda)\circ\mathbb{M}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-\frac{\mathbb{W}_\mu\mathbb{W}^\mu}{\mathbb{P}_\mu\mathbb{P}^\mu}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-\frac{\mathbb{W}_\mu\mathbb{W}^\mu}{\mathbb{P}_\mu\mathbb{P}^\mu}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

对 $(\mathbb{P},\ \mathbb{M})$应用相同的构造，存在 $(\xi_0,\ \Lambda_0)\in\mathsf{ISO}^+(1,\ 3)$ 使得

$$(\xi_0,\Lambda_0)\circ(\mathbb{P},\mathbb{M}) = (\xi,\Lambda)\circ(\mathbb{P}',\mathbb{M}').$$

因此

$$(\mathbb{P}',\mathbb{M}') = (\xi,\Lambda)^{-1}\circ(\xi_0,\Lambda_0)\circ(\mathbb{P},\mathbb{M}) \in \mathrm{Orb}_{\mathbb{P},\mathbb{M}},$$

因此$\mathcal{R}_{\mathbb{P},\ \mathbb{M}}\subseteq\mathrm{Orb}_{\mathbb{P},\ \mathbb{M}}$。这就完成了命题4.6的证明。 □

命题 4.7。设$\mathbf{E}_* > 0$ 和$\mathbf{P}_*,\mathbf{J}_* \in \mathbb{R}^3$ 为满足$\mathbf{E}_* > |\mathbf{P}_*|$的固定常数。那么，存在一个以 *Kerr-Schild* 坐标表示的克尔度规$\mathbf{g}_{m,\,a}\ (t,x,y,z)$，以及一个庞加莱变换：

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + \xi^{\mu} \tag{4.13}$$

使得以下结论成立：

- 令 (g',k') 为将$\mathbf{g}_{m,a}$ 限制在 $\Sigma'_0 := \{t'=0\}$上得到的诱导初始数据。于是，我们有

$$g' - e = O(r'^{-1}), \qquad k' = O(r'^{-2}), \tag{4.14}$$

  其中 $r' := \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$表示从 (x',y',z') 到 $\vec{0}$ 的欧几里得距离，而 O 中涉及的常数仅取决于$\mathbf{E}_*$、$\mathbf{P}_*$ 和$\mathbf{J}_*$。

- 对于任意 $r>0$，在 $S'_r := \{(t',x',y',z') :\ t'=0, r'=r\}$上有以下恒等式：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(g',k');S'_r] &= \mathbf{E}_* + O(r^{-1}), & \mathbf{P}[(g',k');S'_r] &= \mathbf{P}_* + O(r^{-1}),\\ \mathbf{C}[(g',k');S'_r] &= O(r^{-1}), & \mathbf{J}[(g',k');S'_r] &= \mathbf{J}_* + O(r^{-1}). \end{aligned} \tag{4.15}$$

- (g',k') 的 *ADM* 荷为：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{ADM}[(g',k')] &= \mathbf{E}_*, & \mathbf{P}^{ADM}[(g',k')] &= \mathbf{P}_*,\\ \mathbf{C}^{ADM}[(g',k')] &= 0, & \mathbf{J}^{ADM}[(g',k')] &= \mathbf{J}_*. \end{aligned} \tag{4.16}$$

证明。 我们首先定义

$$m = \frac{1}{8\pi}\sqrt{\mathbf{E}_*^2 - |\mathbf{P}_*|^2}, \qquad a = \frac{\sqrt{\mathbf{E}_*^2|\mathbf{J}_*|^2 - (\mathbf{P}_*\cdot\mathbf{J}_*)^2}}{\mathbf{E}_*^2 - |\mathbf{P}_*|^2}.$$

于是，我们记

$$\mathbf{E} = 8\pi m, \qquad \mathbf{P} = 0, \qquad \mathbf{C} = 0, \qquad \mathbf{J} = 8\pi a m \mathbf{e}_z.$$

设 $(\mathbb{P},\mathbb{M})$ 和 $(\mathbb{P}_*,\mathbb{M}_*)$ 分别是荷 $(\mathbf{E},\mathbf{P},\mathbf{C},\mathbf{J})$ 和 $(\mathbf{E}_*,\mathbf{P}_*,\mathbf{C}_*,\mathbf{J}_*)$的状态。由引理4.2

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}_*)_\mu(\mathbb{P}_*)^\mu &= -\mathbf{E}_*^2 + |\mathbf{P}_*|^2 = -(8\pi m)^2 = -\mathbf{E}^2 = \mathbb{P}_\mu\mathbb{P}^\mu,\\ (\mathbb{W}_*)_\mu(\mathbb{W}_*)^\mu &= -(\mathbf{P}_*\cdot\mathbf{J}_*)^2 + \mathbf{E}_*^2|\mathbf{J}_*|^2 = (8\pi m)^4 a^2 = \mathbf{E}^2|\mathbf{J}|^2 = \mathbb{W}_\mu\mathbb{W}^\mu. \end{aligned}$$

根据命题 4.6，存在 $(\xi,\Lambda)\in \mathrm{ISO}^+(1,3)$ 使得 $(\xi,\Lambda)\cdot(\mathbb{P},\mathbb{M}) = (\mathbb{P}_*,\mathbb{M}_*)$。于是，(4.13) 由 (4.7) 立即得出。此外，显然有

$$\|\mathbf{g}_{m,a} - \boldsymbol{\eta}\|_{C^s} \lesssim \frac{m+|a|}{r'}, \qquad \forall\, s\in\mathbb{N},$$

这意味着 (4.14)。回顾命题 3.2

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(g,k);\partial B_r] &= 8\pi m + \mathbf{O}_2^3, & \mathbf{P}[(g,k);\partial B_r] &= \mathbf{O}_2^3,\\ \mathbf{C}[(g,k);\partial B_r] &= \mathbf{O}_1^3, & \mathbf{J}[(g,k);\partial B_r] &= 8\pi a m\mathbf{e}_z + \mathbf{O}_1^3, \end{aligned}$$

其中 (g,k) 表示将 $\mathbf{g}_{m,a}$ 限制在 $\{t=0\}$上所诱导的初始数据。利用荷恒等式 (4.6) 以及庞加莱变换公式 (4.8)，我们得到

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(g',k');S'_r] &= \mathbf{E}_* + O(r^{-1}), & \mathbf{P}[(g',k');S'_r] &= \mathbf{P}_* + O(r^{-1}),\\ \mathbf{C}[(g',k');S'_r] &= O(r^{-1}), & \mathbf{J}[(g',k');S'_r] &= \mathbf{J}_* + O(r^{-1}). \end{aligned}$$

取 $r\to\infty$，得到（4.16）。这就完成了命题4.7的证明。 □

5 定理1.1 的证明

我们先回顾 [29], 中的一个预备结果。该结果构造了一个控制良好的类空短脉冲切片，作为定理1.1证明中的局部内部模型。

引理 *5.1*（ [29]中的定理 *4.27*）。对于任意 $s \in \mathbb{N}$，存在充分小的 $\varepsilon > 0$。对于任意 $0 < \delta \leqslant \varepsilon^2$ 和 $R > 0$，存在类空初始数据 $\Sigma(\delta、\ \varepsilon、\ R) : = (\Sigma_{\delta、\ \varepsilon、\ R、}\ g_{\delta、\ \varepsilon、\ R、}\ k_{\delta、\ \varepsilon、\ R})$，其满足方程（*1.1*），并带有关于 $r \in (0、\ 2R)$的径向 r–叶状分解，同时满足以下性质：

1. 我们有

$$\begin{aligned} &(g_{\delta,\varepsilon,R}, k_{\delta,\varepsilon,R}) = (e, 0) \qquad\qquad in\ \ B_{(1-2\delta)R}, \\ &R^{-\frac{3}{2}} \|g_{\delta,\varepsilon,R} - e\|_{H^s(A_R)} + R^{-\frac{1}{2}} \|k_{\delta,\varepsilon,R}\|_{H^{s-1}(A_R)} \lesssim \varepsilon. \end{aligned} \tag{5.1}$$

2. 俘获面将在 $D^+(B_R)$中形成。

此外， A_R 称为屏障环带，而 $B_R \backslash B_{(1-2\delta)R}$ 称为短脉冲环带。

引理 5.1 在一个紧区域内为短脉冲机制提供了类空实现，并具有适用于拼接的定量控制。Chen-Klainerman 最近的工作从一个密切相关的角度展开了研究， [6],其中，俘获面形成完全在类空柯西数据层面实现，方法是确定真空约束方程的椭圆输运表述中适当的可自由指定分量。

现在，我们将这样一个内部短脉冲区域从 [29] 粘接到具有指定 ADM 参数的渐近平坦初始数据集上。

命题 5.2. 设 $s \in \mathbb{N}$ 并设 $(\mathbf{E}_*, \mathbf{P}_*, \mathbf{J}_*) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 满足 $\mathbf{E}_* > |\mathbf{P}_*|$。那么，存在充分大的 $R > 0$ 和充分小的 $0 < \varepsilon \leqslant R^{-3}$，使得以下结论成立。对于任意 $0 < \delta \leqslant \varepsilon^2$，存在一个类空初始数据 (Σ, g, k)，它满足 (1.1)，并具有径向 r–叶状分解（定义在 $r > 0$上），且满足以下性质：

1. 我们有

$$\begin{aligned} &(g, k) = (e, 0) \qquad\qquad in\ \ B_{(1-2\delta)R}, \\ &R^{-1} \|g - e\|_{H^s(B_{64R} \backslash \overline{B_R})} + \|k\|_{H^{s-1}(B_{64R} \backslash \overline{B_R})} \lesssim 1, \\ &(g, k) = (g', k') \qquad\qquad in\ \ B^c_{32R}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

其中 (g', k') 是在命题 *4.7* 中得到的初始数据，其参数为 $(\mathbf{E}_*, \mathbf{P}_*, \mathbf{J}_*)$.

2. 俘获面将在 $D^+(B_R)$中形成。

证明。 我们记

$$(g_{in}, k_{in}) := (g_{\delta,\varepsilon,R}, k_{\delta,\varepsilon,R}), \qquad (g_{out}, k_{out}) := (g', k').$$

由引理 5.1，我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(g_{in}, k_{in}); A_R] + |\mathbf{P}[(g_{in}, k_{in}); A_R]| &\lesssim \varepsilon R \lesssim R^{-1}, \\ |\mathbf{C}[(g_{in}, k_{in}); A_R]| + |\mathbf{J}[(g_{in}, k_{in}); A_R]| &\lesssim \varepsilon R^2 \lesssim R^{-1} \\ R^{-2} \|g_{in} - e\|^2_{H^s(A_R)} + \|k_{in}\|^2_{H^{s-1}(A_R)} &\lesssim \varepsilon^2 R \lesssim R^{-1} \ll \Delta \mathbf{E}. \end{aligned}$$

我们还可以由命题4.7得到

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(g_{out}, k_{out}); A_{32R}] &= \mathbf{E}_* + O(R^{-1}), \\ \mathbf{P}[(g_{out}, k_{out}); A_{32R}],\ \mathbf{C}[(g_{out}, k_{out}); A_{32R}] &= O(R^{-1}), \\ \mathbf{J}[(g_{out}, k_{out}); A_{32R}] &= \mathbf{J}_* + O(R^{-1}). \end{aligned}$$

由此可得

$$\Delta\mathbf{E}=\mathbf{E}_*+O(R^{-1}),\qquad \Delta\mathbf{P}=\mathbf{P}_*+O(R^{-1}),\qquad \Delta\mathbf{C}=O(R^{-1}),\qquad \Delta\mathbf{J}=\mathbf{J}_*+O(R^{-1}).$$

因此，我们得到 $\Gamma:=\frac{^*}{^2\mathbf{E}\sqrt{\mathbf{E}_*^2-|\mathbf{P}_*|^2}}$ 以及 $R\gg 1$:

$$|\Delta\mathbf{P}|<|\Delta\mathbf{E}|,\qquad \frac{\Delta\mathbf{E}}{\sqrt{|\Delta\mathbf{E}|^2-|\Delta\mathbf{P}|^2}}<\Gamma,\qquad R^{-2}(|\Delta\mathbf{C}|+|\Delta\mathbf{J}|)\ll R^{-1}\Delta\mathbf{E}\ll 1.$$

我们还有

$$R^{-2}\|g_{out}-e\|^2_{H^s(A_{32R})}+\|k_{out}\|^2_{H^{s-1}(A_{32R})}\lesssim\int_{A_{32R}}R^{-4}dx\lesssim R^{-1}\ll\Delta\mathbf{E}.$$

因此，**环带拼接定理** 中的所有条件均成立。于是，存在 $(g,\ k)\in H^s\times H^{s-1}(B_{64R}\backslash B_R)$ 它满足 (1.1)，并且

$$(g,k)=(g_{in},k_{in})\quad\text{on}\quad A_R,\qquad (g,k)=(g_{out},k_{out})\quad\text{on}\quad A_{32R}.$$

此外，我们有

$$R^{-2}\|g-e\|^2_{H^s(B_{64R}\backslash\overline{B_R})}+\|k\|^2_{H^{s-1}(B_{64R}\backslash\overline{B_R})}\lesssim\Delta\mathbf{E}\lesssim 1.$$

命题 5.2 的证明至此完成。 □

现在我们可以证明主定理了。

定理 *1.1* 的证明。 证明分为两个步骤。

步骤 1。构造柯西数据。 我们定义 $y_I=C\omega_I$对所有 $I=1,\ 2,\ .....,\ N$，其中$C\gg 1$ 为满足以下条件的固定常数:

$$B_1(y_I)\cap B_1(y_J)=\varnothing,\qquad \forall\ I\neq J.$$

根据构造，我们有 $\{C_{\omega_I,\ \theta_I}(y_I)\}_{I=1}^N$两两不相交，其中 $I=1,\ 2,\ .....,\ N$。接下来，根据命题 4.7，对于任意 $\mathbf{c}_I\in\mathbb{R}^3$，存在柯西数据 $(g_I,\ k_I)$，其满足方程（1.1），并且满足以下条件:

$$g_I-e=O(r_I^{-1}),\qquad k_I=O(r_I^{-2}),\qquad r_I:=|\mathbf{x}-\mathbf{c}_I|.\tag{5.3}$$

根据命题 5.2，我们还可知存在初始数据组 $(g_I',\ k_I')$，使得:

$$\begin{aligned}(g_I',k_I')&=(e,0)\quad\text{in}\quad B_{(1-2\delta_I)R_I},\\(g_I',k_I')&=(g_I,k_I)\quad\text{in}\quad B^c_{32R_I(\mathbf{c}_I)},\end{aligned}\tag{5.4}$$

and

$$R_I^{-1}\|g_I'-e\|_{H^s(B_{64R_I}(\mathbf{c}_I)\backslash\overline{B_R(\mathbf{c}_I)})}+\|k_I'\|_{H^{s-1}(B_{64R_I}(\mathbf{c}_I)\backslash\overline{B_R(\mathbf{c}_I)}}\lesssim 1,\tag{5.5}$$

其中 $0<\delta_I\ll R_I^{-6}\ll 1$。现在我们通过定义 $\mathbf{c}_I$ 来固定 $\mathbf{c}_I:=y_I+C_IR_I\omega_I$ 其中 $C_I\gg 1$ 满足 $B_{64R_I}(\mathbf{c}^I)\subset C_{\omega_I,\ -\frac{1}{2}\theta_I}(y_I)$。由（1.5）和（5.3），我们得到

$$g_I'-e=O(r_I^{-1}),\qquad k_I'-e=O(r_I^{-2})\qquad\text{in}\quad\Omega_I,$$

其中 Ω_I 定义见（1.5）。因此，我们推知对于任意 $\delta<-\frac{1}{2}$

$$\|(g_I'-e,k_I')\|^2_{H_b^{s,\delta}\times H_b^{s-1,\delta+1}(\Omega_I)}\lesssim\int_{\Omega_I}r_I^{-2+2\delta}=\int_{\{r_I\geqslant 64R_I\}}^{\infty}r_I^{-2+2\delta}\lesssim R_I^{1+2\delta}\ll 1.$$

应用 **圆锥拼接定理** 并取 $\varepsilon = R_I^{\delta+\frac{1}{2}}$，存在 $(g_I'',\ k_I'')$它满足（1.1），使得

$$(g_I'', k_I'') = \begin{cases} (g_I', k_I'), & \text{in } C_{\omega_I, \frac{1}{2}\theta_I}(y_I) \cup B_{\frac{1}{2}}(y_I), \\ (e, 0), & \text{in } \mathbb{R}^3 \backslash (C_{\omega_I, \theta_I}(y_I) \cup B_1(y_I)), \end{cases}$$

并且有如下估计：

$$\|(g_I'' - e, k_I'')\|_{H_b^{s,\delta} \times H_b^{s-1,\delta+1}(\Omega_I)} \lesssim R_I^{\delta+\frac{1}{2}} \lesssim 1. \tag{5.6}$$

于是，我们将所需的柯西数据 $(g,\ k)$ 定义如下：

$$(g, k) = \begin{cases} (g_I'', k_I'') & \text{in } \overline{C_{\omega_I, \theta_I}(y_I) \cup B_1(y_I)}, \qquad \forall\, I = 1, 2, \ldots, N, \\ (e, 0) & \text{in } \Sigma_{ext} := \bigcap_{I=1}^{N} \big(C_{\omega_I, \theta_I}(y_I) \cup B_1(y_I)\big)^c. \end{cases}$$

由（5.4）–（5.6），立即可得文中所述的（1.3）和（1.4）。

根据构造，对于每个 $I \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ N\}$，$B_{R_I}(\mathbf{c}_I) \backslash B_{(1-2\delta_I)R_I}(\mathbf{c}_I)$都是一个短脉冲环带。因此，$D^+(B_{R_I}(\mathbf{c}_I))$中将形成一个俘获面。

步骤 2. 不存在俘获面。固定 $I \in \{1,\ \ldots,\ N\}$并考虑叶状分解 $S_r :=\partial B_r(\mathbf{c}_I)$。如 [29, (6.14)], 所示，我们有

$$\mathrm{tr}_g(\theta_{S_r} - k_{S_r})\big|_p > 0, \qquad \forall\, p \in S_r, \quad r \in (0, 64R_I). \tag{5.7}$$

根据构造，

$$(g, k) = (g_I, k_I) \quad \text{in } (C_{\omega_I, \frac{1}{2}\theta_I}(y_I) \cup B_{\frac{1}{2}}(y_I)) \cap B^c_{32R_I}(\mathbf{c}_I),$$

并且由（5.3）和（5.6），对于 $s \geqslant 3$和 $\delta < -\frac{1}{2}$,

$$g - e = O\big(r_I^{-\frac{3}{2}-\delta}\big), \qquad k = O\big(r_I^{-\frac{5}{2}-\delta}\big)$$

在 $(C_{\omega_I,\ \theta_I}(y_I) \cup B_1(y_I)) \cap B^c_{32R_I}(\mathbf{c}_I)$ 中。因此，对于 $r > 32R_I$,

$$\mathrm{tr}_{g_I}\, \theta_{S_r} = \frac{2}{r} + O\big(r_I^{-\frac{5}{2}-\delta}\big), \qquad \mathrm{tr}_{g_I}\, k_{S_r} = O\big(r_I^{-\frac{5}{2}-\delta}\big),$$

在 $S_r \cap (C_{\omega_I,\ \theta_I}(y_I) \cup B_1(y_I))$ 上，当 $-\frac{3}{2} < \delta < -\frac{1}{2}$ 和 R_I 足够大时，

$$\mathrm{tr}_{g_I}(\theta_{S_r} - k_{S_r})\big|_p > 0, \qquad \forall\, r > 32R_I,\ p \in S_r \cap (C_{\omega_I, \theta_I}(y_I) \cup B_1(y_I)). \tag{5.8}$$

结合（5.7）和（5.8），

$$\mathrm{tr}_g(\theta_{S_r} - k_{S_r})\big|_p > 0, \qquad \forall\, r > 0,\ p \in S_r \cap (C_{\omega_I, \theta_I}(y_I) \cup B_1(y_I)). \tag{5.9}$$

设 S是一个紧致嵌入光滑 2维曲面，满足 $S \subset C_{\omega_I,\ \theta_I}(y_I) \cup B_1(y_I)$，并设 $B_{r_S}(\mathbf{c}_I)$是以 $\mathbf{c}_I$ 为中心且包含 S的最小球。则 S 和 S_{r_S} 在某个 p处相切，并由平均曲率比较以及（5.9），

$$\mathrm{tr}_g(\theta_S - k_S)\big|_p \geqslant \mathrm{tr}_g(\theta_{S_{r_S}} - k_{S_{r_S}})\big|_p > 0,$$

因此 S 并未被困。

最后，如果一个紧致嵌入光滑二维曲面 S 满足 $S \cap \Sigma_{ext} \neq \varnothing$，那么对于 $p \in S \cap \Sigma_{ext}$，由于 $(g,\ k) = (e,\ 0)$ 在 p 附近，

$$\mathrm{tr}_g(-\theta_S - k_S)\ \mathrm{tr}_g(\theta_S - k_S)\big|_p = -(\mathrm{tr}_e\, \theta_S)^2\big|_p \leqslant 0, \tag{5.10}$$

矛盾　　给出了俘获曲面的定义。至此，定理1.1的证明完成。 □

一个克尔-希尔德初始数据

在本附录中，我们记录了定义在 $\mathbb{R}^{1+3}$ 典范坐标$(t,\ x,\ y,\ z)$上的 Kerr-Schild 形式度量的基本恒等式

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \boldsymbol{\eta}_{\mu\nu} + 2H\boldsymbol{\ell}_\mu\boldsymbol{\ell}_\nu, \tag{A.1}$$

其中 $\boldsymbol{\eta}^{\mu\nu}\boldsymbol{\ell}_\mu\boldsymbol{\ell}_\nu = 0$和 $H = H(x,\ y,\ z)$。在全文中，我们将 $\boldsymbol{\ell}$归一化，使得 $\boldsymbol{\ell}_0 = 1$。特别地，所有结论都适用于以克尔-希尔德形式书写的 Kerr 度规 $\mathbf{g}_{m,\ a}$。

引理 A.1. 设 $\mathbf{g}$是一个克尔-希尔德形式的度量 (A.1)，并设 $\boldsymbol{\ell}^\mu := \boldsymbol{\eta}^{\mu\nu}\boldsymbol{\ell}_\nu$。则以下恒等式成立：

1. 度规分量满足

$$\begin{aligned} &\mathbf{g}^{\mu\nu} = \boldsymbol{\eta}^{\mu\nu} - 2H\boldsymbol{\ell}^\mu\boldsymbol{\ell}^\nu, \qquad \mathbf{g}^{\mu\nu}\boldsymbol{\ell}_\nu = \boldsymbol{\ell}^\mu, \qquad \mathbf{g}_{\mu\nu}\boldsymbol{\ell}^\mu\boldsymbol{\ell}^\nu = 0, \\ &\mathbf{g}_{ij} = \delta_{ij} + 2H\boldsymbol{\ell}_i\boldsymbol{\ell}_j, \qquad \mathbf{g}_{0i} = 2H\boldsymbol{\ell}_i, \qquad \mathbf{g}_{00} = -1 + 2H. \end{aligned} \tag{A.2}$$

2. 切片函数 α 和位移 β 具有如下形式

$$\alpha = (-\mathbf{g}^{00})^{-1/2} = (1+2H)^{-1/2}, \qquad \beta^i := \alpha^2\mathbf{g}^{0i} = 2\alpha^2 H\boldsymbol{\ell}^i, \tag{A.3}$$

并满足

$$\beta_i := g_{ij}\beta^j = \mathbf{g}_{0i}, \qquad \mathbf{g}_{00} = -\alpha^2 + g_{ij}\beta^i\beta^j. \tag{A.4}$$

3. 恒时切片的未来向单位法向量 $\Sigma_0 = \{t = 0\}$ 为

$$\mathbf{n}_\mu = (-\alpha, 0, 0, 0), \qquad \mathbf{n}^\mu = \mathbf{g}^{\mu\nu}\mathbf{n}_\nu = \alpha^{-1}(1, -\beta^i). \tag{A.5}$$

证明。（A.2）中的恒等式可直接由以下事实得到：$\boldsymbol{\ell}$ 是 $\boldsymbol{\eta}$–零。对于（A.3），我们计算

$$\mathbf{g}^{00} = \boldsymbol{\eta}^{00} - 2H = -1 - 2H, \qquad \mathbf{g}^{0i} = -2H\boldsymbol{\ell}^0\boldsymbol{\ell}^i = 2H\boldsymbol{\ell}^i,$$

从而得到

$$\alpha = (1+2H)^{-1/2}, \qquad \beta^i = 2\alpha^2 H\boldsymbol{\ell}^i.$$

接下来，利用 $\boldsymbol{\ell}_i\boldsymbol{\ell}^i = 1$（根据 $\boldsymbol{\eta}$–零性），我们有

$$g_{ij}\boldsymbol{\ell}^j = \big(\delta_{ij} + 2H\boldsymbol{\ell}_i\boldsymbol{\ell}_j\big)\boldsymbol{\ell}^j = \boldsymbol{\ell}_i + 2H\boldsymbol{\ell}_i = \alpha^{-2}\boldsymbol{\ell}_i.$$

因此，

$$\beta_i = g_{ij}\beta^j = 2\alpha^2 H g_{ij}\boldsymbol{\ell}^j = 2H\boldsymbol{\ell}_i = \mathbf{g}_{0i}.$$

然后，利用 $\mathbf{g}_{0i}\mathbf{g}^{0i} = 1 - \mathbf{g}_{00}\mathbf{g}^{00},$，我们计算

$$\begin{aligned} -\alpha^2 + g_{ij}\beta^i\beta^j &= -\alpha^2 + \beta_i\beta^i = -\alpha^2 + \alpha^2\mathbf{g}_{0i}\mathbf{g}^{0i} \\ &= -\alpha^2 + \alpha^2\big(1 - \mathbf{g}_{00}\mathbf{g}^{00}\big) = \alpha^2(-\mathbf{g}_{00}\mathbf{g}^{00}) = \mathbf{g}_{00}. \end{aligned}$$

最后，$\mathbf{n}_\mu = (-\alpha, 0, 0, 0)$ 是指向 Σ_0 的单位余法向量，升高指标后得到

$$\mathbf{n}^\mu = (-\alpha)\mathbf{g}^{\mu 0} = (\alpha^{-1}, -\alpha^{-1}\beta^i).$$

直接计算可得

$$\mathbf{g}_{\mu\nu}\mathbf{n}^\mu\mathbf{n}^\nu = \mathbf{n}_\mu\mathbf{n}^\mu = (-\alpha)\mathbf{n}^0 = -\alpha\alpha^{-1} = -1.$$

证明至此结束。 □

L引理 A.2. 由$\mathbf{g}$ 诱导的 $\Sigma_0 = \{t = 0\}$ 的第二基本形式为

$$k_{ij} := -\frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\mathbf{n}}\mathbf{g})_{ij} = \frac{1}{2\alpha}\big(\beta^l\partial_l g_{ij} + g_{il}\partial_j\beta^l + g_{jl}\partial_i\beta^l - \partial_t g_{ij}\big). \tag{A.6}$$

证明。 由（A.5）可得

$$\partial_t = \alpha\mathbf{n} + \beta, \qquad \beta = \beta^i\partial_i.$$

由于 $\mathbf{g}(\mathbf{n}\ \partial_i) = 0$，因此

$$(\mathcal{L}_{\alpha\mathbf{n}}\mathbf{g})_{ij} = \alpha(\mathcal{L}_{\mathbf{n}}\mathbf{g})_{ij} - (\partial_i\alpha)\mathbf{g}(\mathbf{n},\partial_j) - (\partial_j\alpha)\mathbf{g}(\partial_i,\mathbf{n}) = \alpha(\mathcal{L}_{\mathbf{n}}\mathbf{g})_{ij}.$$

因此,

$$\partial_t g_{ij} = (\mathcal{L}_{\partial_t}\mathbf{g})_{ij} = (\mathcal{L}_{\alpha\mathbf{n}}\mathbf{g})_{ij} + (\mathcal{L}_{\beta}\mathbf{g})_{ij} = \alpha(\mathcal{L}_{\mathbf{n}}\mathbf{g})_{ij} + (\mathcal{L}_{\beta}\mathbf{g})_{ij}.$$

此外,

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_\beta g)_{ij} &= \beta^l\partial_l(g_{ij}) - g(\mathcal{L}_\beta\partial_i,\partial_j) - g(\partial_i,\mathcal{L}_\beta\partial_j)\\ &= \beta^l\partial_l(g_{ij}) - g([\beta^k\partial_k,\partial_i],\partial_j) - g(\partial_i,[\beta^k\partial_k,\partial_j])\\ &= \beta^l\partial_l(g_{ij}) + g_{jk}\partial_i(\beta^k) + g_{ik}\partial_j(\beta^k).\end{aligned}$$

结合以上恒等式可得（A.6）。证明完毕。 □

B Kerr-Schild 形式下的Kerr初始数据计算

在本附录中，我们将详细证明引理3.3、3.5 和3.6。我们将使用定义$\mathbf{O}_q^p$中引入的简写3.1 记号来表示低阶项。

B.1 引理3.3的证明

由（3.3），可得

$$\tilde{r}^4 - (r^2 - a^2)\tilde{r}^2 - a^2z^2 = 0.$$

因此，我们得到

$$\tilde{r}^2 = r^2 + \mathbf{O}_0^2 \qquad \text{and} \qquad \tilde{r} = r(1 + \mathbf{O}_2^2).$$

因此,

$$H = \frac{m\tilde{r}^3}{\tilde{r}^4 + a^2z^2} = \frac{m}{r}(1 + \mathbf{O}_2^2), \qquad \partial_i H = -\frac{mx_i}{r^3} + \mathbf{O}_4^3, \qquad \alpha = (1 + 2H)^{-1/2} = 1 - \frac{m}{r} + \mathbf{O}_2^2.$$

此外，由（3.2），计算得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\ell}_1 = \frac{\tilde{r}x + ay}{\tilde{r}^2 + a^2} = \left(\frac{x}{r} + \frac{ay}{r^2}\right)(1 + \mathbf{O}_2^2), \qquad \boldsymbol{\ell}_2 = \frac{\tilde{r}y - ax}{\tilde{r}^2 + a^2} = \left(\frac{y}{r} - \frac{ax}{r^2}\right)(1 + \mathbf{O}_2^2),\\ &\boldsymbol{\ell}_3 = \frac{z}{\tilde{r}} = \frac{z}{r}(1 + \mathbf{O}_2^2).\end{aligned} \tag{B.1}$$

由此立即可得

$$\boldsymbol{\ell}_j\frac{x_j}{r} = \frac{x}{r}\left(\frac{x}{r} + \frac{ay}{r^2}\right)(1 + \mathbf{O}_2^2) + \frac{y}{r}\left(\frac{y}{r} - \frac{ax}{r^2}\right)(1 + \mathbf{O}_2^2) + \frac{z^2}{r^2}(1 + \mathbf{O}_2^2) = 1 + \mathbf{O}_2^2. \tag{B.2}$$

我们还有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\ell}_i\partial_i H = &\left(\frac{x}{r} + \frac{ay}{r^2}\right)(1 + \mathbf{O}_2^2)\left(-\frac{mx}{r^3} + \mathbf{O}_4^3\right) + \left(\frac{y}{r} - \frac{ax}{r^2}\right)(1 + \mathbf{O}_2^2)\left(-\frac{my}{r^3} + \mathbf{O}_4^3\right)\\ &+ \frac{z}{r}(1 + \mathbf{O}_2^2)\left(-\frac{mz}{r^3} + \mathbf{O}_4^3\right)\\ = &-\frac{m}{r^2} + \mathbf{O}_4^3,\end{aligned}$$

and

$$\frac{x_j}{r}\partial_j H = \frac{x}{r}\left(-\frac{mx}{r^3}+\mathbf{O}_4^3\right)+\frac{y}{r}\left(-\frac{my}{r^3}+\mathbf{O}_4^3\right)+\frac{z}{r}\left(-\frac{mz}{r^3}+\mathbf{O}_4^3\right) = -\frac{m}{r^2}+\mathbf{O}_4^3.$$

接下来，利用（B.1），我们计算

$$\begin{aligned}
\partial_i \boldsymbol{\ell}_i &= \partial_x\left[\left(\frac{x}{r}+\frac{ay}{r^2}\right)(1+\mathbf{O}_2^2)\right]+\partial_y\left[\left(\frac{y}{r}-\frac{ax}{r^2}\right)(1+\mathbf{O}_2^2)\right]+\partial_z\left[\frac{z}{r}(1+\mathbf{O}_2^2)\right]\\
&= \left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}-\frac{2ayx}{r^4}\right)(1+\mathbf{O}_2^2)+\left(\frac{x}{r}+\frac{ay}{r^2}\right)\mathbf{O}_3^2+\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}+\frac{2axy}{r^4}\right)(1+\mathbf{O}_2^2)\\
&+\left(\frac{y}{r}-\frac{ax}{r^2}\right)\mathbf{O}_3^2+\left(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}\right)(1+\mathbf{O}_2^2)+\frac{z}{r}\mathbf{O}_3^2\\
&= \frac{2}{r}+\mathbf{O}_3^2.
\end{aligned}$$

最后，由（B.2）可得

$$\boldsymbol{\ell}_i\partial_i\boldsymbol{\ell}_j\frac{x_j}{r} = \frac{1}{r}\boldsymbol{\ell}_i\partial_i(\boldsymbol{\ell}_j x_j)-\frac{1}{r}\boldsymbol{\ell}_i\boldsymbol{\ell}_j\delta_{ij} = \frac{\boldsymbol{\ell}_i}{r}\partial_i(r+\mathbf{O}_1^2)-\frac{1}{r} = \frac{\boldsymbol{\ell}_i}{r}\left(\frac{x_i}{r}+\mathbf{O}_2^2\right)-\frac{1}{r} = \mathbf{O}_3^2.$$

这就完成了引理 3.3的证明。

B.2 引理 3.5的证明

由于克尔度规是定态的，在整个计算过程中我们有 $\partial_t g_{ij}=0$ 。我们首先计算

$$\begin{aligned}
\partial_i(\alpha^2 H) &= \partial_i\left(\frac{H}{1+2H}\right) = \frac{1}{(1+2H)^2}\partial_i H = \alpha^4\partial_i H,\\
\boldsymbol{\ell}_l\partial_i\boldsymbol{\ell}_l &= \frac{1}{2}\partial_i(\boldsymbol{\ell}_l\boldsymbol{\ell}_l) = 0,
\end{aligned}$$

由于 $\sum_{l=1}^3\boldsymbol{\ell}_l^2=1$。然后，由（A.3）和（A.6）可得

$$\begin{aligned}
\alpha k_{ij} &= \alpha^2 H\boldsymbol{\ell}_l\partial_l(g_{ij})+g_{il}\partial_j(\alpha^2 H\boldsymbol{\ell}_l)+g_{jl}\partial_i(\alpha^2 H\boldsymbol{\ell}_l)\\
&= \alpha^2 H\boldsymbol{\ell}_l\partial_l(2H\boldsymbol{\ell}_i\boldsymbol{\ell}_j)+\partial_j(\alpha^2 H\boldsymbol{\ell}_i)+\partial_i(\alpha^2 H\boldsymbol{\ell}_j)+2H\boldsymbol{\ell}_i\boldsymbol{\ell}_l\partial_j(\alpha^2 H\boldsymbol{\ell}_l)+2H\boldsymbol{\ell}_j\boldsymbol{\ell}_l\partial_i(\alpha^2 H\boldsymbol{\ell}_l)\\
&= \alpha^2 H\boldsymbol{\ell}_l\partial_l(2H\boldsymbol{\ell}_i\boldsymbol{\ell}_j)+\alpha^2 H(\partial_j\boldsymbol{\ell}_i+\partial_i\boldsymbol{\ell}_j)+\alpha^{-2}\boldsymbol{\ell}_i\partial_j(\alpha^2 H)+\alpha^{-2}\boldsymbol{\ell}_j\partial_i(\alpha^2 H)\\
&= \alpha^2 H\boldsymbol{\ell}_l\partial_l(2H\boldsymbol{\ell}_i\boldsymbol{\ell}_j)+\alpha^2 H(\partial_j\boldsymbol{\ell}_i+\partial_i\boldsymbol{\ell}_j)+\alpha^2(\boldsymbol{\ell}_i\partial_j H+\boldsymbol{\ell}_j\partial_i H)\\
&= \alpha^2 H\boldsymbol{\ell}_l\partial_l(2H\boldsymbol{\ell}_i\boldsymbol{\ell}_j)+\alpha^2(\partial_j(H\boldsymbol{\ell}_i)+\partial_i(H\boldsymbol{\ell}_j)),
\end{aligned}$$

这意味着

$$\alpha^{-1}k_{ij} = 2H\boldsymbol{\ell}_l\partial_l(H\boldsymbol{\ell}_i\boldsymbol{\ell}_j)+\partial_j(H\boldsymbol{\ell}_i)+\partial_i(H\boldsymbol{\ell}_j). \tag{B.3}$$

取迹可得

$$\alpha^{-1}\operatorname{tr}_e k = 2H\boldsymbol{\ell}_l\partial_l H+2\partial_l(H\boldsymbol{\ell}_l) = 2(1+H)\boldsymbol{\ell}_l\partial_l H+2H\partial_l\boldsymbol{\ell}_l. \tag{B.4}$$

引理的证明到此结束 3.5。

B.3 引理 3.6的证明

由（B.1），计算得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\ell}_i\partial_i\boldsymbol{\ell}_1 &= \left(\frac{x}{r}+\frac{ay}{r^2}\right)\partial_x\left[\left(\frac{x}{r}+\frac{ay}{r^2}\right)(1+\mathbf{O}_2^2)\right](1+\mathbf{O}_2^2)+\left(\frac{y}{r}-\frac{ax}{r^2}\right)\partial_y\left[\left(\frac{x}{r}+\frac{ay}{r^2}\right)(1+\mathbf{O}_2^2)\right](1+\mathbf{O}_2^2)\\ &\quad+\frac{z}{r}\partial_z\left[\left(\frac{x}{r}+\frac{ay}{r^2}\right)(1+\mathbf{O}_2^2)\right](1+\mathbf{O}_2^2)\\ &= \left(\frac{x}{r}+\frac{ay}{r^2}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}-\frac{2ayx}{r^4}\right)+\left(\frac{y}{r}-\frac{ax}{r^2}\right)\left(-\frac{xy}{r^3}+\frac{a}{r^2}-\frac{2ay^2}{r^4}\right)\\ &\quad+\frac{z}{r}\left(-\frac{xz}{r^3}-\frac{2ayz}{r^4}\right)+\mathbf{O}_3^2\\ &= \mathbf{O}_3^2,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{x_i}{r}\partial_i\boldsymbol{\ell}_1 &= \frac{x}{r}\partial_x\left[\left(\frac{x}{r}+\frac{ay}{r^2}\right)(1+\mathbf{O}_2^2)\right]+\frac{y}{r}\partial_y\left[\left(\frac{x}{r}+\frac{ay}{r^2}\right)(1+\mathbf{O}_2^2)\right]+\frac{z}{r}\partial_z\left[\left(\frac{x}{r}+\frac{ay}{r^2}\right)(1+\mathbf{O}_2^2)\right]\\ &= \frac{x}{r}\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}-\frac{2ayx}{r^4}\right)+\frac{y}{r}\left(-\frac{xy}{r^3}+\frac{a}{r^2}-\frac{2ay^2}{r^4}\right)+\frac{z}{r}\left(-\frac{xz}{r^3}-\frac{2ayz}{r^4}\right)+\mathbf{O}_3^2\\ &= -\frac{ay}{r^3}+\mathbf{O}_3^2.\end{aligned}$$

同样，我们有

$$\boldsymbol{\ell}_i\partial_i\boldsymbol{\ell}_2 = \mathbf{O}_3^2, \qquad \frac{x_i}{r}\partial_i\boldsymbol{\ell}_2 = \frac{ax}{r^3}+\mathbf{O}_3^2.$$

最后，我们计算

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\ell}_i\partial_i\boldsymbol{\ell}_3 &= \left(\frac{x}{r}+\frac{ay}{r^2}\right)\partial_x\left[\frac{z}{r}(1+\mathbf{O}_2^2)\right](1+\mathbf{O}_2^2)+\left(\frac{y}{r}-\frac{ax}{r^2}\right)\partial_y\left[\frac{z}{r}(1+\mathbf{O}_2^2)\right](1+\mathbf{O}_2^2)\\ &\quad+\frac{z}{r}\partial_z\left[\frac{z}{r}(1+\mathbf{O}_2^2)\right](1+\mathbf{O}_2^2)\\ &= \left(\frac{x}{r}+\frac{ay}{r^2}\right)\left(-\frac{zx}{r^3}\right)+\left(\frac{y}{r}-\frac{ax}{r^2}\right)\left(-\frac{zy}{r^3}\right)+\frac{z}{r}\left(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}\right)+\mathbf{O}_3^2\\ &= \mathbf{O}_3^2,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{x_i}{r}\partial_i\boldsymbol{\ell}_3 &= \frac{x}{r}\partial_x\left[\frac{z}{r}(1+\mathbf{O}_2^2)\right]+\frac{y}{r}\partial_y\left[\frac{z}{r}(1+\mathbf{O}_2^2)\right]+\frac{z}{r}\partial_z\left[\frac{z}{r}(1+\mathbf{O}_2^2)\right]\\ &= \frac{x}{r}\left(-\frac{xz}{r^3}\right)+\frac{y}{r}\left(-\frac{yz}{r^3}\right)+\frac{z}{r}\left(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}\right)+\mathbf{O}_3^2\\ &= \mathbf{O}_3^2.\end{aligned}$$

这就完成了引理 3.6的证明。

参考文献

[1] X. An，一个尺度临界俘获曲面形成判据：通过衰减率的符号给出的新证明，《Ann. PDE》**8(1)**，文章 3，2022 年。

[2] X. An 和 J. Luk，真空中由温和入射辐射动态形成的俘获面，《Adv.Theor. Math.Phys.》**21** (1),1–120,2017.

[3] K. Andrzejewski、C. Gonera、J. Gonera、P. Kosiński 和 P. Maślanka，自旋粒子、余伴随轨道与哈密顿形式主义，《核物理B》，975: 115664，2022。[4] A. Carlotto 和 R. Schoen，爱因斯坦约束方程解的局部化，《数学发明》205，第3期，559–615，2016。[5]X. Chen 和 S. Klainerman，测地线叶状结构中的俘获面形成，arXiv:2409.14582。[6]X. Chen 和 S. Klainerman，求解一般自由数据的约束方程，arXiv:2512.22704。[7] Y. Choquet-Bruhat，某些非线性偏微分方程组的存在性定理，《数学学报》88，141–225，1952。[8] Y. Choquet-Bruhat 和 R. Geroch，广义相对论中柯西问题的整体性质，《Commun. Math. Phys.》14，329–335，1969。[9] D. Christodoulou，《广义相对论中的黑洞形成》，EMS数学专著，2009。[10] P. T. Chruściel、J. Corvino 和 J. Isenberg，广义相对论中 N体初始数据集的构造，《Commun. Math. Phys.》304 (3)，637–647，2011。[11] P. T. Chruściel 和 E. Delay，广义相对论约束算子在带权函数空间中的映射性质及其应用，《Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)》，103页，2003。[12] P. T. Chrusciel 和 R. Mazzeo，关于“多黑洞”真空时空，《Class. Quant. Grav.》20，729–754，2003。[13] M. Dafermos、G. Holzegel、I. Rodnianski 和 M. Taylor，Schwarzschild黑洞族的非线性稳定性，arXiv:2104.08222。[14] E. Giorgi、S. Klainerman 和 J. Szeftel，波动方程估计与缓慢旋转Kerr黑洞的非线性稳定性，《Pure Appl. Math. Q.》20 (7) (2024)，2865–3849。[15]E. Giorgi、D. Shen 和 J. Wan，多个坍缩玻色子星的柯西数据，arXiv:2512.01844。[16] P. Hintz，将小黑洞拼接进初始数据集，《Comm. Math. Phys.》405 (2024)，第5期，114。[17] S. Klainerman，黑洞稳定性问题，《力学学报》353 (G1): 555–581，2025。[18] S. Klainerman、J. Luk 和 I. Rodnianski，真空中俘获面形成的完全各向异性机制，《数学发明》198 (1)，1–26，2014。[19] S. Klainerman 和 I. Rodnianski，关于俘获面的形成，《数学学报》208，211–333，2012。[20] S. Klainerman 和 J. Szeftel，偏振Kerr扰动下Schwarzschild时空的全局非线性稳定性，《数学研究年刊》210。普林斯顿大学出版社。[21] S. Klainerman 和 J. Szeftel，Kerr扰动中GCM球面的构造，《Ann. PDE》8 (2)，第17篇 (2022)，153页。

[22] S. Klainerman 和 J. Szeftel，*Kerr* 扰动中的一致化有效结果及内蕴 *GCM* 球面，《Ann. PDE》**8** (2)，第 18 号文章（2022），共 89 页。[23] S. Klainerman 和 J. Szeftel，小角动量下的 *Kerr* 稳定性，《Pure Appl. Math. Q.》**19**(3)（2023），791–1678。[24] J. Li 和 H. Mei，真空坍缩时空的构造，《Commun. Math. Phys.》**378**，1343–1389，2020。[25] J. Li 和 P. Yu，构造演化为黑洞的真空爱因斯坦场方程的柯西数据，《Ann. of Math.》，**181**(2)：699–768，2015。[26] Y. Mao、S.-J. Oh 和 Z. Tao，利用具有指定支集性质的解算子，在渐近平坦区域进行初始数据粘合，arXiv:2308.13031。[27] Y. Mao 和 Z. Tao，爱因斯坦方程的局部化初始数据，arXiv:2210.09437。[28] D. Shen，*Kerr* 扰动中的 *GCM* 超曲面构造，《Ann. PDE》**9** (1)，第 11 号文章（2023），共 112 页。[29]D. Shen 和 J. Wan，由柯西数据形成多个黑洞，arXiv:2506.16117。