arXiv:2601.01518v1 [math.RT] 4 Jan 2026

S通过临界稳定包络构造移位量子群

曹亚龙、安德烈·奥昆科夫、YEHAO ZHOU 和 ZIJUN ZHOU

Abstract. 给定一个带势对称箭图，我们利用由临界稳定包络构造的 R-矩阵，建立了一个几何构造，得到作用于带扩展势的反主导框架箭图簇的临界上同调上的移位杨扬子代数。我们将这类 Reshetikhin 型 Yangian 与源自临界上同调霍尔代数的 Drinfeld 型杨扬子代数联系起来。文中还明确计算了若干详尽的例子，包括平凡箭图、Jordan 箭图和三重 Jordan 箭图。

对于带势的对称箭图簇，利用其仿射化映射的小性，我们推导出除子的量子乘法的显式公式，并用相关李（超）代数的卡西米尔元表示，从而将中岛箭图簇的结果推广到临界情形。我们还在反主导框架情形下得到了类似公式，其中包括 $\mathbb{C}^3$ 上的点的 Hilbert 概形等例子。

Contents

1. 引言 1 2.R-矩阵 5 3. Drinfeld 型移位杨扬子代数在箭图簇临界上同调上的作用 13 4. 带势对称箭图的 Reshetikhin 型移位 Yangian 23 5. 除子的量子乘法的应用 41 6. 双线性形式与反自同构 49 7. 真空余生成与不可约性 52 8. 例：平凡箭图与移位 Yangian 的模 $\mathfrak{gl}_{1|1}$ 56 9. 例：Jordan 箭图与移位 Yangian 的模 $\mathfrak{gl}_2$ 62 10. 例：三重 Jordan 箭图与移位仿射 Yangian 的模 $\mathfrak{gl}_1$ 78 附录 A. 若干 Yangian 的正部分 90 附录 B. 与 $\mathfrak{gl}_{2|1}$ 相关的带势箭图的 R-矩阵 98 参考文献 101

1. 引言

1.1. 概述。 本文是我们围绕临界轨迹的稳定包络理论及其应用所撰写系列论文中的第二篇。该系列的开篇论文 [COZZ1] 包含了详细的介绍，我们假定读者对此已熟悉。

本文的主要内容是按照 [COZZ1 第 1.8 节及第 1.9] [1]，参见第 3 节和第 4 节所述思路，在临界上同调上构造移位量子群作用。这一工作建立在一些思想之上：在经典李代数处于定义表示这一特殊情形下，这些思想可追溯至[FRT]，；一般情形下则可追溯至[R]，。

具体而言，临界稳定包络

$$\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}\colon H^{\mathsf{T}}(X^{\mathsf{A}},\mathsf{w})\to H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w}),\quad \mathrm{Stab}^{\mathsf{s}}_{\mathfrak{C}}\colon K^{\mathsf{T}}(X^{\mathsf{A}},\mathsf{w})\to K^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w})$$

使相关的临界上同调群或 K-理论群构成带有亚纯编织的张量范畴，称为 R-矩阵，见 §2。此后，量子群的算子便表现为 R-矩阵的矩阵元。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：14N35，17B37。次要分类号：16G20，22E99。*Key words and phrases.* 稳定包络、 R-矩阵、移位杨 Yangian、带势箭图、除子的量子乘法。[1]采用临界 K-理论的情形将在 [COZZ3] 中继续研究。

完整的量子群结构还包括反 *antipode* 运算，它与量子群表示 V 的左对偶与右对偶的概念相关，分别记为 ${}^*V$ 和 V^*。在域上（即在几何背景中，对自同构 g 的不动点轨迹进行等变局部化），${}^*V$ 和 V^*的底层向量空间都是 V的普通向量空间对偶。这里，V 表示一个局部化临界上同调群，而 g 的选取同时纳入了移位杨扬子代数的连续参数取值和表示的参数，这与许多其他几何表示论背景中的惯例一致；全面讨论见 [CG] 。我们利用临界上同调上的标准双线性形式 将 V 的对偶与其自身等同；当 g-不动临界轨迹 Crit(w)^g 为真时，该形式存在且非退化，见 §6.2。这会在杨 Yangian 上诱导一个转置反自同构，详见 §6.3。在 Reshetikhin 的重构中，对偶表示的 [R],R-矩阵以其中一个因子的转置的逆矩阵形式出现。这就完成了量子群的构造。

不变双线性型的一个重要应用，是给出杨 Yangian 模的不可约性 的几何判据。回顾一下，我们将代数和模的连续参数整合到自同构 g 的选择中，并在 g 处局部化的等变上同调中工作。在相当一般的假设下，我们在定理 7.3 中证明，临界上同调模在杨 Yangian Y_μ 的作用下由真空余生成 。事实上，只需考虑由降算子 $\mathsf{Y}_{\bar{\mu}}$ 以及与典范类作杯积的算子 Y_μ^0 生成的子代数 $\mathsf{Y}_\mu^{\leqslant} \subset \mathsf{Y}_\mu$ 。此外，若 Crit(w)^g 是真，则存在非退化不变双线性型，从而可以得出杨 Yangian 模是不可约的，见命题 7.6。

在 §5 中，我们证明除子的量子乘法公式：首先针对带势对称箭图簇证明，然后推广到反支配移位情形，参见 [COZZ1, §1.11] ；更多导言材料见下文。我们回顾 [COZZ1] 中的内容：反占优移位是指允许框架维数向量不对称，但要求 $\mathbf{d}_{\mathrm{in}} \geqslant \mathbf{d}_{\mathrm{out}}$。这里不等式的符号与我们关注的具体稳定性条件相关。具体而言，若从框架空间出发的映射以及无框架空间之间的映射生成整个空间，我们就称带框拟表示是稳定的。其他移位和稳定性条件下会发生什么，仍是一个值得探究的问题。

§8、§9 和 §10 致力于在若干基本例子中明确阐述我们的一般理论，使其便于应用；下文将更详细地介绍这些例子。

1.2. **Reshetikhin Yangian 与 Drinfeld Yangian**。我们回顾一下，在 [R], 的形式体系中，量子群算子表现为 R-矩阵的矩阵元，而它们之间的关系来自相应范畴中的态射，也就是交织 R-矩阵的映射。例如，杨-巴克斯特方程本身便导出了 [FRT] 的 RTT=TTR 关系。

对于有限维李代数的 Yangian，这一构造还原为 Drinfeld Yangian。在其“新”表示中，Drinfeld Yangian 由对应于简单正根和负根的流，以及取值于 Cartan 子代数的多项式环路生成。在几何情形中，后者对应于由典范特征类进行杯积的算子。前者则与如下扩张轨迹有关：通过无框架箭图的一个表示进行扩张，其中所有映射均为零，且维数向量是一个 δ-函数。

我们在 §3 中将 Drinfeld 型杨扬子代数的构造改编到我们的情形，并以 Nakajima[Nak1], Neguţ [N], Varagnolo 和 Vasserot [VV1, VV2], 以及 Yang 和 Zhao [YZ1], 等人的工作为基础。这些工作属于极其丰富的相关文献，其中使用 Schiffmann-Vasserot [SV1] 和 Kontsevich-Soibelman 型 [KS] 的 Hall代数来构造类似 Yangian 的代数。

定理 1.1. （定理 3.7、3.21、4.8）设 Q 是带势 W 的对称箭图，且 $\mu \in \mathbb{Z}^{Q_0}$。

- 存在一个 Drinfeld 型 μ移位杨 *Yangian* $\widetilde{\mathcal{DSH}}_\mu(Q,\ \mathsf{W})$，它由球面幂零临界CoHA 的双代数定义，并通过定理 3.7 中指定的 Hecke 型对应作用于带势箭图簇的等变临界上同调。
- 当 $\mu \in \mathbb{Z}^{Q_0}_{\leqslant 0}$ 时，存在一个 Reshetikhin 型 μ移位杨 *Yangian* $\mathsf{Y}_\mu(Q,\ \mathsf{W})$，它由几何 R-矩阵定义，而这些矩阵来自临界稳定包络。它自然作用于带势反主导带框架箭图簇 $\mu = \mathbf{d}_{\text{出}} - \mathbf{d}_{\text{入}}$ 的等变临界上同调。
- 当 $\mu \in \mathbb{Z}^{Q_0}_{\leqslant 0}$ 时，$\widetilde{\mathcal{DSH}}_\mu(Q,\ \mathsf{W})$ 的作用通过自然映射分解为 $\mathsf{Y}_\mu(Q,\ \mathsf{W})$

$$\widetilde{\mathcal{DSH}}_\mu(Q,\mathsf{W}) \to \mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W}).$$

从技术角度来看，要为带势对称箭图定义 Reshetikhin 型移位 Yangian，我们需要考虑所谓的 辅助数据集 $\mathcal{C}$，它规定了带框箭图的框架、环面作用的扩展以及势。

参见定义 4.1。对于给定的 $\mathcal{C}$，可以定义 $\mathrm{Y}_\mu(Q,\mathrm{W}\ \mathcal{C})$（定义 4.6），而 Reshetikhin 型 μ-移位 Yangian 则相对于所有辅助数据集的并集来定义：

$$\mathrm{Y}_\mu(Q,\mathrm{W}) := \mathrm{Y}_\mu(Q,\mathrm{W},\bigcup_{\mathcal{C}}\mathcal{C}).$$

乍看之下，由于辅助数据的数量可能是无限的，这似乎无法进行操作。但值得注意的是，我们证明了：如果 $\mathcal{C}$ 是可容许的，即框架满足某个环面权条件，参见定义 4.1，则有如下结论。

定理 1.2。（定理 4.44）如果 $\mathcal{C}$ 是可容许的，那么对于任意 $\mu\in\mathbb{Z}^{Q_0}_{\leqslant 0}$，都有 $\mathrm{Y}_\mu(Q,\mathrm{W}\ \mathcal{C})=\mathrm{Y}_\mu(Q,\mathrm{W})$。

这样一来，计算便易于处理；例如，可以选择一组由箭图 Q的顶点标记的有限辅助数据。整篇论文中的计算都持续使用了这一点。

1.3。**PBW 型定理与李子代数 $\mathfrak{g}_{Q,\mathrm{W}}$**。为了控制我们的零平移杨 Yangian $\mathrm{Y}_0(Q,\mathrm{W})$的规模，我们需要如下$PBW$ 型定理。

定理 1.3. (命题 4.23、定理 4.26、4.45) 设 Q是带势 W 的对称箭图。

- 由经典 R-矩阵定义了一个李超代数 $\mathfrak{g}_{Q,\mathrm{W}}\subset\mathrm{Y}_0(Q,\mathrm{W})$。
- $\mathrm{Y}_0(Q,\mathrm{W})$ 由 $\mathfrak{g}_{Q,\mathrm{W}}$ 以及典范类的乘法生成。此外，
$$\operatorname{gr}\mathrm{Y}_0(Q,\mathrm{W})\cong\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{Q,\mathrm{W}}[u]),$$
关于按 u中的次数定义的滤过。
- 当 Q 是三重箭图且 W 为典范三次势时，$\mathrm{Y}_0(Q,\mathrm{W})$ 恢复 Maulik-Okounkov 杨扬子代数，而 $\mathfrak{g}_{Q,\mathrm{W}}$ 恢复 Maulik-Okounkov 李代数 [MO]。

要研究非零移位杨扬子代数，可以使用 §4.5 中的（参数化）移位同态，将它们与零平移情形联系起来。

请注意，一般而言，Reshetikhin Yangian 远大于 Drinfeld 型杨扬子代数。我们猜想，在 CoHA 一侧，值得考虑的对象是 Davison–Meinhardt 的 BPS 李代数 [DM]。具体而言，与我们其中一位作者在中岛簇背景下提出、并最近由 Botta 和 Davison 在 [BD]以及 Schiffmann 和 Vasserot 在 [SV3], 证明的猜想相呼应，我们猜想 Davison–Meinhardt 李代数是李代数 $\mathfrak{g}_{Q,\mathrm{W}}$ 的正半部分。

如果这一猜想成立，它将为上同调霍尔代数提供一族自然的量子群双代数，并由移位参数 μ索引。一般而言，缺乏真性是 CoHA 框架下只能定义一半量子群运算的原因。从一开始，稳定包络就一直是将吸引流形扩展为真对应的特别有用的典范方式；因此，它们在这里也发挥作用是合乎逻辑的。

1.4. **余乘法**。与许多人从卷积上同调代数一侧研究的余乘法相比，我们在 $\mathrm{Y}_\mu(Q,\mathrm{W})$ 上定义了一个余乘法，方法是将 §4.2 中的 R-矩阵进行拆分；它应当对应于标准余乘法。以下结果说明了这一点。

定理 1.4。（注 4.42，定理 4.43）设 A 为一个带对称化子的广义卡当矩阵 D、$\mathfrak{g}_{A,D}$ 为与这一对 (A,D) 相关的可对称化 Kac-Moody 李代数，$Y_0(\mathfrak{g}_{A,D})$ 为由显式生成元与关系定义的其杨 Yangian$\widetilde{\ }$（例 3.9）。设 (Q,W) 为 Geiss-Leclerc-Schr¨oer [GLS] 的相关带势三倍箭图（见附录 A.1）。则存在一个代数同态

$$\varrho\colon Y_0(\mathfrak{g}_{A,D})_{\mathrm{loc}}\xrightarrow{\text{Ex.3.9}}\mathcal{DS\widetilde{H}}_0(\widetilde{Q},\mathrm{W})_{\mathrm{loc}}\xrightarrow{\text{Thm.4.8}}\mathrm{Y}_0(\widetilde{Q},\mathrm{W}).\tag{1.1}$$

当 $\mathfrak{g}_{A,D}$ 为有限维单李代数时，$Y_0(\mathfrak{g}_{A,D})_{\mathrm{loc}}$ 具有 Drinfeld 给出的标准余乘法，此时映射 (1.1) 是一个单射双代数同态。此外，存在一个双代数同构

$$\widetilde{\varrho}\colon Y_0(\mathfrak{g}_{A,D})_{\mathrm{loc}}\otimes\mathbb{C}[\mathsf{d}_{i,k}:i\in\widetilde{Q}_0,\,k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}]\cong\mathrm{Y}_0(\widetilde{Q},\mathrm{W}).$$

这里 $\mathsf{d}_{i,k}$ 对所有 i 和 k 都是本原的，$\widetilde{\varrho}$ 在第一分量上的取值为 ϱ，而当作用于框架向量空间为 D_{in}，$\mathrm{D}_{\mathrm{out}}$ 的态空间时，$\widetilde{\varrho}(\mathsf{d}_{i,k})$ 是由 $\mathrm{ch}_{k+1}(\mathrm{D}_{\mathrm{in},i}-\mathrm{D}_{\mathrm{out},i})$ 给出的乘法算子。

我们指出，自 Drinfeld [Dri] 写下有限维单李代数情形下的标准余乘积公式以来，直到 Guay-Nakajima-Wendlandt [GNW] 的工作出现之前，文献中从未出现过证明。上述定理可视为利用几何方法（临界稳定包络）给出的另一种证明。事实上，[GNW] 的余乘积公式对更一般的仿射 Kac-Moody 李代数也成立。我们预期映射 (1.1) 在这些情形下也保持余乘法。

1.5. **对称箭图簇的小性**。这一系列论文中发展的理论，是对 Nakajima 簇及其他辛解消已知理论的深远推广。从历史上看，辛形式在各种几何论证中发挥了重要的技术作用；而在本文所研究的更一般情形中，则必须找到另一种技术手段。我们所用的这一性质或许本身也具有独立的研究价值，具体如下。

设 $X = \mathcal{M}_\theta(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 是一个对称箭图簇。我们在一篇配套论文 [COZZ2] 中证明，X 具有泊松结构，且满足：

(1) 泊松中心 $\mathcal{O}_B \subset H^0(\mathcal{O}_X)$ 是一个多项式代数；(2) 映射 $X \to B$ 的纤维具有辛奇点，特别是只有有限多个辛叶；(3) $X \to B$ 的一般纤维是仿射的。

Mor此外，如果环面 A 以保持对称性的方式作用于 X，那么 A 在 B 上的作用是平凡的 .

作为推论，仿射化映射 $X \to X_0 = \mathcal{M}_0(\mathbf{v},\ \mathbf{d})$ 是双有理且具有小性。根据定义，这意味着$X \times_{X_0} X$ 是对角线与维数小于$\dim X$的分支之并。维数为 $\dim X - 1$ 的分支则表现为斯坦伯格对应，在理论中占据非常重要的地位，见 §2.7。

小性在我们对带势对称箭图簇的除子的量子乘法进行分析时起着关键作用。在那里，需要理解由次数为 β 的有理曲线上点对在虚基本类意义下形成的斯坦伯格对应 Q_β。对于任意选取的吸引方向 $\mathfrak{C}$，我们在定理 5.5 中证明图表的交换性

$$\begin{array}{ccc} H^{\mathsf{T}}(F,\mathsf{w}) & \xrightarrow{\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}} & H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w}) \\ {\scriptstyle \pm \mathrm{Q}^F_\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Q}_\beta} \\ H^{\mathsf{T}}(F,\mathsf{w}) & \xleftarrow{(-)|_F \circ \mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}^{-1}} & H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w}), \end{array} \tag{1.2}$$

对于任意不动分支 $F \subseteq X^{\mathsf{A}}$，精确确定符号，并且结果相差一个在 A 上平凡的等变标量。在辛情形下，[MO] 中相应结果的证明依赖于对断裂/未断裂贡献的分析，这种分析源自 [OP]。我们以小性论证取代这一分析，并将其推广到更一般的带势对称箭图情形。

1.6. **除子的量子乘法**。与辛情形一样，为了消去 (1.2) 及其他地方的符号，将次数计数变量的环面 z 的原点平移到一个特定的 2 阶点处会很方便。这称为修正量子乘积，见定义 5.9，在本文中记作 $\widetilde{\star}$。

定理 1.5。（定理 5.10，推论 5.11）设 X 是带有势 w 的对称箭图簇。假设特化映射 sp : $H^{\mathsf{T}}(X,\ \mathsf{w}) \to H^{\mathsf{T}}(X)$ 是单射，则 $H^{\mathsf{T}}(X,\ \mathsf{w})$ 上的修正除子量子乘法λ 由下式给出

$$c_1(\lambda)\,\widetilde{\star}\,\cdot = c_1(\lambda) \cup \cdot - \sum_{\alpha>0} \alpha(\lambda) \frac{z^\alpha}{(-1)^{|\alpha|} - z^\alpha} \mathrm{Cas}_\alpha + \cdots, \tag{1.3}$$

其中点号表示一个标量算子，求和遍历李超代数 $\mathfrak{g}_{Q,\ \mathsf{w}} \subset \mathrm{Y}_0(Q,\ \mathsf{W})$ 的正根 α，该李超代数是杨 Yangian 的底层代数；卡西米尔元 $\mathsf{Cas}_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \otimes \mathfrak{g}_{-\alpha} \subset U(\mathfrak{g}_{Q,\ \mathsf{w}})$ 是典范张量。

公式 (1.3) 的形式与辛情形基本相同，主要区别在于超代数中根的奇偶性 $(-1)^{|\alpha|}$。在 (1.3) 中，我们对正根求和，这是由于我们选择了上文讨论的稳定性条件。对于对称箭图簇上的一般稳定性条件 θ，相应的求和范围应修改为 $\theta \cdot \alpha > 0$。

一般而言，公式 (1.3) 在从临界上同调到普通上同调的特化映射的像上成立。如果特化映射不是单射，那么在计数几何框架中，自然应当考虑的对象就是像群。

对于由带有反支配框架 $\mu = \mathbf{d}_{\mathrm{out}} - \mathbf{d}_{\mathrm{in}} \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}^{Q_0}$ 的对称箭图定义的箭图簇（其中包括 $\mathbb{C}^3$ 上的点的 Hilbert 概形，作为例子，见 §10.4），公式 (1.3) 修改如下。

定理 1.6。 (定理 5.13) 我们有

$$c_1(\lambda)\widetilde{\star} = c_1(\lambda) \cup - \sum_{\substack{\alpha>0 \\ \alpha\cdot\mu=0}} \alpha(\lambda) \frac{z^\alpha}{(-1)^{|\alpha|} - z^\alpha} \mathrm{Cas}_\alpha - \sum_{\substack{\alpha>0 \\ \alpha\cdot\mu\neq 0}} (-1)^{|\alpha|} \alpha(\lambda)\, z^\alpha\, \mathrm{Cas}_{\alpha,\mu} + \cdots, \tag{1.4}$$

其中，$\mathrm{Cas}_{\alpha,\mu}$ 是移位杨 Yangian $\mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W})$中的一个特定移位卡西米尔元，定义如下。作为 §4.5 中定义的参数化移位同态的一个特例，我们有一个映射

$$\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W}) \to \mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W})[z],$$

它将 Cas_α 映射为一个关于 z、次数为 $-\mu\cdot\alpha$的多项式。移位卡西米尔元 $\mathrm{Cas}_{\alpha,\mu}$ 是该多项式中 $z^{-\mu\cdot\alpha}$ 的系数，见定义 4.50。

1.7. **例子**。 我们将一般理论应用于具体例子，并利用生成元与关系给出 Reshetikhin 型移位 Yangian 的表示。

定理 1.7。 (定理 8.1、9.1、10.7) 对任意 $\mu \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$，我们有

- 若 Q 是平凡箭图，则存在一个自然的代数同构

$$Y_\mu(\mathfrak{gl}_{1|1}) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar) \cong \mathsf{Y}_\mu(Q,0)\,,$$

  其中 $Y_\mu(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 是 $\mathfrak{gl}_{1|1}$ 的 μ-移位杨 Yangian（定义 8.2）。
- 若 Q 是 Jordan 箭图，则存在一个自然的代数同构

$$Y_\mu(\mathfrak{gl}_2) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar) \cong \mathsf{Y}_\mu(Q,0)\,,$$

  其中 $Y_\mu(\mathfrak{gl}_2)$ 是 $\mathfrak{gl}_2$ 的 Frassek-Pestun-Tsymbaliuk μ-移位杨 Yangian（定义 9.11）。
- 若 Q 是赋有典范三次势 W 的三重 Jordan 箭图，则存在一个满射代数同态

$$\varrho_\mu \colon Y_\mu(\widehat{\mathfrak{gl}}_1) \twoheadrightarrow \mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W}),$$

  其中，$Y_\mu(\mathfrak{gl}_1)$ 是 $\mathfrak{gl}_1$ 的 μ 平移仿射杨氏代数（定义 10.1）。此外，ϱ_0 是双代数同构；对于 $Y_0(\mathfrak{gl}_1)$ 上的余乘法，该余乘法由 Schiffmann-Vasserot [SV3]，定义；而对于 $\mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W})$ 上的余乘法，则是在 §4.2 中利用临界稳定包络定义的。

在上述例子中，我们还研究了它们的表示，包括 $\mathfrak{gl}_2$ 情形下的高自旋模、对偶 Verma 模和预基本模（§9.1，定理 9.28），以及 Kirillov-Reshetikhin 模、真空 MacMahon 模；此外，还研究了仿射 $\mathfrak{gl}_1$ 情形下源自 Nekrasov 尖峰瞬子的若干模，这些模与 Gaiotto 和 Rapčák 在角点 $\mathcal{Y}_{L,\,M,\,N}$ 处的顶点代数相关（定理 10.12，命题 10.18）。我们对稳定包络和 R-矩阵进行了显式计算，其中包括高自旋模、对偶 Verma 模与预基本模之间的编织（§9.2、§9.3、§9.8），以及李超代数中的一些例子，见 §8.1、§8.2 和附录 B。

致谢。本工作受益于许多人的宝贵讨论与交流，包括 Mina Aganagic、Daniel Halpern-Leistner、Ryosuke Kodera、Yixuan Li、Yuan Miao、Hiraku Nakajima、Andrei Negut、Tudor Pădurariu、Spencer Tamagni、Yukinobu Toda、Yaping Yang、Gufang Zhao、Tianqing Zhu。A.O. 谨感谢 SIMIS 的热情接待。我们感谢 Kavli IPMU 促成了我们的相识。

声明与陈述。 我们没有需要披露的利益冲突。

2. R-MATRICES

本节在带势箭图簇的临界上同调背景下，利用 COZZ1 第9节中构造的相应 Hall（稳定）包络，定义 R-矩阵。我们研究它们的性质，并推导杨-巴克斯特方程。为后续使用，我们还分析经典的 R-矩阵，并研究斯坦伯格对应及其与稳定包络的相容性。

2.1. **Hall 包络与稳定包络**。设 $Q=(Q_0,Q_1)$ 为一个箭图，且 $\mathbf{v}$，$\mathbf{d}_{\mathrm{in}}$，$\mathbf{d}_{\mathrm{out}}\in\mathbb{Q}^{Q_0}$，$\mathbf{d}=(\mathbf{d}_{\mathrm{in}},\ \mathbf{d}_{\mathrm{out}})$。将 Q 的带框表示空间（规范维数为 $\mathbf{v}$，入射框架维数为$\mathbf{d}_{\mathrm{in}}$，出射框架维数为$\mathbf{d}_{\mathrm{out}}$）记为

$$R(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}}):=R(Q,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})=\bigoplus_{a\in Q_1}\underbrace{\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{\mathbf{v}_{t(a)}},\mathbb{C}^{\mathbf{v}_{h(a)}})}_{X_a}\oplus\bigoplus_{i\in Q_0}\left(\underbrace{\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{\mathbf{d}_{\mathrm{in},i}},\mathbb{C}^{\mathbf{v}_i})}_{A_i}\oplus\underbrace{\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{\mathbf{v}_i},\mathbb{C}^{\mathbf{d}_{\mathrm{out},i}})}_{B_i}\right).\tag{2.1}$$

令 $\mathsf{T}\subseteq\mathrm{Aut}_G(R(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}}))$ 为味群中的一个子环面，并令 $\mathsf{A}\subseteq\mathsf{T}$ 为一个子环面。我们固定一种循环稳定性$\theta\in\mathbb{Q}^{Q_0}_{<0}$，并将箭图簇 定义为以下 GIT 商：

$$X=\mathcal{M}_\theta(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}}):=R(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})/\!\!/_\theta G=R(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})^s/G,\tag{2.2}$$

其中规范群 $G=\prod_{i\in Q_0}\mathrm{GL}(\mathbf{v}_i)$ 通过与映射复合，自然地作用于 $R(\mathbf{v},\mathbf{d})$。由于箭图上没有施加任何关系，上述箭图簇是一个光滑拟射影簇。

令 $\mathfrak{C}$ 为与 A-作用在 $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 上相关的一个室，且 $\mathsf{w}\colon X\to\mathbb{C}$ 为一个 T-不变正则函数。那么 Hall包络

$$\mathrm{HallEnv}_{\mathfrak{C}}\colon H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}_\theta(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})^{\mathsf{A}},\mathsf{w})\longrightarrow H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}_\theta(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}}),\mathsf{w}),\tag{2.3}$$

定义为插值映射 [COZZ1, 定义 9.1], Hall乘法以及对稳定轨迹的限制 [COZZ1, 定义 9.4]的复合。这些定义适用于任意带势箭图。

定义 2.1. 若箭图 Q 的邻接矩阵 $(\mathsf{Q}_{ij})_{i,j\in Q_0}$ 是对称的，则称其为对称。框架$\mathbf{d}$ 若$\mathbf{d}_{\mathrm{in}}=\mathbf{d}_{\mathrm{out}}=\mathbf{d}$，则称其为对称。在后一种情况下，我们将记号简化为

$$R(\mathbf{v},\mathbf{d})=R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})=R(Q,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}}),\quad \mathcal{M}_\theta(\mathbf{v},\mathbf{d})=\mathcal{M}_\theta(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})=\mathcal{M}_\theta(Q,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}}).\tag{2.4}$$

当 Q 和$\mathbf{d}$ 均为对称时，我们称 $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 为对称箭图簇。若对称箭图簇 $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 上的环面作用 A 是由 $R(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 上的 A 自对偶作用诱导的，则称该作用为自对偶。

定义 2.2. 设 Q 是一个对称箭图，$\mathbf{v},\mathbf{d}_{\mathrm{in}},\mathbf{d}_{\mathrm{out}}\in\mathbb{N}^{Q_0}$ 是维数向量。$R(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 的对称化定义为 $R(\mathbf{v},\mathbf{c})$ (2.4)，其中$\mathbf{c}_i=\max\{\mathbf{d}_{\mathrm{in},i},\mathbf{d}_{\mathrm{out},i}\}$。我们将 $R(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 视为一个 G-子表示

$$R(\mathbf{v},\mathbf{c})=R(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})\oplus\bigoplus_{\substack{i\in Q_0\\ \mathrm{s.t.}\ \mathbf{d}_{\mathrm{in},i}>\mathbf{d}_{\mathrm{out},i}}}\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{\mathbf{v}_i},\mathbb{C}^{\mathbf{d}_{\mathrm{in},i}-\mathbf{d}_{\mathrm{out},i}})\oplus\bigoplus_{\substack{i\in Q_0\\ \mathrm{s.t.}\ \mathbf{d}_{\mathrm{in},i}<\mathbf{d}_{\mathrm{out},i}}}\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{\mathbf{d}_{\mathrm{out},i}-\mathbf{d}_{\mathrm{in},i}},\mathbb{C}^{\mathbf{v}_i}).$$

定义 2.3. 设 Q 是一个对称箭图，$\mathbf{v},\mathbf{d}_{\mathrm{in}},\mathbf{d}_{\mathrm{out}}\in\mathbb{N}^{Q_0}$ 是维数向量，且 A 是味群 Aut_G $R(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 的一个子环面。若 $R(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 上的 A-作用可扩张为对称化 $R(\mathbf{v},\mathbf{c})$ 上的自对偶 A-作用，则称该 A-作用为伪自对偶。若 $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 上的环面 A 作用由 $R(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 上的伪自对偶A-作用诱导而来，则称该环面 A 作用为伪自对偶。

例 2.4. 给定一个箭图 $Q=(Q_0,\ Q_1)$，我们将其双重箭图 定义为 $Q:=(Q_0,\ Q_1\sqcup\overline{Q}_1^*)$，其中 Q_1^*与 Q_1 相同，但箭头方向相反。我们还定义三重箭图 $Q:=(Q_0,\ Q_1\sqcup Q_1^*\sqcup Q_0)$，它在 Q的基础上为每个节点添加一个边环。

固定 $\mathbf{v}$，$\mathbf{d}\in\mathbb{N}^{Q_0}$ 和一个循环稳定性 $\theta\in\mathbb{Q}^{Q_0}_{<0}$，我们考虑两种对称 箭图簇：

(1) $\mathcal{M}_\theta(Q,\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$，与双重箭图 Q相关；(2) $\mathcal{M}_\theta(Q,\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$，与三重箭图 Q 相关。

商映射

$$R(\overline{Q},\mathbf{v},\mathbf{d})^s\to\mathcal{M}_\theta(\overline{Q},\mathbf{v},\mathbf{d})=R(\overline{Q},\mathbf{v},\mathbf{d})^s/G$$

是一个主 G-丛。记其关联伴随丛为 $\mathcal{G}\to\mathcal{M}_\theta(Q,\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$。那么，$G\curvearrowright R(Q,\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$ 的矩映射 下降为截面 $\mu\in\Gamma\left(\mathcal{M}_\theta(Q,\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})\ \mathcal{G}^\vee\right)$。全空间 $\mathrm{Tot}(\mathcal{G})$ 自然地识别为

- 由 G-等价类构成的开子概形 $\mathcal{M}_\theta(Q,\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})\subseteq\mathcal{M}_\theta(Q,\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$，位于 $R(Q,\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$ 中，且限制到 Q 时为 θ-稳定。 μ 的零点集：

$$\mathcal{N}_\theta(\overline{Q},\mathbf{v},\mathbf{d}):=Z(\mu)$$

即为中岛箭图簇 [Nak1, Nak2]（我们假设其非空）。注意， $\mathcal{N}_\theta(Q,\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$ 是 $\mathcal{M}_\theta(Q,\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$ 中的光滑子簇，其余维等于 $\mathcal{G}$，且 $Z(\mu)=\overline{Z}^{\mathrm{der}}(\mu)$ 与导出零点轨迹重合。

记 $\mathbb{C}^*_\hbar$ 为作用在 $R(Q,\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$ 上的环面，并赋予权 $R(Q,\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})=\overline{M}\oplus\hbar^{-1}M^\vee$，其中

$$M=\bigoplus_{a\in Q_1}\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{\mathbf{v}_{t(a)}},\mathbb{C}^{\mathbf{v}_{t(a)}})\oplus\bigoplus_{i\in Q_0}\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{\mathbf{d}_i},\mathbb{C}^{\mathbf{v}_i}).$$

我们选取包含 $\mathbb{C}^*_{\hbar}$ 的环面 T，使得 $\mathsf{T} = (\mathsf{T}/\mathbb{C}^*_{\hbar}) \times \mathbb{C}^*_{\hbar}$，并令 $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{T}/\mathbb{C}^*_{\hbar}$ 为一个子环面。选取一个函数 $\phi\colon \mathcal{M}_\theta(Q, \mathbf{v}, \mathbf{d}) \to \mathbb{C}$，以及一个截面 $\mu \in \Gamma(\mathcal{M}_\theta(Q, \mathbf{v}, \mathbf{d}) \hbar^{-1}\overline{\mathcal{G}^\vee})$，并选取适当的 T 作用，使得 ϕ 和 μ 均为 T-不变的。将边环上的 T 作用定义为按权 $\hbar$ 缩放，则 T 固定典范三次势：

$$\widetilde{\mathsf{w}} = \langle e, \mu \rangle = \sum_{i \in Q_0} \operatorname{tr}(\varepsilon_i \mu_i), \tag{2.5}$$

其中 ε_i 是节点 i 上的边环，而 μ_i 是矩映射的第 i 个分量 .

那么根据 [COZZ1，例 6.13], , 以下

$$\left(\overset{\bullet}{\mathcal{M}}_\theta(\widetilde{Q}, \mathbf{v}, \mathbf{d}), \mathcal{M}_\theta(\overline{Q}, \mathbf{v}, \mathbf{d}), \mu, \phi\right), \quad \left(\mathcal{N}_\theta(\overline{Q}, \mathbf{v}, \mathbf{d}), \mathcal{N}_\theta(\overline{Q}, \mathbf{v}, \mathbf{d}), 0, \phi|_{\mathcal{N}_\theta(\overline{Q}, \mathbf{v}, \mathbf{d})}\right)$$

按照 [COZZ1，定义 6.2] 的意义，它们是相容的维数约化数据。特别地，对于函数

$$\mathsf{w} := \langle e, \mu \rangle + \phi\colon \overset{\bullet}{\mathcal{M}}_\theta(\widetilde{Q}, \mathbf{v}, \mathbf{d}) \to \mathbb{C}, \quad \mathsf{w}' := \phi|_{\mathcal{N}_\theta(\overline{Q}, \mathbf{v}, \mathbf{d})}\colon \mathcal{N}_\theta(\overline{Q}, \mathbf{v}, \mathbf{d}) \to \mathbb{C},$$

我们有（参见 [COZZ1，命题 6.5、6.9]）：

$$\operatorname{Crit}(\mathsf{w}) \cong \operatorname{Crit}(\mathsf{w}'), \quad H^{\mathsf{T}}(\mathcal{N}_\theta(\overline{Q}, \mathbf{v}, \mathbf{d}), \mathsf{w}') \cong H^{\mathsf{T}}(\overset{\bullet}{\mathcal{M}}_\theta(\widetilde{Q}, \mathbf{v}, \mathbf{d}), \mathsf{w}). \tag{2.6}$$

定理 2.5。（[COZZ1，定理 9.20、4.22、5.5]）若箭图 Q 是对称的，$\mathbf{d}_{\text{in},\, i} \geqslant \mathbf{d}_{\text{out},\, i}$ 对所有 $i \in Q_0$ 均成立，且 A 是 T 的伪自对偶子环面，则 Hall 包络 (2.3) 与 Hall 运算相容（[COZZ1，定义 9.4]）。特别地，它们满足三角引理（[COZZ1，引理 9.6]）。

此外，当框架为对称时，我们有等式

$$\operatorname{HallEnv}_{\mathfrak{C}} = \operatorname{Stab}_{\mathfrak{C}},$$

其中（临界点）稳定包络 $\mathsf{Stab}_{\mathfrak{C}}$ 定义见 [COZZ1，定义3.4]。

注2.6。 关于等式也成立但框架并非对称的情形，参见 [COZZ1，命题9.23、9.24] 。当A-作用将框架分解为 $u\mathbf{d}' + \mathbf{d}''$时，此结论适用；本文中使用的所有根 R-矩阵均属于此情形，例如见等式 (4.4) 。

注2.7。条件$\mathbf{d}$ 在 $i \geqslant \mathbf{d}_{\text{out},\, i}$ 是三角引理成立的必要条件，参见 [COZZ1，例9.25、命题9.26].

2.2。 R-**矩阵**。

定义 2.8. 对于 $\mathsf{Lie(A)}_{\mathbb{R}}$ 中的两个室 $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ 以及一个一般斜率 $\mathsf{s} \in \mathsf{Char}(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$，R矩阵 为

$$R_{\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_1} := (\operatorname{HallEnv}_{\mathfrak{C}_2})^{-1} \circ \operatorname{HallEnv}_{\mathfrak{C}_1} \in \operatorname{End}\left(H^{\mathsf{T}}(X^{\mathsf{A}}, \mathsf{w})_{\text{loc}}\right),$$

这里我们考虑 T局部化上同调，因此 Hall 包络的逆元存在（参见 [COZZ1，注 9.5]）。

注 2.9. 该 R 矩阵可作 Gauss型分解

$$R_{\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_1} = F_{\mathfrak{C}_2} \cdot G_{\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_1} \cdot E_{\mathfrak{C}_1} \tag{2.7}$$

其中

$$F_{\mathfrak{C}_2} = \operatorname{HallEnv}^{-1}_{\mathfrak{C}_2} \cdot\ e^{\mathsf{T}}(N^-_{\mathfrak{C}_2}), \quad G_{\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_1} = \frac{e^{\mathsf{T}}(N^-_{\mathfrak{C}_1})}{e^{\mathsf{T}}(N^-_{\mathfrak{C}_2})}, \quad E_{\mathfrak{C}_1} = e^{\mathsf{T}}(N^-_{\mathfrak{C}_1})^{-1} \cdot \operatorname{HallEnv}_{\mathfrak{C}_1}.$$

注意，$G_{\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_1}$ 是一个对角算子， $F_{\mathfrak{C}_2}$ 和 $E_{\mathfrak{C}_1}$ 相对于分别由 $\mathfrak{C}_2$ 和 $\mathfrak{C}_1$ 给出的偏序均为单位对角元三角形矩阵。

根据构造，对于一个 室序列 $\mathfrak{C}_1$， $\mathfrak{C}_2$，.. ., $\mathfrak{C}_n$, R-矩阵满足以下辫关系：

$$R_{\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_n} R_{\mathfrak{C}_n, \mathfrak{C}_{n-1}} \cdots R_{\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_1} = \mathrm{id}\,. \tag{2.8}$$

例 2.10。 考虑框架向量空间的一个分解

$$\underline{\mathbf{d}} = \sum_{i=1}^{n} \underline{\mathbf{d}}^{(i)}.$$

这给出了一个由 $\mathbf{d} = \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{d}^{(i)}$ 作用的 $\mathsf{A} \cong (\mathbb{C}^*)^n$ 作用，其中 $K_{\mathsf{A}}(\mathrm{pt}) = \mathbb{Q}[z_i^{\pm}]^n_{i=1}$。定义

$$\mathcal{M}_\theta(\underline{\mathbf{d}}) := \bigsqcup_{\mathbf{v} \in \mathbb{N}^{Q_0}} \mathcal{M}_\theta(\mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}}),$$

并将其临界上同调以及按 $\mathbb{N}^{Q_0}$ 分级的分支记为

$$\mathcal{H}^{\mathsf{w}}_{\underline{\mathbf{d}}} := H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}_\theta(\underline{\mathbf{d}}), \mathsf{w}), \quad \mathcal{H}^{\mathsf{w}}_{\underline{\mathbf{d}}}(\mathbf{v}) := H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}_\theta(\mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}}), \mathsf{w}), \tag{2.9}$$

我们得到一个诱导的 A-作用，使得

$$\mathcal{M}_\theta(\underline{\mathbf{d}})^{\mathsf{A}} \cong \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_\theta(\underline{\mathbf{d}}^{(i)}).$$

假设

$$\mathsf{w}|_{\mathcal{M}_\theta(\underline{\mathbf{d}})^{\mathsf{A}}} = \boxplus_{i=1}^{n} \mathsf{w}_i, \quad \mathsf{w}_i \colon \mathcal{M}_\theta(\underline{\mathbf{d}}^{(i)}) \to \mathbb{C}, \tag{2.10}$$

那么根据汤姆-塞巴斯蒂亚尼同构，我们有

$$H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}_\theta(\underline{\mathbf{d}})^{\mathsf{A}}, \mathsf{w})_{\mathrm{loc}} \cong \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{H}^{\mathsf{w}_i}_{\underline{\mathbf{d}}^{(i)},\mathrm{loc}}, \quad \text{and} \quad R_{\mathfrak{C}_2,\mathfrak{C}_1} \in \mathrm{End}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{H}^{\mathsf{w}_i}_{\underline{\mathbf{d}}^{(i)},\mathrm{loc}}\right),$$

其中，第二个张量积取自底域 Frac(H_{T}(pt))。

注 2.11。 如果对所有 i，导出整体截面 RΓ($\mathcal{M}_\theta$($\mathbf{d}^{(i)}$),w_i) 都是纯的，那么汤姆-塞巴斯蒂亚尼同构无需局部化即可成立（例如 [Zhu，定理 A.1.10]），也就是说，

$$H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}_\theta(\underline{\mathbf{d}})^{\mathsf{A}}, \mathsf{w}) \cong \mathcal{H}^{\mathsf{W}_1}_{\underline{\mathbf{d}}^{(1)}} \otimes_{H_{\mathsf{T}}(\mathrm{pt})} \cdots \otimes_{H_{\mathsf{T}}(\mathrm{pt})} \mathcal{H}^{\mathsf{w}_n}_{\underline{\mathbf{d}}^{(n)}},$$

事实上，每个 $\mathcal{H}^{\mathsf{w}_i}{}_{\mathbf{d}^{(i)}}$ 都是自由的 H_{T}(pt)-模。例如，当 $\mathsf{w}_i = 0$时，RΓ($\mathcal{M}_\theta$($\mathbf{d}^{(i)}$)，w_i) 是纯的；或者当 w_i 时，它可以通过维数约化为某个纯簇的 Borel-Moore 同调（例如中岛箭图簇）。

2.3. **根 R矩阵**。 一般的 R-矩阵是由对应于被一面墙分隔的室对的 R-矩阵的乘积构成的。具体而言，设 $\mathfrak{C}$，$\mathfrak{C}'$ 是被一面墙 $\alpha = 0$分隔的两个室。这里 α 是一个根，并且不妨设 $\alpha(\mathfrak{C}) > 0$。令 $\mathsf{A}_\alpha \subset \mathsf{A}$ 为李代数为 ker(α) 的子环面。我们记

$$X^\alpha = X^{\mathsf{A}_\alpha}.$$

我们注意到

$$X^\alpha = \bigsqcup_{(\phi\colon \mathsf{A}_\alpha \to G)/\sim} X^{\alpha,\phi}, \quad \text{where } X^{\alpha,\phi} = R(\mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}})^{\mathsf{A}_\alpha,\phi} /\!\!/_\theta G^{\phi(\mathsf{A}_\alpha)}.$$

对于 X^α上的 A/A$_\alpha$-作用，存在两个室，即 $\alpha \gtrless 0$。我们将（上同调的）根 R-矩阵记为：

$$R_\alpha = R_{<0,>0} \in \mathrm{End}(H^{\mathsf{T}/\mathsf{A}_\alpha}(X^{\mathsf{A}}, \mathsf{w})_{\mathrm{loc}}).$$

命题 2.12。 在与定理 2.5相同的假设下，有

$$R_{\mathfrak{C}',\mathfrak{C}} = R_\alpha. \tag{2.11}$$

证明。对于一个由同态 $\phi\colon \mathsf{A}_\alpha \to G$ 确定的箭图 Q_ϕ，其中 $\mathbf{v}_\phi$、$\mathbf{d}_{\phi,\,\mathrm{in}}$、$\mathbf{d}_{\phi,\,\mathrm{out}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{Q}_{\phi,\,0}}$，我们有 $R(\mathbf{v},\mathbf{d})^{\mathsf{A}_\alpha,\phi} = R(Q_\phi, \mathbf{v}_\phi, \mathbf{d}_\phi)$。定理 2.5 中的假设意味着 Q_ϕ 是对称的，并且对于所有 $i \in Q_{\phi,\,0}$，$\mathbf{d}_{\phi,\,\mathrm{in},\,i} \geqslant \mathbf{d}_{\phi,\,\mathrm{out},\,i}$；诱导出的 A/A$_\alpha$ 在 $R(Q_\phi, \mathbf{v}_\phi, \mathbf{d}_\phi)$ 上的作用是伪自对偶的。因此，由三角引理可得

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{C}',\mathfrak{C}} &= \mathrm{HallEnv}^{-1}_{\mathfrak{C}'} \circ \mathrm{HallEnv}_{\mathfrak{C}} \\ &= \mathrm{HallEnv}^{-1}_{<0} \circ \mathrm{HallEnv}^{-1}_{\mathfrak{C}_\alpha} \circ \mathrm{HallEnv}_{\mathfrak{C}_\alpha} \circ \mathrm{HallEnv}_{>0} \\ &= \mathrm{HallEnv}^{-1}_{<0} \circ \mathrm{HallEnv}_{>0} \\ &= R_\alpha, \end{aligned}$$

其中 HallEn $\mathrm{v}_{\mathfrak{C}_\alpha}$：$H^{\mathsf{T}}(X^\alpha, \mathsf{w}) \to H^{\mathsf{T}}(X, \mathsf{w})$ 是环面 A_α 在室 $\mathfrak{C}_\alpha$ 中的 Hall 包络 . □

例 2.13。 取 $n = 2$ 自例 2.10，并选取室 $\mathfrak{C}_\pm = \{z_1 \gtrless z_2\}$，则 $R_{-,+}(z_1, z_2)$ 是一个根R-矩阵，对应于 $\mathsf{A}/\mathbb{C}^*_{\mathrm{diag}}$ 作用，其中 $\mathbb{C}^*_{\mathrm{diag}}$ 是对角环面 $\{z_1 = z_2\}$；特别地，它仅取决于谱参数之差：

$$R_{-,+}(z_1, z_2) = R_{-,+}(z_1 - z_2).$$

进一步假设对于所有 $j \in Q_0$ 和 $i \in \{1,2\}$，$\mathbf{d}^{(i)}$ 属于 $j \geqslant \mathbf{d}^{(i)}$ 外 j，那么 A 作用是伪自对偶的（见定义 2.3）。根据 [COZZ1，命题 9.23]，，此时 Hall 包络与稳定包络一致（这里 $\mathrm{A}/\mathbb{C}^*_{\mathrm{diag}}$ 是一维的，稳定包络的存在性由 [COZZ1，命题 3.23] 保证），并且我们有

$$R_{-,+}(z_1 - z_2) = (\mathrm{Stab}_-)^{-1} \circ \mathrm{Stab}_+ \ .$$

2.4. 覆盖与分解。 假设 $Q \to Q$ 是箭图的自由阿贝尔覆盖，且 Q 是对称的（因此 Q 也对称）。令 $\Gamma \cong \mathbb{Z}^r$ 为覆盖群。我们固定一个顶点提升

$$Q_0 \hookrightarrow \widehat{Q}_0, \qquad i \mapsto \widehat{i},$$

并令像为 Γ 次数零，则 Q 中任意其他顶点都可唯一写作 γi，其中 $\gamma \in \Gamma$ 且 $i \in Q_0$。这些数据确定了一个群嵌入

$$(\mathbb{C}^*)^r \cong \Gamma^\wedge \hookrightarrow G_{\mathrm{edge}} = \prod_{i,j \in Q_0} \mathrm{GL}(\mathsf{Q}_{ij}),$$

使得 对于箭 $a \in Q_1$， $\Gamma^\wedge$-权 γ_a 由以下条件确定：要求 a 的一个提升：$i \to j$ 为

$$\widehat{i} \to \gamma_a^{-1} \widehat{j}. \tag{2.12}$$

我们有

$$\mathcal{M}_\theta(Q, \underline{\mathbf{d}})^{\Gamma^\wedge} = \mathcal{M}_\theta(\widehat{Q}, \widehat{\underline{\mathbf{d}}}),$$

其中，$\mathbf{d}$ 是框架向量空间$\mathbf{d}$的零次提升，即

$$\widehat{\underline{\mathbf{d}}}_{\gamma \widehat{i}} = \begin{cases} \underline{\mathbf{d}}_i, & \gamma = 1, \\ \underline{\mathbf{0}}, & \gamma \neq 1. \end{cases}$$

考虑框架向量空间的一个分解：

$$\underline{\mathbf{d}} = u\, \underline{\mathbf{d}}^{(1)} + \underline{\mathbf{d}}^{(2)},$$

其中，u 是环面 $\mathrm{A}_1 \cong \mathbb{C}^*$在 $K_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Q}[u^{\pm}]$ 中的等变参数。记

$$R_{\underline{\mathbf{d}}^{(1)}, \underline{\mathbf{d}}^{(2)}}(u)$$

与 A_1 作用相关的根 R-矩阵。这里我们将 u 视为 $H_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Q}[u]$中的加性变量。

我们取 $\mathrm{A}_2 = \Gamma^\wedge \times \mathrm{A}_1$。注意，$\mathrm{A}_2$ 在 $R(Q, \mathbf{v}, \mathbf{d})$上的作用是伪自对偶的。取一般的向量 $t \in \mathrm{Lie}(\Gamma^\wedge)_{\mathbb{R}}$，并在稳定基中表示根 R-矩阵：

$$R_{\underline{\mathbf{d}}^{(1)}, \underline{\mathbf{d}}^{(2)}}(u)_{\mathrm{stab}} := (\mathrm{HallEnv}_{-t})^{-1} R_{\underline{\mathbf{d}}^{(1)}, \underline{\mathbf{d}}^{(2)}}(u)\, \mathrm{HallEnv}_t \, .$$

命题 2.14. 假设对所有 $j \in Q_0$ 和 $i \in \{1,2\}$，$\mathbf{d}^{(i)}$ 属于 $j \geqslant \mathbf{d}^{(i)}$ 出 j，则在稳定基中有

$$R_{\underline{\mathbf{d}}^{(1)}, \underline{\mathbf{d}}^{(2)}}(u)_{\mathrm{stab}} = \prod_{\gamma \in \Gamma}^{\longleftarrow} \widehat{R}_{\gamma \widehat{\underline{\mathbf{d}}}^{(1)}, \widehat{\underline{\mathbf{d}}}^{(2)}}(u - \gamma), \tag{2.13}$$

其中，乘积按从左到右 $\gamma(t)$ 递增的顺序排列。这里$R_{\gamma \widehat{\mathbf{d}}^{(1)},\ \widehat{\mathbf{d}}^{(2)}}(u)$ 是箭图 $\widehat{Q}$ 的根 R-矩阵，其框架分解为 $u\gamma \widehat{\mathbf{d}}^{(1)} + \widehat{\mathbf{d}}^{(2)}$。

证明。 这由定理 2.5 和 [COZZ1, 引理 9.6] 得出。 □

2.5. 杨-巴克斯特方程。 取 $n = 3$ 中的例 2.10，并进一步假设对于所有 $j \in Q_0$和 $i \in \{1,2,3\}$，$\mathbf{d}^{(i)}$ 属于 $j \geqslant \mathbf{d}^{(i)}$ 出 j。则由 $\mathbf{d} = \sum_{i=1}^3 z_i \mathbf{d}^{(i)}$ 给出的 $\mathrm{A} \cong (\mathbb{C}^*)^3$ 作用是伪自对偶的（见定义 2.3）。根由下式给出

$$\alpha_{ij} = \{z_i = z_j\}, \quad i \neq j \in \{1,2,3\},$$

且这些室是

$$\mathfrak{C}_{ijk} = \{z_i > z_j > z_k\}, \quad \{i,j,k\} = \{1,2,3\}.$$

假设 (2.10)，即

$$\mathsf{w}|_{\mathcal{M}_\theta(\underline{\mathbf{d}})^{\mathrm{A}}} = \boxplus_{i=1}^3 \mathsf{w}_i.$$

根 R-矩阵为

$$R_{ij}(z_i-z_j):=R_{\alpha_{ij}}(z_i-z_j)\in \mathrm{id}_{\mathcal{H}^{\mathsf{w}_k}_{\underline{\mathbf{d}}^{(k)}}}\otimes \mathrm{End}\left(\mathcal{H}^{\mathsf{w}_i}_{\underline{\mathbf{d}}^{(i)}}\otimes\mathcal{H}^{\mathsf{w}_j}_{\underline{\mathbf{d}}^{(j)}}\right)_{\mathrm{loc}},\qquad k\notin\{i,j\}.$$

辫关系 (2.8) 蕴含以下杨-巴克斯特方程。

命题 2.15. 沿用上述记号，我们有

$$R_{12}(z_1-z_2)R_{13}(z_1-z_3)R_{23}(z_2-z_3)=R_{23}(z_2-z_3)R_{13}(z_1-z_3)R_{12}(z_1-z_2). \tag{2.14}$$

2.6. **经典 R矩阵**。 我们从上同调情形中的一个根 R-矩阵 $R(u)=R_{-,+}(u)$（例 2.13）出发，并附加假设：框架是对称的：

$$\mathbf{d}^{(i)}_{\mathrm{in}}=\mathbf{d}^{(i)}_{\mathrm{out}}.$$

这里我们选择环面使得 $\mathsf{A}=\mathbb{C}^*_u$, $\mathsf{T}=\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}$，从而框架分解为 $u\mathbf{d}^{(1)}+\mathbf{d}^{(2)}$。

在以下讨论中，我们还将由 (3.27) 给出的正规化子 ϵ 纳入稳定包络 [COZZ1，定义 3.5]。此外，我们引入符号扭曲 Σ，使其在 $H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d}^{(1)})\times\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d}^{(2)}),\mathsf{w}^{(1)}\boxplus\mathsf{w}^{(2)})$ 上的作用为符号 $(-1)^{|\mathbf{v}^{(1)}|\cdot|\mathbf{v}^{(2)}|}$，其中 $|\cdots|$ 是 $\mathbb{Z}/2$-分次 (3.2)。

将高斯分解 (2.7) 应用于 $\Sigma\cdot R(u)$，得到

$$\Sigma\cdot R(u)=F(u)\,G(u)\,E(u).$$

此外，每个因子都具有 $\mathrm{id}+O(u^{-1})$ 的形式，因此 $\Sigma\cdot R(u)$ 具有以下形式：

$$\Sigma\cdot R(u)=\mathrm{id}+\frac{\boldsymbol{r}}{u}+O(u^{-2}), \tag{2.15}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是作用于 $H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d}^{(1)})\times\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d}^{(2)}),\ \mathsf{w}^{(1)}\boxplus\mathsf{w}^{(2)})$ 的线性算子。我们称 $\boldsymbol{r}$ 为经典 R-矩阵。由杨-巴克斯特方程可知，$\boldsymbol{r}$ 满足经典杨-巴克斯特方程：

$$[\boldsymbol{r}_{12},\boldsymbol{r}_{13}+\boldsymbol{r}_{23}]=0,\qquad [\boldsymbol{r}_{23},\boldsymbol{r}_{12}+\boldsymbol{r}_{13}]=0. \tag{2.16}$$

将 $E(u)$、$G(u)$ 和 $F(u)$ 展开至 $O(u^{-1})$ 阶，得到

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{\mathrm{diag}}+\boldsymbol{r}_{\text{off-diag}}.$$

Here

- 对角部分 $\boldsymbol{r}_{\text{对角}}$ 为

$$\sum_{i\in Q_0}\left(c_1(\mathsf{D}^{(1)}_{\mathrm{in},i})-c_1(\mathsf{D}^{(1)}_{\mathrm{out},i})\right)\otimes\mathbf{v}^{(2)}_i+\sum_{i\in Q_0}\mathbf{v}^{(1)}_i\otimes\left(c_1(\mathsf{D}^{(2)}_{\mathrm{in},i})-c_1(\mathsf{D}^{(2)}_{\mathrm{out},i})\right)-\sum_{a:i\to j}t_a\left(\mathbf{v}^{(1)}_i\otimes\mathbf{v}^{(2)}_j+\mathbf{v}^{(1)}_j\otimes\mathbf{v}^{(2)}_i\right), \tag{2.17}$$

  其中 t_a 是箭 a: $i\to j$ 的 T_0-等变权，而 $c_1(-)$ 是 T_0-等变第一陈类，
- 非对角部分$\boldsymbol{r}_{\text{非对角}}$ 由使用 $\mathsf{can}(\boldsymbol{\rho})$ 的临界卷积给出，其中

  $$\boldsymbol{\rho}\in H^{\mathsf{T}_0}\left(X^{\mathsf{A}}\times_{X^{\mathsf{A}}_0}X^{\mathsf{A}}\right)\ \text{ for }\ X^{\mathsf{A}}=\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d}^{(1)})\times\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d}^{(2)})\ \text{ and }\ X^{\mathsf{A}}_0=\mathcal{M}_0(\mathbf{d}^{(1)})\times\mathcal{M}_0(\mathbf{d}^{(2)})$$

  是一个次数为 $\dim F+\dim F'-2$ 的整类，位于连通分支 $F'\times_{X^{\mathsf{A}}_0}F\subset X^{\mathsf{A}}\times_{X^{\mathsf{A}}_0}X^{\mathsf{A}}$ 上。$\boldsymbol{\rho}$ 由以下内容确定：

$$\begin{aligned}(F'\times F\hookrightarrow X\times F)^!\overline{[\mathrm{Attr}}_+(\Delta_F)]&=\pm u^{\mathrm{rk}\,N^-_{F'/X}-1}\boldsymbol{\rho}+\text{lower degree terms},\ \text{ if } F\prec F',\\ (F'\times F\hookrightarrow X\times F)^!\overline{[\mathrm{Attr}}_-(\Delta_F)]&=\pm u^{\mathrm{rk}\,N^+_{F'/X}-1}\boldsymbol{\rho}+\text{lower degree terms},\ \text{ if } F'\prec F,\end{aligned} \tag{2.18}$$

  其中，符号由正规化子 ϵ 和符号扭曲 Σ确定。特别地，$\boldsymbol{\rho}$ 不依赖于函数 $\mathsf{w}^{(1)}$ 或 $\mathsf{w}^{(2)}$的选择。

~ ~**注 2.16**。 对于带有典范三次势 W (2.5) 的三重箭图 Q，我们有 $\mathsf{T}_0=\mathbb{C}^*_\hbar$，且对角部分为

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{diag}}=\hbar\sum_{i\in Q_0}\left(\mathbf{d}^{(1)}_i\otimes\mathbf{v}^{(2)}_i+\mathbf{v}^{(1)}_i\otimes\mathbf{d}^{(2)}_i\right)-\hbar\sum_{i,j\in Q_0}\mathsf{C}_{i,j}\mathbf{v}^{(1)}_i\otimes\mathbf{v}^{(2)}_j,$$

其中 $\mathsf{C}_{i,j}$ 是 Cartan 原始箭图 Q 的矩阵。这通过维数约化恢复了 [MO, (4.21)] .

2.7. **斯坦伯格对应的作用**。设 $X = \mathcal{M}_\theta(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 是一个对称箭图簇。已知[COZZ2, Thm. 1.1],

- 仿射化映射 $X \to X_0 = \mathcal{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 是双有理且小的,
- 存在一个平坦的 A-等变态射 $\pi\colon X \to B$ 到一个仿射空间 B（其上的 A-作用是平凡的），使得 π 的每个纤维都是具有辛奇点的不可约正规簇,
- 存在一个 A-不变的开稠密子集 $U \subset B$，其中 $\pi|_{\pi^{-1}(U)}\colon \pi^{-1}(U)$ 光滑且仿射。

由于 $X \to X_0$ 是双有理且小的，我们有 $\dim X \times_{X_0} X = \dim X$，并且对角线 Δ_X 是 $X \times_{X_0} X$ 中维数为 $\dim X$ 的唯一不可约分支。因此存在一个分解

$$H^{\mathsf{T}}_{2\dim X-2}(X \times_{X_0} X) \cong H^{\mathsf{T}}_{2\dim X-2}(\Delta_X) \oplus \left(\bigoplus_i \mathbb{C}\cdot[Z_i]\right),$$

其中 $\{Z_i\}$ 是 $X \times_{X_0} X$ 中维数为 $\dim X - 1$ 的不可约分支。

定义 2.17. 一个斯坦伯格对应是形如 $\mathcal{L} \in H^{\mathsf{T}}_{2\text{维数 } X-2}(X \times_{X_0} X)$ 的类

$$\mathcal{L} = \lambda\,[\Delta_X] + \sum_i a_i[Z_i], \quad \text{with } \lambda \in H^2_{\mathsf{T}}(\mathrm{pt}),\ a_i \in \mathbb{C}.$$

我们给出一些判据，用以判断 $H^{\mathsf{T}}_{2\dim X-2}(X \times_{X_0} X)$ 中的一个类是否为斯坦伯格对应。

引理 2.18. 一个类 $\mathcal{L} \in H^{\mathsf{T}}_{2\dim X-2}(X \times_{X_0} X)$ 是斯坦伯格对应，当且仅当其诱导的卷积在 $H^{\mathsf{T}}(X)$ 上将基本类 $[X]$ 映到某个 $\lambda \in H^2_{\mathsf{T}}(\mathrm{pt})$ 中的 $\lambda[X]$。

证明. 由 $[Z_i]$ 诱导的卷积将 $[X]$ 映到 $\mathrm{pr}_{1*}([Z_i])$，其中 $\mathrm{pr}_1\colon X \times_{X_0} X \to X$ 是到第一因子的投影。我们断言，Z_i 在 X 中的像的维数为 $\leqslant$ 维数 $X-2$，因此 $\mathrm{pr}_{1*}([Z_i]) = 0$，引理便得证。为证明这一断言，我们注意到 $\pi\colon \pi^{-1}(U) \to U$ 是一个光滑仿射态射，并且仿射化映射限制在 $\pi^{-1}(U)$ 上时是一个同构。这意味着 $Z_i \subseteq X \times_{X_0} X \times_B (B \setminus U)$。由于 B 是仿射的，我们有

$$X \times_{X_0} X \times_B \{b\} \cong \pi^{-1}(b) \times_{X_0} \pi^{-1}(b).$$

对于一般的 $b \in B \setminus U$, $Z_i \times_B \{b\} \subseteq \pi^{-1}(b) \times_{X_0} \pi^{-1}(b)$ 不在对角线上，否则 Z_i 会落在 $X \times_{X_0} X$ 的对角线上。这意味着 $Z_i \times_B \{b\}$ 在 $\pi^{-1}(b)$ 中的像的维数为 $< \pi^{-1}(b)$。因此，Z_i 在 X 中的像的维数为 $< \dim \pi^{-1}(b) + \dim(B \setminus U) \leqslant \dim X - 1$。
□

引理 2.19. 类 $\mathcal{L} \in H^{\mathsf{T}}_{2\dim X-2}(X \times_{X_0} X)$ 是斯坦伯格对应，当且仅当它在 $H^{\mathsf{A}}_{2\text{维数 } X-2}(X \times_{X_0} X)$ 中的像是斯坦伯格对应。

证明。 根据假设和引理 2.18，类 $\mathcal{L}([X])$ 在 $H^{\mathsf{A}}(X)$ 中的像是 $\lambda[X]$，其中 $\lambda \in H^2_{\mathsf{A}}(\mathrm{pt})$。根据自由性[2]:

$$H^{\mathsf{T}}(X) \cong H(X) \otimes H_{\mathsf{T}}(\mathrm{pt}),$$

因此，对于某个 T-权 λ，我们得出 $\mathcal{L}([X]) = \tilde{\lambda}[X]$ 属于 $H^{\mathsf{T}}(\tilde{X})$。 □

引理 2.20. 设 $\mathcal{L} \in H^{\mathsf{T}}_{2\dim X-2}(X \times_{X_0} X)$ 是一个类，并假设 $\mathcal{L}$ 在 $H^{\mathsf{A}}(X \times_{X_0} X)$ 中的像属于推前映射 $H^{\mathsf{A}}(X \times_{X_0} X \times_B (B \setminus U)) \to H^{\mathsf{A}}(X \times_{X_0} X)$ 的像。那么 $\mathcal{L}$ 是一个斯坦伯格对应。

证明。根据引理 2.19，只需证明 $H^{\mathsf{A}}_{2\dim X-2}(X \times_{X_0} X \times_B (B \setminus U))$ 中的每个类在推前到 $H^{\mathsf{A}}(X \times_{X_0} X)$ 后都会导出一个斯坦伯格对应。$X \times_{X_0} X$ 中维数为 $\dim X - 1$ 的不可约分支 $\{Z_i\}$ 包含于 $X \times_{X_0} X \times_B (B \setminus U)$ 中。设 $B \setminus U$ 的余维一（在 B 中）不可约分支为 $C_1, C_2, \ldots$，则 $\Delta_X \times_B (B \setminus U) \cong \pi^{-1}(B \setminus U)$ 中维数为 $\dim X - 1$ 的不可约分支恰为 $\pi^{-1}(C_1)$, $\pi^{-1}(C_2)\ldots$，因为 π 是平坦的且纤维不可约。由于 A 在 B 上平凡作用，我们有 $H^2_{\mathsf{A}}(B) = 0$，因此 $[\pi^{-1}(C_1)] = \pi^*[C_1]$, $[\pi^{-1}(C_2)] = \pi^*[C_2], \ldots$ 在 $H^{\mathsf{A}}(\Delta_X)$ 中为零。于是，推前映射 $H^{\mathsf{A}}_{2\dim X-2}(X \times_{X_0} X \times_B (B \setminus U)) \to H^{\mathsf{A}}_{2\dim X-2}(X \times_{X_0} X)$ 的像中的一个类可写为 $\sum_i a_i[Z_i]$，其中 $a_i \in \mathbb{C}$。特别地，它是一个斯坦伯格对应。□

本小节的主要结果是以下关于稳定包络与斯坦伯格对应之间相容性的结论。

[2]箭图簇 X 具有一个 $\mathbb{C}^*$-作用，它对箭图的所有箭进行缩放，其不动点轨迹光滑且为真。通过对 Białynicki-Birula 分层进行归纳论证，可以借助 [Zhu,Thm.A.1.10]，将问题归约到不动点轨迹上，从而证明自由性。

定理 2.21. 给定一个斯坦伯格对应 $\mathcal{L}$，则存在一个整类 $\mathcal{L}_{\mathsf{A}} \in H^{\mathsf{T}}(X^{\mathsf{A}} \times_{X_0} X^{\mathsf{A}})$，使得对于任意室 $\mathfrak{C}$，图表

$$\begin{array}{ccc} H^{\mathsf{T}}(X^{\mathsf{A}}, \mathsf{w}) & \xrightarrow{\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}} & H^{\mathsf{T}}(X, \mathsf{w}) \\ {\scriptstyle (-1)^{\sharp}\mathcal{L}_{\mathsf{A}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{L}} \\ H^{\mathsf{T}}(X^{\mathsf{A}}, \mathsf{w}) & \xrightarrow{\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}} & H^{\mathsf{T}}(X, \mathsf{w}) \end{array}$$

在 A-局部化后交换，其中竖直箭由 $\mathcal{L}_{\mathsf{A}}$ （差一个符号）以及分别由 $\mathcal{L}$respec- tively 诱导的卷积给出。对于一对连通分支 $F_1, F_2 \subset X^{\mathsf{A}}$，$(-1)^{\sharp}$ for $H^{\mathsf{T}}(F_2,\mathsf{w}) \to H^{\mathsf{T}}(F_1,\mathsf{w})$ 的符号由下式确定:

$$(-1)^{\sharp} = \frac{\prod \mathsf{A}\text{-weights in } N^{-}_{F_1/X}}{\sqrt{\prod \mathsf{A}\text{-weights in } N_{F_1/X}}} \times \frac{\prod \mathsf{A}\text{-weights in } N^{+}_{F_2/X}}{\sqrt{\prod \mathsf{A}\text{-weights in } N_{F_2/X}}},$$

其中我们选取一个平方根，并对所有室固定该平方根。

证明。 由线性性，只需证明 $\mathcal{L} = \lambda[\Delta_X]$ 以及 $\mathcal{L} = [Z_i]$。在第一种情形中，我们取 $\mathcal{L}_{\mathsf{A}} = \lambda[\Delta_{X^{\mathsf{A}}}]$。下面说明第二种情形下 $[Z_i]_{\mathsf{A}}$ 的存在性。定义

$$\mathcal{L}' := [\mathrm{Stab}_{-\mathfrak{C}}]^{\mathrm{t}} \circ [Z_i] \circ [\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}],$$

并且按照 [MO, Thm. 4.6.1], 中的类似论证， $\mathcal{L}'$ 的定义中沿 $X \times X$ 的推前是适当的，因此 $\mathcal{L}'$是 $H^{\mathsf{T}}(X^{\mathsf{A}} \times_{X_0} X^{\mathsf{A}})$ 中的一个整类。注意，对于一对连通分支 $F_1, F_2 \subset X^{\mathsf{A}}$， $\mathcal{L}'$ 在分支 $F_1 \times_{X_0} F_2$ 上的同调次数为 $\dim(F_1 \times F_2) - 2$。根据 [COZZ1, Lem. 3.29], $\mathcal{L}'$ 使该图表对于室 $\mathfrak{C}$交换。接下来我们将证明， $\mathcal{L}'$ 除差一个符号外与 $\mathfrak{C}$的选择无关。

根据 [COZZ2], , 我们有

(1) $F_1 \to X_0$ 是 T-等变的，且映至其像时是双有理且小的（参见 [COZZ2，命题 3.21]）；(2) 若 $F_1 \neq F_2$，则 $\dim F_1 \times_{X_0} F_2 \leqslant \frac{1}{2}\dim(F_1 \times F_2) - 1$ （参见 [COZZ2，注 3.24]）。

若 $F_1 \neq F_2$, 则 $\mathcal{L}'$ 在分支 $F_1 \times_{X_0} F_2$ 上是一个顶维循环类。若 $F_1 = F_2$, 则 $\mathcal{L}'$ 在分支 $F_1 \times_{X_0} F_1$ 上具有如下形式（见引理 2.22）

$$\mu \cup [\Delta_{F_1}] + \sum_{j=1}^{n} a_j [H_j],$$

其中 $\mu \in H^2_{\mathsf{T}}(F_1)$、 $a_j \in \mathbb{C}$ 和 $\{H_j\}_{j=1}^n$ 是 $F_1 \times_{X_0} F_1$ 的维数为 $\dim F_1 - 1$ 的不可约分支。由自由性 $H^{\mathsf{T}}(F_1) \cong H(F_1) \otimes H_{\mathsf{T}}(\mathrm{pt})$（见引理 2.22 的证明），存在一个分解

$$H^2_{\mathsf{T}}(F_1) \cong H^2(F_1) \oplus H^2_{\mathsf{T}}(\mathrm{pt}).$$

The 上述分解是非典范的，但子空间 $H^2_{\mathsf{T}}(\mathrm{pt}) \subset H^2_{\mathsf{T}}(F_1)$ 是典范的 .

我们断言 $\mu \in H^2_{\mathsf{T}/\mathsf{A}}(\mathrm{pt})$。集合论卷积与 $F_1 \times_{X_0} F_1 \times_B U$ 不相交，因此 $\mu \cup [\Delta_{F_1}]$ 在 A-等变上同调中可以写成 $\sum_{\alpha=1}^{m} b_\alpha [\Delta_{F_1 \cap \pi^{-1}(D_\alpha)}]$, ，其中 $b_\alpha \in \mathbb{C}$ 和 $\{D_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ 是 $B \setminus U$ 的余维 1 分支。由于 B 是一个 A 作用平凡的仿射空间，$[D_\alpha] = 0$ 属于 $H^{\mathsf{A}}(B)$。因此 $[F_1 \cap \pi^{-1}(D_\alpha)] = \pi^*([D_\alpha]) = 0$ 属于 $H^{\mathsf{A}}(F_1)$，这意味着 $\mu \cup [\Delta_{F_1}]$ 在 $H^{\mathsf{A}}(\Delta_{F_1})$ 中消失。这就证明了该断言。

根据上述讨论， $\mathcal{L}'$ 与 A-等变参数 a 无关，因此我们可以通过沿任意方向令 a 趋于无穷来计算它。根据 [COZZ2 命题 3.23]„ 我们有

$$\dim(F_1 \times F_2) \cap Z_i \leqslant \frac{1}{2}\dim(F_1 \times F_2) - 1.$$

记 L_1 L_2, $\cdots$为 $(F_1 \times F_2) \cap Z_i$ 的1 2维（$\dim(F_1 \times F_2)$）分支 -1，则

$$(F_1 \times F_2 \hookrightarrow X \times X)^*[Z_i] = \sum_r f_r [L_r] + \cdots,$$

其中 $f_r \in H_{\mathsf{A}}(\mathrm{pt})$ 是次数为 1 2$\mathrm{codim}_{X\times X}(F_1 \times F_2)$ 的齐次多项式，点号表示次数更低的项。应用 A-局部化后，我们得到

$$\mathcal{L}' = \lim_{\mathsf{a}\to\infty} \sum_r \frac{f_r}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} [L_r],$$

其中 ε_1 是 $N^-_{F_1/X}$ 中 A-权重的乘积， ε_2 是 $N^+_{F_2/X}$ 中 A-权重的乘积。由于 $\lim_{\mathsf{a}\to\infty}\frac{f_r}{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ 与取极限的方向 $\mathsf{a}\longrightarrow\infty$ 无关，因此必有 $f_r\propto\varepsilon_1\varepsilon_2$。我们固定平方根

$$\varsigma_1=\sqrt{\prod \mathsf{A}\text{-weights in } N_{F_1/X}},\quad \varsigma_2=\sqrt{\prod \mathsf{A}\text{-weights in } N_{F_2/X}}$$

并定义

$$\mathcal{L}_{\mathsf{A}}:=\lim_{\mathsf{a}\to\infty}\sum_r\frac{f_r}{\varsigma_1\varsigma_2}[L_r],$$

于是 $\mathcal{L}'=(-1)^\sharp\mathcal{L}_{\mathsf{A}}$，定理得证。 □

在定理 2.21 的证明中，我们用到了以下引理。

引理 2.22. 设 Y 是一个带有 T-作用的对称箭图簇，并设 $Y\to V$ 是到仿射 T-簇 V 的一个 T-等变态射，该态射是双有理的，且其像是小的。设 γ 是 $H^{\mathsf{T}}_{2\text{维数}Y-2}(Y\times_V Y)$ 中的一个类，且 $\gamma=0$ 属于 $H^{\mathsf{A}}(Y\times_V Y)$，则

$$\gamma=\lambda\,[\Delta_Y]\ \text{ for some } \mathsf{T}/\mathsf{A}\text{-weight } \lambda\,.$$

证明. 由于 $Y\to V$ 是双有理且小的， Δ_Y 是 $Y\times_V Y$ 的一个不可约分支，其他分支的维数为 $<$ 维数Y。由此可知，存在一个分解

$$H^{\mathsf{T}}_{2\dim Y-2}(Y\times_V Y)\cong H^{\mathsf{T}}_{2\dim Y-2}(\Delta_Y)\oplus\left(\bigoplus_i\mathbb{C}\cdot[H_i]\right)$$

其中 $\{H_i\}$ 是维数为 $\dim Y-1$ 的 $Y\times_V Y$ 的不可约分支。记

$$\gamma=c+\sum_i a_i[H_i],$$

其中 $c\in H^{\mathsf{T}}_{2\dim Y-2}(\Delta_Y)$、 $a_i\in\mathbb{C}$。那么， $\gamma=0$ 属于 $H^{\mathsf{A}}(Y\times_V Y)$ 意味着对于所有 i， $a_i=0$，并且 $c=0$ 属于 $H^{\mathsf{A}}_{2\dim Y-2}(\Delta_Y)$。由自由性 $H^{\mathsf{T}}(Y)\cong H(Y)\otimes H_{\mathsf{T}}(\mathrm{pt})$，我们得出对于某个 T/A-权重 λ， $c=\lambda[\Delta_Y]$。□

3. Drinfeldtype shifted Yangian action on critical cohomology of quiver varieties

本节中，我们从球形幂零临界上同调 Hall 代数（定义 3.6）出发，定义（Drinfeld 型）移位杨扬子代数。受 Nakajima [Nak1], Neguţ [N] 关于中岛箭图簇的研究启发，我们定义了它们在带势箭图簇的临界上同调上的作用（定理 3.3、定理 3.7）。这推广了 Varagnolo-Vasserot [VV1, VV2] 和 Yang-Zhao [YZ2] 的多项研究（例 3.9、3.10）。

我们还通过 R-矩阵的矩阵元描述（Drinfeld 型）移位超 Yangian 的生成元（定理 3.21）。

我们从以下数据开始:

- 一个箭图 $Q=(Q_0,\ Q_1)$，其路径代数记为 $\mathbb{C}Q$,
- 一个环面 T_0，它对 Q中的箭进行缩放,
- 一个势，即一个元素 $\mathsf{W}\in\mathbb{C}Q/[\mathbb{C}Q,\mathbb{C}Q]$，使得 W 是 T_0-不变的。

对于任意维数向量$\mathbf{v}\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{Q_0}$,

$$\mathsf{w}=\mathrm{tr}(\mathsf{W})$$

变为定义在 $\mathbf{v}$ 维无框表示空间 $R(\mathbf{v},\mathbf{0})$ 上的 $\mathsf{T}_0\times G$-不变函数（$\mathbf{0}$ 表示框架维数为 $\mathbf{0}$），其中 $G=\prod_{i\in Q_0}\mathrm{GL}(\mathbf{v}_i)$ 是规范群，它自然地作用于 $R(\mathbf{v},\mathbf{0})$。由 G-不变性，w 下降为商堆栈 $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0})=[R(\mathbf{v},\mathbf{0})/G]$ 上的 T_0-不变函数，仍记作 w。

给定一对框架维数向量$\mathbf{d}=(\mathbf{d}_{\mathrm{in}},\mathbf{d}_{\mathrm{out}})\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{Q_0}\times\mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{Q_0}$，定义 Crawley-Boevey 箭图 $Q^{\mathbf{d}}$：从 Q 出发添加一个节点 ∞，并且对于每个 $i\in Q_0$，从 ∞ 到 i 添加$\mathbf{d}_{\mathrm{in},i}$ 条箭，从i 到 ∞添加$\mathbf{d}_{\mathrm{out},i}$ 条箭。我们选择将 T_0 作用从 Q扩展到$Q^{\mathbf{d}}$，然后选择一个带框架势$\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}\in\mathbb{C}Q^{\mathbf{d}}/[\mathbb{C}Q^{\mathbf{d}},\mathbb{C}Q^{\mathbf{d}}]$，使得 W^{fr} 具有 T_0-不变性，且其在 Q 上的限制为 W。定义在

$$\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}=\mathrm{tr}(\mathsf{W}^{\mathrm{fr}})$$

空间$\mathbf{d}$-带框表示_$R(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 上的函数下降到商堆栈 $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}) = [R(\mathbf{v},\mathbf{d})/G]$ 以及稳定轨迹_ $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{v},\mathbf{d})$_ $= R(\mathbf{v},\mathbf{d})^{\theta\text{-}s}/G$，我们将诱导出的函数记为 w^{fr}。从现在起，我们将（2.9）中的记号更新为

$$\mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}} := H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}_\theta(\underline{\mathbf{d}}),\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}), \quad \mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}(\mathbf{v}) := H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}_\theta(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}}),\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}).$$

为简单起见，我们在本节中固定一种循环稳定性 $\theta \in \mathbb{Q}_{<0}^{Q_0}$。

3.1. **一般情形**。 令 $\mathcal{H}_{Q,\mathsf{w}}^{\mathrm{nil}}$ 表示与 (Q,W) 相关的 T_0-等变幂零临界 *CoHA*，即 .

$$\mathcal{H}_{Q,\mathsf{W}}^{\mathrm{nil}} = \bigoplus_{\mathbf{v}\in\mathbb{N}^{Q_0}} \mathcal{H}_{Q,\mathsf{W}}^{\mathrm{nil}}(\mathbf{v}), \quad \mathcal{H}_{Q,\mathsf{W}}^{\mathrm{nil}}(\mathbf{v}) := H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0}),\mathsf{w})_{\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0})^{\mathrm{nil}}}, \tag{3.1}$$

赋予康采维奇和索伊贝尔曼的上同调霍尔代数结构 [KS],，其中 $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0})^{\mathrm{nil}} \subset \mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0})$ 是 Q 的维数向量为 $\mathbf{v}$ 的幂零无框表示的模叠。

$\mathcal{H}_{Q,\mathsf{w}}^{\mathrm{nil}}$ 是一个 $\mathbb{Z}/2$-分次代数，其分次由下式给出

$$|\mathbf{v}| := \sum_{i\in Q_0} |i|\cdot\mathbf{v}_i, \quad \text{where } |i| = 1 + \#(i\to i) \pmod 2. \tag{3.2}$$

为简便起见，在本节中我们作如下假设。

假设 3.1。 每个边环上的 T_0-权都是非平凡的。

该假设意味着，$\mathrm{Rep}(Q,\ \delta_i,\ \mathbf{0}) \cong \mathbb{C}^{\mathsf{g}_i}$ 的 T_0-不动点为 $\{0\}$，其中 g_i 是节点 i处边环的数量。注意，幂零表示的轨迹 $\mathrm{Rep}(Q,\ \delta_i,\ \mathbf{0})^{\mathrm{nil}} = \{0\}$。由 [COZZ1，命题 2.4],，我们得到

$$\mathcal{H}_{Q,\mathsf{W}}^{\mathrm{nil}}(\delta_i) = H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\delta_i,\mathbf{0}),\mathsf{w})_{\mathfrak{M}(\delta_i,\mathbf{0})^{\mathrm{nil}}} \cong H^{\mathsf{T}_0}([\{0\}/\mathbb{C}^*]).$$

令 $\mathcal{L}_i$ 为通用线 丛 on $\mathfrak{M}(\delta_i,\ \mathbf{0}) \cong [\mathbb{C}^{\mathsf{g}_i}/\mathbb{C}^*]$，并将 $\mathcal{H}_{Q,\ \mathsf{w}(\delta_i)}^{\mathrm{nil}}$ 作为 $\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]$-模的一组基记为

$$e_{i,r} := c_1(\mathcal{L}_i)^r \cap \left[\mathfrak{M}(\delta_i,\mathbf{0})^{\mathrm{nil}}\right], \quad \forall\, r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},$$

其中 $c_1(-)$ 表示 T_0-等变第一陈类。

球面子代数 $\mathcal{SH}_{Q,\ \mathsf{w}}^{\mathrm{nil}}$ 是 $\mathcal{H}_{Q,\ \mathsf{w}}^{\mathrm{nil}}$ 的 $\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]$-子代数，由 $\{\mathcal{H}_{Q,\mathsf{W}}^{\mathrm{nil}}(\delta_i)\}_{i\in Q_0}$ 生成。令 $\mathcal{SH}^{\mathrm{nil}}{}_{,\ Q}^{\ \mathrm{op}}{}_{,\ \mathsf{w}}$ 表示带有乘法

$$f\star^{\mathrm{op}} g = (-1)^{|f|\cdot|g|} g\star f,$$

的 $\mathbb{Z}/2$-分次反代数

对于齐次的 $f,\ g$。记 $\{f_{i,r}\}_{i\in Q_0}^{r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 为 $\mathcal{SH}^{\mathrm{nil}}{}_{,\ Q}^{\ \mathrm{op}}{}_{,\ \mathsf{w}}$ 的生成元。

[VV2，命题 3.4], [Nak1] 的推广表明

$$e_i(u) := \sum_{r\geqslant 0} e_{i,r}u^{-r-1} \mapsto \frac{(-1)^{\mathbf{d}_{\mathrm{out},i}}}{u - c_1(\mathcal{L}_i)}\,[\overline{\mathfrak{P}}(\mathbf{v}+\delta_i,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})] \tag{3.3}$$

由此得到 $\mathcal{SH}_{Q,\ \mathsf{w}}^{\mathrm{nil}}$ 在 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}{}_{\mathbf{d}}$ 上的作用。这里

$$\overline{\mathfrak{P}}(\mathbf{v}+\delta_i,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}}) \subset \mathfrak{P}(\mathbf{v}+\delta_i,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}}) \subset \mathcal{M}(\mathbf{v}+\delta_i,\underline{\mathbf{d}}) \times \mathcal{M}(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})$$

它们是乘积中的某些闭子簇，其中 $\mathfrak{P}(\mathbf{v}+\delta_i,\mathbf{v},\mathbf{d})$ 是由带框拟表示_$(V^+ = V\oplus\mathbb{C}^{\delta_i}, D_{\mathrm{in}}, D_{\mathrm{out}}), (V, D_{\mathrm{in}}, D_{\mathrm{out}})$ 构成的轨迹，满足存在一个带框拟表示之间的满射 $(V^+, D_{\mathrm{in}}, D_{\mathrm{out}}) \twoheadrightarrow (V, D_{\mathrm{in}}, D_{\mathrm{out}})$，该满射在框架向量空间上为恒等映射。$\mathcal{L}_i$ 是 $\mathfrak{P}(\mathbf{v}+\delta_i,\mathbf{v},\mathbf{d})$ 上的线丛，其纤维为 $(V^+, D_{\mathrm{in}}, D_{\mathrm{out}}) \twoheadrightarrow (V, D_{\mathrm{in}}, D_{\mathrm{out}})$ 的核。 $\overline{\mathfrak{P}}(\mathbf{v}+\delta_i,\mathbf{v},\mathbf{d})$ 是 $\mathfrak{P}(\mathbf{v}+\delta_i,\mathbf{v},\mathbf{d})$ 中满足 $(V^+, D_{\mathrm{in}}^-, D_{\mathrm{out}}) \twoheadrightarrow (V, D_{\mathrm{in}}, D_{\mathrm{out}})$ 的核为幂零无框架 Q-表示的轨迹。

同样，该映射

$$f_i(u) := \sum_{r\geqslant 0} f_{i,r}u^{-r-1} \mapsto \frac{(-1)^{|i|\cdot|\mathbf{v}|}}{u - c_1(\mathcal{L}_i)}\,[\overline{\mathfrak{P}}(\mathbf{v},\mathbf{v}-\delta_i,\underline{\mathbf{d}})]^{\mathrm{t}} \tag{3.4}$$

诱导出 $\mathcal{SH}^{\mathrm{nil}}{}_{,\ Q}^{\ \mathrm{op}}{}_{,\ \mathsf{w}}$ 在 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}{}_{\mathbf{d}}$ 上的作用。

定义自由交换代数

$$\mathcal{H}_Q^0 := \mathbb{C}\left[h_{i,s} \,\middle|\, i\in Q_0, s\in\mathbb{Z}\right],$$

并设

$$h_i(u) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} h_{i,s} u^{-s-1}.$$

定义 3.2. 定义未修正的 *Cartan* 双 *Yangian* $\mathcal{DSH}_\infty(Q,\mathsf{W})$ 为 $\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]$-代数，它由自由积 $\mathcal{SH}^{\mathrm{nil}}_{Q,\mathsf{W}} * \mathcal{SH}^{\mathrm{nil}\ \mathrm{op}}_{,Q,\mathsf{W}} * \mathcal{H}^0_Q$ 施加以下关系得到：

$$e_{i,r}f_{j,s} - (-1)^{|i|\cdot|j|} f_{j,s}e_{i,r} = \delta_{ij}\gamma_i h_{i,r+s}, \quad \text{where } \gamma_i := \prod_{e:i\to i} t_e, \tag{3.5}$$

$$h_i(z)e_j(w) = \zeta^\circ_{ij}(z)e_j(w)h_i(z), \quad h_i(z)f_j(w) = \zeta^\circ_{ij}(z)^{-1}f_j(w)h_i(z). \tag{3.6}$$

这里的 $\zeta^\circ_{ij}(z)$是“键因子”：

$$\zeta^\circ_{ij}(z) = (-1)^{\delta_{ij}+|i|\cdot|j|}\frac{\prod_{a:i\to j}(\sigma_j + t_a - z)}{\prod_{b:j\to i}(z+t_b-\sigma_j)}, \text{ where } \sigma_j \text{ is the operator } e_{j,r}\mapsto e_{j,r+1},\ f_{j,r}\mapsto f_{j,r+1},\ (r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}).$$

容易看出，乘法映射

$$\mathcal{SH}^{\mathrm{nil}}_{Q,\mathsf{W}} \otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]} \mathcal{SH}^{\mathrm{nil,op}}_{Q,\mathsf{W}} \otimes \mathcal{H}^0_Q \to \mathcal{DSH}_\infty(Q,\mathsf{W})$$

是满射，但其单射性尚不明确。

令 $\mathcal{H}^0_Q$ 通过典范类作用于 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\mathbf{d}}$：

$$h_i(z) \mapsto (-1)^{1+\mathbf{v}_i+|i|\cdot|\mathbf{v}|+\sum_{i\to j}\mathbf{v}_j} z^{\mathrm{rk}\,\mathsf{U}_i} c_{-1/z}(\mathsf{U}_i), \text{ for } \mathsf{U}_i = \sum_{a:i\to j} t_a\mathsf{V}_j - \sum_{b:j\to i} t_b^{-1}\mathsf{V}_j + \mathsf{D}_{\mathrm{out},i} - \mathsf{D}_{\mathrm{in},i}, \tag{3.7}$$

其中 $\{t_a\}_{a\in Q_1}$ 是箭的 T_0-权，$c_{-1/z}(-)$ 表示变量为 $-1/z$ 的 T_0-等变陈多项式。

定理 3.3. 赋值 (3.3)、(3.4) 和 (3.7) 产生了一个作用于 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\mathbf{d}}$ 上的 $\mathcal{DSH}_\infty(Q,\mathsf{W})$ 作用。

证明。 关系 (3.6) 容易验证。对于关系 (3.5)，我们有

$$\begin{aligned} &e_i(z)f_j(w) - (-1)^{|i|\cdot|j|}f_j(w)e_i(z) \\ &= (-1)^\sharp\left(\frac{[\overline{\mathfrak{P}}(\mathbf{v}+\delta_i-\delta_j,\mathbf{v}-\delta_j,\underline{\mathbf{d}})]}{z-c_1(\mathcal{L}_i)}\frac{[\overline{\mathfrak{P}}(\mathbf{v}-\delta_j,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})]}{w-c_1(\mathcal{L}_j)} - \frac{[\overline{\mathfrak{P}}(\mathbf{v}-\delta_j+\delta_i,\mathbf{v}+\delta_i,\underline{\mathbf{d}})]}{w-c_1(\mathcal{L}_j)}\frac{[\overline{\mathfrak{P}}(\mathbf{v}+\delta_i,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})]}{z-c_1(\mathcal{L}_i)}\right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

若 $i\neq j$，则 (3.8) 右端的对应是平凡的；若 $i=j$，则 (3.8) 右端的对应支撑在对角线上，并且我们有

$$e_i(z)f_i(w) - (-1)^{|i|}f_i(w)e_i(z) = \Delta_*(\beta_i(z,w)) \in H^{\mathsf{T}_0}\left(\mathcal{M}(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})^{\times 2}, \mathsf{w}^{\mathrm{fr}}\boxminus\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}\right)_\Delta.$$

注意，$\beta_i(z,w)$ 完全由 $\mathcal{M}(\mathbf{d})$ 上的交叉理论决定，而这与势无关。因此，我们可以令势为零，再令 $e_i(z)f_i(w) - (-1)^{|i|}f_i(w)e_i(z)$ 作用于 $1\in H_{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}))$，得到：

$$\beta_i(z,w) = e_i(z)f_i(w)(1) - (-1)^{|i|}f_i(w)e_i(z)(1).$$

我们分两步计算上述内容，遵循 Neguţ [N] 对 Nakajima 箭图簇的 K-理论所做的类似计算。

步骤 1。 在 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 上定义两个分别位于上同调次数 0 和 1 的复形：

$$\mathcal{C}_i^+ = \left[\mathsf{V}_i \xrightarrow{(B_i,X_a)} \mathsf{D}_{\mathrm{out},i}\oplus\bigoplus_{a:i\to j} t_a\mathsf{V}_j\right], \qquad \mathcal{C}_i^- = \left[\mathsf{D}_{\mathrm{in},i}\oplus\bigoplus_{b:j\to i} t_b^{-1}\mathsf{V}_j \xrightarrow{(A_i,X_b)} \mathsf{V}_i\right]. \tag{3.9}$$

注意，由循环稳定性条件可知 $H^1(\mathcal{C}_i^-)=0$。投影

$$\pi^+ : \overline{\mathfrak{P}}(\mathbf{v},\mathbf{v}-\delta_i,\underline{\mathbf{d}}) \to \mathcal{M}(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})$$

是 T_0-等变同构于 $\mathbb{P}((\mathcal{C}_i^+)^\vee)$ 的，而 $\mathcal{L}_i$ 是 T_0-等变同构于 $\mathcal{O}(-1)$ 的。投影

$$\pi^- : \overline{\mathfrak{P}}(\mathbf{v}+\delta_i,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}}) \to \mathcal{M}(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})$$

is 与 T_0 等变同构于 $\mathbb{P}(\mathcal{C}_i^-)$，且 $\mathcal{L}_i$ 与 T_0 等变同构于 $\mathcal{O}(1)$。

令 V^+、V、V^- 分别表示 $\mathcal{M}(\mathbf{v}+\delta_i, \mathbf{d})$ $\mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{d})$ $\mathcal{M}(\mathbf{v}-\delta_i, \mathbf{d})$ 上的泛丛。引理 3.4 推出

$$e_{i,r}(1) = \pi_*^+\left(\frac{(-1)^{\mathbf{d}_{\mathrm{out},i}}}{z-c_1(\mathcal{O}(-1))}\right)_{z^{-r-1}} = (-1)^{\mathbf{v}_i+\sum_{i\to j}\mathbf{v}_j^+}\left[z^{\mathbf{d}_{\mathrm{out},i}-\mathbf{v}_i^+ +\sum_{i\to j}\mathbf{v}_j^+} c_{-1/z}\left(\mathsf{D}_{\mathrm{out},i}+\sum_{a:i\to j} t_a\mathsf{V}_j^+ - \mathsf{V}_i^+\right)\right]_{z^{-r-1}},$$

$$f_{i,s}(1) = \pi_*^-\left(\frac{(-1)^{|i|\cdot|\mathbf{v}|}}{w-c_1(\mathcal{O}(1))}\right)_{w^{-s-1}} = (-1)^{|i|\cdot|\mathbf{v}|}\left[w^{\mathbf{v}_i^- -\mathbf{d}_{\mathrm{in},i}-\sum_{j\to i}\mathbf{v}_j^-} c_{-1/w}\left(\mathsf{V}_i^- - \mathsf{D}_{\mathrm{in},i} - \sum_{b:j\to i} t_b^{-1}\mathsf{V}_j^-\right)\right]_{w^{-s-1}},$$

其中，我们分别取 z^{-r} 和 w^{-s} 在幂级数展开中的系数 .

步骤 2. 我们有

$$f_{i,s}e_{i,r}(1) = (-1)^{\mathbf{v}_i^+ +|i|\cdot|\mathbf{v}|+\sum_{i\to j}\mathbf{v}_j}\pi_*^-\left(\frac{z^{\mathbf{d}_{\mathrm{out},i}-\mathbf{v}_i^+ +\sum_{i\to j}\mathbf{v}_j^+}\pi^{+*}c_{-1/z}\left(\mathsf{D}_{\mathrm{out},i}+\sum_{a:i\to j}t_a\mathsf{V}_j^+ - \mathsf{V}_i^+\right)}{w-c_1(\mathcal{O}(1))}\right)_{z^{-r-1},w^{-s-1}}$$

$$=(-1)^{\mathbf{v}_i^+ +|i|\cdot|\mathbf{v}|+\sum_{i\to j}\mathbf{v}_j} z^{\mathbf{d}_{\mathrm{out},i}-\mathbf{v}_i+\sum_{i\to j}\mathbf{v}_j} c_{-1/z}\left(\mathsf{D}_{\mathrm{out},i}+\sum_{a:i\to j}t_a\mathsf{V}_j - \mathsf{V}_i\right)\pi_*^-\left(\frac{\prod_{a:i\to i}(z-t_a-c_1(\mathcal{O}(1)))}{(z-c_1(\mathcal{O}(1)))(w-c_1(\mathcal{O}(1)))}\right)_{z^{-r-1},w^{-s-1}}.$$

再次使用引理 3.4，得到：

$$f_{i,s}e_{i,r}(1) =(-1)^{\mathbf{v}_i^+ +|i|\cdot|\mathbf{v}|+\sum_{i\to j}\mathbf{v}_j} z^{\mathbf{d}_{\mathrm{out},i}-\mathbf{v}_i+\sum_{i\to j}\mathbf{v}_j} w^{\mathbf{v}_i-\mathbf{d}_{\mathrm{in},i}-\sum_{j\to i}\mathbf{v}_j} c_{-1/z}\left(\mathsf{D}_{\mathrm{out},i}+\sum_{a:i\to j}t_a\mathsf{V}_j - \mathsf{V}_i\right)$$
$$\times\frac{\prod_{a:i\to i}(z-t_a-w)}{z-w} c_{-1/w}\left(\mathsf{V}_i - \mathsf{D}_{\mathrm{in},i} - \sum_{b:j\to i} t_b^{-1}\mathsf{V}_j\right)\Big|_{z^{-r-1},w^{-s-1}}.$$

类似地，

$$e_{i,r}f_{i,s}(1) = (-1)^{|i|\cdot|\mathbf{v}|+\mathbf{d}_{\mathrm{out},i}}\pi_*^+\left(\frac{w^{\mathbf{v}_i^- -\mathbf{d}_{\mathrm{in},i}-\sum_{j\to i}\mathbf{v}_j^-}\pi^{-*}c_{-1/w}\left(\mathsf{V}_i^- - \mathsf{D}_{\mathrm{in},i} - \sum_{b:j\to i}t_b^{-1}\mathsf{V}_j^-\right)}{z-c_1(\mathcal{O}(-1))}\right)_{w^{-s-1},z^{-r-1}}$$

$$=(-1)^{|i|\cdot|\mathbf{v}|+\mathbf{d}_{\mathrm{out},i}} w^{\mathbf{v}_i-\mathbf{d}_{\mathrm{in},i}-\sum_{j\to i}\mathbf{v}_j} c_{-1/w}\left(\mathsf{V}_i - \mathsf{D}_{\mathrm{in},i} - \sum_{b:j\to i} t_b^{-1}\mathsf{V}_j\right)\pi_*^+\left(\frac{\prod_{b:i\to i}(w+t_b-c_1(\mathcal{O}(-1)))}{(w-c_1(\mathcal{O}(-1)))(z-c_1(\mathcal{O}(-1)))}\right)_{w^{-s-1},z^{-r-1}}$$

$$=(-1)^{\mathbf{v}_i^+ +|i|\cdot|\mathbf{v}|+\sum_{i\to j}\mathbf{v}_j} z^{\mathbf{d}_{\mathrm{out},i}-\mathbf{v}_i+\sum_{i\to j}\mathbf{v}_j} w^{\mathbf{v}_i-\mathbf{d}_{\mathrm{in},i}-\sum_{j\to i}\mathbf{v}_j} c_{-1/w}\left(\mathsf{V}_i - \mathsf{D}_{\mathrm{in},i} - \sum_{b:j\to i} t_b^{-1}\mathsf{V}_j\right)$$
$$\times\frac{\prod_{b:i\to i}(w+t_b-z)}{w-z} c_{-1/z}\left(\mathsf{D}_{\mathrm{out},i}+\sum_{a:i\to j}t_a\mathsf{V}_j - \mathsf{V}_i\right)\Big|_{w^{-s-1},z^{-r-1}}.$$

那么，$e_{i,\ r}f_{i,\ s}(1)$ 和 $(-1)^{|i|}f_{i,\ s}e_{i,\ r}(1)$ 由同一个有理函数中 $w^{-s-1}z^{-r-1}$ 的系数给出：

$$(-1)^{\mathbf{v}_i^+ +|i|\cdot|\mathbf{v}|+\sum_{i\to j}\mathbf{v}_j} z^{\mathbf{d}_{\mathrm{out},i}-\mathbf{v}_i+\sum_{i\to j}\mathbf{v}^j} w^{\mathbf{v}_i-\mathbf{d}_{\mathrm{in},i}-\sum_{j\to i}\mathbf{v}^j}$$
$$\cdot c_{-1/w}\left(\mathsf{V}_i - \mathsf{D}_{\mathrm{in},i} - \sum_{b:j\to i} t_b^{-1}\mathsf{V}_j\right) c_{-1/z}\left(\mathsf{D}_{\mathrm{out},i}+\sum_{a:i\to j}t_a\mathsf{V}_j - \mathsf{V}_i\right)\frac{\prod_{b:i\to i}(w+t_b-z)}{w-z},$$

但展开的顺序不同。具体而言，对于 $e_{i,r}f_{i,s}(1)$，我们展开为

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \cdots,$$

对于 $(-1)^{|i|}f_{i,\ s}e_{i,\ r}(1)$，我们展开为

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z} - \frac{w}{z^2} + \cdots.$$

差值由有理函数在 $w=z$ 处的留数中 z^{-r-s-1} 的系数给出，即

$$e_{i,r}f_{i,s}(1)-(-1)^{|i|}f_{i,s}e_{i,r}(1)=(-1)^{1+\mathbf{v}_i+|i|\cdot|\mathbf{v}|+\sum_{i\to j}\mathbf{v}_j}\left(\prod_{b:i\to i}t_b\right)z^{\mathrm{rk}\,\mathsf{U}_i}c_{-1/z}\left(\mathsf{U}_i\right)\Big|_{z^{-r-s-1}}=\gamma_i h_{i,r+s}.$$

证明至此完成。 □

在上述证明中，我们用到了以下引理，其证明留给感兴趣的读者。

引理 3.4。设 X 是一个簇，其上有一个由向量丛组成的复形 $[\mathcal{V}\to\mathcal{U}]$，其上同调次数为 -1 和 0，$p\colon \mathbb{P}([\mathcal{V}\to\mathcal{U}])\to X$ 表示投影，则

$$p_*\left(\frac{1}{z-c_1(\mathcal{O}(1))}\right)=\left[z^{\mathrm{rk}\,\mathcal{V}-\mathrm{rk}\,\mathcal{U}}\frac{c_{-1/z}(\mathcal{V})}{c_{-1/z}(\mathcal{U})}\right]_{<0},$$

其中下标 <0 表示取幂级数的负幂部分。

3.2. **对称箭图的情形**。当 Q 是对称的时，我们可以对 $\mathcal{DSH}_\infty(Q,\mathsf{W})$ 中的乘法进行“扭曲”，以便与已知的 Yangian 型代数进行比较。

记号 3.5。若 $|i|=0$（分别地，$|i|=1$），则称 $i\in Q_0^{\mathrm{b}}$（分别地，$i\in Q_0^{\mathrm{f}}$），其中 $|\cdot|$ 由 (3.2) 给出。这里 b 表示玻色，而 f 表示 费米。固定一个分解 $Q_1=\mathcal{A}\sqcup\mathcal{A}^*\sqcup\mathcal{E}$，使得

- 存在一个同构 $\iota\colon \mathcal{A}\cong\mathcal{A}^*,(a:\ i\to j)\ \mapsto\ (a^*:\ j\to i)$,
- $\mathcal{E}$ 是一个边环集合，使得尾映射 $t\colon \mathcal{E}\to Q_0$ 将 $\mathcal{E}$ 与 $Q_{\mathrm{b}0}$对应起来。

此外，我们在 Q_0^{f}上固定一个全序 $\prec$。

给定上述数据，我们在 $\mathcal{H}_Q^{\mathrm{nil}},\mathsf{W}$ (3.1) 上赋予扭曲霍尔乘积：

$$f\circledast g=(-1)^{(\mathbf{v}^{(1)}|\mathbf{v}^{(2)})}f\star g,\quad \text{for}\ \ f\in\mathcal{H}_{Q,\mathsf{W}}^{\mathrm{nil}}(\mathbf{v}^{(1)}),\ g\in\mathcal{H}_{Q,\mathsf{W}}^{\mathrm{nil}}(\mathbf{v}^{(2)}), \tag{3.10}$$

其中 $f\star g$ 是通常的霍尔乘积，并且

$$(\mathbf{v}^{(1)}|\mathbf{v}^{(2)}):=\sum_{(i\to j)\in\mathcal{A}}\mathbf{v}_i^{(1)}\cdot\mathbf{v}_j^{(2)}+\sum_{k\prec l\in Q_0^{\mathrm{f}}}\mathbf{v}_k^{(1)}\cdot\mathbf{v}_l^{(2)}. \tag{3.11}$$

令 $\widetilde{\mathcal{H}}_Q^{\mathrm{nil}},\mathsf{w}$ 表示带有上述扭曲乘积的卷积上同调代数，$\widetilde{\mathcal{SH}}_Q^{\mathrm{nil}},\mathsf{w}$ 表示其球面子代数，并令 $\widetilde{\mathcal{SH}}^{\mathrm{nil}},_Q{}^{\mathrm{op}},\mathsf{w}$表示其 $\mathbb{Z}/2$-分次对代数。注意，对乘积为

$$f\circledast^{\mathrm{op}}g=(-1)^{(\mathbf{v}^{(2)}|\mathbf{v}^{(1)})+|\mathbf{v}^{(1)}|\cdot|\mathbf{v}^{(2)}|}g\star f,\quad \text{for}\ \ f\in\mathcal{H}_{Q,\mathsf{W}}^{\mathrm{nil}}(\mathbf{v}^{(1)}),\ g\in\mathcal{H}_{Q,\mathsf{W}}^{\mathrm{nil}}(\mathbf{v}^{(2)}).$$

定义 3.6。当 Q 为对称时，*Cartan* 双 *Yangian* $\mathcal{DSH}_\infty(Q,\mathsf{W})$ 是由自由积 $\widetilde{\mathcal{SH}}_Q^{\mathrm{nil}},\mathsf{w}*\widetilde{\mathcal{SH}}^{\mathrm{nil}},_Q{}^{\mathrm{op}},\mathsf{w}*\mathcal{H}_Q^0$ 模关系得到的 $\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]$-代数：

$$e_{i,r}f_{j,s}-(-1)^{|i|\cdot|j|}f_{j,s}e_{i,r}=(-1)^{(\delta_i|\delta_i)}\delta_{ij}\gamma_i h_{i,r+s},\ \ \text{where}\ \gamma_i:=\prod_{e:i\to i}t_e, \tag{3.12}$$

$$h_i(z)e_j(w)=\zeta_{ij}(z)e_j(w)h_i(z),\quad h_i(z)f_j(w)=\zeta_{ij}(z)^{-1}f_j(w)h_i(z), \tag{3.13}$$

其中，$\zeta_{ij}(z)$ 是“键因子”：

$$\zeta_{ij}(z)=\frac{\prod_{a:i\to j}(z-t_a-\sigma_j)}{\prod_{b:j\to i}(z+t_b-\sigma_j)},\ \text{where}\ \sigma_j\ \text{is the operator}\ e_{j,r}\mapsto e_{j,r+1},\ f_{j,r}\mapsto f_{j,r+1},\ (r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}). \tag{3.14}$$

对于 $\mu\in\mathbb{Z}^{Q_0}$，*Drinfeld* 型 μ-移位杨 *Yangian* $\mathcal{D}\widetilde{\mathcal{SH}}_\mu(Q,\mathsf{W})$ 是 $\mathcal{D}\widetilde{\mathcal{SH}}_\infty(Q,\mathsf{W})$ 关于以下关系的商

$$h_{i,t}=0\ \text{ for }\ t<-\mu_i-1,\quad h_{i,-\mu_i-1}=1. \tag{3.15}$$

定理 3.7。令 $\mu:=\mathbf{d}_{\mathrm{out}}-\mathbf{d}_{\mathrm{in}}\in\mathbb{Z}^{Q_0}$。以下赋值

$$e_i(u)\mapsto\frac{(-1)^{(\delta_i|\mathbf{v}+\delta_i)}}{u-c_1(\mathcal{L}_i)}\,[\overline{\mathfrak{P}}(\mathbf{v}+\delta_i,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})], \tag{3.16}$$

$$f_i(u)\mapsto\frac{(-1)^{1+\mathbf{d}_{\mathrm{out},i}+|i|\cdot|\mathbf{v}|+(\mathbf{v}-\delta_i|\delta_i)}}{u-c_1(\mathcal{L}_i)}\,[\overline{\mathfrak{P}}(\mathbf{v},\mathbf{v}-\delta_i,\underline{\mathbf{d}})]^{\mathrm{t}}, \tag{3.17}$$

$$h_i(u) \mapsto u^{\mu_i} c_{-1/u}\left(\mathsf{U}_i\right), \quad \text{for } \mathsf{U}_i = \sum_{a:i\to j} t_a \mathsf{V}_j - \sum_{b:j\to i} t_b^{-1}\mathsf{V}_j + \mathsf{D}_{\mathrm{out},i} - \mathsf{D}_{\mathrm{in},i}\,, \tag{3.18}$$

在 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}$ 上定义一个 $\mathcal{DS}\widetilde{\mathcal{H}}_\mu(Q,\mathsf{W})$ 作用。

证明。这直接由定理 3.3 得出。 □

备注 3.8。为了使移位 Yangian 的概念定义良好，假设箭图是对称的至关重要，这样 (3.18) 中 U_i 的秩就只取决于框架的维数。

例 3.9。设数对 (A, D) 是一个带对称化子的广义卡当矩阵，则可以构造一个箭图 $Q,\widetilde{\ }$，其关联的三重箭图 Q 带有一个势 W，参见附录 A.1。

令 $Y^+(\mathfrak{g}_{A,D})$ 为与 (A, D) [GTL, YZ2], 相关联的可对称化 *Kac-Moody* 李代数 $\mathfrak{g}_{A,D}$ 的 Yangian 的正 部分。关于其定义的回顾，参见附录 A.1。 $Y^+(\mathfrak{g}_{A,D})$ 由 $\{x_{i,r}^+\}_{i\in Q_0}^{r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 生成；根据命题 A.3，存在一个 $\mathbb{C}(\hbar)$-代数的满射：

$$Y^+(\mathfrak{g}_{A,D}) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar) \twoheadrightarrow \widetilde{\mathcal{SH}}^{\mathrm{nil}}_{\widetilde{Q},\mathsf{W}} \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar), \quad x_i^+(z) := \sum_{r\geqslant 0} x_{i,r}^+ z^{-r-1} \mapsto e_i(z).$$

给定 $\mu \in \mathbb{Z}^{Q_0}$，移位杨扬子代数 $Y_\mu(\mathfrak{g}_{A,\ D})$ 是由自由积得到的 $\mathbb{C}[\hbar]$-代数

$$Y^+(\mathfrak{g}_{A,D}) * Y^+(\mathfrak{g}_{A,D})^{\mathrm{op}} * \mathbb{C}[\psi_{i,s} \mid i \in Q_0, s \in \mathbb{Z}]$$

满足关系

$$[x_{i,r}^+, x_{j,s}^-] = \delta_{ij}\psi_{i,r+s},$$

$$\psi_i(z)x_j^+(w) = \zeta_{ij}(z)x_j^+(w)\psi_i(z), \quad \psi_i(z)x_j^-(w) = \zeta_{ij}(z)^{-1}x_j^-(w)\psi_i(z), \tag{3.19}$$

$$\psi_{i,r} = 0 \text{ for } r < -\mu_i - 1, \quad \psi_{i,-\mu_i-1} = 1.$$

这里 $\psi_i(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \psi_{i,\ r} z^{-r-1}$，并且 $\zeta_{ij}(z)$ 是键因子

$$\zeta_{ij}(z) = \frac{z + d_i a_{ij}\hbar/2 - \sigma_j}{z - d_i a_{ij}\hbar/2 - \sigma_j}, \text{ where } \sigma_j \text{ is the operator } x_{j,r}^\pm \mapsto x_{j,r+1}^\pm, \ (r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}).$$

于是存在一个 $\mathbb{C}(\hbar)$-代数的满射映射：

$$Y_\mu(\mathfrak{g}_{A,D}) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar) \twoheadrightarrow \mathcal{DS}\widetilde{\mathcal{H}}_\mu(\widetilde{Q},\mathsf{W}) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar),$$
$$x_i^+(z) \mapsto e_i(z), \quad x_i^-(z) \mapsto \frac{1}{d_i\hbar} f_i(z), \quad \psi_i(z) \mapsto h_i(z).$$

例3.10。设 $m,\ n \in \mathbb{N}$ 满足 $\max\{mn, m, n\} \geqslant 3$，并令 $Q_0 = \mathbb{Z}/(m+n)\mathbb{Z}$。类型为 $(m,\ n)$ 的**奇偶序列**是一个 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_{m+n})$ 元组，其中有 ± 1 个条目等于 1。给定奇偶序列 $\mathbf{s}$，可以定义一个带势 W 的对称箭图 Q，见附录A.2。

令 $Y^+(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n|m})$ 表示 $\mathfrak{sl}_{n|m}$ 的正部分仿射杨扬子，其定义见 [U, VV1], ，我们将在附录A.2中对其进行回顾。根据命题 A.7，存在一个满射 $\mathbb{C}(\hbar,\varepsilon)$-代数映射

$$Y^+(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n|m}) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar,\varepsilon]} \mathbb{C}(\hbar,\varepsilon) \twoheadrightarrow \widetilde{\mathcal{SH}}^{\mathrm{nil}}_{Q,\mathsf{W}} \otimes_{\mathbb{C}[\hbar,\varepsilon]} \mathbb{C}(\hbar,\varepsilon), \quad x_i^+(z) \mapsto e_i(z),$$

对于 $\mu \in \mathbb{Z}^{Q_0}$, th $\widehat{\ }$e 平移仿射杨氏代数 $Y_\mu(\mathfrak{sl}_{n|m})$ 是由自由积得到的 $\mathbb{C}[\hbar,\varepsilon]$-代数

$$Y^+(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n|m}) * Y^+(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n|m})^{\mathrm{op}} * \mathbb{C}[\psi_{i,s} \mid i \in Q_0, s \in \mathbb{Z}]$$

满足关系

$$[x_{i,r}^+, x_{j,s}^-] = \delta_{ij}\psi_{i,r+s},$$

$$\psi_i(z)x_j^+(w) = \zeta_{ij}(z)x_j^+(w)\psi_i(z), \quad \psi_i(z)x_j^-(w) = \zeta_{ij}(z)^{-1}x_j^-(w)\psi_i(z), \tag{3.20}$$

$$\psi_{i,r} = 0 \text{ for } r < -\mu_i - 1, \quad \psi_{i,-\mu_i-1} = 1.$$

这里 $\psi_i(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \psi_{i,r} z^{-r-1}$，而 $\zeta_{ij}(z)$ 是键因子

$\zeta_{ij}(z) = \dfrac{z - a_{ij}\hbar - m_{ij}\varepsilon - \sigma_j}{z + a_{ij}\hbar - m_{ij}\varepsilon - \sigma_j}$，其中 a_{ij} 和 m_{ij} 定义于 (A.2) 中，而 σ_j 是算子 $x_{j\ ,\ r}^\pm \mapsto x_{j\ ,\ r+1}^\pm$，$(r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$。

于是存在一个从 $\mathbb{C}(\hbar)$-代数到的满射映射：

$$Y_\mu(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n|m}) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar,\varepsilon]} \mathbb{C}(\hbar,\varepsilon) \twoheadrightarrow \widetilde{\mathcal{DSH}}_\mu(Q,\mathsf{W}) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar,\varepsilon]} \mathbb{C}(\hbar,\varepsilon),$$

$$x_i^+(z) \mapsto e_i(z), \quad x_i^-(z) \mapsto \begin{cases} \frac{-1}{2s_i\hbar} f_i(z), & i \in Q_0^{\mathrm{b}} \\ f_i(z), & i \in Q_0^{\mathrm{f}} \end{cases}, \quad \psi_i(z) \mapsto h_i(z).$$

例 3.11. 设势 W 和 W° 对应的 Q 与 Q° 分别见附录 §A.3.1 和 §A.3.2。

设 $Y^+(D_\lambda)$ 和 $Y^+(D_\lambda^\circ)$ 是 [LZ], 中定义的例外李超代数 $D(2,\ 1;\ \lambda)$ 的 Yangian 正部分的两个版本。相关综述见附录 §A.3。由命题 A.10 和 A.11 可知，存在满射 $\mathbb{C}$-代数映射

$$Y^+(D_\lambda) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar,\lambda]} \mathbb{C}(\hbar,\lambda) \twoheadrightarrow \widetilde{\mathcal{SH}}^{\mathrm{nil}}_{Q,\mathsf{W}} \otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]} \mathbb{C}(\mathsf{t}_0), \quad Y^+(D_\lambda^\circ) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar,\lambda]} \mathbb{C}(\hbar,\lambda) \twoheadrightarrow \widetilde{\mathcal{SH}}^{\mathrm{nil}}_{Q^\circ,\mathsf{W}^\circ} \otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]} \mathbb{C}(\mathsf{t}_0),$$

定义如下

$$x_i^+(z) \mapsto e_i(z), \quad \hbar \mapsto 2\hbar_1, \quad \lambda \mapsto \hbar_2/\hbar_1.$$

对于 $\mu \in \mathbb{Z}^{Q_0}$, $\mathfrak{g} = D_\lambda$ 或 D_λ° 的移位杨扬子代数 $Y_\mu(\mathfrak{g})$ 是由自由积得到的 $\mathbb{C}[\hbar,\lambda]$-代数

$$Y^+(\mathfrak{g}) * Y^+(\mathfrak{g})^{\mathrm{op}} * \mathbb{C}[\psi_{i,s} \mid i \in Q_0 \text{ or } Q_0^\circ, s \in \mathbb{Z}]$$

满足关系

$$[x_{i,r}^+, x_{j,s}^-] = \delta_{ij}\psi_{i,r+s},$$

$$\psi_i(z)x_j^+(w) = \zeta_{ij}(z)x_j^+(w)\psi_i(z), \quad \psi_i(z)x_j^-(w) = \zeta_{ij}(z)^{-1}x_j^-(w)\psi_i(z), \tag{3.21}$$

$$\psi_{i,r} = 0 \text{ for } r < -\mu_i - 1, \quad \psi_{i,-\mu_i-1} = 1.$$

这里 $\psi_i(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \psi_{i,\ r} z^{-r-1}$，且 $\zeta_{ij}(z)$ 是键因子

$$\zeta_{ij}(z) = \frac{z - a_{ij}\hbar - \sigma_j}{z + a_{ij}\hbar - \sigma_j}, \text{ where } a_{ij} \text{ is defined in (A.4), and } \sigma_j \text{ is the operator } x_{j,r}^\pm \mapsto x_{j,r+1}^\pm, \ (r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}).$$

于是存在从 $\mathbb{C}$-代数出发的满射映射：

$$Y_\mu(D_\lambda) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar,\lambda]} \mathbb{C}(\hbar,\lambda) \twoheadrightarrow \widetilde{\mathcal{DSH}}_\mu(Q,\mathsf{W}) \otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]} \mathbb{C}(\mathsf{t}_0), \quad Y_\mu(D_\lambda^\circ) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar,\lambda]} \mathbb{C}(\hbar,\lambda) \twoheadrightarrow \widetilde{\mathcal{DSH}}_\mu(Q^\circ,\mathsf{W}^\circ) \otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]} \mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$$

由.....给出

$$x_i^+(z) \mapsto e_i(z), \quad x_i^-(z) \mapsto f_i(z), \quad \psi_i(z) \mapsto h_i(z), \quad \hbar \mapsto 2\hbar_1, \quad \lambda \mapsto \hbar_2/\hbar_1.$$

Q 带势箭图与仿射化 D_λ 和 D_λ° 相关的情形已在 [Bao 中研究].

注 3.12。更一般地，对于对称带势箭图，我们预期 Galakhov-Li-Yamazaki 在 [GLY, LY] 中引入的（移位）箭图杨 Yangian in- 也存在到 Drinfeld 型杨扬子代数 $\mathcal{DSH}_\mu(Q,\ \mathsf{W})$ 的代数映射（该代数仅在箭图对称时有定义，见注 3.8）。此外，我们预期，在 [GLY, LY, L] 中研究的（移位）箭图杨 Yangian 的晶体表示可以与 $\mathcal{DSH}_\mu(Q,\ \mathsf{W})$ 表示 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}$ d 对应起来，使得这些晶体对应于 $\mathrm{Crit}_{\mathcal{M}_{\theta(\mathbf{d})}}(\mathsf{w}^{\mathrm{fr}})$ 的环面不动点。

3.3. **通过稳定包络构造升算子/降算子**。

定义 3.13. 若一个框架 $\mathbf{d}$ 极小对称 满足 $\underline{\mathbf{d}}_{\mathrm{in}} = \mathbf{d}_{\mathrm{out}} = \delta_i$，其中 $i \in Q_0$；对于极小对称框架 δ_i，若带框架势 W^{fr} 可容许，则称其为

$$\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}\big|_{X_a=0,\,\forall\, a\in Q_1} = 0.$$

例 3.14. 一个不可容许的例子是 $\mathsf{W}^{\mathrm{fr}} = \mathsf{W} + A_iB_i$，其中 A_i（分别为 B_i）是节点 i 处的入射（分别为出射）框架。在这种情况下，对于所有 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$，都有 $\mathrm{Crit}_{\mathcal{M}(\mathbf{v},\delta_i)}(\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}) = \emptyset$，特别地 $H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(\mathbf{v}\ \delta_i),\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}) = 0$。可容许性条件确保上同调至少在 $\mathbf{v} = \delta_i$ 处非平凡，如下一个引理所示。

引理 3.15. 假设带框架势 W^{fr} 在 $\mathcal{M}(\delta_i)$ 上是可容许的，且 $i \in Q_0$ 处每个边环上的 T_0-等变权均非零（等价地，$\gamma_i = \prod_{e:i\to i} t_e$ 非零），则

$$\dim_{\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)} H^{\mathsf{T}_0}\left(\mathcal{M}(\delta_i,\delta_i), \mathsf{w}^{\mathrm{fr}}\right) \otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]} \mathbb{C}(\mathsf{t}_0) = 1.$$

证明. 我们有 $\mathcal{M}(\delta_i,\delta_i)\cong\mathbb{C}^{\mathsf{g}_i+1}$，其中 $\mathsf{g}_i=\#(i\to i\in Q_1)$ 是 i处环的数量。分解 $\mathbb{C}^{\mathsf{g}_i+1}=\mathbb{C}^{\mathsf{g}_i}\times\mathbb{C}$，则 $\mathbb{C}^{\mathsf{g}_i}$ 上的 T_0-权均非零，且 $\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}\big|_{\mathbb{C}}=0$。由等变局部化可得

$$H^{\mathsf{T}_0}\left(\mathcal{M}(\delta_i,\delta_i),\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}\right)\otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]}\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)\cong H^{\mathsf{T}_0}(\mathbb{C})\otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]}\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)=\mathbb{C}(\mathsf{t}_0).$$ □

记号 3.16。 在以下讨论中，我们使用如下记号：

$$|\delta_i\rangle:=\mathrm{can}([\mathbb{C}])\in H^{\mathsf{T}_0}\left(\mathcal{M}(\delta_i,\delta_i),\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}\right),\quad |\mathbf{0}\rangle:=[\mathrm{pt}]\in H^{\mathsf{T}_0}\left(\mathcal{M}(\mathbf{0},\delta_i),\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}\right)=H_{\mathsf{T}_0}(\mathrm{pt}),$$

其中 $\mathbb{C}$ 是第 $\mathcal{M}$分解中的分支 δ_i，δ_i，见引理 3.15 的证明。

考虑框架向量空间 $u\delta_i+\mathbf{d}$，其中 u 是 $\mathsf{A}=\mathbb{C}_u^*$的等变变量。下一个结果将明确描述稳定包络 $\mathsf{Stab}_{u>0}$[3]的第一个非对角项。令

$$F=\mathcal{M}(\mathbf{0},\delta_i)\times\mathcal{M}(\mathbf{v}+\delta_i,\underline{\mathbf{d}}),\quad F'=\mathcal{M}(\delta_i,\delta_i)\times\mathcal{M}(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}}) \tag{3.22}$$

是 $\mathcal{M}(\mathbf{v}+\delta_i,\ \delta_i+\mathbf{d})^{\mathbb{C}_u^*}$ 中的两个连通分支，并且

$$\langle\mathbf{0}|\,\mathrm{Stab}_{u>0}\,|\delta_i\rangle\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]}\left(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}}}(\mathbf{v}),\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}}}(\mathbf{v}+\delta_i)\right)$$

是 $\mathsf{Stab}_{u>0}\big|_{F\times F'}$ 在基 $|\delta_i\rangle\otimes\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}\mathbf{d}}(\mathbf{v})$ 和 $|\mathbf{0}\rangle\otimes\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}\mathbf{d}}(\mathbf{v}+\delta_i)$ 中的矩阵元。

命题 3.17。 假设 $\mathcal{M}(\delta_i)$ 上的带框架势是可容许的，并假设对于所有 $i\in Q_0$ 都有 $\mathbf{d}_{\mathrm{in},\,i}\geqslant\mathbf{d}_{\mathrm{out},\,i}$，则矩阵元 $\langle\mathbf{0}|\mathsf{Stab}_{u>0}\,|\delta_i\rangle$ 由以下对应诱导：

$$(-u)^{\mathbf{v}_i}c_{-1/u}(\mathsf{V}_i)\cap[\overline{\mathfrak{P}}(\mathbf{v}+\delta_i,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})].$$

这里，$c_{-1/u}(-)$ 表示变量为 $-1/u$ 的 T_0-等变陈多项式。

命题 3.17 的证明源于 Negut[N 关于 Nakajima 箭图簇的 K-理论的类似论证，见命题 3.16]，，现解释如下。首先，我们有以下对应于 N，命题 2.19] 的类比结果。

引理 3.18。 固定维数向量$\mathbf{v}$ $\widetilde{\mathbf{v}}$、$\mathbf{d}$、$\widetilde{\mathbf{d}}$，以及线性映射 $p_i\colon D_{\mathrm{in},\,i}\to D_{\mathrm{in},\,i}$，$q_i\colon D_{\mathrm{out},\,i}\to D_{\mathrm{out},\,i}$，对所有 $i\in Q_0$ 均成立。考虑定义在 $\mathcal{M}(\widetilde{\mathbf{v}},\widetilde{\mathbf{d}})\times\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 上的如下向量丛复形：

$$\bigoplus_{i\in Q_0}\mathrm{Hom}(\widetilde{\mathsf{V}}_i,\mathsf{V}_i)\xrightarrow{f}\bigoplus_{(a\colon i\to j)\in Q_1}\mathrm{Hom}(\widetilde{\mathsf{V}}_i,\mathsf{V}_j)\oplus\bigoplus_{i\in Q_0}\left(\mathrm{Hom}(\widetilde{\mathsf{D}}_{\mathrm{in},i},\mathsf{V}_i)\oplus\mathrm{Hom}(\widetilde{\mathsf{V}}_i,\mathsf{D}_{\mathrm{out},i})\right),$$

其上同调次数为 -1 和 0，映射 f 定义如下：

$$f(\{\psi_i\}_{i\in Q_0})=(X_a\psi_{t(a)}-\psi_{h(a)}X_a,\psi_i\widetilde{A}_i,B_i\psi_i),$$

其中 A_i、B_i、X_a 是 (2.1) 中针对 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 的映射；对于 A_i 在 $\mathcal{M}(\widetilde{\mathbf{v}},\widetilde{\mathbf{d}})$ 中的情形，同理。

于是映射 f 是纤维上的单射，因此该复形的上同调定义了一个向量丛 $\mathcal{F}$。此外，赋值

$$s\left((\widetilde{X}_a,\widetilde{A}_i,\widetilde{B}_i),(X_a,A_i,B_i)\right)=(0,A_ip_i,q_i\widetilde{B}_i) \tag{3.23}$$

诱导出一个截面 $s\in\Gamma(\mathcal{M}(\widetilde{\mathbf{v}},\widetilde{\mathbf{d}})\times\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})\ \mathcal{F})$，其零点集是成对的带框箭图表示 $(V_i,D_{\mathrm{in},i},D_{\mathrm{out},i})$、$(V_i,D_{\mathrm{in},i},D_{\mathrm{out},i})$以及一个带框架的箭图表示同态

$$(\widetilde{V}_i,\widetilde{D}_{\mathrm{in},i},\widetilde{D}_{\mathrm{out},i})\xrightarrow{(\psi_i,p_i,q_i)}(V_i,D_{\mathrm{in},i},D_{\mathrm{out},i}).$$

$\{\psi_i\}_{i\in Q^0}$ 若存在，则它是唯一确定的。如果 p_i 对所有 $i\in Q_0$ 都是满射，那么 ψ_i 也都是满射。

证明。 证明与 [N, 命题 2.19] 的证明类似，细节从略。 □

对于维数向量 $\widetilde{\mathbf{v}}=\delta_i+\mathbf{v}$，将引理 3.18 应用于投影

$$\mathbb{C}^{\underline{\delta_i}}\oplus\mathbb{C}^{\underline{\mathbf{d}}}\to\mathbb{C}^{\underline{\mathbf{d}}},$$

我们得到 $\mathcal{F}$ 上的一个向量丛 $\mathcal{M}(\mathbf{v}+\delta_i,\underline{\delta_i}+\underline{\mathbf{d}})\times\mathcal{M}(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})$，以及一个截面

$$s\in\Gamma(\mathcal{M}(\mathbf{v}+\delta_i,\underline{\delta_i}+\underline{\mathbf{d}})\times\mathcal{M}(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}}),\mathcal{F}).$$

将引理 3.18 应用于恒等映射

$$\mathbb{C}^{\underline{\mathbf{d}}}\xrightarrow{\mathrm{id}}\mathbb{C}^{\underline{\mathbf{d}}},$$

[3]根据 [COZZ1, 命题 9.23]，这与 Hall 包络 (2.3) 一致。

我们得到一个位于 $\mathcal{M}(\mathbf{v}+\delta_i,\ \mathbf{d})\ \times \mathcal{M}(\mathbf{v},\ \mathbf{d})$ 上的向量丛 $\mathcal{F}$，以及一个截面

$$\bar{s} \in \Gamma(\mathcal{M}(\mathbf{v}+\delta_i, \underline{\mathbf{d}}) \times \mathcal{M}(\mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}}), \overline{\mathcal{F}}).$$

于是我们得到 [N 的如下类似结论，即断言 3.17], , 证明从略。

引理 3.19. 吸引集闭包 $\mathrm{Attr}_{u>0}(\Delta_{F'}) \subset \mathcal{M}(\mathbf{v}+\delta_i, \delta_i+\mathbf{d}) \times \mathcal{M}(\delta_i, \delta_i) \times \mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{d})$ 是一个局部完全交，由截面 $s \in \Gamma(\mathcal{M}(\mathbf{v}+\delta_i, \delta_i+\mathbf{d}) \times \mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{d})\ \mathcal{F})$ 切出，此外还有 $(\mathbf{g}_i+1)$ 个额外方程，其中 $\mathbf{g}_i$ 是节点 i 处环的数量。

命题 3.17 证明的关键，是对矩阵元 $\mathrm{Stab}_{u>0}\big|_{F\times F'}$ 到连通分支 F, F' 的乘积的如下描述 (3.22)。

引理 3.20. 交 $\mathrm{Attr}_{u>0}(\Delta_{F'}) \bigcap (F \times F')$ 是光滑的，由截面 $\bar{s} \in \Gamma(\mathcal{M}(\mathbf{v}+\delta_i, \mathbf{d}) \times \mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{d})\ \mathcal{F})$ 切出，此外还有 $(\mathbf{g}_i+1)$ 个额外方程。

证明。 由引理 3.19，$\mathrm{Attr}_{u>0}(\Delta_{F'}) \bigcap (F \times F')$ 由将 $s \in \Gamma(\mathcal{M}(\mathbf{v}+\delta_i, \delta_i+\mathbf{d}) \times \mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{d})\ \mathcal{F})$ 限制到 $F \times \mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{d}) \cong \mathcal{M}(\mathbf{v}+\delta_i, \mathbf{d}) \times \mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{d})$ 所得到的方程以及 $(\mathbf{g}_i+1)$ 个额外方程定义。注意到

$$\mathcal{F}\big|_{\mathcal{M}(\mathbf{v}+\delta_i, \underline{\mathbf{d}}) \times \mathcal{M}(\mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}})} \cong \overline{\mathcal{F}} \oplus \mathrm{Hom}(u\,\mathbb{C}, \mathsf{V}_i) \tag{3.24}$$

并且在此条件下我们有

$$s\big|_{\mathcal{M}(\mathbf{v}+\delta_i, \underline{\mathbf{d}}) \times \mathcal{M}(\mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}})} = (\bar{s}, 0).$$

因此，$\mathrm{Attr}_{u>0}(\Delta_{F'}) \bigcap (F \times F')$ 由 $\bar{s}$ 以及 $(\mathbf{g}_i+1)$ 个额外方程定义

.

光滑性是以下观察的结果：投影

$$\mathcal{M}(\mathbf{v}+\delta_i, \underline{\mathbf{d}}) \times \mathcal{M}(\delta_i, \delta_i) \times \mathcal{M}(\mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}}) \to \mathcal{M}(\mathbf{v}+\delta_i, \underline{\mathbf{d}}) \times \mathcal{M}(\mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}})$$

诱导出一个同构

$$\overline{\mathrm{Attr}}_{u>0}(\Delta_{F'}) \bigcap (F \times F') \cong \mathfrak{P}(\mathbf{v}+\delta_i, \mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}}). \tag{3.25}$$

事实上，$\bar{s}$ 在 $\mathcal{M}(\mathbf{v}+\delta_i, \mathbf{d}) \times \mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{d})$ 上的零点集恰好是

$$\mathfrak{P}(\mathbf{v}+\delta_i, \mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}}) = \left\{ \begin{array}{c} \text{surjective maps between framed quiver representations} \\ (V_j^+, D_{\mathrm{in},j}, D_{\mathrm{out},j}) \twoheadrightarrow (V_j, D_{\mathrm{in},j}, D_{\mathrm{out},j}) \text{ which are identity on framing} \end{array} \right\},$$

以及额外的 $(\mathbf{g}_i+1)$ 方程 在 $\mathcal{M}(\mathbf{v}+\delta_i,\ \mathbf{d}) \times \mathcal{M}(\delta_i,\ \delta_i) \times \mathcal{M}(\mathbf{v},\ \mathbf{d}) \to \mathcal{M}(\mathbf{v}+\delta_i,\ \mathbf{d}) \times \mathcal{M}(\mathbf{v},\ \mathbf{d})$ 上的条件如下 g:

- B_i 在带框箭图表示 $(\mathbb{C}^{\delta_i},\ \mathbb{C}^{\delta_i},\ \mathbb{C}^{\delta_i})$ 上消失,
- 对每个环 a: $i \to i$, X_a 在规范向量空间 $\mathbb{C}^{\delta_i}$ 上的作用与 $(V_j^+,\ D_{内\,j},\ D_{外\,j}) \twoheadrightarrow (V_j,\ D_{内\,j},\ D_{外\,j})$ 的核上的 X_a 作用一致。

这证明了 (3.25)。注意，$\mathfrak{P}(\mathbf{v}+\delta_i,\ \mathbf{v},\ \mathbf{d}) \cong \overline{\mathfrak{P}}(\mathbf{v}+\delta_i,\ \mathbf{v},\ \mathbf{d}) \times \mathbb{C}^{\mathbf{g}_i}$，并且

$$\overline{\mathfrak{P}}(\mathbf{v}+\delta_i, \mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}}) \cong \mathbb{P}(H^0\mathcal{C}_i^-),$$

其中 $H^0\mathcal{C}_i^-$ 是复形 $\mathcal{C}_i^-$ 在 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\ \mathbf{d})$ 上的零阶上同调，该复形由 (3.9) 定义。光滑性源于 $H^0\mathcal{C}_i^-$ 的局部自由性。□

命题 *3.17* 的证明。 在分解 (3.24) 中，$\mathrm{Hom}(u\mathbb{C},\ \mathsf{V}_i)$ 是 $\mathrm{Attr}_{u>0}(\Delta_{F'})$ 与 $F \times F'$ 之间交的超额向量丛，因此 $\mathrm{Stab}_{u>0}\big|_{F\times F'}$ 由下述对应诱导

$$(-u)^{\mathbf{v}_i} c_{-1/u}(\mathsf{V}_i) \cap \mathrm{can}\left[\overline{\mathrm{Attr}}_{u>0}(\Delta_{F'}) \bigcap (F \times F')\right].$$

回顾 $\mathcal{M}(\delta_i,\ \delta_i) \cong \mathbb{C}^{\mathbf{g}_i} \times \mathbb{C}$，其中 $\mathbb{C}$ 对带框表示 $(\mathbb{C}^{\delta_i},\ \mathbb{C}^{\delta_i},\ \mathbb{C}^{\delta_i})$ 上的映射 B_i 作出说明。Th en

$$\begin{aligned} &\overline{\mathrm{Attr}}_{u>0}(\Delta_{F'}) \bigcap (F \times F') \bigcap (\mathcal{M}(\mathbf{v}+\delta_i, \underline{\mathbf{d}}) \times \{0\} \times \mathbb{C} \times \mathcal{M}(\mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}})) \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \text{surjective maps between framed quiver representations} \\ (V_j^+, D_{\mathrm{in},j}, D_{\mathrm{out},j}) \twoheadrightarrow (V_j, D_{\mathrm{in},j}, D_{\mathrm{out},j}) \text{ which are identity on framing} \\ \text{and for all edge loops } a: i \to i,\ X_a \text{ action on the kernel is trivial} \end{array} \right\} = \overline{\mathfrak{P}}(\mathbf{v}+\delta_i, \mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}}). \end{aligned}$$

并且 $\langle \mathbf{0}|\mathrm{Stab}_{u>0}|\delta_i\rangle$ 由下述对应诱导:

$$(-u)^{\mathbf{v}_i} c_{-1/u}(\mathsf{V}_i) \cap [\overline{\mathfrak{P}}(\mathbf{v}+\delta_i, \mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}})].$$

证明至此完成。 □

按照第 3.2 节中的相同约定，我们在 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 上定义一个虚向量丛：

$$\mathsf{P}=\sum_{i\in Q_0}\mathrm{Hom}(\mathsf{V}_i,\mathsf{D}_{\mathrm{out},i})+\sum_{(i\to j)\in\mathcal{A}^*}\mathrm{Hom}(\mathsf{V}_i,\mathsf{V}_j)+\sum_{k\prec l\in Q_0^{\mathrm{f}}}\mathrm{Hom}(\mathsf{V}_l,\mathsf{V}_k), \tag{3.26}$$

并用正规化子定义稳定包络

$$\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C},\epsilon}=\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}\cdot\epsilon,\ \text{with}\ \ \epsilon|_F=(-1)^{\mathrm{rk}\,\mathsf{P}|_F^+}, \tag{3.27}$$

其中，F 是不动分支，而 $\mathsf{P}|_F^+$ 是 P 对 F 的限制的 $\mathfrak{C}$-吸引部分。

定理 3.21。设 $R(u)=\mathrm{Stab}^{-1}_{u<0,\,\epsilon}\mathrm{Stab}_{u>0,\,\epsilon}\in\mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}\left(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\delta_i,\,\mathrm{loc}}\otimes\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\mathbf{d},\,\mathrm{loc}}\right)(u)$ 为根 R-矩阵，并且

$$R^{\sup}(u):=\Sigma\cdot R(u),$$

其中 Σ 是对角算子，它在 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\delta_i}(\mathbf{v}')\otimes\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v}'')$ 上的作用为标量 $(-1)^{|\mathbf{v}'|\cdot|\mathbf{v}''|}$。

假设 W^{fr} on $\mathcal{M}(\delta_i)$ 是可容许的，则 $R^{\sup}(u)$ 的第一个 2×2 块可以进行高斯分解：

$$\begin{pmatrix}\langle\mathbf{0}|R^{\sup}(u)|\mathbf{0}\rangle & \langle\mathbf{0}|R^{\sup}(u)|\delta_i\rangle\\ \langle\delta_i|R^{\sup}(u)|\mathbf{0}\rangle & \langle\delta_i|R^{\sup}(u)|\delta_i\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{(-1)^{|i|}t_i}{\gamma_i}f_i(u) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_i(u) & 0\\ 0 & g_i(u)h_i(u)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & e_i(u)\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{3.28}$$

其中，$e_i(u)$、$f_i(u)$、$h_i(u)$ 是定理 3.7 中作用于 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\mathbf{d}}$ 的线性算子，$\gamma_i=\prod_{e:\ i\to i}t_e$ 对于 $t_e=\mathsf{T}_0$-权，边 e 的 t_i 是 B_i in $\mathcal{M}(\delta_i)$ 中出射框架的 T_0-权，而 $g_i(u)$ 是以下对角算子（等变参数以乘法形式表示）：

$$g_i(u)=c_{-1/u}((1-t_i^{-1})\mathsf{V}_i). \tag{3.29}$$

证明。根据命题 3.17，$\mathrm{Stab}_{u>0}$ 的第一个 2×2 块为：

$$\begin{pmatrix}\langle\mathbf{0}|\,\mathrm{Stab}_{u>0}\,|\mathbf{0}\rangle & \langle\mathbf{0}|\,\mathrm{Stab}_{u>0}\,|\delta_i\rangle\\ \langle\delta_i|\,\mathrm{Stab}_{u>0}\,|\mathbf{0}\rangle & \langle\delta_i|\,\mathrm{Stab}_{u>0}\,|\delta_i\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_u}(N^-_{F/X}) & 0\\ 0 & e^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_u}(N^-_{F'/X})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{[\overline{\mathfrak{P}}(\mathbf{v}+\delta_i,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})]}{c_1(\mathcal{L}_i)-u}\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

根据 [COZZ1，引理 3.29]，$\mathrm{Stab}^{-1}_{u<0}$ 由转置对应 $[\mathrm{Stab}_{u>0}]^{\mathrm{t}}$ 诱导，因此 $\mathrm{Stab}^{-1}_{u<0}\mathrm{Stab}_{u>0}$ 的第一个 2×2 块可以进行高斯分解

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{t_i}{\gamma_i}\frac{[\overline{\mathfrak{P}}(\mathbf{v}+\delta_i,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})]^{\mathrm{t}}}{c_1(\mathcal{L}_i)-u} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{e^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_u}(N^-_{F/X})}{e^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_u}(N^+_{F/X})} & 0\\ 0 & \frac{e^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_u}(N^-_{F'/X})}{e^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_u}(N^+_{F'/X})}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{[\overline{\mathfrak{P}}(\mathbf{v}+\delta_i,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})]}{c_1(\mathcal{L}_i)-u}\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

考虑正规化因子后，显式计算可得（3.28）。 □

注 3.22。这个 R 矩阵 $R^{\sup}(u)$ 在以下意义下满足超杨-巴克斯特方程。设

$$R_{\alpha\beta}(u)=\mathrm{Stab}^{-1}_{u<0,\epsilon}\mathrm{Stab}_{u>0,\epsilon}\in\mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}\left(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}}^{(\alpha)},\mathrm{loc}}\otimes\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}}^{(\beta)},\mathrm{loc}}\right)(u)$$

为根 R 矩阵，并设 Σ 为线性映射，它在 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\mathbf{d}^{(\alpha)}}(\mathbf{v}')\otimes\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\mathbf{d}^{(\beta)}}(\mathbf{v}'')$ 上的作用是乘以标量 $(-1)^{|\mathbf{v}'|\cdot|\mathbf{v}''|}$。定义 $R^{\sup}_{\alpha\beta}(u):=\Sigma\cdot R_{\alpha\beta}(u)$，则方程

$$R^{\sup}_{12}(u-v)R^{\sup}_{13}(u)R^{\sup}_{23}(v)=R^{\sup}_{23}(v)R^{\sup}_{13}(u)R^{\sup}_{12}(u-v) \tag{3.30}$$

在 $\mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}\left(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{(1)\mathbf{d},\,\mathrm{loc}}\otimes\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\mathbf{d}^{(2)},\,\mathrm{loc}}\otimes\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\mathbf{d}^{(3)},\,\mathrm{loc}}\right)(u,\ v)$ 中成立。这里的自同态是 $\mathbb{Z}/2$ 分次的，因为它们取自超向量空间范畴，而 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v})$ 的齐次次数为 $|\mathbf{v}|$ (3.2)。处理超向量空间张量积上的端同态时，我们有

$$\left(\mathrm{id}^{\otimes a}\otimes X\otimes\mathrm{id}^{\otimes b}\right)\left(\bigotimes_{i=1}^{a+b+1}v_i\right)=(-1)^{|X|\cdot\sum_{i=1}^a|v_i|}\left(\bigotimes_{i=1}^{a}v_i\right)\otimes Xv_i\otimes\left(\bigotimes_{j=a+1}^{a+b+1}v_j\right)$$

对于齐次端同态 X 和齐次元素 $v_1,\ldots,v_{a+b+1}$。

4. Reshetikhin type shifted Yangians for symmetric quivers with potentials

本节中，给定一个带势 W 的对称箭图 Q 以及一组辅助框架数据 $\mathcal{C}$，我们利用 R-矩阵的矩阵元构造 Reshetikhin 型（反占优）移位杨扬子代数 $\mathrm{Y}^{\mu}(Q,\mathrm{W},\mathcal{C})$。这些矩阵自然作用于（带框架的）带势箭图簇的临界上同调上。

我们引入了 $\mathcal{C}$ 的可容许性概念（定义 4.1），并证明 $\mathrm{Y}^{\mu}(Q,\mathrm{W},\mathcal{C})$ 与这些可容许选择无关（定理 4.44），因此将其简记为 $\mathrm{Y}^{\mu}(Q,\mathrm{W})$。值得注意的是，我们可以使用一个“小型”（有限的）可容许辅助集，来生成与一个“大型”（无限的）可容许辅助集相关联的移位杨扬子代数。我们还构造了从上一节的 Drinfeld 型移位 Yangian 到 Reshetikhin 型移位 Yangian 的自然映射（定理 4.8），通过拆分 R-矩阵定义余乘法（§4.2），并定义联系不同移位对应 Yangian 的移位同态（§4.5）。

在零平移情形下，我们从 (Q,W) 构造 Maulik-Okounkov (MO) 型李超代数 $\mathfrak{g}_{Q,\mathrm{W}}$，并研究其性质（命题 4.23）。这恢复了具有典范三次势的三重箭图的 MO 李代数（定理 4.45）。我们猜想，$\mathfrak{g}_{Q,\mathrm{W}}$ 的正部分等于 Davison-Meinhardt[DM] 的 BPS 李代数（猜想 4.25）。这推广了第二作者提出的一个猜想，该猜想最近已由 Botta-Davison [BD]证明。

我们证明了 $\mathrm{Y}_0(Q,\mathrm{W})$ 的 PBW 基定理，即在 $\mathrm{Y}_0(Q,\mathrm{W})$ 上存在一个滤过，使其伴随分次代数是 $\mathfrak{g}_{Q,\mathrm{W}}[u]$ 的包络代数（定理 4.26）。这将 Maulik-Okounkov 的一个定理 [MO, Thm. 5.5.1] 从中岛箭图推广到了带势对称箭图。

§4.6 给出了若干余乘法的显式公式。对于与可对称化 Kac-Moody 李代数（附录 A.1）相关联的带势箭图，我们预期 Guay-Nakajima-Wendlandt [GNW] 通过代数方法构造的余乘法与利用临界稳定包络构造的余乘法相容（注 4.42）；我们对所有有限维单李代数证明了这一点（定理 4.43）。

我们还研究了卡西米尔算子（定义 4.47），并证明它们由斯坦伯格对应给出（命题 4.48）。相应的移位版本见命题 4.49。

4.1. Reshetikhin 型移位 Yangian。

4.1.1. 定义。 我们固定一个带有 T_0 作用的对称箭图 Q，以及 T_0 不变势 W，如 §3 开头所述，并假设

- 每个 $i\in Q_0$ 处边环上的 T_0-等变权重均非零，等价地，对每个 $i\in Q_0$，$\gamma_i=\prod_{e:i\to i}t_e$ 均非零，其中 t_a 是箭 $a\in Q_1$ 的 T_0-等变权重。
- 对于任意维数向量 $\mathbf{v},\mathbf{d}_{\mathrm{in}},\mathbf{d}_{\mathrm{out}}\in\mathbb{N}^{Q_0}$，箭图簇 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 是相对于循环稳定性定义的。

定义 4.1。 一个辅助数据集 $\mathcal{C}=\{(\mathbf{d},\mathsf{T}_0\curvearrowright\mathcal{M}(\mathbf{d}),\mathrm{W}^{\mathrm{fr}})\}$ 是由以下三元组构成的一个（可能无限的）集合：(1) 一个框架维数$\mathbf{d}$；(2) 对称箭图簇上的 T_0 作用的一个选择

$$\mathcal{M}(\mathbf{d})=\bigsqcup_{\mathbf{v}\in\mathbb{N}^{Q_0}}\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}),$$

将作用扩展到 T_0 上 无框架箭图，(3) 一个 T_0-不变的带框架势 W^{fr}，定义在 $\mathcal{M}(\mathbf{d})$ 上，并扩展 W。

对于元素 $\mathfrak{c}=(\mathbf{d},\mathsf{T}_0\curvearrowright\mathcal{M}(\mathbf{d}),\mathrm{W}^{\mathrm{fr}})\in\mathcal{C}$，辅助空间 是等变临界上同调：

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}:=H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(\mathbf{d}),\mathrm{w}^{\mathrm{fr}}). \tag{4.1}$$

若对于每个 $i\in Q_0$，都存在元素 $\mathfrak{c}_i=(\delta_i,\mathsf{T}_0\curvearrowright\mathcal{M}(\delta_i),\mathrm{W}_i)\in\mathcal{C}$，使得 $\mathcal{M}(\delta_i)$ 中出射框架上的 T_0-权非零（这里不失一般性地假设 $\mathcal{M}(\delta_i)$ 中入射框架的 T_0-权为零），则称辅助数据集 $\mathcal{C}$ 为可容许。在这种情况下，$\{\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_i}\}_{i\in Q_0}$ 称为一组可容许辅助空间。

注 4.2. 如果辅助数据 $(\delta_i,\mathsf{T}_0\curvearrowright\mathcal{M}(\delta_i),\mathrm{W}_i)$ 是可容许的，那么 w_i 按照定义 3.13 的意义也自动是可容许的。事实上，若将 $\mathrm{W}^i\big|_{X_a=0,\,\forall a\in Q_1}=\sum_{k\geqslant 1}a_k(B_iA_i)^k$ 写为上述形式，则 T_0-不变性条件迫使所有 a_k 都为零。

注 4.3. 可容许辅助数据集总是存在的，因为对于每个 $i\in Q_0$，我们都可以将带框架势取为 W 的平凡延拓，并在 B_i 上选取一个非零的 T_0 权（W 自动具有 T_0-不变性）。

定义 4.4。 态空间 是等变临界上同调：

$$\mathcal{H}^{\mathrm{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}:=H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}}),\mathrm{w}^{\mathrm{fr}}), \tag{4.2}$$

其中，T_0 作用于 $\mathcal{M}(\mathbf{d})$，并扩展了 T_0 对无框架箭图的作用；A^{fr} 作为框架环面作用于 $\mathcal{M}(\mathbf{d})$；对于 $\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}$ 不变的带框架势 W^{fr}，则有 $\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}=\mathrm{tr}(\mathsf{W}^{\mathrm{fr}})$。

注4.5。 空间 (4.1)、(4.2) 带有自然的 $\mathbb{Z}^{Q_0}$-分次，其零次部分由以下元素张成：

$$[\mathrm{pt}]\in H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}\left(\mathcal{M}(\mathbf{0},\mathbf{d}),\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}\right)=H_{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt}),\quad [\mathrm{pt}]\in H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}\left(\mathcal{M}(\mathbf{0},\underline{\mathbf{d}}),\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}\right)=H_{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt}).$$

定义 4.6。 设 $\mathcal{C}$ 为一个辅助数据集。对于给定的 $\mu\in\mathbb{Z}_{\leqslant 0}^{Q_0}$，关于 $\mathcal{C}$ 的*Reshetikhin* 型 μ-移位杨扬子代数 是由以下元素生成的 $\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$-子代数

$$\mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W},\mathcal{C})\subset\prod_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{W}^{\mathrm{fr}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}\mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)[\mathsf{a}^{\mathrm{fr}}]}\left(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}}\right),\tag{4.3}$$

由如下形式的端同态生成：

$$\mathsf{E}(m):=\operatorname*{Res}_{u\to\infty}\mathrm{Str}_{\mathcal{H}_{\mathfrak{c},\mathrm{loc}}}\left((m\otimes\mathrm{id})\cdot R^{\sup}_{\mathcal{H}_{\mathfrak{c}},\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}}(u)\right),\quad m\in\mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c}})[u],\quad \mathfrak{c}\in\mathcal{C},\tag{4.4}$$

其中，(4.3) 中的乘积遍历所有满足$\mathbf{d}_{\mathrm{out}}-\mathbf{d}_{\mathrm{in}}=\mu$ 的态空间，下标“loc”表示 $-\otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]}\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$。上标 $\mathbb{Z}/2$ 表示按照注 3.22 的含义赋予态空间超向量空间结构，而“Str”表示超迹。这里的 R-矩阵也可以用稳定包络来定义，因为它等于 Hall 包络（注2.6）。

我们将（大）*Reshetikhin* 型 μ-移位杨 *Yangian* （Q,W）定义为

$$\mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W}):=\mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W},\bigcup_{\mathcal{C}}\mathcal{C})\subset\prod_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{W}^{\mathrm{fr}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}\mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)[\mathsf{a}^{\mathrm{fr}}]}(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}}),\tag{4.5}$$

其中，取遍所有辅助数据集的并集。

根据定义，$\mathsf{Y}_\mu(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 是一个 $(\mathbb{Z}^{Q_0}\times\mathbb{Z}/2)$-分次的 $\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$-代数，其中 $\mathbb{Z}^{Q_0}$ 分次来自 $m\in\mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c},\ \mathrm{loc}})$ 上的 $\mathbb{Z}^{Q_0}$ 分次。

由定义可知，以下结论显然成立。

引理4.7。 若 $\mathcal{C}\subset\mathcal{C}'$，则 $\mathsf{Y}_\mu(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C})\subseteq\mathsf{Y}_\mu(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C}')$。

定理 4.8。 若 $\mathcal{C}$ 是可容许的，则对任意 $\mu\in\mathbb{Z}_{\leqslant 0}^{Q_0}$，映射的像

$$\widetilde{\mathcal{DSH}}_\mu(Q,\mathsf{W})\to\prod_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{W}^{\mathrm{fr}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}\mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)[\mathsf{a}^{\mathrm{fr}}]}(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}})$$

由定理 3.7 中的作用诱导的映射包含于 $\mathsf{Y}_\mu(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 中。特别地，上述映射的像包含于 $\mathsf{Y}_\mu(Q,\ \mathsf{W})$ 中。

证明。 利用高斯分解 (3.28)，我们有

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}z^{-k-1}\begin{pmatrix}\mathsf{E}(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|u^k) & \mathsf{E}(|\delta_i\rangle\langle\mathbf{0}|u^k)\\ \mathsf{E}(|\mathbf{0}\rangle\langle\delta_i|u^k) & \mathsf{E}(|\delta_i\rangle\langle\delta_i|u^k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_i(z) & (-1)^{|i|}g_i(z)e_i(z)\\ \frac{(-1)^{|i|}t_i}{\gamma_i}f_i(z)g_i(z) & \frac{t_i}{\gamma_i}f_i(z)g_i(z)e_i(z)+(-1)^{|i|}g_i(z)h_i(z)\end{pmatrix},$$

其中 $\langle\mathbf{0}|$ 表示 ($\mathbb{Z}^{Q_0}$-分次) 对偶空间中 $|\mathbf{0}\rangle$ 的对偶向量，$|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|u^k\in\mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c}})[u]$ 对某个 $\mathfrak{c}$ 成立，且$g_i(z)$ 由 (3.29) 给出。因此，$e_i(z)$ $f_i(z)$ $h_i(z)$ 的像包含于 $\mathsf{Y}_\mu(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 中。□

注 4.9。 (4.4) 对任意关于 u 的有理函数 $m(u)$ 都有意义，特别是，

$$\mathsf{E}(m\,u^{-k})=\begin{cases}\mathrm{Str}_{\mathcal{H}_{\mathfrak{c},\mathrm{loc}}}\left(m\cdot P_{Q_0\setminus\mathrm{Supp}(\mu)}\right), & k=1,\\ 0, & k>1,\end{cases}$$

其中 $P_{Q_0\setminus\mathrm{Supp}(\mu)}$ 是从 $\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}$ 到该子空间的投影算子

$$\bigoplus_{\mu\cdot\mathbf{v}=0}\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}(\mathbf{v}).$$

4.1.2. 三角分解。 写出高斯分解 $R^{\mathrm{sup}}(u) = F(u)G(u)E(u)$，其中

$$F(u) = \pm \mathrm{Stab}^{-1}_{u<0,\epsilon} \cdot e^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_u}(N^+), \quad G(u) = \pm \frac{e^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_u}(N^-)}{e^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_u}(N^+)}, \quad E(u) = \pm e^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_u}(N^-)^{-1} \cdot \mathrm{Stab}_{u>0,\epsilon}\,, \tag{4.6}$$

其中符号由 P 确定。通过高斯消元， $F(u)$、 $G(u)$ 和 $E(u)$ 的矩阵元可以用 $R^{\mathrm{sup}}(u)$ 的矩阵元表示。

定义 4.10. 设 $\mathcal{C}$ 是一个辅助数据集。对于 $\mathfrak{c} \in \mathcal{C}$, $m \in \mathsf{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c}})[u]$，定义 $\mathsf{Y}^\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 中的下列元素：

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}^+(m) &:= \operatorname*{Res}_{u\to\infty} \mathrm{Str}_{\mathcal{H}_{\mathfrak{c},\mathrm{loc}}}\left((m\otimes \mathrm{id})\cdot E(u)\right),\\
\mathsf{E}^0(m) &:= \operatorname*{Res}_{u\to\infty} \mathrm{Str}_{\mathcal{H}_{\mathfrak{c},\mathrm{loc}}}\left((m\otimes \mathrm{id})\cdot G(u)\right),\\
\mathsf{E}^-(m) &:= \operatorname*{Res}_{u\to\infty} \mathrm{Str}_{\mathcal{H}_{\mathfrak{c},\mathrm{loc}}}\left((m\otimes \mathrm{id})\cdot F(u)\right).
\end{aligned}$$

定义 $\mathsf{Y}^+_\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$、$\mathsf{Y}^0_\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 和 $\mathsf{Y}^-_\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 为 $\mathsf{Y}^\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 的 $\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$-子代数，分别由 $\mathsf{E}^+(m)$、$\mathsf{E}^0(m)$ 和 $\mathsf{E}^-(m)$ 生成。并定义 $\mathsf{Y}^{\geqslant}_\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$（分别地，$\mathsf{Y}^{\leqslant}_\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$）为 $\mathsf{Y}^\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 的 $\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$-子代数，由 $\mathsf{Y}^+_\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$（分别地，$\mathsf{Y}^-_\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$）和 $\mathsf{Y}^0_\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 生成。

引理 4.11. 若 $\mathcal{C}$ 可容许，则 $\mathsf{Y}^0_\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 由典范类的乘法生成

$$\left\{\mathrm{ch}_k(\mathsf{V}_i),\ \mathrm{ch}_{k+1}(\mathsf{D}_{\mathrm{in},i} - \mathsf{D}_{\mathrm{out},i})\right\}^{k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}_{i\in Q_0}. \tag{4.7}$$

这里，陈特征是 $(\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}})$-等变的。

证明. 注意，$e^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_u}(N^-)\, e^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_u}(N^+)$ 是关于 u 的幂级数，其在态空间上的系数由 V_i 和 $\mathsf{D}_{\mathrm{in},i} - \mathsf{D}_{\mathrm{out},i}$ 的 Chern 类给出。因此，$\mathsf{Y}^0_\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 包含于由典范类乘法生成的代数 (4.7) 中。对于可容许的 $\mathfrak{c} \in \mathcal{C}$，取元素 $|\mathbf{0}\rangle, |\delta_i\rangle \in \mathcal{H}_{\mathfrak{c}}$，于是有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k!}\mathsf{E}^0(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\, u^k) &= -t_i \sum_{i\in Q_0} \mathrm{ch}_k(\mathsf{V}_i) + \cdots,\\
\frac{(-1)^{|i|}}{k!}\mathsf{E}^0(|\delta_i\rangle\langle\delta_i|\, u^k) &= -t_i \sum_{i\in Q_0} \mathrm{ch}_k(\mathsf{V}_i) + \sum_{i\in Q_0} \mathrm{ch}_{k+1}(\mathsf{D}_{\mathrm{in},i} - \mathsf{D}_{\mathrm{out},i}) - \sum_{i,j\in Q_0} \boldsymbol{Q}_{ij}\, \mathrm{ch}_k(\mathsf{V}_j) + \cdots,
\end{aligned}$$

对于 $\boldsymbol{Q}_{ij} = \sum_{a:i\to j} t_a + \sum_{b:j\to i} t_b$，其中 t_a 是箭 a 的 T_0-权。这里，点项表示次数较低的典范类。对 k 作归纳可知，(4.7) 中的所有元素都包含于 $\mathsf{Y}^0_\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 中。□

由高斯分解和定义可知，$\mathsf{Y}^+_\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$、$\mathsf{Y}^0_\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 和 $\mathsf{Y}^-_\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 生成 $\mathsf{Y}^\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$。当 $\mathcal{C}$ 可容许时，以下更强的结论成立。

命题 4.12。设 $\mathcal{C}$ 可容许，则 $\mathsf{Y}^\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 由 $\{\mathsf{E}^\pm(m) \mid m \text{ 在 } u\}$ 中为常数以及 $\mathsf{Y}^0_\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 生成。

证明。$\mathsf{Y}^\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 按 u 中的次数过滤：对于 $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $F_k\mathsf{Y}^\mu(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})$，其由单项式 $\mathsf{E}(m_1u^{n_1}) \cdots \mathsf{E}(m_ru^{n_r})$ 张成，其中 $m_i \in \mathsf{End}^{\mathbb{Z}/2}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_i})$、$\mathfrak{c}_i \in \mathcal{C}$ 和 $\sum n_i \leqslant k$。注意，在高斯分解中

$$R^{\mathrm{sup}}(u) = F(u)G(u)E(u),$$

$F(u)$ 和 $E(u)$ 是具有 u 展开的三角形的，展开形式为 $\mathrm{id} + O(u^{-1})$；而 $G(u)$ 是对角线的，具有 u 展开，形式为

$$u^{\mu\cdot\mathbf{v}_1} + \text{lower degree in } u$$

在分支 $\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}(\mathbf{v}_1)\otimes\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\mathfrak{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathbf{v}_2)$ 上。由于 u 展开为非正，对于 u 中的一个 $\mathbb{Z}^{Q_0}$-齐次 m 常数，若 $\mathsf{E}(m) \neq 0$，则 $\deg(m)$ 必须为正、负或零中的一种，并且必须有等式

$$\mathsf{E}(m) = \begin{cases} \mathsf{E}^+(m), & \deg(m) > 0,\\ \mathsf{E}^0(m), & \deg(m) = 0,\\ \mathsf{E}^-(m), & \deg(m) < 0. \end{cases}$$

显然， $F_0\,\mathsf{Y}^\mu(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 包含于由 $\{\mathsf{E}^\pm(m)$ 生成的子代数中； $\mid m$ 在 $u\}$ 中为常数，并且 $\mathsf{Y}^0_\mu(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})$。

$\mathrm{Y}^{\mu}(Q,\mathrm{W}\ \mathcal{C})$ 具有另一个标记为 $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{Q_0}\times\mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{Q_0}$ 的滤过。定义 $G_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}\mathrm{Y}^{\mu}(Q,\mathrm{W}\ \mathcal{C})$ 为由 $\mathrm{E}(m)$ 生成的子代数，其中 $m\in \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}(\mathbf{v}_1')\ \mathcal{H}_{\mathfrak{c}}(\mathbf{v}_2'))[u]$ with

$$\mathbf{v}_1\geqslant\mathbf{v}_1'\geqslant\mathbf{0},\ \text{ and }\ \mathbf{v}_2\geqslant\mathbf{v}_2'\geqslant\mathbf{0}.$$

注意，$G_{\mathbf{0},\ \mathbf{0}}\mathrm{Y}^{\mu}(Q,\ \mathrm{W}\ \mathcal{C})$ 由典范类 $\{\mathsf{ch}_k(\mathrm{V}_i)\}_{i\in Q_0}^{k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 的乘法生成，特别地，$G_{\mathbf{0},\ \mathbf{0}}\mathrm{Y}^{\mu}(Q,\ \mathrm{W}\ \mathcal{C})\subset \mathrm{Y}_{\mu}^{0}(Q,\ \mathrm{W}\ \mathcal{C})$。我们还将 $G_{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2}^{<}\mathrm{Y}^{\mu}(Q,\ \mathrm{W}\ \mathcal{C})$ 定义为由以下元素生成的子代数

$$\bigcup_{\substack{\mathbf{v}_1\geqslant\mathbf{v}_1',\mathbf{v}_2\geqslant\mathbf{v}_2'\\(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)\neq(\mathbf{v}_1',\mathbf{v}_2')}} G_{\mathbf{v}_1',\mathbf{v}_2'}\mathrm{Y}_{\mu}(Q,\mathrm{W},\mathcal{C}).$$

我们通过对滤过 $G_{\bullet,\ \bullet}$ 和 $F_{\bullet}$ 进行双重归纳，证明 $\mathrm{Y}^{\mu}(Q,\ \mathrm{W}\ \mathcal{C})$ 由 $\mathrm{Y}_{\mu}^{0}(Q,\ \mathrm{W}\ \mathcal{C})$ 生成，且 $\{\mathrm{E}^{\pm}(m)\mid m\ \text{在}\ u\}$ 中为常数。初始情形 $G_{\mathbf{0},\ \mathbf{0}}\mathrm{Y}^{\mu}(Q,\ \mathrm{W}\ \mathcal{C})$ 和 $F_0\mathrm{Y}^{\mu}(Q,\ \mathrm{W}\ \mathcal{C})$ 已知。

假设 $G_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}^{<}\mathrm{Y}^{\mu}(Q,\mathrm{W}\ \mathcal{C})$ 可以生成。任取 $X\in\mathrm{Hom}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}(\mathbf{v}_1)\ \mathcal{H}_{\mathfrak{c}}(\mathbf{v}_2))$ 和任意 $k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，我们需要证明 $\mathrm{E}(X\ u^k)$ 可以生成。

若 $\deg(X)=\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1=0$，则 [MO, (4.34)] 仍适用于移位情形，我们得到

$$\mathrm{E}(X\ u^k)\equiv \mathrm{E}^0(X\ u^k)\mod G_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}^{<}\mathrm{Y}_{\mu}(Q,\mathrm{W},\mathcal{C}),$$

因此 $\mathrm{E}(m\ u^k)$ 可以生成。

若 $\deg(X)_i=\mathbf{v}_{2,i}-\mathbf{v}_{1,i}\neq 0$ 对某个 $i\in Q_0$ 成立，则我们对 k 使用归纳法证明 $\mathrm{E}(X\ u^k)$ 可以生成。初始情形 $k=0$ 已由上述讨论得知。取可容许辅助空间 $\mathcal{H}_{\delta_i}^{\mathrm{W}_i}$ 中的真空态 $|\mathbf{0}\rangle$，并令 t_i 为节点 i 上对应于 $\mathcal{H}_{\delta_i}^{\mathrm{W}_i}$ 的出射箭头的 $\mathbf{T}_0$ 权，该箭头由可容许性可知非平凡。于是

$$\begin{aligned}-t_i\cdot\deg(X)_i\,\mathrm{E}(X\ u^k)&=[\mathrm{E}(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|),\mathrm{E}(X\ u^k)]\\&\overset{\text{由引理 4.13}}{=}[\mathrm{E}(|\ \mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\ u),\mathrm{E}(X\ u^{k-1})]+\mathrm{E}(X'\ u^{k-1})+\mathrm{E}(X''\ u^{k-1})\cdot\mathrm{E}(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|)+\text{term in }G_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}^{<}\mathrm{Y}_{\mu}(Q,\mathrm{W},\mathcal{C}),\end{aligned}$$

对于某些 X'，$X''\in\mathrm{Hom}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}(\mathbf{v}_1)\ \mathcal{H}_{\mathfrak{c}}(\mathbf{v}_2))$。这里我们用到了引理 4.13，其证明如下。注意，对于任意 n，$\mathrm{E}(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\ u^n)\in\mathrm{Y}_{\mu}^{0}(Q,\ \mathrm{W}\ \mathcal{C})$。那么 $\mathrm{E}(X\ u^k)$ 可以通过归纳法生成。证明至此完成。□

引理 4.13。令 $\mathfrak{c}_1$，$\mathfrak{c}_2$ 为任意辅助数据，$|\mathbf{0}\rangle$ 为 $\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_1}(\mathbf{0})$ 的真空，$m\in\mathrm{Hom}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_2}(\mathbf{v}_1)\ \mathcal{H}_{\mathfrak{c}_2}(\mathbf{v}_2))$。那么对于任意 $k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，我们有

$$\begin{aligned}[\mathrm{E}(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\ u),\mathrm{E}(m\ u^k)]-[\mathrm{E}(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|),\mathrm{E}(m\ u^{k+1})]&=\mathrm{E}(m'\ u^k)+\mathrm{E}(m''\ u^k)\,\mathrm{E}(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|)\\&\quad+\sum_{\mathbf{v}_2\geqslant\mathbf{v}>0}\mathrm{E}(f_{\mathbf{v}}\ u^k)\mathrm{E}(g_{\mathbf{v}})+\sum_{\mathbf{v}_1\geqslant\mathbf{v}>0}\mathrm{E}(f'_{\mathbf{v}}\ u^k)\mathrm{E}(g'_{\mathbf{v}}),\end{aligned}\tag{4.8}$$

对于某些 m'，$m''\in\mathrm{Hom}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_2}(\mathbf{v}_1)\ \mathcal{H}_{\mathfrak{c}_2}(\mathbf{v}_2))$，$g_{\mathbf{v}}\in\mathrm{Hom}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_1}(\mathbf{0})\ \mathcal{H}_{\mathfrak{c}_1}(\mathbf{v}))$，$f_{\mathbf{v}}\in\mathrm{Hom}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_2}(\mathbf{v}_1)\ \mathcal{H}_{\mathfrak{c}_2}(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}))$，$g'_{\mathbf{v}}\in\mathrm{Hom}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_1}(\mathbf{v})\ \mathcal{H}_{\mathfrak{c}_1}(\mathbf{0}))$，$f'_{\mathbf{v}}\in\mathrm{Hom}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_2}(\mathbf{v}_1-\mathbf{v})\ \mathcal{H}_{\mathfrak{c}_2}(\mathbf{v}_2))$。

证明。由 RTT=TTR 方程，我们有

$$[\mathrm{E}(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\ v),\ \mathrm{E}(m\ u^k)]=\operatorname*{Res}_{v\to\infty}\operatorname*{Res}_{u\to\infty}\text{超迹}_{\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}\otimes\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_2}}\left[\left(R_{12}(v-u)(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\ v\ \otimes m\ u^k)R_{12}(v-u)^{-1}-|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\ v\ \otimes m\ u^k\right)T_2(u)T_1(v)\right],$$

其中，T_i $(i=1,\ 2)$ 是对 $\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_i}$ 与态空间进行编织的 R 矩阵。通过取展开式

$$R_{12}(v-u)=\mathrm{id}+\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{v-u}+\frac{\boldsymbol{s}}{(v-u)^2}+O((v-u)^{-3}),$$

$$R_{12}(v-u)^{-1}=\mathrm{id}-\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{v-u}+\frac{\boldsymbol{s}'}{(v-u)^2}+O((v-u)^{-3}),$$

我们得到

$$\begin{aligned}[\mathrm{E}(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\ v),\mathrm{E}(m\ u^k)]&=\operatorname*{Res}_{v\to\infty}\operatorname*{Res}_{u\to\infty}\mathrm{Str}_{\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_1}\otimes\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_2}}\\&\left[\left([\boldsymbol{r}_{12},|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\otimes m](u^k+v^{-1}u^{k+1})+\boldsymbol{s}\cdot(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\otimes m)v^{-1}u^k+(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\otimes m)\cdot\boldsymbol{s}'\,v^{-1}u^k\right)T_2(u)T_1(v)\right].\end{aligned}$$

在上述展开中，我们忽略了 u/v 阶以上的项，因为当 $v\to\infty$ 时，$T_1(v)$ 没有极点。同样的论证表明

$$[\mathrm{E}(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\ v),\mathrm{E}(m\ u^k)]=\operatorname*{Res}_{v\to\infty}\operatorname*{Res}_{u\to\infty}\mathrm{Str}_{\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_1}\otimes\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_2}}\left[[\boldsymbol{r}_{12},|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\otimes m]v^{-1}u^{k+1}\,T_2(u)T_1(v)\right].$$

由此可得

式 (4.8) 的左端 $=$ 留数$_{v\to\infty}$ 留数$_{u\to\infty}$超迹$_{\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_1}\otimes\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_2}}$

$$\left[\left([\boldsymbol{r}_{12},|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\otimes m]\,u^k+\boldsymbol{s}\cdot(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\otimes m)v^{-1}u^k+(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\otimes m)\cdot\boldsymbol{s}'\,v^{-1}u^k\right)T_2(u)T_1(v)\right].$$

Si由于 $\lim_{v\to\infty}T_1(v)$ 中的非零项集中在对角线上，我们有 e

$$\operatorname*{Res}_{v\to\infty}\operatorname*{Res}_{u\to\infty}\operatorname{Str}_{\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_1}\otimes\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_2}}\left[\left(\boldsymbol{s}\cdot(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\otimes m)v^{-1}u^k+(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\otimes m)\cdot\boldsymbol{s}'\,v^{-1}u^k\right)T_2(u)T_1(v)\right]=\mathsf{E}\left(m'\,u^k\right),$$

其中， $m'=\langle\mathbf{0}|\boldsymbol{s}|\mathbf{0}\rangle\cdot m+m\cdot\langle\mathbf{0}|\boldsymbol{s}'|\mathbf{0}\rangle$ 是从 $\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_2}(\mathbf{v}_1)$ 到 $\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_2}(\mathbf{v}_2)$ 的同态。另一方面，我们可以将 (4.8) 左端的另一项写成齐次分量，并得到

$$\operatorname*{Res}_{v\to\infty}\operatorname*{Res}_{u\to\infty}\operatorname{Str}_{\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_1}\otimes\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_2}}\left[\boldsymbol{r}_{12}\,(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\otimes m)u^k\,T_2(u)T_1(v)\right]=\sum_{\mathbf{v}_2\geqslant\mathbf{v}\geqslant0}\mathsf{E}(f_{\mathbf{v}}\,u^k)\mathsf{E}(g_{\mathbf{v}}),$$

其中， $g_{\mathbf{v}}\otimes f_{\mathbf{v}}$ 是 $\operatorname{Hom}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_1}(\mathbf{0})\otimes\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_2}(\mathbf{v}_1)\ \mathcal{H}_{\mathfrak{c}_1}(\mathbf{v})\otimes\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_2}(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}))$ 分支的简写记号$\boldsymbol{r}_{12}\,(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\otimes m)$。实际上，$g_{\mathbf{v}}\otimes f_{\mathbf{v}}$ 应当是这种形式的线性组合，但为简洁起见，我们省略了求和。类似地，

$$\operatorname*{Res}_{v\to\infty}\operatorname*{Res}_{u\to\infty}\operatorname{Str}_{\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_1}\otimes\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_2}}\left[(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\otimes m)\,\boldsymbol{r}_{12}\,u^k\,T_2(u)T_1(v)\right]=\sum_{\mathbf{v}_2\geqslant\mathbf{v}\geqslant0}\mathsf{E}(f'_{\mathbf{v}}\,u^k)\mathsf{E}(g'_{\mathbf{v}})$$

其中 $g'_{\mathbf{v}}\otimes f'_{\mathbf{v}}$ 是（$\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_1}(\mathbf{v})\otimes\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_2}(\mathbf{v}_1-\mathbf{v})\ \mathcal{H}_{\mathfrak{c}_1}(\mathbf{0})\otimes\mathcal{H}_{\mathfrak{c}_2}(\mathbf{v}_2)$）分支的 $\operatorname{Hom}|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\otimes m\ \boldsymbol{r}_{12}$。结合上述三个方程，并令 $\mathsf{E}(m''\,u^k)\,\mathsf{E}(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|)=\mathsf{E}(f_{\mathbf{0}}\,u^k)\mathsf{E}(g_{\mathbf{0}})+\mathsf{E}(f'_{\mathbf{0}}\,u^k)\mathsf{E}(g'_{\mathbf{0}})$，我们得到（4.8）。□

4.2. 余乘法。假设框架环面存在分解 $\mathbf{A}^{\mathrm{fr}}=\mathbf{A}_1^{\mathrm{fr}}\times\mathbf{A}_2^{\mathrm{fr}}$，相应的框架分解为：$\mathbf{d}=\mathbf{d}'+\mathbf{d}''$。考虑 $+$室 $\{\mathsf{a}_1^{\mathrm{fr}}>\mathsf{a}_2^{\mathrm{fr}}\}$ 以及相应的稳定包络

$$\operatorname{Stab}_{+,\epsilon}\colon\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}}',\mathbf{A}_1^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}}\otimes\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}}'',\mathbf{A}_2^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}}\to\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathbf{A}_1^{\mathrm{fr}}\times\mathbf{A}_2^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}}.$$

三角引理意味着

$$\operatorname{Stab}_{+,\epsilon}^{-1}R^{\sup}_{\underline{\mathbf{d}}}\operatorname{Stab}_{+,\epsilon}=R^{\sup}_{\underline{\mathbf{d}}''}\cdot R^{\sup}_{\underline{\mathbf{d}}'},$$

其中 $R^{\sup}{}_{\mathbf{d}}$ 表示辅助空间 $\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}$ 上与 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}{}_{\mathbf{d},\mathbf{A}_1^{\mathrm{fr}}\times\mathbf{A}_2^{\mathrm{fr}}}$ 对应的 R-矩阵编织算子，$R_{\mathbf{d}'}$ 和 $R_{\mathbf{d}''}$的情形也类似。因此，$\mathsf{Y}^{\mu}(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})$的 $\mathsf{E}(m\,u^k)$ 按如下方式变换

$$\operatorname{Stab}_{+,\epsilon}^{-1}\mathsf{E}(m\,u^k)\operatorname{Stab}_{+,\epsilon}=\sum_{i=-1}^{k}\sum(-1)^{|m_1|\cdot|m_2|}\mathsf{E}(m_2\,u^i)\otimes\mathsf{E}(m_1\,u^{k-1-i})\,,\tag{4.9}$$

其中， $\sum m_1\otimes m_2$ 是 m 在对偶乘法映射 $\mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c},\mathrm{loc}})\to\mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c},\mathrm{loc}})\otimes\mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c},\mathrm{loc}})$下的像。具体而言，$\sum m_1\otimes m_2$ 由以下要求确定

$$\operatorname{Str}(m\cdot x\cdot y)=\sum\operatorname{Str}(m_1\cdot x)\ \operatorname{Str}(m_2\cdot y)\,,$$

对所有 $x,y\in\mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c},\mathrm{loc}})$均成立。

固定 $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{Z}^{Q_0}_{\leqslant0}$。收集所有满足以下条件的分解 $\underline{\mathbf{d}}=\underline{\mathbf{d}}'+\underline{\mathbf{d}}''$

$$\mathbf{d}'_{\mathrm{out}}-\mathbf{d}'_{\mathrm{in}}=\mu_1,\quad\mathbf{d}''_{\mathrm{out}}-\mathbf{d}''_{\mathrm{in}}=\mu_2,$$

以及所有带框架势 W^{fr}，我们得到一个映射

$$\prod\operatorname{End}^{\mathbb{Z}/2}(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathbf{A}_1^{\mathrm{fr}}\times\mathbf{A}_2^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}})\to\prod\operatorname{End}^{\mathbb{Z}/2}(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}}',\mathbf{A}_1^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}})\otimes\operatorname{End}^{\mathbb{Z}/2}(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}}'',\mathbf{A}_2^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}}),$$

它将子代数 $\mathsf{Y}^{\mu_1+\mu_2}(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 映射到

$$\mathsf{Y}_{\mu_1}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C})\widehat{\otimes}\mathsf{Y}_{\mu_2}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C})\subset\prod\operatorname{End}^{\mathbb{Z}/2}(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}}',\mathbf{A}_1^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}})\otimes\operatorname{End}^{\mathbb{Z}/2}(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}}'',\mathbf{A}_2^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}}).$$

这诱导出一个余乘法：

$$\Delta_{\mu_1,\mu_2}\colon\mathsf{Y}_{\mu_1+\mu_2}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C})\to\mathsf{Y}_{\mu_1}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C})\widehat{\otimes}\mathsf{Y}_{\mu_2}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C})\,.$$

当 $\mu_1=\mu_2=0$ 时，我们也写作 $\Delta:=\Delta_{0,\ 0}$。

根据三角引理，我们有：

命题 4.14. 余乘法是余结合的，也就是说，

$$(\Delta_{\mu_1,\mu_2}\otimes\mathrm{id})\circ\Delta_{\mu_1+\mu_2,\mu_3}=(\mathrm{id}\otimes\Delta_{\mu_2,\mu_3})\circ\Delta_{\mu_1,\mu_2+\mu_3},\quad\mu_{1,2,3}\in\mathbb{Z}^{Q_0}_{\leqslant0}\,.$$

注4.15.（Δ 是余单位的）：设 $\mathcal{H}_{\mathbf{0}}^{\mathsf{W}}=\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]$ 是一个零平移的态空间，且 $\varepsilon\colon \mathsf{Y}_0(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C})\to\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$ 是由投影从 $\prod \mathsf{End}^{\mathbb{Z}/2}(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}{}_{\mathbf{d},\ \mathbf{A}^{\mathrm{fr}},\ \mathrm{loc}})$ 到 $\mathsf{End}^{\mathbb{Z}/2}(\mathcal{H}_{\mathbf{0}}^{\mathsf{W}}{}_{,\ \mathrm{loc}})=\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$ 所诱导的映射。那么

$$(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\circ\Delta_{0,\mu}=\mathrm{id},\quad (\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\circ\Delta_{\mu,0}=\mathrm{id}\,.$$

由定义可知：

引理 4.16。 若 $\mathcal{C}\subset\mathcal{C}'$，则子代数 $\mathsf{Y}\mu(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C})\subseteq\mathsf{Y}\mu(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C}')$ 在余乘法下封闭，也就是说，该图表交换

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{Y}_{\mu_1+\mu_2}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}) & \xrightarrow{\Delta_{\mu_1,\mu_2}} & \mathsf{Y}_{\mu_1}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C})\widehat{\otimes}\mathsf{Y}_{\mu_2}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathsf{Y}_{\mu_1+\mu_2}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}') & \xrightarrow{\Delta_{\mu_1,\mu_2}} & \mathsf{Y}_{\mu_1}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}')\widehat{\otimes}\mathsf{Y}_{\mu_2}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}').
\end{array}$$

注4.17。 定义带有相反正规化子的稳定包络 $\bar{\epsilon}$be

$$\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C},\bar{\epsilon}}:=\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}\cdot\bar{\epsilon},\quad\text{with}\quad \bar{\epsilon}|_F=(-1)^{\mathrm{rk}\,N^+_{F/\mathcal{M}(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})}+\mathrm{rk}\,\mathsf{P}|^-_F}\ ,$$

那么 $R^{\mathrm{sup}}(u)$ 可以写为 $\mathsf{Stab}_{-}^{-1,\ \bar{\epsilon}}\circ\mathsf{Stab}_{+,\ \epsilon}$。三角引理意味着

$$\mathrm{Stab}_{-,\bar{\epsilon}}^{-1}R^{\mathrm{sup}}_{\underline{\mathbf{d}}}\,\mathrm{Stab}_{-,\bar{\epsilon}}=R^{\mathrm{sup}}_{\underline{\mathbf{d}}'}\cdot R^{\mathrm{sup}}_{\underline{\mathbf{d}}''}.$$

那么 $\mathsf{Y}\mu(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 的 $\mathsf{E}(m\,u^k)$'s 变换如下

$$\mathrm{Stab}_{-,\bar{\epsilon}}^{-1}\mathsf{E}(m\,u^k)\,\mathrm{Stab}_{-,\bar{\epsilon}}=\sum_{i=-1}^{k}\sum\mathsf{E}(m_1\,u^i)\otimes\mathsf{E}(m_2\,u^{k-1-i})\,, \tag{4.10}$$

其中，$\sum m_1\otimes m_2$ 由要求对所有 $x,\ y\in\mathsf{End}^{\mathbb{Z}/2}(\mathcal{H}_{\mathfrak{C},\ \mathrm{loc}})$，$\mathsf{Str}(m\cdot x\cdot y)=\sum\mathsf{Str}(m_1\cdot x)\,\mathsf{Str}(m_2\cdot y)$ 来确定。于是，$\mathsf{Stab}_{-}^{-1,\ \bar{\epsilon}}(\cdots)\,\mathsf{Stab}_{-,\ \bar{\epsilon}}$ 诱导出一个映射

$$\Delta^{\mathrm{op}}_{\mu_1,\mu_2}\colon \mathsf{Y}_{\mu_1+\mu_2}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C})\to\mathsf{Y}_{\mu_1}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C})\widehat{\otimes}\mathsf{Y}_{\mu_2}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C})\,.$$

我们称之为 e 相反余乘法。$\Delta^{\mathrm{op}}_{\mu_1,\ \mu_2}$ 是余结合且余单位的，并且它与 $\Delta_{\mu_1,\ \mu_2}$ 有关 y

$$R^{\mathrm{sup}}_{\underline{\mathbf{d}}',\underline{\mathbf{d}}''}\cdot\Delta_{\mu_1,\mu_2}(x)\cdot(R^{\mathrm{sup}}_{\underline{\mathbf{d}}',\underline{\mathbf{d}}''})^{-1}=\Delta^{\mathrm{op}}_{\mu_1,\mu_2}(x),\quad\forall\,x\in\mathsf{Y}_{\mu_1+\mu_2}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}),$$

其中，$R^{\mathrm{sup}}{}_{\mathbf{d}',\ \mathbf{d}''}=\mathsf{Stab}_{-}^{-1,\ \bar{\epsilon}}\mathsf{Stab}_{+,\ \epsilon}$ 是 R-矩阵编织 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}{}_{\mathbf{d}',\ \mathbf{A}_1^{\mathrm{fr}}}$，其中 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}{}_{\mathbf{d}'',\ \mathbf{A}_2^{\mathrm{fr}}}$。

注 4.18。 设 $\mathbf{d}'_{\mathrm{in}}=\mathbf{d}'_{\mathrm{out}}$、$\mathbf{d}''_{\mathrm{in}}=\mathbf{d}''_{\mathrm{out}}$，并设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\ \mathbf{d})\times_{\mathcal{M}_0(\mathbf{v},\ \mathbf{d})}\mathcal{M}(\mathbf{v},\ \mathbf{d})$ 上的斯坦伯格对应（见定义 2.17），则由定理 2.21可知

$$\mathrm{Stab}_{+,\epsilon}^{-1}\circ\mathcal{L}\circ\mathrm{Stab}_{+,\epsilon}=\mathrm{Stab}_{-,\bar{\epsilon}}^{-1}\circ\mathcal{L}\circ\mathrm{Stab}_{-,\bar{\epsilon}}$$

等价地，

$$\left[R^{\mathrm{sup}}_{\underline{\mathbf{d}}',\underline{\mathbf{d}}''}\ ,\ \mathrm{Stab}_{+,\epsilon}^{-1}\circ\mathcal{L}\circ\mathrm{Stab}_{+,\epsilon}\right]=0$$

4.3. 李超代数 $\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{W}}$。 在本小节中，我们聚焦于对称框架 $\mathbf{d}_{\mathrm{in}}=\mathbf{d}_{\mathrm{out}}$，或等价地，零平移 $\mu=0$ 情形。

定义 4.19。 设 $\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{W}}\subset\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W})$ 为 $\mathsf{Span}_{\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)}\{\mathsf{E}(m_0)\mid m_0\text{ 在 }u\}$ 中为常数。

利用展开式 (2.15)，我们看到 $\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{W}}$ 由经典 R-矩阵 $\boldsymbol{r}$的矩阵元组成。这意味着以下结论。

命题 4.20。 每个元素 $x\in\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{W}}$ 都是本原的：

$$\Delta(x)=x\otimes 1+1\otimes x.$$

特别地，$\Delta(x)$ 与 R 矩阵对易：

$$[\Delta(x),R^{\mathrm{sup}}(u)]=0,\quad[\Delta(x),\boldsymbol{r}]=0.$$

引理 4.21. $\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{W}}$ 是一个李超代数，其李括号为 $\mathsf{Y}_0(Q,\ \mathsf{W})$ 中的超对易子。

证明。 </style}与 [MO，命题 5.2.1] 中相同的论证表明

$$[\mathsf{E}(m\,u^i),\mathsf{E}(m'\,u^j)] = \mathsf{E}\left((\mathrm{tr}\otimes\mathrm{id})\,[\boldsymbol{r},m\otimes m']\,u^{i+j}\right) + \text{lower degree in } u. \tag{4.11}$$

将 $i=j=0$ 代入上述方程即可得到该引理。 □

李超代数 $\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{W}}$ 继承了 $\mathrm{Y}_0(Q,\mathsf{W})$ 的 $\mathbb{Z}^{Q_0}$-分次:

$$\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{W}} = \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}^{Q_0}} \mathfrak{g}_\alpha, \quad [\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]\subseteq\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}\,.$$

定义 4.22. 我们称 $\mathfrak{g}_0$ 为 *Cartan* 子代数。满足 $\mathfrak{g}_\eta\neq 0$ 的非零向量 η 称为 $\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{W}}$ 的一个根，而 $\mathfrak{g}_\eta$ 称为根空间。若根 η 满足 $\eta\in\mathbb{Z}^{Q_0}_{\geqslant 0}$，则称其为正根；若 $-\eta$ 是正根，则 η 称为负根。

命题 4.23. 对于 $\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{W}}$，有以下事实。

(1) Cartan 子代数分解为

$$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{v}\oplus\mathfrak{d},\quad \mathfrak{v}=\bigoplus_{i\in Q_0}\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)\cdot\mathsf{v}_i,\quad \mathfrak{d}=\bigoplus_{i\in Q_0}\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)\cdot\mathsf{d}_i,$$

其中，v_i 是一个线性泛函，其在 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}$ $\mathfrak{d}$ (v) 上的取值为 $\mathbf{v}_i$；d_i 是一个线性泛函，其在$\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}$ $\mathfrak{d}$ (v) 上的取值为 $c_1(\mathbf{D}_{\mathrm{in},i})-c_1(\mathbf{D}_{\mathrm{out},i})$。

(2) $\bar{\mathfrak{g}_0}$ 是 $\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{W}}$ 的极大超交换子代数。(3) 所有根空间均为有限维。(4) 所有根要么为正根，要么为负根。(5) 存在一个非退化的超对称（伴随作用）不变双线性型

$$(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{g}}\colon \mathfrak{g}_{Q,\mathsf{W}}\times\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{W}}\to\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)\,.$$

关于此形式，我们有 $\mathfrak{g}_{-\eta}\cong\mathfrak{g}_\eta^\vee$。

(6) $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{g}}$ 的不变张量是经典的 R-矩阵 $\boldsymbol{r}$，具体为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{\mathrm{diag}}+\sum_{\alpha>0}\sum_s\left(e_\alpha^{(s)}\otimes e_{-\alpha}^{(s)}+(-1)^{|\alpha|}e_{-\alpha}^{(s)}\otimes e_\alpha^{(s)}\right), \tag{4.12}$$

其中，对所有正根 α 求和；对于每个 α，s 对依赖于 α 的有限指标集求和；$|\alpha|$ 如 (3.2) 所示。元素 $e_\alpha^{(s)}$ 构成根空间 $\mathfrak{g}_\alpha$ 的一组基，使得对于 $\alpha>0$

$$(e_\beta^{(r)},e_\alpha^{(s)})=\delta_{\beta,-\alpha}\,\delta_{r,s}\,.$$

(7) 将 $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{g}}$ 限制到 $\mathfrak{g}_0$ 上，可在 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{v}\oplus\mathfrak{d}$上得到一个非退化对称双线性形式，其显式矩阵为

$$\begin{pmatrix}0 & \mathrm{id}\\ \mathrm{id} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}\quad\text{for}\quad \boldsymbol{Q}_{ij}=\sum_{a:i\to j}t_a+\sum_{b:j\to i}t_b\in\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)\,. \tag{4.13}$$

(8) 设 $h_\eta\in\mathfrak{g}_0$ 为根 η 的余根，其定义如下

$$h_\eta=\sum_i\eta_i\,\mathsf{d}_i-\sum_{i,j}\boldsymbol{Q}_{ij}\,\eta_i\,\mathsf{v}_j\,.$$

那么对于 $\alpha>0$

$$[e_\alpha^{(s)},e_{-\alpha}^{(t)}]=(-1)^{|\alpha|}\,\delta_{s,t}\,h_\alpha\,.$$

证明。(1) 可由公式 (2.17) 得出，该公式给出了经典 R-矩阵的对角部分。注意，$\boldsymbol{r}_{\mathrm{diag}}$ 的真空分量为 $-t_i\cdot 1\otimes\mathbf{v}_i$，且对于可容许辅助数据 $\mathfrak{c}$，$t_i\neq 0$，因此 $\mathsf{v}_i\in\mathfrak{g}_{0\circ}$ 由可容许性还可得 $\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}(\delta_i)\neq 0$（引理 3.15），故有 $\mathsf{d}_i\in\mathfrak{g}_{0\circ}$ 根据 (2.17)，$\mathfrak{g}_0$ 由 $\{\mathsf{v}_i\}_{i\in Q_0}$ 和 $\{\mathsf{d}_i\}_{i\in Q_0}$ 张成，线性无关性显而易见。

$\mathfrak{g}_\eta$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的伴随作用下权为 η的特征空间。这意味着（2）。

(3) 和 (4) 可由与 [MO, §5.3.7] 相同的论证得出。(5) 和 (6) 可由与 [MO, §5.3.8]，相同的论证得出，此处不再重复。(7) 可通过直接计算，利用 (6) 和 (2.17) 得出。(8) 可由双线性形式 $(\cdot,\ \cdot)_{\mathfrak{g}}$ 的不变性得出。

□

注 4.24。 根 η 的余根 h_η 可写为

$$h_\eta = \sum \eta_i h_{i,0}$$

其中 $h_{i,0}$ 是 $h_i(z) = \sum_{r\geqslant 0} h_{i,r} z^{-r-1}$ 的最低模在定理 4.8 中的映射下的像。

在 [DM] 中（另见 [Dav2, 第 18] 页），基环 $\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]$ 上的李超代数 $\mathfrak{g}^{\mathrm{BPS},\mathsf{T}_0}_{Q,\mathsf{w}}$ 被定义为卷积上同调代数 $\mathcal{H}_{Q,\mathsf{w}}$ 在偏斜层过滤中的最低分支，其李括号是由带符号扭曲的卷积上同调代数乘法诱导的超交换子。

~ ~对于带有典范三次势 W 的三重箭图 Q （例 2.4），第二作者提出了猜想，并在 [BD] 中证明了

$$\mathfrak{g}^{\mathrm{BPS},\mathsf{T}_0}_{\widetilde{Q},\widetilde{\mathsf{W}}} \cong \mathfrak{g}^{\mathrm{MO},+}_{Q},$$

其中 $\mathfrak{g}^{\mathrm{MO},+}_{Q}$ 是 Maulik-Okounkov 李代数 $\mathfrak{g}^{\mathrm{MO}}_{Q}$ [MO, §5.3] 的正部分。类似地，我们定义

$$\mathfrak{g}^{+}_{Q,\mathsf{W}} = \bigoplus_{\eta>0} \mathfrak{g}_\eta,$$

并作出如下猜想。

猜想 4.25. 存在一个 $\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$-李代数同构

$$\mathfrak{g}^{+}_{Q,\mathsf{W}} \cong \mathfrak{g}^{\mathrm{BPS},\mathsf{T}_0}_{Q,\mathsf{W}} \otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]} \mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$$

使它们在任意态空间 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$ 上的作用相互交织。

~ ~对于带有典范三次势 W 的三重箭图 Q ，我们将在定理 4.45 中证明，上述猜想可由 [BD] 的主要结果推出。

4.4. Y(, W) 的滤过与 PBW 基。 $\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W})$ 带有一个按 u 中次数定义的滤过：对于 $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$,$F_k\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W})$，它由单项式 $\mathsf{E}(m_1u^{n_1})\cdots\mathsf{E}(m_ru^{n_r})$ 张成，其中 m_i 在 u 和 $\sum n_i \leqslant k$ 中为常数。以下是对 [MO, Thm.5.5.1] 的推广。

定理 4.26. $\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W})$ 由 $\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{w}}$ 以及以下典范类的乘法生成

$$\{\mathrm{ch}_k(\mathsf{V}_i),\ \mathrm{ch}_{k+1}(\mathsf{D}_{\mathrm{in},i} - \mathsf{D}_{\mathrm{out},i})\}^{k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}}_{i\in Q_0}, \tag{4.14}$$

其中，陈特征是 $(\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}})$-等变的。此外，

$$\mathrm{gr}\,\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W}) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{W}}[u])$$

关于按 u 中次数定义的滤过。

证明。 思路与 [MO, 定理 5.5.1] 相同。自然映射 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{w}}[u]) \to \mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W})$ 的满射性可由 [MO, 命题 5.5.2] 的以下推广推出。

Claim: if $\mathsf{E}(m) = 0$, then $\mathsf{E}(m\,u^k) \in F_{k-1}\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W})$.

上述断言的证明与同上。 类似。事实上，我们可以假设 m 是 $\mathfrak{g}_0$ 的一个权为 λ 的特征向量。若 $\lambda \neq 0$，则对于 $h = \mathsf{E}(h) \in \mathfrak{g}_0$，有

$$\lambda(h)\mathsf{E}(m\,u^k) = [\mathsf{E}(\tilde{h}), \mathsf{E}(m\,u^k)] = [\mathsf{E}(\tilde{h}\,u^k), \mathsf{E}(m)] + \text{lower degree in } u \tag{4.15}$$

根据 (4.11)。如果 $\lambda = 0$，那么 $\mathsf{E}(m\,u^k)$ 是 R-矩阵的对角矩阵元的线性组合。利用高斯分解 $R^{\mathrm{sup}}(u) = F(u)G(u)E(u)$，以及 $E(u)$ 和 $F(u)$ 具有如下形式这一事实

$$\mathrm{id} + \text{ strict triangular of order } O(u^{-1}),$$

我们有

$$\frac{1}{k!}\mathsf{E}(m\,u^k) = \sum_{i\in Q_0}(m,\mathsf{d}_i)\,\mathrm{ch}_k(\mathsf{V}_i) + \sum_{i\in Q_0}(m,\mathsf{v}_i)\,\mathrm{ch}_{k+1}(\mathsf{D}_{\mathrm{in},i} - \mathsf{D}_{\mathrm{out},i}) - \sum_{i,j\in Q_0} \boldsymbol{Q}_{ij}\,(m,\mathsf{v}_i)\,\mathrm{ch}_k(\mathsf{V}_j) + \text{lower degree in } u,$$

其中 $\boldsymbol{Q}_{ij}$ 是命题 4.23 (7) 中的矩阵，而与 $\mathsf{v}_i,\mathsf{d}_i \in \mathfrak{g}_0$ 的配对是迹配对。$\mathsf{E}(m) = 0$ 的像意味着 $(m,\mathsf{v}_i) = 0$ 以及 $(m,\mathsf{d}_i) = 0$；因此 $\mathsf{E}(m\,u^k) \in F_{k-1}\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W})$。这证明了该断言以及满射性。

单射性的证明与 [MO, §5.5.3], 中的方法相同，此处不再重复。最后，(4.15) 表明，$\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W})$ 由 $\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{w}}$ 以及典范类的乘法 (4.14) 生成。□

4.5. 移位同态。固定 $\mu' \leqslant \mu \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}^{Q_0}$。取 $\mathbf{d}$、$\mathbf{d}'$，使得

$$\mathbf{d}_{\mathrm{in}} = \mathbf{d}'_{\mathrm{in}},\ \mathbf{d}_{\mathrm{out}} - \mathbf{d}_{\mathrm{in}} = \mu,\ \mathbf{d}'_{\mathrm{out}} - \mathbf{d}'_{\mathrm{in}} = \mu'.$$

于是，通过向 $\mathcal{M}(\mathbf{d}')$ 添加 $\mathbf{d}_{\mathrm{out}} - \mathbf{d}'_{\mathrm{out}}$ 个出射框架副本，$\mathcal{M}(\mathbf{d})$ 成为 $\mathcal{M}(\mathbf{d}')$ 上的一个向量丛，即 $\bigoplus_{i\in Q_0} \mathrm{Hom}(\mathsf{V}_i, \mathbb{C}^{\mathbf{d}_{\mathrm{out},i} - \mathbf{d}'_{\mathrm{out},i}})$。令 $\pi\colon \mathcal{M}(\mathbf{d}) \to \mathcal{M}(\mathbf{d}')$ 为丛映射。取 $\mathcal{M}(\mathbf{d}')$ 上的一个带框架势 W^{fr}，其在 $\mathcal{M}(\mathbf{d})$ 上的拉回仍记为 W^{fr}。于是我们得到如下拉回同构：

$$\pi^*\colon \mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}}',\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}.$$

考虑以下辅助 $\mathbb{C}_z^*$ 作用：它在 $\mathcal{M}(\mathbf{d}')$ 上平凡作用，并以权 1 缩放向量丛 $\mathcal{M}(\mathbf{d})$ 的纤维。于是

$$H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}\times\mathbb{C}_z^*}(\mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}}'), \mathsf{w}^{\mathrm{fr}}) \cong \mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}}',\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}} \otimes \mathbb{C}[z] =: \mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}}',\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}[z],$$

$$H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}\times\mathbb{C}_z^*}(\mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}}), \mathsf{w}^{\mathrm{fr}}) \cong \mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}} \otimes \mathbb{C}[z] =: \mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}[z],$$

以及 $\pi^*\colon \mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}}',\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}[z] \to \mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}[z]$ 是一个同构，其逆映射为 i^*，其中 $i\colon \mathcal{M}(\mathbf{d}') \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{d})$ 是零截面。

令 $m \in \mathsf{End}^{\mathbb{Z}/2}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c},\mathrm{loc}})[u]$，并分别令 $\mathsf{E}(m)_z$ 和 $\mathsf{E}(m)'_z$ 为作用在 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}}[z]$ 与 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}}[z]$ 上的相应算子。注意，R-矩阵在 $\mathcal{H}_{\mathfrak{c},\mathrm{loc}} \otimes \mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}}[z]$ 上关于 z 是常数的，因为 $\mathbb{C}_z^*$ 平凡作用；因此

$$\mathsf{E}(m)'_z = \mathsf{E}(m)'_{z=0}.$$

引理 4.27。若 $\mathcal{C}$ 是可容许的，则 $i^*\mathsf{E}(m)_z\pi^* \in \prod \mathsf{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}^{(\mathsf{t}_0)[\mathsf{a}^{\mathrm{fr}}]}}(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}})[z]$ 属于子代数 $\mathrm{Y}^{\mu'}(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})[z]$。

证明。只需对 $i^*\mathsf{E}^{\pm}(m)_z\pi^*$ 和 $i^*\mathsf{E}^0(m)_z\pi^*$ 证明该引理即可。取 $\mathfrak{c} = (\mathbf{a}, \mathsf{T}_0 \curvearrowright \mathcal{M}(\mathbf{a}), \mathsf{w}^{\mathrm{fr}}) \in \mathcal{C}$。令

$$R^{\sup}(u)_z = \Sigma \cdot \mathrm{Stab}^{-1}_{u<0,\epsilon}\,\mathrm{Stab}_{u>0,\epsilon},\quad R^{\sup}(u)'_z = \Sigma \cdot (\mathrm{Stab}'_{u<0,\epsilon})^{-1}\,\mathrm{Stab}'_{u>0,\epsilon}$$

分别为作用于 $\mathcal{H}_{\mathfrak{c},\mathrm{loc}} \otimes \mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}}[z]$ 和 $\mathcal{H}_{\mathfrak{c},\mathrm{loc}} \otimes \mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}}[z]$ 上的 R-矩阵。注意，向量丛 $\mathcal{V} = \bigoplus_{i\in Q_0} \mathrm{Hom}(\mathsf{V}_i, \mathbb{C}^{\mathbf{d}_{\mathrm{out},i} - \mathbf{d}'_{\mathrm{out},i}})$ 在室 $u > 0$ 中是排斥的。根据 [COZZ1，命题 8.2、8.3]，我们有

$$i^*\,\mathrm{Stab}_{u<0,\epsilon}\,\pi^* = \mathrm{Stab}'_{u<0,\epsilon} \cdot (-1)^\sharp,\quad i^*\,\mathrm{Stab}_{u>0,\epsilon}\,\pi^* = e^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}_u^*\times\mathbb{C}_z^*}(\mathcal{V}) \cdot \mathrm{Stab}'_{u>0,\epsilon} \cdot e^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}_z^*}(\mathcal{V}^{\mathrm{fix}})^{-1},$$

其中，$(-1)^\sharp$ 在分支 $\mathcal{M}(\mathbf{v}_1,\mathbf{a}) \times \mathcal{M}(\mathbf{v}_2,\mathbf{d})$ 上为 $(-1)^{\mathbf{v}_1\cdot(\mu-\mu')}$，而 $\mathcal{V}^{\mathrm{fix}}$ 是 $\mathcal{V}$ 限制到 $\mathbb{C}_u^*$-不动分支后的 $\mathbb{C}_u^*$-不动部分。

写出高斯分解 $R^{\sup}(u)_z = F(u)_z G(u)_z E(u)_z$ 和 $R^{\sup}(u)'_z = F(u)'_z G(u)'_z E(u)'_z$，如同 (4.6)，但具有额外的 $\mathbb{C}_z^*$ 等变性。于是我们有

$$i^*F(u)_z\pi^* = (-1)^\sharp \cdot F(u)'_z \cdot (-1)^\sharp,\quad i^*G(u)_z\pi^* = G(u)'_z \cdot D(u)_z,\quad i^*E(u)_z\pi^* = H_z \cdot E(u)'_z \cdot H_z^{-1},$$

其中 $D(u)$和 H 是如下对角算子：

$$D(u)_z\Big|_{\mathcal{M}(\mathbf{v}_1,\mathbf{a})\times\mathcal{M}(\mathbf{v}_2,\underline{\mathbf{d}})} = (u-z)^{\mathbf{v}_1\cdot(\mu-\mu')} c_{-1/(u-z)}\left(\bigoplus_{i\in Q_0} \mathrm{Hom}(\mathsf{V}_{1,i}, \mathbb{C}^{\mathbf{d}_{\mathrm{out},i} - \mathbf{d}'_{\mathrm{out},i}})\right),$$

$$H_z\Big|_{\mathcal{M}(\mathbf{v}_1,\mathbf{a})\times\mathcal{M}(\mathbf{v}_2,\underline{\mathbf{d}})} = z^{\mathbf{v}_2\cdot(\mu-\mu')} c_{1/z}\left(\bigoplus_{i\in Q_0} \mathrm{Hom}(\mathsf{V}_{2,i}, \mathbb{C}^{\mathbf{d}_{\mathrm{out},i} - \mathbf{d}'_{\mathrm{out},i}})\right),$$

这里，$c_{(-)}(\cdots)$表示变量$(-)$对应的$(\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}})$-等变陈多项式。

显然，$i^*F(u)_z\pi^*$ 的矩阵元包含于$\mathrm{Y}^{\mu'}(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})[z]$中。$D(u)_z$ 只作用于 $\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}$，因此 $i^*G(u)_z\pi^*$ 的矩阵元包含于$\mathrm{Y}^{\mu'}(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})[z]$中。$H_z$ 是一个多项式，其系数由典范丛 $\{\mathsf{V}_j\}_{j\in Q_0}$的特征类给出，因此根据 $\mathcal{C}$ 的可容许性和引理 4.11，有 $H_z \in \mathrm{Y}^0_{\mu'}(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})[z]$。于是，$H_z \cdot E(u)'_z \cdot H_z^{-1}$的矩阵元包含于$\mathrm{Y}^{\mu'}(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})((z^{-1}))$中。由于

$$H_z \cdot E(u)'_z \cdot H_z^{-1} = i^*E(u)_z\pi^*,$$

以及 la tter 是关于 z 的多项式，$i^*E(u)_z\pi^*$ 的矩阵元必须属于 $\mathrm{Y}^{\mu'}(Q, \mathsf{W}\ \mathcal{C})[z]$。□

定义 4.28。 固定 $\mu' \leqslant \mu \in \mathbb{Z}^{Q_0}_{\leqslant 0}$。假设 $\mathcal{C}$ 是可容许的。定义 参数化移位同态

$$\mathsf{S}_{\mu,\mu';z} \colon \mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}) \to \mathsf{Y}_{\mu'}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C})[z]$$

b由引理 4.27 中的赋值 $\mathsf{E}(m) \mapsto (i^*\mathsf{E}(m)_z\pi^*)$，并定义移位同态

$$\mathsf{S}_{\mu,\mu'} := \mathsf{S}_{\mu,\mu';z}\big|_{z=0} \colon \mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}) \to \mathsf{Y}_{\mu'}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}).$$

定义 $\mathsf{Y}_{\mu,\ \mu'}(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 为 $\mathsf{Y}\mu(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 在投影下的像

$$\prod \mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)[\mathsf{a}^{\mathrm{fr}}]}(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}}) \twoheadrightarrow \prod{}' \mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)[\mathsf{a}^{\mathrm{fr}}]}(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}}),$$

其中，第一个乘积取遍满足 $\mathbf{d}_{\mathrm{out}} - \mathbf{d}_{\mathrm{in}} = \mu$ 的所有态空间；第二个乘积则取遍由向满足 $\mathbf{d}'_{\mathrm{out}} - \mathbf{d}'_{\mathrm{in}} = \mu'$ 的态空间添加出射箭头而得到的态空间。

Lemm引理 4.29. $\mathsf{Y}_{\mu,\ \mu'}(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 同构于 $\mathsf{S}_{\mu,\ \mu'} \colon \mathsf{Y}\mu(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C}) \to \mathsf{Y}\mu'(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C}$ 的像).

证明。 由于 $M \mapsto i^*M\pi^*$ 诱导了一个同构 $\mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}\ (\mathsf{t}_0)[\mathsf{a}^{\mathrm{fr}}]}(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}\ \mathbf{d},\ \mathsf{A}^{\mathrm{fr}},\ \mathrm{loc}}) \cong \mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}\ (\mathsf{t}_0)[\mathsf{a}^{\mathrm{fr}}]}(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\ \mathbf{d},\ \mathsf{A}^{\mathrm{fr}},\ \mathrm{loc}})$，我们可以将映射 $\mathsf{S}_{\mu,\ \mu'}$ 改写为如下复合（限制在 $\mathsf{Y}\mu(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 上）

$$\prod \mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)[\mathsf{a}^{\mathrm{fr}}]}(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}}) \twoheadrightarrow \prod{}' \mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)[\mathsf{a}^{\mathrm{fr}}]}(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}}) \cong \prod \mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)[\mathsf{a}^{\mathrm{fr}}]}(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}}',\mathsf{A}^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}}) \,. \tag{4.16}$$

由此可得，$\mathsf{Y}_{\mu,\ \mu'}(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 与 $\mathsf{S}_{\mu,\ \mu'}$ 的像同构。 □

定义 4.30. 定义反向移位同态

$$\mathsf{S}^{\mu,\mu'}_z : \mathsf{Y}_{\mu'}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}) \to \mathsf{Y}_{\mu,\mu'}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C})(\!(z^{-1})\!)$$

通过赋值 $\mathsf{E}(m)' \mapsto \pi^*\mathsf{E}(m)'i^*$来定义，其中我们使用 (4.16) 中的识别。

注 4.31. $\mathsf{S}_{\mu,\ \mu';\ z}$ 和 $\mathsf{S}^{\mu\ \mu'}_z$，在三角生成元上的显式公式可从引理 4.27 的证明中读出（以下所有陈特征/多项式均为 $(\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}})$-等变）：

$$\mathsf{S}_{\mu,\mu';z}(\mathsf{E}^-(m)) = (-1)^{\deg(m)\cdot(\mu-\mu')}\mathsf{E}^-(m)', \qquad \mathsf{S}^{\mu,\mu'}_z(\mathsf{E}^-(m)') = (-1)^{\deg(m)\cdot(\mu-\mu')}\mathsf{E}^-(m)_z,$$

$$\mathsf{S}_{\mu,\mu';z}(\mathsf{E}^+(m)) = z^{\deg(m)\cdot(\mu-\mu')}\widetilde{H}_z\,\mathsf{E}^+(m)'\,\widetilde{H}_z^{-1}, \qquad \mathsf{S}^{\mu,\mu'}_z(\mathsf{E}^+(m)') = z^{\deg(m)\cdot(\mu'-\mu)}\widetilde{H}_z^{-1}\,\mathsf{E}^+(m)_z\widetilde{H}_z,$$

$$\mathsf{S}_{\mu,\mu';z}(\mathrm{ch}_k(\mathsf{V}_i)) = \mathrm{ch}_k(\mathsf{V}_i), \qquad \mathsf{S}^{\mu,\mu'}_z(\mathrm{ch}_k(\mathsf{V}_i)) = \mathrm{ch}_k(\mathsf{V}_i)\,,$$

$$\mathsf{S}_{\mu,\mu';z}(\mathrm{ch}_k(\mathsf{D}_{\mathsf{diff},i})) = \mathrm{ch}_k(\mathsf{D}_{\mathsf{diff},i}) - \frac{(\mu_i-\mu'_i)z^k}{k!}, \qquad \mathsf{S}^{\mu,\mu'}_z(\mathrm{ch}_k(\mathsf{D}_{\mathsf{diff},i})) = \mathrm{ch}_k(\mathsf{D}_{\mathsf{diff},i}) + \frac{(\mu_i-\mu'_i)z^k}{k!}\,,$$

其中 $\mathsf{D}_{\mathsf{diff},\ i} := \mathsf{D}_{\mathsf{in},\ i} - \mathsf{D}_{\mathsf{out},\ i}$，$\deg(m)$ 是 m 的 $\mathbb{Z}^{Q_0}$ 分次，

$$\widetilde{H}_z = \prod_{i\in Q_0} c_{-1/z}(\mathsf{V}_i)^{\mu_i-\mu'_i}\,,$$

而 $(\cdots)_{z^n}$ 表示取幂级数中的 z^n 系数。例如，高斯分解 (3.28) 中的算子 $g_i(u)$ $h_i(u)$ $e_i(u)$ $f_i(u)$ 在映射 $\mathsf{S}_{\mu,\ \mu';\ z}$ 下的像如下：

$$g_i(u) \mapsto g_i(u), \quad h_i(u) \mapsto (u-z)^{\mu_i-\mu'_i}h_i(u), \quad e_i(u) \mapsto [(z-u)^{\mu_i-\mu'_i}e_i(u)]_{u^{<0}}, \quad f_i(u) \mapsto (-1)^{\mu_i-\mu'_i}f_i(u),$$

其中，$[\cdots]_{u^{<0}}$ 表示在幂级数展开中取 u 部分的负幂。另一方面，$s^{\mu,\ }{}_{z}{}^{\ \mu'}$ 将这些生成元映射如下

$$g_i(u) \mapsto g_i(u), \quad h_i(u) \mapsto (u-z)^{\mu'_i-\mu_i}h_i(u), \quad e_i(u) \mapsto [(z-u)^{\mu'_i-\mu_i}e_i(u)]_{u^{<0}}, \quad f_i(u) \mapsto (-1)^{\mu'_i-\mu_i}f_i(u).$$

这里，我们在区域 $1 < |u| < |z|$ 中展开 $(z-u)^{\mu'_i-\mu_i}e_i(u)$，并在区域 $1 < |z| < |u|$ 中展开 $(u-z)^{\mu'_i-\mu_i}h_i(u)$。**引理**

4.32. 引理 设 $\mathcal{C}$ 可容许，且 $\mu' \leqslant \mu \in \mathbb{Z}^{Q_0}_{\leqslant 0}$。则 $\mathsf{Y}\mu'(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 由 b

$$\bigcup_{a\in\mathbb{C}} \mathsf{S}_{\mu,\mu';z}(\mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}))\big|_{z=a}$$

y

作为一个 $\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$-代数。

证明。由注 4.31 中 $\mathsf{S}_{\mu,\mu';z}$ 的显式公式可知，$\mathsf{E}^-(m)'$、$\mathrm{ch}_k(\mathsf{V}_i)$ 和 $\mathrm{ch}_k(\mathsf{D}_{\mathrm{in},i} - \mathsf{D}_{\mathrm{out},i})$ 均包含在 $\mathsf{S}_{\mu,\mu';z}\big|_{z=0}$ 的像中。此外，$\mathsf{E}^+(m)'$ 是 $\mathsf{S}_{\mu,\mu';z}(\mathsf{E}^+(m))$ 的首项系数，因此可由 $\bigcup_{a\in\mathbb{C}} \mathsf{S}_{\mu,\mu';z}(\mathsf{E}^+(m))\big|_{z=a}$ 生成。由于 $\mathsf{E}^{\pm}(m)'$、$\mathrm{ch}_k(\mathsf{V}_i)$ 和 $\mathrm{ch}_k(\mathsf{D}_{\mathrm{in},i} - \mathsf{D}_{\mathrm{out},i})$ 根据命题 4.12 生成 $\mathsf{Y}\mu'(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})$，引理得证。□

引理 4.33。设 $\mathcal{C}$ 为一个伴随 可接受，且 $\mu' \leqslant \mu \in \mathbb{Z}^{Q_0}_{\leqslant 0}$。那么，反向移位同态 $\mathsf{S}^{\mu\ \mu'}_z$，是单射

e.

证明。 这由以下事实可得：

$$\prod{}' \operatorname{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}(\mathfrak{t}_0)[\mathsf{a}^{\mathrm{fr}}]}(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}})(\!(z^{-1})\!) \longrightarrow \prod \operatorname{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}(\mathfrak{t}_0)[\mathsf{a}^{\mathrm{fr}}]}(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}}',\mathsf{A}^{\mathrm{fr}},\mathrm{loc}})(\!(z^{-1})\!), \qquad X \mapsto \pi^* X i^*$$

是一个同构。 □

以下结论由定义显然可得：

引理 4.34. 若 $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$，则子代数 $\mathsf{Y}_\mu(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C}) \subseteq \mathsf{Y}_\mu(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C}')$ 在参数化移位同态和反向移位同态下封闭，即以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}) & \xrightarrow{\mathsf{S}_{\mu,\mu';z}} & \mathsf{Y}_{\mu'}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C})[z] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}') & \xrightarrow{\mathsf{S}_{\mu,\mu';z}} & \mathsf{Y}_{\mu'}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}')[z] \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathsf{Y}_{\mu'}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}) & \xrightarrow{\mathsf{S}^{\mu,\mu'}_z} & \mathsf{Y}_{\mu,\mu'}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C})(\!(z^{-1})\!) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{Y}_{\mu'}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}') & \xrightarrow{\mathsf{S}^{\mu,\mu'}_z} & \mathsf{Y}_{\mu,\mu'}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}')(\!(z^{-1})\!) \end{array}$$

命题 4.35. 移位同态满足结合律，即

$$\mathsf{S}_{\mu',\mu''} \circ \mathsf{S}_{\mu,\mu'} = \mathsf{S}_{\mu,\mu''}, \quad \mu'' \leqslant \mu' \leqslant \mu \in \mathbb{Z}^{Q_0}_{\leqslant 0}.$$

移位同态与余乘法相容，具体而言

$$\Delta_{\mu'_1,\mu_2} \circ \mathsf{S}_{\mu_1+\mu_2,\mu'_1+\mu_2} = (\mathsf{S}_{\mu_1,\mu'_1} \otimes \tau^{\mu_1-\mu'_1}) \circ \Delta_{\mu_1,\mu_2}.$$

这里 τ^ν ($\nu \in \mathbb{Z}^{Q_0}$) 是自同构

$$\tau^\nu \colon \mathsf{Y}_{\mu_2}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}) \to \mathsf{Y}_{\mu_2}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}), \tag{4.17}$$

由 $x \mapsto (-1)$ 给出 $\deg(x)\cdot\nu_x$ 作用于齐次元素 x 上，其中 $\deg(x)$ 是 $\mathsf{Y}_{\mu_2}(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 上的 $\mathbb{Z}^{Q_0}$ 分次 .

证明。 移位同态的结合性源于拉回同构的结合性。设 $\mathbf{d}_1,\mathbf{d}'_1,\mathbf{d}_2$ 是框架维数向量，使得出射维数与入射维数之差分别为 μ_1, μ'_1, μ_2。考虑本小节开头构造的向量丛投影：

$$\pi \colon \mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}_1}) \to \mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}'_1}), \quad \widetilde{\pi} \colon \mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}_1} + \underline{\mathbf{d}_2}) \to \mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}'_1} + \underline{\mathbf{d}_2}).$$

对应于 $\widetilde{\pi}$ 的向量丛在分室 $a > 0$ 中、在分解 $a\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2$，下具有吸引性，于是根据 [COZZ1，命题 8.2]，我们有

$$\operatorname{Stab}_{+,\epsilon} \circ (\pi^* \otimes \mathrm{id}) = \widetilde{\pi}^* \circ \operatorname{Stab}'_{+,\epsilon} \cdot (-1)^\flat,$$

其中 $(-1)^\flat$ 在分支 $\mathcal{M}(\mathbf{v}_1,\mathbf{d}'_1) \times \mathcal{M}(\mathbf{v}_2, \underline{\mathbf{d}_2})$ 是 $(-1)^{\mathbf{v}_2\cdot(\underline{\mu_1-\mu'_1})}$。然后，与余乘法的相容性由上式推出。□

命题 4.36. 移位同态 $\mathsf{S}_{\mu,\mu'}$ 是单射。因此，$\mathsf{Y}_{\mu,\mu'}(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 与 $\mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 同构。

证明策略是首先基于技术性引理 4.37，证明 $\mathsf{S}_{0,\mu}$ 是单射（引理 4.38），然后通过形式论证推出一般的 $\mathsf{S}_{\mu,\mu'}$ 的单射性。

引理 4.37. 假设 $\mathcal{C}$ 是可容许的。设 $\mathcal{H}_0$ 是一个零平移的状态空间，并设 $\left\{\mathcal{H}_i := \mathcal{H}^{\mathsf{W}_i}_{\delta_i}\right\}_{i\in Q_0}$ 是一组可容许辅助空间（视为状态空间）。那么自然映射

$$\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}) \longrightarrow \prod_{i_1,\cdots,i_n} \operatorname{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}(\mathfrak{t}_0)[a_0,a_{i_1},\ldots,a_{i_n}]}(\mathcal{H}_0[a_0] \otimes \mathcal{H}_{i_1}[a_{i_1}] \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{i_n}[a_{i_n}])$$

是单射。这里 $a_0, a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ 是环面 $\mathsf{A}^{\mathrm{fr}} \cong (\mathbb{C}^*)^{n+1}$ 的等变参数，而 $\mathcal{H}_{i_j}[a_{i_j}]$ 表示作用于 $\mathcal{H}_{i_j}$ 且权为 a_{i_j} 的 A^{fr}。

证明。 设 $\overline{\mathsf{Y}}$ 是 $\mathsf{Y}_0(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 在

$$\prod \operatorname{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}(\mathfrak{t}_0)[a_0,a_{i_1},\ldots,a_{i_n}]}(\mathcal{H}_0[a_0] \otimes \mathcal{H}_{i_1}[a_{i_1}] \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{i_n}[a_{i_n}]).$$

利用定理 4.26，只需证明 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{Q,\ \mathsf{w}}[u]) \to \operatorname{gr}\overline{\mathsf{Y}}$ 是单射。根据 [MO, §5.5.3]，，问题归结为证明线性映射 $\mathfrak{g}_{Q,\ \mathsf{w}} \to \overline{\mathsf{Y}}$ 是单射。由于 $\mathfrak{g}_{Q,\ \mathsf{w}} \to \overline{\mathsf{Y}}$ 是 $\mathbb{Z}^{Q_0}$-分次的，我们需要证明每个齐次子空间 $\mathfrak{g}_\eta$ 上的单射性。设 $\mathbf{x} = \sum a_i \mathbf{v}_i + \sum b_i \mathbf{d}_i$ 属于核。于是 $\mathbf{x}$ 在 $\mathcal{H}_i(\mathbf{0})$ 上的作用平凡，因此 $b_i = 0$ 根据 $\mathbf{d}_i$ 在 $\mathcal{H}_j$ 上的值是 δ_{ij} 的非零倍数这一事实，$\mathbf{x}$ 在 $\mathcal{H}_i(\delta_i)$ 上的作用平凡，

因此 $a_i = 0$ 根据 $\mathbf{v}_i$ 在 $\mathcal{H}_j(\delta_j)$ 上的值为 δ_{ij} 这一事实。这证明了 $\mathfrak{g}_0$ 的单射性。对于满足 $\eta_i > 0$ 的 η，与 [MO, Prop. 5.3.4] 相同的论证表明，$\mathfrak{g}_Q$, w-作用映射

$$\mathfrak{g}_\eta \to \mathcal{H}_i(\eta), \quad \mathfrak{g}_{-\eta} \to \mathcal{H}_i(\eta)^\vee$$

将 $\xi \in \mathfrak{g}_\eta$ 映至 $\xi|\mathbf{0}\rangle$ 且对 $\mathfrak{g}_{-\eta}$的对偶映射均为单射。证明至此完成。 □

引理 4.38。 假设 $\mathcal{C}$可容许，则移位同态 $\mathsf{S}_{0,\mu}$: $\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C}) \to \mathsf{Y}\mu(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 是单射。因此，$\mathsf{S}_{0,\mu}$ 的像 $\mathsf{Y}_{0,\mu}(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 与 $\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 同构。

证明。 由命题 4.35，我们有

$$\Delta_{\mu,0} \circ \mathsf{S}_{0,\mu} = (\mathsf{S}_{0,\mu} \otimes \tau^{-\mu}) \circ \Delta,$$

由于 $\tau^{-\mu}$ 是自同构，只需证明 $(\mathsf{S}_{0,\mu} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$ 是单射。映射 $(\mathsf{S}_{0,\mu} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$的像包含于子代数 $\mathsf{Y}_{0,\mu}(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})\widehat{\otimes}\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 中。将引理 4.37 应用于由向态空间添加 $-\mu$个框架箭头而得到的 $\mathcal{H}_0$（其移位为 μ），以及 $\{\mathcal{H}_i\}_{i\in Q_0}$ 个可容许辅助空间的集合（视为态空间），我们可知诱导映射

$$\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}) \to \mathsf{Y}_{0,\mu}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C})\widehat{\otimes}\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W},\mathcal{C})$$

是单射。这意味着 $(\mathsf{S}_{0,\mu} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$ 是单射。 □

命题 *4.36* 的证明。 由命题 4.35，存在交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}) & \xrightarrow{\Delta_{0,\mu}} & \mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W},\mathcal{C})\widehat{\otimes}\mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathsf{S}_{\mu,\mu'}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{S}_{0,\mu'-\mu}\otimes\tau^{\mu-\mu'}} \\ \mathsf{Y}_{\mu'}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}) & \xrightarrow{\Delta_{\mu'-\mu,\mu}} & \mathsf{Y}_{\mu'-\mu}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C})\widehat{\otimes}\mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}). \end{array}$$

右侧竖箭是单射，因为 $\tau^{\mu-\mu'}$ (4.17) 是自同构，且 $\mathsf{S}_{0,\mu'-\mu}$ 是单射（引理 4.38）。上方水平箭是单射，因为 $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_{0,\mu} = \mathrm{id}$（注4.15）。因此 $(\mathsf{S}_{0,\mu'-\mu} \otimes \tau^{\mu-\mu'}) \circ \Delta_{0,\mu}$ 是单射，由上述图表的交换性可知，$\mathsf{S}_{\mu,\mu'}$ 是单射。□

我们推导出引理 4.37 的以下推广，这将在 §6.3 中用到。

命题 4.39。 假设 $\mathcal{C}$ 可容许。设 $\mathcal{H}_0$ 是一个移位为 $\mathbf{d}_{\mathrm{out}} - \mathbf{d}_{\mathrm{in}} = \mu$ 的态空间，并设 $\left\{\mathcal{H}_i := \mathcal{H}_{\delta_i}^{\mathsf{W}_i}\right\}_{i\in Q_0}$ 是一组可容许辅助空间（视为态空间）。那么自然映射

$$\mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}) \longrightarrow \prod_{i_1,\cdots,i_n} \mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}(\mathfrak{t}_0)[a_0,a_{i_1},\ldots,a_{i_n}]}(\mathcal{H}_0[a_0] \otimes \mathcal{H}_{i_1}[a_{i_1}] \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{i_n}[a_{i_n}])$$

是单射。

证明。 这由引理 4.33 和 4.37 得出。 □

4.6. **余乘法的显式公式**。 在本小节中，我们写出余乘法 Δ: $\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W}) \to \mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W}) \widehat{\otimes} \mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W})$ 下若干元素的显式公式。

根据 (4.9) 中余乘法的构造，我们立即得到

$$\Delta(X_{i,0}) = X_{i,0} \otimes 1 + 1 \otimes X_{i,0}, \quad \text{for} \quad X = e, f, h\,. \tag{4.18}$$

这里，$X_{i,r}$ 对于 $X = e, f, h$ 是 $\mathcal{DSH}_0(Q,\mathsf{W})$ 中相应生成元在定理 4.8 中的映射下的像。框架向量空间的陈特征的余乘法也是本原的：

$$\Delta(\mathrm{ch}_k(\mathsf{D}_{\mathrm{in},i} - \mathsf{D}_{\mathrm{out},i})) = \mathrm{ch}_k(\mathsf{D}_{\mathrm{in},i} - \mathsf{D}_{\mathrm{out},i}) \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ch}_k(\mathsf{D}_{\mathrm{in},i} - \mathsf{D}_{\mathrm{out},i}). \tag{4.19}$$

典范丛的陈特征的余乘法较为复杂，下面给出第一陈类余乘法的显式公式。

引理 4.40. 对于 $\lambda \in \mathbb{C}^{Q_0}$，令 $c_1(\lambda) = \sum \lambda_i\, c_1(\mathsf{V}_i)$，则

$$\Delta c_1(\lambda) = c_1(\lambda) \otimes 1 + 1 \otimes c_1(\lambda) - \sum_{\alpha>0} \alpha(\lambda) \sum_s (-1)^{|\alpha|}\, e_{-\alpha}^{(s)} \otimes e_\alpha^{(s)}, \tag{4.20}$$

其中求和遍历所有正根，而 $\left\{e_\alpha^{(s)}\right\}$ 是命题 4.23 (6) 中 $\mathfrak{g}_\alpha$ 的基。

证明。 首先，高斯分解 (3.28) 给出

$$c_1(\delta_i) = \frac{-1}{t_i}\mathsf{E}(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\, u) + t_i\frac{\mathsf{v}_i(\mathsf{v}_i+1)}{2}\,,$$

其中， $\delta_i \in \mathbb{C}^{Q_0}$ 是第 i 个坐标的单位向量， $|\mathbf{0}\rangle$ 是记号 3.16 中针对可容许辅助数据（δ_i，$\mathsf{T}_0 \curvearrowright \mathcal{M}(\delta_i)$，$\mathsf{w}_i$）定义的向量。于是， $\lambda = \delta_i$ 的（4.20）可由与 [MO，第 10.1 节相同的计算得到，即2],

$$\begin{aligned}\Delta\,\mathsf{E}(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\, u) &= \mathsf{E}(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\, u)\otimes 1 + 1\otimes\mathsf{E}(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\, u) + \sum_{j\in Q_0}\langle\mathbf{0}|\mathsf{d}_j^2|\mathbf{0}\rangle\,\mathsf{v}_j\otimes\mathsf{v}_j + \sum_{\alpha,\beta>0}\sum_{s,t}(-1)^{|\beta|}\langle\mathbf{0}|e_{-\beta}^{(s)}\,e_{\alpha}^{(t)}|\mathbf{0}\rangle\; e_{-\alpha}^{(t)}\otimes e_{\beta}^{(s)}\\ &= \mathsf{E}(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\, u)\otimes 1 + 1\otimes\mathsf{E}(|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\, u) + t_i^2\mathsf{v}_i\otimes\mathsf{v}_i + t_i\sum_{\alpha>0}\alpha_i\sum_s(-1)^{|\alpha|}e_{-\alpha}^{(s)}\otimes e_{\alpha}^{(s)}\,,\end{aligned}$$

and

$$\Delta\,\frac{\mathsf{v}_i(\mathsf{v}_i+1)}{2} = \frac{\mathsf{v}_i(\mathsf{v}_i+1)}{2}\otimes 1 + 1\otimes\frac{\mathsf{v}_i(\mathsf{v}_i+1)}{2} + \mathsf{v}_i\otimes\mathsf{v}_i\,.$$

对于一般的 λ， （4.20）由线性性推出。 □

令

$$\boldsymbol{r}_+ = \sum_{\alpha>0}\sum_s(-1)^{|\alpha|}\,e_{-\alpha}^{(s)}\otimes e_{\alpha}^{(s)}\,,$$

则（4.20）可写为

$$\Delta c_1(\lambda) = c_1(\lambda)\otimes 1 + 1\otimes c_1(\lambda) + \Big[\sum\lambda_i\mathsf{v}_i\otimes 1\,,\,\boldsymbol{r}_+\Big]\,.$$

利用交换关系

$$[c_1(\mathsf{V}_i), e_{i,r}] = e_{i,r+1},\quad [c_1(\mathsf{V}_i), f_{i,r}] = -f_{i,r+1},$$

以及 (3.12)，公式 (4.18) 和 (4.20) 确定了 $\Delta(X_{i,\,r})$，其中 $X = e,\ f,\ h$ ，对所有 $r>0$ 均成立。我们显式计算 $\Delta(X_{i,\,1})$ 如下。

命题 4.41. $X_{i,\,1}$ 的余乘法，对于 $X = e,\ f,\ h$ ，由下式给出：

$$\begin{aligned}\Delta(e_{i,1}) &= e_{i,1}\otimes 1 + 1\otimes e_{i,1} + h_{i,0}\otimes e_{i,0} - [1\otimes e_{i,0}\,,\,\boldsymbol{r}_+]\,,\\ \Delta(f_{i,1}) &= f_{i,1}\otimes 1 + 1\otimes f_{i,1} + f_{i,0}\otimes h_{i,0} + [f_{i,0}\otimes 1\,,\,\boldsymbol{r}_+],\\ \Delta(h_{i,1}) &= h_{i,1}\otimes 1 + 1\otimes h_{i,1} + h_{i,0}\otimes h_{i,0} + [h_{i,0}\otimes 1\,,\,\boldsymbol{r}_+]\\ &= h_{i,1}\otimes 1 + 1\otimes h_{i,1} + h_{i,0}\otimes h_{i,0} + \sum_{\alpha>0}(\delta_i,\alpha)_{\boldsymbol{Q}}\sum_s(-1)^{|\alpha|}\,e_{-\alpha}^{(s)}\otimes e_{\alpha}^{(s)},\end{aligned}\tag{4.21}$$

其中 $\delta_i\in\mathbb{C}^{Q_0}$ 是第 i 个坐标对应的单位向量，$(\cdot,\ \cdot)_{\boldsymbol{Q}}$ 是由 (4.13) 中的矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 诱导的双线性形式，即 $(a,\ b) = \sum a_k\,\boldsymbol{Q}_{kl}\,b_l$。

证明。 由于 Δ 是代数同态，我们有

$$\Delta(e_{i,1}) = [\Delta(c_1(\mathsf{V}_i)), \Delta(e_{i,0})] = [\square(c_1(\mathsf{V}_i)) + [\mathsf{v}_i\otimes 1\,,\,\boldsymbol{r}_+]\,,\,\square(e_{i,0})]\,,$$

其中 $\square(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x$。容易看出， $[\square(c_1(\mathsf{V}_i))\ \square(e_{i,\,0})] = \square(e_{i,\,1})$，并且 $[\mathsf{v}_i\otimes 1,\ \square(e_{i,\,0})] = e_{i,\,0}\otimes 1$。

我们断言

$$[\boldsymbol{r}_+, \square(e_{i,0})] = -h_{i,0}\otimes e_{i,0}\,,\quad [\boldsymbol{r}_+, \square(f_{i,0})] = f_{i,0}\otimes h_{i,0}\,.$$

事实上，对任意 $x\in\mathfrak{g}_{Q,\,\mathsf{w}}$，经典杨-巴克斯特方程 (2.16) 蕴含 $[\boldsymbol{r}, \square(x)] = 0$。令 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{diag}} + \boldsymbol{r}_+ + \boldsymbol{r}_-$，则有

$$[\boldsymbol{r}_+, \square(e_{i,0})]\in\mathfrak{g}_{\leqslant 0}\otimes\mathfrak{g}_{>0}\,,\quad [\boldsymbol{r}_{\mathrm{diag}}, \square(e_{i,0})] = h_{i,0}\otimes e_{i,0} + e_{i,0}\otimes h_{i,0}\,,\quad [\boldsymbol{r}_-, \square(e_{i,0})]\in\mathfrak{g}_{>0}\otimes\mathfrak{g}_{\leqslant 0}\,,$$

其中 $\mathfrak{g}_{\gtrless 0} = \bigoplus_{\eta\gtrless 0}\mathfrak{g}_\eta$、 $\mathfrak{g}_{\geqslant 0} = \mathfrak{g}_{>0}\oplus\mathfrak{g}_0$ 和 $\mathfrak{g}_{\leqslant 0} = \mathfrak{g}_{<0}\oplus\mathfrak{g}_0$。比较次数可得 $[\boldsymbol{r}_+, \square(e_{i,\,0})] = -h_{i,\,0}\otimes e_{i,\,0}$。类似的论证表明 $[\boldsymbol{r}_+, \square(f_{i,\,0})] = f_{i,\,0}\otimes h_{i,\,0}$。这就证明了该断言。

Then

$$\begin{aligned}\Delta(e_{i,1}) &= \square(e_{i,1}) - [\mathsf{v}_i\otimes 1\,,\,h_{i,0}\otimes e_{i,0}] + [e_{i,0}\otimes 1\,,\,\boldsymbol{r}_+] = \square(e_{i,1}) + [e_{i,0}\otimes 1\,,\,\boldsymbol{r}_+]\\ &= \square(e_{i,1}) + h_{i,0}\otimes e_{i,0} - [1\otimes e_{i,0}\,,\,\boldsymbol{r}_+]\,,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\Delta(f_{i,1}) &= [\square(f_{i,0})\,,\,\square(c_1(\mathsf{V}_i)) + [\mathsf{v}_i\otimes 1\,,\,\boldsymbol{r}_+]] = \square(f_{i,1}) + [f_{i,0}\otimes 1\,,\,\boldsymbol{r}_+] - [\mathsf{v}_i\otimes 1\,,\,f_{i,0}\otimes h_{i,0}]\\ &= \square(f_{i,1}) + [f_{i,0}\otimes 1\,,\,\boldsymbol{r}_+] + f_{i,0}\otimes h_{i,0}\,.\end{aligned}$$

利用关系 $[e_{i,0}, f_{i,1}] = (-1)^{(\delta_i|\delta_i)}\gamma_i h_{i,\,1}$，可得

$$\begin{aligned}\Delta(h_{i,1}) &= (-1)^{(\delta_i|\delta_i)}\gamma_i^{-1}[\Delta(e_{i,0}), \Delta(f_{i,1})]\\ &= \square(h_{i,1}) + h_{i,0}\otimes h_{i,0} + [h_{i,0}\otimes 1\,,\,\boldsymbol{r}_+] + (-1)^{(\delta_i|\delta_i)+|i|}\gamma_i^{-1}\left([f_{i,0}\otimes 1\,,\,[\square(e_{i,0}), \boldsymbol{r}_+]] + f_{i,0}\otimes [e_{i,0}, h_{i,0}]\right).\end{aligned}$$

最后一个括号内的项为零，因为 $[f_{i,0}\otimes 1\,,\,[\square(e_{i,\,0})\boldsymbol{r}_+]] = [f_{i,0}\otimes 1\,,\,h_{i,0}\otimes e_{i,0}] = -\boldsymbol{Q}_{ii}f_{i,\,0}\otimes e_{i,\,0}$ 且 $f_{i,\,0}\otimes [e_{i,0}, h_{i,0}] = \boldsymbol{Q}_{ii}f_{i,\,0}\otimes e_{i,\,0}$。最后，直接计算可得

$$[h_{i,0}\otimes 1\,,\,\boldsymbol{r}_+] = \sum_{\alpha>0}(\delta_i,\alpha)_{\boldsymbol{Q}}\sum_s (-1)^{|\alpha|}\, e_{-\alpha}^{(s)}\otimes e_{\alpha}^{(s)}.$$ □

注 4.42。余乘法公式 (4.18) 和 (4.21) 类似于 [GNW，定义 4.6] 中针对可对称化 Kac-Moody 李代数 $\mathfrak{g}_{A,\,D}$（与广义卡当矩阵 A 及其对称化子 D 相关）的余乘法公式（定义见附录 §A.1）。我们预期代数同态的复合

$$\varrho\colon Y_0(\mathfrak{g}_{A,D})\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathbb{C}(\hbar)\xrightarrow{\text{Ex.3.9}}\widetilde{\mathcal{DSH}}_0(\widetilde{Q},\mathsf{W})\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathbb{C}(\hbar)\xrightarrow{\text{Thm.4.8}}\mathsf{Y}_0(\widetilde{Q},\mathsf{W}) \tag{4.22}$$

$\widetilde{\ }$是一个双代数同态，其中（Q，W）是附录 §A.1 中的带势箭图。

我们注意到，诱导映射 $\bar{\varrho}\colon \mathfrak{g}_{A,\,D}\to\mathfrak{g}_{\widetilde{Q},\,\mathsf{w}}$ 总是单射[4]。将 (4.18)–(4.21) 与 [GNW, $\widetilde{\ }$(4.7)] 比较可知，ϱ 是一个双代数同态，当且仅当对于某个 $i\in Q_0$，任意满足 $(\delta_i,\ \eta)_{\boldsymbol{Q}}\neq 0$ 的根空间 $\mathfrak{g}_\eta\subset\mathfrak{g}_{\widetilde{Q},\,\mathsf{w}}$ 都包含在 $\bar{\varrho}$ 的像中。对于带有典范三次势 [Jin]，的三倍仿射型 $A_{n-1}^{(1)}$ ($n>2$) 箭图，情况正是如此，因此自然映射

$$\varrho\colon Y_0(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)\otimes_{\mathbb{C}[\hbar,\varepsilon]}\mathbb{C}(\hbar,\varepsilon)\xrightarrow{\text{Ex.3.10}}\widetilde{\mathcal{DSH}}_0(Q,\mathsf{W})\otimes_{\mathbb{C}[\hbar,\varepsilon]}\mathbb{C}(\hbar,\varepsilon)\xrightarrow{\text{Thm.4.8}}\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W}) \tag{4.23}$$

是一个双代数同态，其中（Q，W）是与附录 §A.2 中的奇偶序列 $(s_i=1:1\leqslant i\leqslant n)$ 相关联的带势箭图。

除了仿射型 $A_{n-1}^{(1)}$ ($n>2$) 情形外，在有限型情形下，我们还有余乘法的相容性。**定理 4.43**。当 A 为有限型且不可分解时，即 $\mathfrak{g}_{A,\,D}$ 是有限维单李代数，则映射 (4.22)：

$$\varrho\colon Y_0(\mathfrak{g}_{A,D})_{\mathrm{loc}}\to\mathsf{Y}_0(\widetilde{Q},\mathsf{W})$$

是一个单射双代数同态，其中 $Y_0(\mathfrak{g}_{A,\,D})_{\mathrm{loc}} = Y_0(\mathfrak{g}_{A,\,D})\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathbb{C}(\hbar)$。此外，存在一个双代数同构

$$\widetilde{\varrho}\colon Y_0(\mathfrak{g}_{A,D})_{\mathrm{loc}}\otimes\mathbb{C}[\mathsf{d}_{i,k}: i\in\widetilde{Q}_0,\,k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}]\cong\mathsf{Y}_0(\widetilde{Q},\mathsf{W}).$$

这里，对于所有 i，$\mathsf{d}_{i,\,k}$ 都是本原的，并且 k、$\widetilde{\varrho}$ 在第一分量上的作用是 ϱ；当作用于具有框架向量空间 D_{in}，$\mathsf{D}_{\mathrm{out}}$ 的态空间时，$\widetilde{\varrho}(\mathsf{d}_{i,\,k})$ 是乘以 $\mathsf{ch}_{k+1}(\mathsf{D}_{\mathrm{in},\,i}-\mathsf{D}_{\mathrm{out},\,i})$ 的算子。

证明。我们断言 $\mathfrak{g}_{\widetilde{Q},\,\mathsf{w}}$ 是有限维的。考虑维数向量 δ_i 以及对称箭图簇 $\mathcal{M}(\mathbf{v}\ \delta_i)$，其带框架势为 $\mathsf{W}_i=\mathsf{W}+B\Phi_iA$，其中 A 是入射框架，Φ_i 是节点 i 的边环，而 B 是出射框架。根据 VV3 的证明、推论 5.2] 以及 VV3、注记 5.3], ，只有有限多个 $\mathbf{v}$ 使得 $\mathrm{Crit}_{\mathcal{M}(\mathbf{v},\delta_i)}(\mathrm{tr}\,\mathsf{W}_i)$ 非空。特别地，$\mathcal{H}_{\delta_i,\,\mathrm{loc}}^{\mathsf{W}_i}=\bigoplus_{\mathbf{v}}H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(\mathbf{v}\ \delta_i),\ \mathrm{tr}\,\mathsf{W}_i)_{\mathrm{loc}}$ 是一个有限维的 $\mathbb{C}(\hbar)$ 向量空间。引理 4.37 的证明表明，$\mathfrak{g}_{\widetilde{Q},\,\mathsf{w}}$-作用映射 —

$$\mathfrak{g}_{\widetilde{Q},\mathsf{W}}^{+}\to\bigoplus_{i\in\widetilde{Q}_0}\mathcal{H}_{\underline{\delta_i},\mathrm{loc}}^{\mathsf{W}_i},\quad \xi\in\mathfrak{g}_{\widetilde{Q},\mathsf{W}}^{+}\mapsto(\xi\,|\mathbf{0}\rangle_i)_{i\in\widetilde{Q}_0}$$

是单射。这意味着 $\mathfrak{g}_{\widetilde{Q},\,\mathsf{w}}^{+}$ 是有限维的。因此 $\dim\mathfrak{g}_{\widetilde{Q},\,\mathsf{w}}=2\dim\mathfrak{g}_{\widetilde{Q},\,\mathsf{w}}^{+}+2|Q_0|<\infty$。

由于 $\mathfrak{g}_{\widetilde{Q},\,\mathsf{w}}$ 是一个带有非退化对称双线性形式的有限维 $\mathbb{C}(\hbar)$ 李代数，因此它是约化的，并具有三角分解 $\mathfrak{g}_{\widetilde{Q},\,\mathsf{w}}=\mathfrak{g}_{\widetilde{Q},\,\mathsf{w}}^{+}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_{\widetilde{Q},\,\mathsf{w}}^{-}$。$\mathfrak{g}_{\widetilde{Q},\,\mathsf{w}}$ 上的根分次与

[4]证明如下。$\mathfrak{g}_A$的 Cartan 子代数由 $\{\psi_{i,0}\}_{i\in\widetilde{Q}_0}$ 例 3.9 中的元素张成，而 $\bar{\varrho}(\psi_{i,\,0})=h_{i,\,0}$，因此$\bar{\varrho}$在该 Cartan 子代数上是单射的。由于 $\bar{\varrho}$ 是 $\mathbb{Z}^{\widetilde{Q}_0}$分次的，$\ker(\bar{\varrho})$ 也是如此。设 $x\in\ker(\bar{\varrho})$ 在 α 根空间中是一个非平凡元素，则根据 [Kac，定理 2.2] 存在 y 属于 $\mathfrak{g}_{A,\,D}$ 的 $-\alpha$ 根空间，使得 $[x,y]\neq 0$。由于 $[x,y]$ 属于 Cartan 子代数且 $\bar{\varrho}([x,y])=0$, $[x,y]=0$，矛盾。

$\sim Q_0$ 分次相同。众所周知，约化李代数的 Borel 子代数的幂零根由简单根向量生成，因此 $\mathfrak{g}^{+}_{\widetilde{Q},\,\mathsf{w}}$ 由 $\{e_{i,0}\}_{i\in\widetilde{Q}_0}$ 生成。这意味着诱导映射 $\bar{\varrho}\colon \mathfrak{g}_{A,\,D}\to\mathfrak{g}_{\widetilde{Q},\,\mathsf{w}}$ 将 $\mathfrak{g}^{\pm}_{A\,,\,D}$ 满射到 $\mathfrak{g}^{\pm}_{\widetilde{Q}\,,\,\mathsf{w}}$ 上，并且根据注 4.42，$\bar{\varrho}$ 诱导同构 $\mathfrak{g}^{\pm}_{A\,,\,D}\cong\mathfrak{g}^{\pm}_{\widetilde{Q}\,,\,\mathsf{w}}$，且 ϱ 是一个双代数同态。

~考虑一个双代数 $\mathfrak{D}:=\mathbb{C}[\mathsf{d}_{i,\,k}:\,i\in Q_0,\quad k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}]$ 我们要求对所有 i 和 k，$\mathsf{d}_{i,\,k}$ 均为本原元。$\mathfrak{D}$ 通过如下识别，是 $\mathsf{Y}_0(Q,\,\mathsf{W})$ 的一个子双代数：

$$\mathsf{d}_{i,k}\mapsto \text{multiplication by } \mathrm{ch}_{k+1}(\mathsf{D}_{\mathrm{in},i}-\mathsf{D}_{\mathrm{out},i}) \text{ operator}.$$

于是映射

$$\widetilde{\varrho}\colon Y_0(\mathfrak{g}_{A,D})_{\mathrm{loc}}\otimes\mathbb{C}[\mathsf{d}_{i,k}:i\in\widetilde{Q}_0,\,k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}]\to\mathsf{Y}_0(\widetilde{Q},\mathsf{W})$$

~由 ϱ 和包含映射 $\mathfrak{D}\subset\mathsf{Y}_0(Q,\,\mathsf{W})$ 诱导，是一个双代数同态。将 $\deg\mathsf{d}_{i,\,k}=k$ 以及 $\deg\,X_r=r$（对 $X=x_i^{\pm}$，ψ_i）作为赋值，$\widetilde{\varrho}$ 的源空间带有滤过；$\widetilde{\varrho}$ 的目标空间也如 §4.4 中那样带有滤过。容易看出 $\widetilde{\varrho}$ 保持滤过，因此它诱导出

$$\operatorname{gr}\widetilde{\varrho}\colon \operatorname{gr}Y_0(\mathfrak{g}_{A,D})_{\mathrm{loc}}\otimes\operatorname{gr}\mathfrak{D}\to\operatorname{gr}\mathsf{Y}_0(\widetilde{Q},\mathsf{W}).$$

$\operatorname{gr}\widetilde{\varrho}$ 的源空间同构于 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{A,D}[u]\oplus\mathfrak{d}[u])$，其中 $\mathfrak{d}=\bigoplus_i\mathbb{C}(\hbar)\cdot\mathsf{d}_i$（见命题 4.23），我们将其识别为 $\mathsf{d}_i=\mathsf{d}_{i,0}$；而 $\operatorname{gr}\widetilde{\varrho}$ 的目标空间同构于 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\widetilde{Q},\mathsf{W}}[u])$。此外，$\operatorname{gr}\widetilde{\varrho}$ 由李代数同态 $\mathfrak{g}_{A,D}\oplus\mathfrak{d}\xrightarrow{(\bar{\varrho},\iota)}\mathfrak{g}_{\widetilde{Q},\mathsf{W}}$ 诱导，其中 ι 是 $\mathfrak{d}$ 到 $\mathfrak{g}_{\widetilde{Q},\mathsf{W}}$ 的自然嵌入。直接计算可得 $\boldsymbol{Q}=-\hbar\,DA$。特别地，$\boldsymbol{Q}$ 可逆。因此，v_i 属于 d_i 与 $\{h_{j,0}\}_{j\in\widetilde{Q}_0}$ 的线性张成。于是，$(\bar{\varrho},\iota)$ 是满射，因两边维数相同，故必为同构。因此 $\operatorname{gr}\widetilde{\varrho}$ 是同构。由此，$\widetilde{\varrho}$ 是同构。□

4.7. 任意一个可容许的 $\mathcal{C}$ 就足够了。

Theorem 4.44. 如果 $\mathcal{C}$ 是可容许的，那么对于任意 $\mu\in\mathbb{Z}^{Q_0}_{\leqslant 0}$，我们有 $\mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})=\mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W}\quad)$.

证明。我们首先证明 $\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})=\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W})$。注意，根据引理 4.11，$c_1(\lambda)\in\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})$，因此根据引理 4.16，余乘法 $\Delta c_1(\lambda)$ 包含于 $\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})\widehat{\otimes}\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 中。然后，(4.20) 意味着，对于所有 α 和 s，$e_\alpha^{(s)}\in\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})$；因此 $\mathfrak{g}_\alpha\subset\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})$。命题 4.23 (1) 的证明表明，$\mathfrak{g}_0\subset\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})$。结合上述两个包含关系，我们得到 $\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{W}}\subset\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})$。此外，根据定理 4.26，我们归纳地看到，对于所有 k，$\mathrm{ch}_k(\mathsf{D}_{\mathrm{in},i}-\mathsf{D}_{\mathrm{out},i})$ 包含于 $\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})$ 中，这意味着 $\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W}\ \mathcal{C})=\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W})$。

由引理 4.32，$\mathsf{Y}_\mu(Q,\ \mathsf{W})$ 由子集 $\bigcup_{a\in\mathbb{C}}\mathsf{S}_{0,\ \mu;z}(\mathsf{Y}_0(Q,\ \mathsf{W}))\big|_{z=a}$ 生成，这与

$$\bigcup_{a\in\mathbb{C}}\mathsf{S}_{0,\mu;z}(\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W},\mathcal{C}))\big|_{z=a},$$

由步骤 1 可知，而后者再次由引理 4.32 生成 $\mathsf{Y}_\mu(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C})$。因此，$\mathsf{Y}_\mu(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C})=\mathsf{Y}_\mu(Q,\ \mathsf{W})$。□

~4.8. **与 Maulik-Okounkov 杨扬子代数的比较**。设 Q 为一个箭图，$\overline{Q}$ 为其双重箭图，$\widetilde{Q}$ 为其三重箭图，并赋予典范三次势 (2.5)：

$$\widetilde{\mathsf{W}}=\sum_{i\in Q_0}\varepsilon_i\mu_i,$$

其中 ε_i 是节点 i 上的边环，μ_i 是矩映射的第 i 个分支。我们取 $\mathsf{T}_0=\mathsf{A}_0\times\mathbb{C}^*_\hbar$，其中 A_0 通过对箭对 $(X_a,\ X_{a^*})$ 施加相反的权来缩放 Q，$\mathbb{C}^*_\hbar$ 固定 X_a，并以权 -1 缩放 X_{a^*}，以权 1 缩放边环 Φ_i。

~~**定理 4.45.** 对于具有典范三次势 W 的三重箭图 $\widetilde{Q}$，猜想 4.25 成立。此外，存在一个自然的 $\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$-双代数同构

$$\mathsf{Y}_0(\widetilde{Q},\widetilde{\mathsf{W}})\cong\mathsf{Y}^{\mathrm{MO}}_Q\otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]}\mathbb{C}(\mathsf{t}_0).$$

~证明. 取 $\mathcal{C}=\{(\delta_i,\mathsf{T}_0\curvearrowright\mathcal{M}(\delta_i),\mathsf{W}_i)\}_{i\in Q_0}$，其中 $(a,q)\in\mathsf{A}_0\times\mathbb{C}^*_\hbar=\mathsf{T}_0$ 通过以下方式作用于框架 (A_i,B_i)：

$$(A_i,B_i)\mapsto(A_i,q^{-1}B_i),$$

且带框势由下式给出

$$\widetilde{\mathsf{W}}_i=\widetilde{\mathsf{W}}+B_i\Phi_iA_i\,.$$

显然，$\mathcal{C}$ 是可容许的。于是由定理 4.44 可得 $\mathrm{Y}_0(Q,\mathsf{W}) \cong \mathrm{Y}_0(Q,\mathcal{C})$。

将 $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{\mathbf{0}}^{\mathsf{W}} = \mathbb{C}[\mathsf{t}_0]$ 和 $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_{\delta_i}^{\mathsf{W}_i}$ 代入引理 4.37，自然映射

$$\mathrm{Y}_0(\widetilde{Q},\widetilde{\mathsf{W}}) = \mathrm{Y}_0(\widetilde{Q},\widetilde{\mathsf{W}},\mathcal{C}) \longrightarrow \prod_{i_1,\cdots,i_n} \mathrm{End}_{\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)[a_{i_1},\ldots,a_{i_n}]}\left(\mathcal{H}_{i_1}[a_{i_1}] \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{i_n}[a_{i_n}]\right)$$

是单射。通过维数约化，我们得到

$$H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(\delta_i),\widetilde{\mathsf{w}}_i) \cong H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{N}(\delta_i)),$$

其中 $\mathcal{N}(\delta_i)$ 是与 Q 相关联的中岛簇（例 2.4）。上述同构与稳定包络（[COZZ1，定理 6.10]）相容，因此也与 R-矩阵相容。因此，$\mathrm{Y}_0(Q,\ \mathsf{W})$ 在自同态乘积中的像由中岛簇的 R-矩阵的矩阵元素生成；经局部化后，这与 $\mathrm{Y}_Q^{\mathrm{MO}}$ 一致（因为我们仅在局部化后定义 $\mathrm{Y}_0(\widetilde{Q},\ \widetilde{\mathsf{W}})$），即 $\mathrm{Y}_0(\widetilde{Q},\ \widetilde{\mathsf{W}}) \cong \mathrm{Y}_Q^{\mathrm{MO}} \otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]} \mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$。这是一个双代数同构，因为余单位由限制到平凡表示 $\mathcal{H}_0$ 诱导，而余乘法由稳定包络诱导，后者与维数约化相容（[COZZ1，定理 6.10]）。

杨 Yangian 的同构与按 u 次数划分的滤过相容，因此我们在 F_0 部分上得到一个诱导同构：

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\widetilde{Q},\widetilde{\mathsf{W}}}) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}_Q^{\mathrm{MO}} \otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]} \mathbb{C}(\mathsf{t}_0)),$$

由此可推出 $\mathfrak{g}_{\widetilde{Q},\ \widetilde{\mathsf{W}}} \cong \mathfrak{g}_Q^{\mathrm{MO}} \otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]} \mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$。然后 [BD，定理 B] 给出

$$\mathfrak{g}^+_{\widetilde{Q},\widetilde{\mathsf{W}}} \cong \mathfrak{g}^{\mathrm{BPS},\mathsf{T}_0}_{\widetilde{Q},\widetilde{\mathsf{W}}} \otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]} \mathbb{C}(\mathsf{t}_0). \qquad \square$$

推论 4.46。设 $\mathcal{N}(\mathsf{d}) = \bigsqcup_{\mathsf{v}} \mathcal{N}(\mathsf{v},\mathsf{d})$ 是与双重箭图 Q 相关联的中岛簇，并设 $\mathsf{T}_0 = \mathbb{C}^*_\hbar \times \mathsf{S}$ 通过味对称性作用于 $\mathrm{Rep}_Q(\mathsf{v},\mathsf{d})$（即与 $G = \prod_{i\in Q_0} \mathrm{GL}(\mathsf{v}_i)$ 的作用对易），则 T_0 通过识别 $T^*\mathrm{Rep}_Q(\mathsf{v},\mathsf{d}) = \mathrm{Rep}_Q(\mathsf{v},\mathsf{d}) \oplus \hbar\,\mathrm{Rep}_Q(\mathsf{v},\mathsf{d})^\vee$ 作用于 $\mathcal{N}(\mathsf{d})$。那么，对于任意 T_0-不变函数 $\phi = \mathrm{tr}(\mathsf{m})$（$\mathsf{m}$ 是带框双重箭图的势），$H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{N}(\mathsf{d}),\ \phi)_{\mathrm{loc}}$ 具有自然的 $\mathrm{Y}_Q^{\mathrm{MO}} \otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]} \mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$ 模结构。

此外，存在一个特化映射 [COZZ1, Ex. 7.19]:

$$\mathsf{sp}\colon H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{N}(\mathbf{d}),\phi)_{\mathrm{loc}} \to H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{N}(\mathbf{d}))_{\mathrm{loc}}, \tag{4.24}$$

它是一个 $\mathrm{Y}_Q^{\mathrm{MO}} \otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]} \mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$ 模映射。

证明。令 $\mathcal{M}(\mathbf{d}) = \bigsqcup_{\mathbf{v}} \mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 为与三重箭图 Q 相关联的对称箭图簇，则我们有变形维数约化同构 (2.6)：

$$H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(\mathbf{d}),\widetilde{\mathsf{w}}+\phi) \cong H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{N}(\mathbf{d}),\phi),$$

且前者自然是一个 $\mathrm{Y}_0(\widetilde{Q},\ \widetilde{\mathsf{W}}) \cong \mathrm{Y}_Q^{\mathrm{MO}} \otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]} \mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$ 模。由于 (4.24) 与稳定包络[COZZ1, Ex. 7.19], 相容，它与 R-矩阵对易，因此诱导出一个 $\mathrm{Y}_Q^{\mathrm{MO}} \otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]} \mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$ 模映射。$\square$

4.9. **Casimir算子**。

定义 4.47。对任意 $\alpha \geqslant 0$，定义 Casimir算子

$$\mathrm{Cas}_\alpha := \sum_s e_\alpha^{(s)} e_{-\alpha}^{(s)} \in U(\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{W}}) \subset \mathrm{Y}_0(Q,\mathsf{W})$$

注意，根据命题 4.23(8)，$\mathrm{Cas}_\alpha - (-1)^{|\alpha|}\mathrm{Cas}_{-\alpha}$ 属于 Cartan 子代数 $\mathfrak{g}_0$。

Casimir算子作用于态空间时，是由斯坦伯格对应（定义 2.17）诱导的。

命题 4.48. 设 $\mathbf{d}_{\mathrm{in}} = \mathbf{d}_{\mathrm{out}}$ 是一个对称框架，并记 $X = \mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})$ $X_0 = \mathcal{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{d})$，以及 $\mathsf{T} = \mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}$。那么，对于任意 $\alpha > 0$，都存在一个斯坦伯格对应 $\mathsf{C}_\alpha \in H^{\mathsf{T}}_{2\dim X - 2}(X \times_{X_0} X)$，使得对于任意势 w^{fr}，Cas_α 在 $H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w}^{\mathrm{fr}})$ 上的作用由 C_α 诱导。

证明。设 $i \in Q_0$ 是一个满足 $\alpha_i > 0$ 的节点。令框架维数为 δ_i，取一个辅助对称箭图簇；令 T_0 在框架向量空间上平凡作用，并引入一个额外的环面 $\mathbb{C}^*_t$，使其仅以权 -1 作用于出射框架（并固定所有其他箭）。考虑复合映射

$$H^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_t}(\mathcal{M}(\mathbf{0},\delta_i),\mathsf{w}) \otimes H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}) \xrightarrow{\boldsymbol{r}_{\alpha,-\alpha}} H^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_t}(\mathcal{M}(\alpha,\delta_i),\mathsf{w}) \otimes H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\mathbf{v}-\alpha,\mathbf{d}),\mathsf{w}^{\mathrm{fr}})$$

$$\xrightarrow{\boldsymbol{r}_{-\alpha,\alpha}} H^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}_t^*}(\mathcal{M}(\mathbf{0},\delta_i),\mathsf{w})\otimes H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}),$$

其中 $\boldsymbol{r}_{\alpha,\,-\alpha}$ 和 $\boldsymbol{r}_{-\alpha,\,\alpha}$ 是经典 R-矩阵 (4.12) 的相应分支。通过显式计算,

$$\boldsymbol{r}_{-\alpha,\alpha}\circ\boldsymbol{r}_{\alpha,-\alpha}=\alpha_i\,t\sum_s e_\alpha^{(s)}e_{-\alpha}^{(s)}=\alpha_i\,t\,\mathrm{Cas}_\alpha\,. \tag{4.25}$$

另一方面，$\boldsymbol{r}$ 的非对角分量由利用 can($\boldsymbol{\rho}$) 的临界卷积诱导，其中 $\boldsymbol{\rho}$ 是 $H^{\mathsf{T}\times\mathbb{C}_t^*}\big((\mathcal{M}(\delta_i)\times\mathcal{M}(\mathbf{d}))\times_{\mathcal{M}_0(\delta_i)\times\mathcal{M}_0(\mathbf{d})}(\mathcal{M}(\delta_i)\times\mathcal{M}(\mathbf{d}))\big)$ 中的一个类，由 (2.18) 给出。因此，$\boldsymbol{r}_{-\alpha,\alpha}\circ\boldsymbol{r}_{\alpha,-\alpha}$ 由类 $\boldsymbol{\rho}_{-\alpha,\alpha}\circ\boldsymbol{\rho}_{\alpha,-\alpha}\in H^{\mathsf{T}\times\mathbb{C}_t^*}(X\times_{X_0}X)$ 诱导，其同调次数为 $2\dim X-4$。由于 $\mathbb{C}_t^*$ 平凡地作用于 $X\times_{X_0}X$，

$$H^{\mathsf{T}\times\mathbb{C}_t^*}(X\times_{X_0}X)\cong H^{\mathsf{T}}(X\times_{X_0}X)\otimes_{\mathbb{C}}H_{\mathbb{C}_t^*}(\mathrm{pt}),$$

相应地

$$\boldsymbol{\rho}_{-\alpha,\alpha}\circ\boldsymbol{\rho}_{\alpha,-\alpha}=\sum_{k=0}^{2}a_kt^k\,,\quad a_k\in H^{\mathsf{T}}_{2\dim X-2k}(X\times_{X_0}X). \tag{4.26}$$

比较 (4.25) 和 (4.26)，可知 Cas_α 由类 $a_1/\alpha_i\in H^{\mathsf{T}}_{2\dim X-2}(X\times_{X_0}X)$ 诱导。记作 $Y=\mathcal{M}(\mathbf{v},\,\delta_i+\mathbf{d})$，令 $\pi\colon Y\to B$ 为到仿射空间 B 的平坦态射，其中 B 位于 [COZZ2][5], 中；令 $U\subset B$ 为稠密开子集，使得 $\pi|_{\pi^{-1}(U)}\colon\pi^{-1}(U)\to U$ 是仿射态射。由于 $\pi^{-1}(U)$ 是拟仿射的，因此任意吸引集都是 $\pi^{-1}(U)$ 中的闭集。因此，对于两个不同的 $\mathbb{C}_u^*$-不动分支 $F',F\subset Y^{\mathbb{C}_u^*}$，有

$$\overline{\mathrm{Attr}}_{\pm}(\Delta_F)\cap(\pi^{-1}(U)\times\pi^{-1}(U))=\mathrm{Attr}_{\pm}(\Delta_F)\cap(\pi^{-1}(U)\times\pi^{-1}(U)),$$

因此，交 $\mathrm{Attr}_{\pm}(\Delta_F)\cap(F'\times F)$ 与 $\pi^{-1}(U)\times\pi^{-1}(U)$ 不相交。我们得出结论，经过$\mathbb{C}_t^*$-等变上同调后，类 $\boldsymbol{\rho}_{-\alpha,\,\alpha}\circ\boldsymbol{\rho}_{\alpha,\,-\alpha}$ 及其 t-展开系数 $a_0,\ a_1,\ a_2$，都属于推前映射 $H^{\mathbb{C}_u^*}(X\times_{X_0}X\times_B(B\setminus U))\to H^{\mathbb{C}_u^*}(X\times_{X_0}X)$ 的像。特别地，根据引理 2.20，a_1 是一个斯坦伯格对应。根据构造 (2.18)，$\boldsymbol{\rho}$ 与势无关，a_1也是如此。□

4.10. 移位卡西米尔算子。 令 $\mu<0$ 为一个反占优移位。取满足 $\mathbf{d}$ 且 $\mathbf{d}_{\mathrm{out}}-\mathbf{d}_{\mathrm{in}}\equiv\mu$ 的 $\mathbf{d}$，则对称箭图簇 $\mathcal{M}(\mathbf{d}_{\mathrm{in}})$ 是向量丛 $E=\bigoplus_{i\in Q_0}\mathrm{Hom}(\mathsf{V}_i,\ \mathbb{C}^{-\mu_i})$ 在 $\mathcal{M}(\mathbf{d})$ 上的全空间。令 $\pi\colon\mathcal{M}(\mathbf{d}_{\mathrm{in}})\to\mathcal{M}(\mathbf{d})$ 为丛映射。取 $\mathcal{M}(\mathbf{d})$上的带框架势 w^{fr}，其拉回到 $\mathcal{M}(\mathbf{d}_{\mathrm{in}})$ 后仍记为 w^{fr}。考虑 $\mathcal{M}(\mathbf{d}_{\mathrm{in}})$ 上如下辅助 $\mathbb{C}_z^*$ 作用：它在 $\mathcal{M}(\mathbf{d})$ 上作用平凡，并以权 1 缩放 E 的纤维。于是

$$H^{\mathsf{T}\times\mathbb{C}_z^*}(\mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}}),\mathsf{w}^{\mathrm{fr}})\cong H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}}),\mathsf{w}^{\mathrm{fr}})\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[z],$$

且 $\pi^*\colon H^{\mathsf{T}\times\mathbb{C}_z^*}(\mathcal{M}(\mathbf{d}),\ \mathsf{w}^{\mathrm{fr}})\to H^{\mathsf{T}\times\mathbb{C}_z^*}(\mathcal{M}(\mathbf{d}_{\mathrm{in}}),\ \mathsf{w}^{\mathrm{fr}})$ 是一个同构，其逆映射为 i^*，其中 $i\colon\mathcal{M}(\mathbf{d})\hookrightarrow\mathcal{M}(\mathbf{d}_{\mathrm{in}})$ 是零截面。

根据引理 4.27，赋值 $\mathsf{E}(m)\mapsto i^*\mathsf{E}(m)_z\pi^*$ 诱导出一个代数同态 $\mathsf{Y}_0(Q,\ \mathsf{W})\to\mathsf{Y}_\mu(Q,\ \mathsf{W})[z]$。

命题 4.49。 设 $\alpha>0$。在将 $\mathsf{E}(m)$ 映为 $i^*\mathsf{E}(m)_z\pi^*$ 的映射 $\mathsf{Y}_0(Q,\ \mathsf{W})\to\mathsf{Y}_\mu(Q,\ \mathsf{W})[z]$ 下，算子 Cas_α 被映为 z 中一个次数为 $\leqslant-\alpha\cdot\mu$ 的多项式。

此外，记 $X=\mathcal{M}(\mathbf{v},\ \mathbf{d})$ $X_0=\mathcal{M}_0(\mathbf{v},\ \mathbf{d})$，则存在一个类 $\mathsf{C}_{\alpha,\ \mu}\in H^{\mathsf{T}}(X\times_{X_0}X)$，使得对于任意势 W^{fr}，$i^*(\mathsf{Cas}_\alpha)_z\pi^*$ 中 $z^{-\alpha\cdot\mu}$ 的系数在 $H^{\mathsf{T}}(X,\ \mathsf{w}^{\mathrm{fr}})$ 上的作用由 $\mathsf{C}_{\alpha,\ \mu}$ 诱导。

证明。令 $i\in Q_0$ 为一个节点，使得 $\alpha_i>0$，并且 $\underline{\delta_i}:=(\delta_i,\delta_i)\in\mathbb{Z}_{\geqslant0}^{Q_0}\times\mathbb{Z}_{\geqslant0}^{Q_0}$。记

$$Y=\mathcal{M}(\mathbf{v},\underline{\delta_i}+\underline{\mathbf{d}}),\qquad F=\mathcal{M}(\mathbf{0},\delta_i)\times\mathcal{M}(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}}),\qquad F'=\mathcal{M}(\alpha,\delta_i)\times\mathcal{M}(\mathbf{v}-\alpha,\underline{\mathbf{d}}),$$
$$\widetilde{Y}=\mathcal{M}(\mathbf{v},\delta_i+\mathbf{d}_{\mathrm{in}}),\qquad \widetilde{F}=\mathcal{M}(\mathbf{0},\delta_i)\times\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}_{\mathrm{in}}),\qquad \widetilde{F}'=\mathcal{M}(\alpha,\delta_i)\times\mathcal{M}(\mathbf{v}-\alpha,\mathbf{d}_{\mathrm{in}}).$$

那么，Y是向量丛 $E=\bigoplus_{i\in Q_0}\mathrm{Hom}(\mathsf{V}_i,\mathbb{C}^{-\mu_i})$ 的全空间。F,F' 属于环面不动点集 $Y^{\mathbb{C}_u^*}$ 的连通分支集合，其中 $\mathbb{C}_u^*$ 通过权分解 $u\,\delta_i+\mathbf{d}$作用于框架。该 $\mathbb{C}_u^*$作用自然延拓到 Y，并且在向量丛投影映射 $\pi\colon Y\to Y$ 下，F,F'分别是 $\widetilde{Y}^{\mathbb{C}_u^*}$ 中映射到 F,F' 的连通分支。记 Y 上（相应地，$\widetilde{Y}$ 上）$\pm$-室中的稳定包络为 $\mathsf{Stab}_{\pm,Y}$（相应地，$\mathsf{Stab}_{\pm,\widetilde{Y}}$）。

[5]记作 $\tau\colon X\to\mathcal{H}/\Gamma$，位于 [COZZ2] 中。

与命题 4.48 的证明中一样，我们令 $\mathbb{C}_t^*$ 以权 -1 作用于框架 δ_i 的出射部分，并固定所有其他箭。于是 Cas_α 由经典的 R-矩阵确定：

$$H^{\mathsf{T}\times\mathbb{C}_z^*\times\mathbb{C}_t^*}(\widetilde{F},\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}) \xrightarrow{\boldsymbol{r}_{\alpha,-\alpha}} H^{\mathsf{T}\times\mathbb{C}_z^*\times\mathbb{C}_t^*}(\widetilde{F}',\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}) \xrightarrow{\boldsymbol{r}_{-\alpha,\alpha}} H^{\mathsf{T}\times\mathbb{C}_z^*\times\mathbb{C}_t^*}(\widetilde{F},\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}).$$

$$\overset{\alpha_i\, t\,\mathrm{Cas}_\alpha}{\frown\!\!=\!\!\frown}$$

令 $i\colon Y\to Y$ 为零截面映射。并令 $\mathbb{C}_z^*$ 作用于 Y，使其固定 Y，并以权 1 缩放 E 的纤维。我们断言：

(1) $\mathsf{Stab}_{-,Y}\big|_{F'\times F} = \pm u^{\mathrm{rk}\,N^+_{F'/Y}-1}\cdot i^*\boldsymbol{r}_{\alpha,-\alpha}\pi^* +$关于 u的低阶项，其中符号由正规化子ϵ决定；(2) $z^{-\alpha\cdot\mu}\,\mathsf{Stab}_{+,Y}\big|_{F\times F'} +$关于 $z = \pm u^{\mathrm{rk}\,N^-_{F/Y}-1}\cdot i^*\boldsymbol{r}_{-\alpha,\alpha}\pi^* +$的低阶项，其中符号由正规化子 ϵ决定。

暂且假设这些结论成立。根据 [COZZ1, Thm. 8.9], , Y的稳定包络由 $\mathrm{Attr}_\pm(\Delta_{Y^{\mathbb{C}_u^*}})$ 诱导。记

$$(F'\times F\hookrightarrow Y\times F)^![\overline{\mathrm{Attr}}_-(\Delta_F)] = u^{\mathrm{rk}\,N^+_{F'/Y}-1}\cdot C_{F',F} + \text{lower order in } u,$$
$$(F\times F'\hookrightarrow Y\times F')^![\overline{\mathrm{Attr}}_+(\Delta_{F'})] = u^{\mathrm{rk}\,N^-_{F/Y}-1}\cdot C_{F,F'} + \text{lower order in } u,$$

其中 $C_{F',F}\in H^{\mathsf{T}\times\mathbb{C}_t^*}(F'\times_{Y_0}F)$ 和 $C_{F,F'}\in H^{\mathsf{T}\times\mathbb{C}_t^*}(F\times_{Y_0}F')$，且 $Y_0=\mathcal{M}_0(\mathbf{v}\ \delta_i+\mathbf{d})$。由此可得

$$i^*\boldsymbol{r}_{\alpha,-\alpha}\pi^* = \pm C_{F',F},\quad i^*\boldsymbol{r}_{-\alpha,\alpha}\pi^* = \pm z^{-\alpha\cdot\mu}C_{F,F'} + \text{lower order in } z.$$

因此，

$$\alpha_i\, t\cdot i^*(\mathrm{Cas}_\alpha)_z\pi^* = \pm z^{-\alpha\cdot\mu}C_{F,F'}\circ C_{F',F} + \text{lower order in } z.$$

这表明 $i^*(\mathsf{Cas}_\alpha)_z\pi^*$ 是 z 中的一个次数为 $\leqslant -\alpha\cdot\mu$的多项式。

最后，由于 $\mathbb{C}_t^*$在 F上的作用是平凡的，$H^{\mathsf{T}\times\mathbb{C}_t^*}(F\times_{Y_0}F) = H^{\mathsf{T}}(F\times_{Y_0}F)\otimes H_{\mathbb{C}_t^*}(\mathrm{pt})$。将 $C_{F,F'}\circ C_{F',F}$展开为关于 t的多项式：

$$C_{F,F'}\circ C_{F',F} = \sum_n b_n t^t,\ \text{ with }\ b_n\in H^{\mathsf{T}}(F\times_{Y_0}F),$$

于是我们看到，$i^*(\mathsf{Cas}_\alpha)_z\pi^*$ 中 $z^{-\alpha\cdot\mu}$ 的系数由 $\pm b_1/\alpha_i$诱导。显然，b_1 与势无关。

下面证明这些断言。断言 (1) 是 [COZZ1，命题 8.2], 的推论，亦即，丛 E 在“$-$”室中是吸引的，因此我们有

$$\mathrm{Stab}_{-,Y}\big|_{F'\times F} = i^*\,\mathrm{Stab}_{-,\widetilde{Y}}\big|_{\widetilde{F}'\times\widetilde{F}}\,\pi^* = \pm u^{\mathrm{rk}\,N^+_{\widetilde{F}'/\widetilde{Y}}-1}\cdot i^*\boldsymbol{r}_{\alpha,-\alpha}\pi^* + \text{lower order in } u.$$

由于 $\mathrm{rk}\ N^+_{\widetilde{F}'/\widetilde{Y}} = \mathrm{rk}\ N^+_{F'/Y}$，断言 (1) 得证。断言 (2) 是 [COZZ1，命题 8.3], 的推论，亦即，丛 E 在“$+$”室中是排斥的，因此我们有

$$\begin{aligned} e^{\mathsf{T}\times\mathbb{C}_z^*\times\mathbb{C}_t^*}(E|_F)\cdot\mathrm{Stab}_{+,Y}\big|_{F\times F'}\cdot e^{\mathsf{T}\times\mathbb{C}_z^*\times\mathbb{C}_t^*}(E|^{\mathrm{fixed}}_{F'})^{-1} &= i^*\,\mathrm{Stab}_{+,\widetilde{Y}}\big|_{\widetilde{F}\times\widetilde{F}'}\,\pi^* \\ &= \pm u^{\mathrm{rk}\,N^-_{\widetilde{F}/\widetilde{Y}}-1}\cdot i^*\boldsymbol{r}_{-\alpha,\alpha}\pi^* + \text{lower order in } u. \end{aligned} \tag{4.27}$$

注意到 $\mathrm{rk}\ N^-_{\widetilde{F}/\widetilde{Y}} = \mathrm{rk}\ N^-_{F/Y}$。等变欧拉类为

$$e^{\mathsf{T}\times\mathbb{C}_z^*\times\mathbb{C}_t^*}(E|_F) = z^{-\mathbf{v}\cdot\mu} + \text{lower order in } z,\quad e^{\mathsf{T}\times\mathbb{C}_z^*\times\mathbb{C}_t^*}(E|^{\mathrm{fixed}}_{F'}) = z^{-(\mathbf{v}-\alpha)\cdot\mu} + \text{lower order in } z\,,$$

并且它们与 u 无关。因此，(4.27) 式在 z-展开中的左端为 $z^{-\alpha\cdot\mu}\mathsf{Stab}_{+,Y}\big|_{F\times F'}+$在 z 中的低阶项，断言 (2) 得证。□

定义 4.50。对于 $\alpha>0$，我们将 移位卡西米尔算子 $\mathsf{Cas}_{\alpha,\mu}\in\mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W})$ 定义为 $(-1)^{\alpha\cdot\mu}\,i^*(\mathsf{Cas}_\alpha)_z\pi^*$ 中 $z^{-\alpha\cdot\mu}$ 的系数，等价地，

$$\mathrm{Cas}_{\alpha,\mu} = \lim_{z\to\infty}(-z)^{\alpha\cdot\mu}\cdot i^*(\mathrm{Cas}_\alpha)_z\pi^*\,.$$

5. Applications to quantum multiplication by divisors

基于上一节发展的技术，我们推导出带势对称箭图簇的除子的量子乘法公式（定理 5.10），以及某些非对称情形的公式（定理 5.13）。

5.1. 除子的量子乘法。设 X 是一个带有 T-不变函数 w 的箭图簇（2.2），其仿射化映射为 $X \to X_0$。考虑具有适当求值映射的零属三标记稳定映射的模叠

$$\mathrm{ev} := \mathrm{ev}_1 \times \mathrm{ev}_2 \times \mathrm{ev}_3 \colon \overline{M}_{0,3}(X,\beta) \to X \times X \times X.$$

A若稳定映射的任意定义域曲线都收缩到仿射空间 X_0 中的一个点，我们有 e

$$\mathrm{ev}(\overline{M}_{0,3}(X,\beta)) \subseteq (X \times Z(\mathsf{w} \boxminus \mathsf{w})) \cap (X \times_{X_0} X \times_{X_0} X).$$

由于 X 光滑，存在一个 T-等变虚类

$$[\overline{M}_{0,3}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}_{\mathsf{T}} \in H^{\mathsf{T}}(\overline{M}_{0,3}(X,\beta)).$$

定义 5.1。给定任意 $\gamma \in H^*_{\mathsf{T}}(X)$，我们定义

$$M_\beta(\gamma) := \mathrm{can} \circ (\mathrm{ev}_2 \times \mathrm{ev}_3)_*([\overline{M}_{0,3}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}_{\mathsf{T}} \cap \mathrm{ev}_1^*\,\gamma) \in H^{\mathsf{T}}(X^2, \mathsf{w} \boxminus \mathsf{w}). \tag{5.1}$$

这诱导出由 $\gamma \in H^*_{\mathsf{T}}(X)$ 中的类给出的量子乘法：

$$\gamma \star_\beta \cdot : H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w}) \to H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w}), \quad \alpha \mapsto M_\beta(\gamma) \circ \alpha, \tag{5.2}$$

其中 $\circ$ 是卷积乘积 [COZZ1, §3.4.1]。对 β 求和，我们定义

$$\gamma \star \cdot := \sum_\beta (\gamma \star_\beta \cdot)\, z^\beta : H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w})[\![z]\!] \to H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w})[\![z]\!]. \tag{5.3}$$

我们定义

$$\mathrm{Q}_\beta := \mathrm{can} \circ \mathrm{ev}_*([\overline{M}_{0,2}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}_{\mathsf{T}}) \in H^{\mathsf{T}}(X^2, \mathsf{w} \boxminus \mathsf{w})_{X \times_{X_0} X}.$$

滥用记号，将其（通过卷积得到的）诱导映射记作

$$\mathrm{Q}_{X,\beta} = \mathrm{Q}_\beta \colon H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w}) \to H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w}). \tag{5.4}$$

对 β求和，我们定义

$$\mathrm{Q}_X = \mathrm{Q} := \sum_\beta \mathrm{Q}_\beta\, z^\beta : H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w})[\![z]\!] \to H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w})[\![z]\!]. \tag{5.5}$$

引理 5.2。该映射 $\gamma \mapsto \gamma \star \cdot$ 关于 $H^*_{\mathsf{T}}(X)$ 上的量子乘积具有幺元性和结合性，即 .

$$1 \star \alpha = \alpha, \quad \gamma_1 \star (\gamma_2 \star \alpha) = (\gamma_1 \star \gamma_2) \star \alpha, \quad \forall\, \gamma_1, \gamma_2 \in H^*_{\mathsf{T}}(X),\ \alpha \in H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w})[\![z]\!].$$

换言之，$\gamma \mapsto \gamma \star \cdot$ 在 $H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w})[\![z]\!]$ 上诱导出一个量子上同调 $QH^*_{\mathsf{T}}(X)$ 模结构。

证明。 $\mathrm{ev}_2 \times \mathrm{ev}_3 \colon \overline{M}_{0,3}(X,\beta) \to X^2$ 可分解为万有曲线映射 $M_{0,3}(X,\beta) \to M_{0,\overline{2}}(X,\beta)$ 的复合，因此

$$(\mathrm{ev}_2 \times \mathrm{ev}_3)_*([\overline{M}_{0,3}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}_{\mathsf{T}}) = 0.$$

由此可得 $1 \star \cdot =$ 恒等元。

根据标准的退化论证，我们在 $H^{\mathsf{T}}(X^2, \mathsf{w} \boxminus \mathsf{w})$ 中有以下恒等式：

$$\mathrm{can} \circ (\mathrm{ev}_3 \times \mathrm{ev}_4)_*([\overline{M}_{0,4}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}_{\mathsf{T}} \cap \mathrm{ev}_1^*\,\gamma_1 \cap \mathrm{ev}_2^*\,\gamma_2) = \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} M_{\beta_1}(\gamma_1) \circ M_{\beta_2}(\gamma_2).$$

以另一种方式进行退化可得

$$\begin{aligned}(\mathrm{ev}_3 \times \mathrm{ev}_4)_*&([\overline{M}_{0,4}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}_{\mathsf{T}} \cap \mathrm{ev}_1^*\,\gamma_1 \cap \mathrm{ev}_2^*\,\gamma_2) \\ &= \sum_{\beta_1'+\beta_2'=\beta} \mathrm{pr}_{45*}\, i_3^* \left(\mathrm{ev}_{3*}([\overline{M}_{0,3}(X,\beta_1')]^{\mathrm{vir}}_{\mathsf{T}} \cap \mathrm{ev}_1^*\,\gamma_1 \cap \mathrm{ev}_2^*\,\gamma_2) \boxtimes (\mathrm{ev}_3 \times \mathrm{ev}_4 \times \mathrm{ev}_5)_*([\overline{M}_{0,3}(X,\beta_2')]^{\mathrm{vir}}_{\mathsf{T}}) \right),\end{aligned}$$

其中 $i_3 \colon X_3 \times X_4 \times X_5 \hookrightarrow X_3 \times X_3 \times X_4 \times X_5$ 由 X_3 的对角线诱导，$\mathrm{pr}_{45} \colon X_3 \times X_4 \times X_5 \to X_4 \times X_5$是投影。应用典范映射并对 β 求和，得到

$$\gamma_1 \star \cdot \circ \gamma_2 \star \cdot = \gamma_1 \cap \gamma_2 \cap \cdot + \sum_{\beta_2'} \mathrm{can} \circ (\mathrm{ev}_4 \times \mathrm{ev}_5)_*([\overline{M}_{0,3}(X,\beta_2')]^{\mathrm{vir}}_{\mathsf{T}} \cap \mathrm{ev}_3^*(\gamma_1 \star \gamma_2)) = (\gamma_1 \star \gamma_2) \star \cdot . \qquad \square$$

引理 5.3。 类 $\mathsf{ev}_*([M_{0,2}(X,\ \beta)]^{\mathrm{vir}}_{\mathsf{T}}) \in H^{\mathsf{T}}_{2\text{维数 }X-2}(X\times_{X_0}X)$ 是定义 2.17 意义下的斯坦伯格对应。

证明。 由引理 2.20，只需证明 $\mathsf{ev}: M_{0,2}(X,\beta)\ \to\ X\times_{X_0}X$ 的像包含于 $X\times_{X_0}X\times_B(B\setminus U)$，这可由以下事实推出： B 是仿射的，且 $\pi|_{\pi^{-1}(U)}\colon\ \pi^{-1}(U)\ \to U$ 是一个仿射态射（因此，任意适当曲线都会映射到 $\pi^{-1}(B\setminus U)$）。□

备注 5.4 节。 若 γ 是一个除子类， β 是一个非零曲线类，则由除子方程可知

$$M_\beta(\gamma)=(L\cdot\beta)\cdot \mathrm{Q}_\beta.$$

一般而言，Joyce 有一个猜想，参见例如 [Joy, CZ, CTZ], : 通过计数带有 r个标记点的某些“扭曲”映射（假设 $\mathsf{Crit(w)}^{\mathsf{T}}$ 是真），可以得到一个带标记点函数:

$$H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w})^{\otimes r}\to H_{\mathsf{T}}(\mathrm{pt})_{\mathrm{loc}}. \tag{5.6}$$

在两个标记点的情形（$r=2$）中，我们可以选择平凡扭曲，因此 *loc.cit.* 中的扭曲映射变为从有理曲线 C 到$\omega_{\log,C}\cong\mathcal{O}_C$ 的普通映射。在 Verdier 对偶性下，临时的双带标记点函数（5.6）变为算子（5.4），我们期望它与 Q_β 相同，差一个标量算子。

5.2. **稳定包络与算子 Q**。 根据 [COZZ1，引理 3.29], $\mathsf{Stab}_{\mathfrak{C}}^{-1}$ 由相反室的稳定包络对应的转置诱导，即

$$\mathsf{Stab}_{\mathfrak{C}}^{-1}=[\mathsf{Stab}_{-\mathfrak{C}}]^{\mathrm{t}}\circ: H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w})_{\mathrm{loc}}\to H^{\mathsf{T}}(X^{\mathsf{A}},\mathsf{w})_{\mathrm{loc}}\,,$$

其中 $(-)_{\mathrm{loc}}$ 表示 $(-)\otimes_{H_{\mathsf{A}}(\mathrm{pt})}$ 分式域 $H_{\mathsf{A}}(\mathrm{pt})$。注意，根据 [COZZ1，引理 3.29]，，卷积 $[\mathsf{Stab}_{-\mathfrak{C}}]^{\mathrm{t}}\circ\mathsf{ev}_*[M_{0,2}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}\circ[\mathsf{Stab}_{\mathfrak{C}}]$ 是 $H^{\mathsf{T}}(X^{\mathsf{A}}\times_{X_0}X^{\mathsf{A}})$ 中的一个类，因此 $\mathsf{Stab}_{\mathfrak{C}}^{-1}\circ\mathrm{Q}_\beta\circ\mathsf{Stab}_{\mathfrak{C}}$ 无需局部化即可定义。

定理 5.5。 设 X 是一个带有环面 T-作用和 T-不变函数 w 的对称箭图簇（定义 2.1）。设 $\mathsf{A}\subset\mathsf{T}$ 是一个自对偶子环面， $\mathfrak{C}$ 是一个室。

对于任意 A-不变分支 nt $F\subseteq X^{\mathsf{A}}$，以及一个非零有效类 $\beta\in H_2(F,\ \mathbb{Z})$，有如下交换图 :

$$\begin{array}{ccc} H^{\mathsf{T}}(F,\mathsf{w}) & \xrightarrow{\mathsf{Stab}_{\mathfrak{C}}} & H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w}) \\ \downarrow{\scriptstyle (-1)^{(c_1(N^-_{F/X}),\beta)}\cdot\mathrm{Q}_\beta} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Q}_\beta} \\ H^{\mathsf{T}}(F,\mathsf{w}) & \xleftarrow{(-)|_F\circ\mathsf{Stab}_{\mathfrak{C}}^{-1}} & H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w}), \end{array} \tag{5.7}$$

相差一个 T/A-权的标量算子。这里 $(-)|_F\colon\ H^{\mathsf{T}}(X^{\mathsf{A}},\ \mathsf{w})\ \to H^{\mathsf{T}}(F,\ \mathsf{w})$ 是到分支 F 的投影。

证明。 由引理 2.22，只需证明

$$[\mathsf{Stab}_{-\mathfrak{C}}]^{\mathrm{t}}\circ\mathsf{ev}_*[\overline{M}_{0,2}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}\circ[\mathsf{Stab}_{\mathfrak{C}}]=(-1)^{(c_1(N^-_{F/X}),\beta)}\cdot\mathsf{ev}_*[\overline{M}_{0,2}(F,\beta)]^{\mathrm{vir}}\in H^{\mathsf{A}}(F\times_{X_0}F). \tag{5.8}$$

下面我们使用对称箭图簇 X 的以下性质:

(1) 仿射化映射 $X\to X_0$ 是双有理且小的（参见 [COZZ2，定理 1.1]）； (2) 存在一个 A-等变平坦映射 π: $X\to B$ 到某个仿射空间，使得一般纤维是仿射的（参见 [COZZ2，定理 1.1]）； (3) 虚维数满足 $\mathsf{vdim}(M_{0,\ 2}(X,\beta))\ =\dim\ X-1$。 —

由 (3) 以及卷积乘积的定义可知，(5.8) 两边在 $H^{\mathsf{A}}(F\times_{X_0}F)$ 中的同调次数均为 $(2\dim\ F\ -\ 2)$。由 (1) 可知，$\dim\ F\times_{X_0}F\leqslant\dim\ F$，并且 $F\times_{X_0}F$ 中存在唯一一个维数等于 $\dim\ F$ 的不可约分支。由 (2) 可知，(5.8) 两边的支撑都避开对角线 Δ_F 的一个 A-不变稠密开子集 U。因此，(5.8) 两边都是 $(F\ \times_{X_0}\ F)\ \setminus U$ 中最高维循环的 $\mathbb{Q}$-线性组合；特别地，它们与 A-等变参数无关。因此，只需在 A-局部化上同调中证明 (5.8)，并令 A-等变参数 a 沿某个方向趋于无穷。

我们回顾 [MO, §7.3], [OP, §3.8.2] 中（未）断裂曲线的概念。根据变形理论，$M_{0,2}(X,\beta)^{\mathsf{A}}$ 中的一个连通分支要么是断裂的，要么是未断裂的。根据命题 5.6 和下文的引理 5.7，只有两个标记点不位于同一条收缩的连通子曲线中的未断裂分支，才会对 $\mathsf{a}\ \to\infty$ 极限下的 A-局部化作出贡献。我们也没有连接 X^{A} by 同一分支中两个点的未断裂链

[MO, 引理 7.3.3]。因此，唯一的非零贡献来自其元素由到 F 的稳定映射构成的分支。在 $\mathsf{a} \to \infty$ 极限下，我们有

$$[\mathrm{Stab}_{-\mathfrak{C}}]^{\mathrm{t}} \circ \mathrm{ev}_*[\overline{M}_{0,2}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}} \circ [\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}] \sim e^{\mathsf{A}}(N_{F/X}) \cdot \mathrm{ev}_* \left(\frac{[\overline{M}_{0,2}(F,\beta)]^{\mathrm{vir}}}{e^{\mathsf{A}}\left(N^{\mathrm{vir}}_{\overline{M}_{0,2}(F,\beta)/\overline{M}_{0,2}(X,\beta)}\right)} \right)$$
$$\sim (-1)^{\langle c_1(N^-_{F/X}),\beta\rangle} \mathsf{a}^{\mathrm{rk}\, N_{F/X} - \mathrm{rk}\, N^{\mathrm{vir}}} \mathrm{ev}_*[\overline{M}_{0,2}(F,\beta)]^{\mathrm{vir}}$$

其中，符号源于 A 是自对偶环面这一事实，$\mathrm{rk}\ N^{\mathrm{vir}}$ 是 $M_{0,2}(X,\beta)$ 中 $M_{0,2}(F,\beta)$ 的虚法丛的秩，等于

$$\chi(C, f^*N_{F/X}) = \chi(C, f^*N^+_{F/X}) + \chi(C, f^*N^-_{F/X}) = \chi(C, f^*N^+_{F/X}) + \chi(C, f^*(N^+_{F/X})^\vee)$$
$$= 2\,\mathrm{rk}\, N^+_{F/X} = \mathrm{rk}\, N_{F/X}\,.$$

因此，在 $\mathsf{a} \to \infty$ 极限下，$[\mathrm{Stab}_{-\mathfrak{C}}]^{\mathrm{t}} \circ \mathrm{ev}_*[M_{0,2}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}} \circ [\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}] \sim (-1)^{\langle c_1(N^-_{F/X}),\beta\rangle} \mathrm{ev}_*[M_{0,2}(F,\beta)]^{\mathrm{vir}}$。证明至此完成。□

命题 5.6。在 $\mathsf{a} \to \infty$ 极限下，若某个断裂分支的两个标记点不位于同一条收缩的连通子曲线上，则它对 (5.8) 左端的贡献为零。

证明。设 $\overline{M}$ 为一个两个标记点不位于同一条收缩的连通子曲线上的断裂分支，且 $f\colon C \to X$ 是 M 中的一个稳定映射，那么有两种可能：

(a) $C = C_L \cup C_R$，使得 C_L 和 C_R 是两条在节点 p 处相交的连通属零曲线（可能可约），其中 $f(p) \in F'$（F' 是 X^{A} 的一个连通分支），并且 $T_{C_L,\,p} \otimes T_{C_R,\,p}$ 具有非零 A 权重，且标记点满足 $v_1 \in C_L$, $v_2 \in C_R$。(b) $C = C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n$ 满足 $n \geqslant 1$，使得每个 C_i 都是一条连通属零曲线（可能可约），$f(C_0) \subseteq F$ 的度数为 $f|_{C_0} \neq 0$，且两个标记点 v_1 和 v_2 位于 C_0 中，并且对于每个 $i > 0$，C_i 在节点 p_i 处与 C_0 相交，且切向量 $T_{C_i,\,p_i}$ 具有非零 A 权重。

根据变形理论，在这个分支中，(a) 和 (b) 只能有一种情况发生。

情形（a）。在这种情况下，$\overline{M}$ 具有如下形式

$$\overline{M} \cong \overline{M}_L \times_{F'} \overline{M}_R\,,$$

其中，$\overline{M}_L$（分别地，M_R）是对应于 C_L（分别地，对应于 C_R）的稳定映射模栈，而映射 $M_L \to F'$ 和 $M_R \to F'$ 是在节点 p 处的求值映射。

万能定义域在节点 p 处的正规化正合列为

$$0 \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_{C_L} \oplus \mathcal{O}_{C_R} \to \mathcal{O}_p \to 0\,,$$

由此可知，M 的切复形与 M_L 和 M_R 的切复形之间由正合三角联系起来：

$$\mathbb{T}_{\overline{M}} \to \mathrm{pr}_L^*\mathbb{T}_{\overline{M}_L} \oplus \mathrm{pr}_R^*\mathbb{T}_{\overline{M}_R} \to \mathrm{ev}_p^*\,\mathbb{T}_{F'} \to \mathbb{T}_{\overline{M}}[1], \tag{5.9}$$

$\mathrm{pr}_{L\text{ 或 }R}$ 是从 M 到 $M_{L\text{ 或 }R}$ 的投影。

虚拟正规贡献 $N^{\mathrm{vir}}_{M/M_{0,\,2}(X,\,\beta)}$ 分解为

$$N^{\mathrm{vir}}_{\overline{M}/\overline{M}_{0,2}(X,\beta)}\big|_{[f\colon C\to X]} = N_L\big|_{[f|_{C_L}]} \oplus N_R\big|_{[f|_{C_R}]} - T_X|^{\mathrm{moving}}_{f(p)} + T_{C_L,p} \otimes T_{C_R,p}\,, \tag{5.10}$$

其中 $N_{L\text{ 或 }R}\big|_{[f|_{C_{L\text{ 或 }R}}]} = H^*(C_{L\text{ 或 }R},\ f^*T_X)^{\mathrm{moving}}$。

由 (5.9) 和 (5.10) 可知，M 的贡献分解为卷积乘积之和：

$$e^{\mathsf{A}}\left(N^+_{F/X}\right) \mathrm{ev}_* \left(\frac{[\overline{M}]^{\mathrm{vir}}}{e^{\mathsf{A}}\left(N^{\mathrm{vir}}_{\overline{M}/\overline{M}_{0,2}(X,\beta)}\right)} \right) e^{\mathsf{A}}\left(N^-_{F/X}\right) = \sum_{\gamma_L,\gamma_R} \mathrm{pr}_*\, \Delta^*_{F'} \left(\mathrm{ev}_*(\gamma_L \cdot [\overline{M}_L]^{\mathrm{vir}}) \boxtimes \mathrm{ev}_*(\gamma_R \cdot [\overline{M}_R]^{\mathrm{vir}}) \right),$$

其中 $\Delta_{F'}\colon\ F \times F' \times F \hookrightarrow F \times F' \times F' \times F$ 由对角嵌入 $F' \hookrightarrow F' \times F'$ 给出，$\mathrm{pr}\colon\ F \times F' \times F \to F \times F$ 是到第一个和最后一个因子的投影，γ_L，γ_R 分别是 M_L 和 M_R 上的上同调类，它们分别来自 $-T_X|^{\mathrm{moving}}_{f\ p}{}() + T_{C_L,\,p} \otimes T_{C_R,\,p}$ 的等变欧拉类。

令 $\pi\colon\ X \to B$ 为如上所述到仿射空间 B 的平坦映射。根据 [COZZ2，引理 3.22], ，对于任意 $b \in B$,

$$\dim F \times_{X_0} F' \times_B \{b\} \leqslant \frac{1}{2}(\dim F + \dim F') - \dim B.$$

注意， π：对于开稠密子集 $U \subset B$， $\pi^{-1}(U) \to U$是仿射的，因此 $\mathsf{ev}(M_L)$不与 $F \times_{X_0} F' \times_B U$相交，并且我们看到 $\mathsf{ev}(M_L)$ 包含于 $F \times_{X_0} F'$的一个维数为 $\leqslant$维数 $_{F}$+维数$_{F'}-1$的闭子集中。因此

$$\mathrm{ev}(\gamma_L \cdot [\overline{M}_L]^{\mathrm{vir}}) \in H_{\leqslant \dim F + \dim F' - 2}(F \times_{X_0} F') \otimes \mathrm{Frac}\, H_{\mathsf{A}}(\mathrm{pt}).$$

类似地,

$$\mathrm{ev}(\gamma_R \cdot [\overline{M}_R]^{\mathrm{vir}}) \in H_{\leqslant \dim F' + \dim F - 2}(F' \times_{X_0} F) \otimes \mathrm{Frac}\, H_{\mathsf{A}}(\mathrm{pt}).$$

取卷积后，我们有

$$e^{\mathsf{A}}\left(N^+_{F/X}\right) \mathrm{ev}_*\left(\frac{[\overline{M}]^{\mathrm{vir}}}{e^{\mathsf{A}}\left(N^{\mathrm{vir}}_{\overline{M}/\overline{M}_{0,2}(X,\beta)}\right)}\right) e^{\mathsf{A}}\left(N^-_{F/X}\right) \in H_{\leqslant 2\dim F - 4}(F \times_{X_0} F) \otimes \mathrm{Frac}\, H_{\mathsf{A}}(\mathrm{pt}).$$

上式中的 A-次数为负（因为左端的同调次数为 $2\dim F - 2$，与 (5.8) 的左端相同），因此当 $\mathsf{a} \to \infty$ 时为零。

情形 (b)。 在这种情况下， $\overline{M}$ 具有如下形式

$$\overline{M} \cong \overline{M}_0 \times_{F^n} \prod_{i=1}^n \overline{M}_i\,,$$

其中 $\overline{M}_i$ 是对应于 $0 \leqslant i \leqslant n$ 的 C_i 稳定映射模栈，而映射 $M_0 \to F^n$ 和 $M_i \to F$ 是在节点 $p_1, \ldots, p_n$ 处的求值映射。注意，由于 $f(C_0) \subseteq F$，A 在 M_0 上的作用是平凡的。

与情形 (a) 中相同的分裂曲线论证表明， M 的切复形与 M_i 的切复形之间由以下正合三角联系：

$$\mathbb{T}_{\overline{M}} \to \bigoplus_{i=0}^n \mathrm{pr}_i^* \mathbb{T}_{\overline{M}_i} \to \bigoplus_{j=1}^n \mathrm{ev}_{p_j}^*\, \mathbb{T}_F \to \mathbb{T}_{\overline{M}}[1], \tag{5.11}$$

其中 pr_i 是从 M 到 M_i 的投影。虚拟正规贡献 $N^{\mathrm{vir}}_{M/M_{0,2}(X,\beta)}$ 分解为

$$N^{\mathrm{vir}}_{\overline{M}/\overline{M}_{0,2}(X,\beta)}\big|_{[f\colon C \to X]} = \sum_{i=0}^n N_i\big|_{[f|_{C_i}]} - \sum_{j=1}^n T_X|^{\mathrm{moving}}_{f(p_j)} + \sum_{j=1}^n T_{C_0,p_j} \otimes T_{C_j,p_j}\,, \tag{5.12}$$

其中 $N_i\big|_{[f|_{C_i}]} = H^*(C_i, f^*T_X)^{\mathrm{moving}}$。令 a_i 表示 T_{C_j,p_j} 的 A-权重。

由 (5.11) 和 (5.12) 可知， M 的贡献具有如下形式

$$\begin{aligned} &e^{\mathsf{A}}\left(N^+_{F/X}\right) \mathrm{ev}_*\left(\frac{[\overline{M}]^{\mathrm{vir}}}{e^{\mathsf{A}}\left(N^{\mathrm{vir}}_{\overline{M}/\overline{M}_{0,2}(X,\beta)}\right)}\right) e^{\mathsf{A}}\left(N^-_{F/X}\right) \\ &= \sum_{\substack{r_1,\ldots,r_n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \\ s_1,\ldots,s_n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}}} \mathrm{pr}_*\, \Delta^*_{F^n}\left(\mathrm{ev}_*(\psi_1^{r_1} \cdots \psi_n^{r_n} \alpha_0) \boxtimes \left(\boxtimes_{i=1}^n e^{\mathsf{A}}(N_{F/X}) \cdot \mathrm{ev}_{i*}(\psi_i^{s_i} \cdot [\overline{M}_i]^{\mathrm{vir}})\right)\right) \prod_{i=1}^n \mathsf{a}_i^{-r_i-s_i-1} \binom{r_i+s_i}{r_i}, \end{aligned} \tag{5.13}$$

其中 $\Delta_{F^n}\colon\ F \times F \times F^n \hookrightarrow F \times F \times F^n \times F^n$ 由对角嵌入 $F^n \hookrightarrow F^n \times F^n$给出，$\mathrm{pr}\colon\ F \times F \times F^n \to F \times F$是到第一和第二个因子的投影,

$$\mathrm{ev} = \mathrm{ev}_{v_1} \times \mathrm{ev}_{v_2} \times \prod_{i=1}^n \mathrm{ev}_i\colon \overline{M}_0 \to F \times_{X_0} F \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} F, \quad \mathrm{ev}_i\colon \overline{M}_i \to F$$

是求值映射,

$$\alpha_0 = \frac{e^{\mathsf{A}}\left(\mathrm{ev}_{v_1}^*\, N^+_{F/X}\right) e^{\mathsf{A}}\left(\mathrm{ev}_{v_2}^*\, N^-_{F/X}\right)}{e^{\mathsf{A}}(N_0)} [\overline{M}_0]^{\mathrm{vir}} \in H_*(\overline{M}_0) \otimes \mathrm{Frac}\, H_{\mathsf{A}}(\mathrm{pt}),$$

且 ψ_i 是对应于 p_i 的 ψ 类。

注意，

$$\mathrm{ev}_*(\psi_1^{r_1}\cdots\psi_n^{r_n}\alpha_0)\in H_{\leqslant 2\cdot\mathrm{vdim}\overline{M}_0}(\underbrace{F\times_{X_0}F\times_{X_0}\cdots\times_{X_0}F}_{n+2\text{ copies}})\otimes\operatorname{Frac}H_{\mathsf{A}}(\mathrm{pt}).$$

另一方面，$\mathrm{ev}_i\colon M_i\to F$的像包含于闭子集 $F\cap\pi^{-1}(B\setminus U)$中（记号与情形 (a) 相同），因为 $\pi\colon X\to B$到 $\pi^{-1}(U)$的限制是一个仿射态射，因此任意稳定映射 $f\colon C\to X$ 的像都在 $\pi^{-1}(B\setminus U)$中。因此，

$$e^{\mathsf{A}}(N_{F/X})\cdot\mathrm{ev}_{i*}(\psi_i^{s_i}\cdot[\overline{M}_i]^{\mathrm{vir}})\in H_{\leqslant 2(\dim F-1)}(F\cap\pi^{-1}(B\setminus U))\otimes\operatorname{Frac}H_{\mathsf{A}}(\mathrm{pt}).$$

我们断言，$H_{2(\dim F-1)}(F\cap\pi^{-1}(B\setminus U))$在$H_{2(\dim F-1)}(F)$中的像为零。由于 F是一个对称箭图簇，根据 [COZZ2，定理 1.1]，存在一个平坦态射 $\pi'\colon F\to B'$ 到一个仿射空间 B'，且其纤维不可约。根据 [COZZ2],中的构造，存在一个有限态射 $p\colon B'\to B$ [6]，使得 $p\circ\pi'=\pi|_F$。令 $U':=p^{-1}(U)$，并令 $C_1,C_2,\dots$ 为 $B'\setminus U'$的余维一（在 B'中）不可约分支。由于 π'是平坦且纤维不可约，$F\cap\pi'^{-1}(B'\setminus U')$的余维一（在 F中）不可约分支恰为 $\pi'^{-1}(C_1)$ $\pi'^{-1}(C_2)$ $\dots$。因此，$H_{2(\dim F-1)}(F\cap\pi^{-1}(B\setminus U))$ 由 $[\pi'^{-1}(C_1)]=\pi'^*[C_1],[\pi'^{-1}(C_2)]=\pi'^*[C_2],\dots$ 张成。由于 B' 是一个仿射空间，$H^2(B')=0$，故 $[C_1]=[C_2]=\cdots=0$，断言得证。于是我们有

$$e^{\mathsf{A}}(N_{F/X})\cdot\mathrm{ev}_{i*}(\psi_i^{s_i}\cdot[\overline{M}_i]^{\mathrm{vir}})\in H_{<2(\dim F-1)}(F)\otimes\operatorname{Frac}H_{\mathsf{A}}(\mathrm{pt}).$$

进行卷积后，我们得到

$$\text{LHS of (5.13)}\in H_{<2(\mathrm{vdim}\overline{M}_0-n)}(F\times_{X_0}F)\otimes\operatorname{Frac}H_{\mathsf{A}}(\mathrm{pt}).$$

由于 $\mathrm{vdim}\overline{M}_0=\dim F+n-1$，且 (5.13) 左端的同调次数为 $2\dim F-2$，因此 (5.13) 左端的 A-次数为负，所以当 $a\to\infty$ 时为零。□

引理 5.7。设 $M_\delta\subseteq\overline{M}_{0,2}(X,\beta)^{\mathsf{A}}$ 是一个连通分支，其元素均为这样的曲线：两个标记点都位于一个收缩分支上。那么它对 (5.8) 的左端贡献为零。

证明。M_δ 中的稳定映射具有如下形式 $f\colon C=C_0\cup C_1\cup\cdots\cup C_n\to X$，其中两个标记点位于 C_0 中，而 C_0 被收缩到连通分支 $F\subseteq X^{\mathsf{A}}$ 中的一个点。这里 F 也是一个对称箭图簇。于是

$$\mathrm{ev}(\overline{M}_\delta)\subseteq\Delta_F.$$

如上所述，存在一个平坦映射 $\pi\colon F\to B$ 到某个仿射空间，使得一般纤维是仿射空间，且底空间上的 A-作用是平凡的。因此存在一个闭子概形 $S\subsetneq B$，使得

$$\mathrm{ev}(\overline{M}_\delta)\subseteq\Delta_{\pi^{-1}(S)}.$$

因此，我们有

$$\dim(\mathrm{ev}(\overline{M}_\delta))\leqslant\dim F-1. \tag{5.14}$$

通过关于 A 的虚拟局部化，[GP] $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}^{-1}\,\mathsf{Q}_\beta\,\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}$ 从分支 F 获得贡献，具体为

$$e^{\mathsf{A}}\left(N_{F/X}^+\right)\mathrm{ev}_*\left(\frac{[\overline{M}_\delta]^{\mathrm{vir}}}{e^{\mathsf{A}}\left(N^{\mathrm{vir}}_{\overline{M}_\delta/\overline{M}_{0,2}(X,\beta)}\right)}\right)e^{\mathsf{A}}\left(N_{F/X}^-\right). \tag{5.15}$$

我们可以将中间项 $\mathrm{ev}_*(-)$ 展开为一个和

$$\sum_i a_i[C_i],$$

其中，a_i 是等变参数，$[C_i]$ 是 $\mathrm{ev}(M_\delta)$ 中的循环。

- 如果 a_i 的幂为 $>-(\dim X-\dim F)$，则 $\dim C_i>\dim F-1$，根据 (5.14)，这使得 $[C_i]$ 为零。
- 如果 a_i 的幂为 $=-(\dim X-\dim F)$，则 $\dim C_i=\dim F-1$，因此 $[C_i]$ 是 $\Delta_{\pi^{-1}(S)}$ 中（$\dim F-1$）维循环的线性组合。于是，对于任意 $n\neq\dim B$，$[C_i]=0$ as $A_n(B)=0$。
- 如果 a_i 的幂为 $<-(\dim X-\dim F)=-\deg_{\mathsf{A}}(e_{\mathsf{A}}(N_{F/X}))$，那么令等变参数趋于无穷后，我们知道它对 (5.15) 的贡献为零。

总之，我们得出结论，(5.15) 在 $H^{\mathsf{A}}(X\times_{X_0}X)$ 中消失。□

[6] $B=\prod_j\mathfrak{gl}_{n_j}/\!\!/\mathrm{GL}^{n_j}$，$B'=\prod_j\mathfrak{gl}_{n'_j}/\!\!/\mathrm{GL}_{n'_j}\times\mathfrak{gl}_{n''_j}/\!\!/\mathrm{GL}^{n''_j}$且具有 $n'_j+n''_j=n_j$。映射 $p\colon B'\to B$由对角嵌入 $\mathfrak{gl}_{n'_j}\times\mathfrak{gl}_{n''_j}\hookrightarrow\mathfrak{gl}_{n_j}$ 诱导。

我们还注意到，命题 5.6 证明中的相同思路推出了 [MO，命题 7.5.1] 的以下类似结果。**命题 5.8**。 设 $X = X_1 \times X_2$ 为两个对称箭图簇的乘积。那么

$$\mathrm{Q}_X = \mathrm{Q}_{X_1} \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{Q}_{X_2}.$$

5.3. **对称箭图簇上的公式**。 给定一个带势 W、且势在环面 T_0, 作用下保持不变的对称箭图 Q，回顾一下，存在一个李超代数 $\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{W}}$ （定义 4.22），其分解为

$$\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{W}} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^{Q_0}} \mathfrak{g}_\alpha.$$

令 $\{e_\alpha^{(s)}\}$ 表示命题 4.23 中出现的每个正根 α 在根空间 $\mathfrak{g}_\alpha$ 中的基。

通过选取一个规范维 数向量 $\mathbf{v}$ 和一个框架维数向量 $\mathbf{d}$，我们得到一个对称箭图簇 y

$$X = \mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{d}).$$

我们在 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 上取一个 T_0 作用，使其扩展无框架箭图上的 T_0 作用。令 A^{fr} 作为框架环面作用于 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})$，并令 W^{fr} 为一个 $\mathsf{T} = \mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}$ 不变的带框架势。记 $\mathsf{w}^{\mathrm{fr}} = = \mathsf{tr}(\mathsf{W}^{\mathrm{fr}})$。则 $\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W})$（因此 $\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{W}}$）作用于 $H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w}^{\mathrm{fr}})$。对于 $\lambda \in \mathbb{C}^{Q_0}$，我们定义

$$c_1(\lambda) = \sum_{i \in Q_0} \lambda_i \, c_1(\mathsf{V}_i),$$

其中，V_i 是 X的第 i个典范丛。

定义 5.9。 我们定义修正量子乘法 $\gamma \widetilde{\star} \cdot$ 如下，通过代换

$$z^\beta \mapsto (-1)^{(c_1(\mathsf{P}),\beta)+|\mathbf{v}|\cdot|\beta|} z^\beta \ \text{ in (5.3) for each } \beta \text{ on } \mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}),$$

其中，P由(3.26)给出， $|\mathbf{v}|$ 由(3.2)给出，而 $|\beta| := \sum_{i \in Q_0^{\mathrm{f}}} \beta_i \pmod 2$是 β 的奇偶性，其中 $\beta_i = (c_1(\mathsf{V}_i)\ \beta)$。

定理 5.10。 记号同上，则对于零势（$\mathsf{W}^{\mathrm{fr}} = 0$），有

$$c_1(\lambda) \widetilde{\star} \cdot = c_1(\lambda) \cup \cdot - \sum_{\alpha > 0} \alpha(\lambda) \frac{z^\alpha}{(-1)^{|\alpha|} - z^\alpha} \mathrm{Cas}_\alpha + \cdots,$$

其中，$\mathrm{Cas}_\alpha = \sum_s e_\alpha^{(s)} e_{-\alpha}^{(s)}$ 是$\mathfrak{g}_Q$的Casimir算子，$\mathsf{w}=0$, $|\alpha|$ 由(3.2)给出，点号表示一个标量算子。

标量算子由以下条件确定： $c_1(\lambda)\widetilde{\star}\cdot$的纯量子部分湮灭恒等元。

证明。 这与 [MO 定理 10.2 的证明平行，1], 我们概述如下。由 (4.20)，可得

$$\Delta c_1(\lambda) = c_1(\lambda) \otimes 1 + 1 \otimes c_1(\lambda) - \sum_{\alpha > 0} (-1)^{|\alpha|} \alpha(\lambda) \sum_s e_{-\alpha}^{(s)} \otimes e_\alpha^{(s)}. \tag{5.16}$$

结合注4.17，可得

$$R^{\sup}(u) \Delta c_1(\lambda) R^{\sup}(u)^{-1} = \Delta^{\mathrm{op}} c_1(\lambda) = \Delta c_1(\lambda) + \sum_{\alpha > 0} \alpha(\lambda) \sum_s \left((-1)^{|\alpha|} e_{-\alpha}^{(s)} \otimes e_\alpha^{(s)} - e_\alpha^{(s)} \otimes e_{-\alpha}^{(s)} \right). \tag{5.17}$$

我们将修正的量子乘法算子记为

$$\widetilde{\mathrm{Q}}(\lambda) := c_1(\lambda) + \sum_{\beta > 0} (-1)^{(c_1(\mathsf{P}),\beta)+|\mathbf{v}|\cdot|\beta|} \lambda(\beta) \, \mathrm{Q}_\beta \, z^\beta.$$

它作用于临界上同调 c ohomology，适用于任意 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 及任意扩展势 w^{fr}。我们考虑

$$\Delta \widetilde{\mathrm{Q}} = \mathrm{Stab}_{+,\epsilon}^{-1} \, \widetilde{\mathrm{Q}} \, \mathrm{Stab}_{+,\epsilon} \tag{5.18}$$

Q 在稳定包络映射下的拉回

$$H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\mathbf{d}')) \otimes H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\mathbf{d}'')) \to H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\mathbf{d}' + \mathbf{d}'')).$$

考虑一种分解

$$\Delta \widetilde{\mathrm{Q}} = \sum_\alpha \Delta_\alpha \widetilde{\mathrm{Q}},$$

根据 Cartan 作用的权

$$[h \otimes 1, \Delta_\alpha \widetilde{\mathrm{Q}}] = \alpha(h) \Delta_\alpha \widetilde{\mathrm{Q}}.$$

由 (5.16)、定理 5.5 和命题 5.8，我们有 [7]

$$\Delta_0\widetilde{\mathsf{Q}} = \widetilde{\mathsf{Q}}\otimes 1 + 1\otimes\widetilde{\mathsf{Q}} + \text{a scalar operator} \tag{5.19}$$

根据 [MO，定理 9.3.1]，的一个类比结果（它仅用到箭图簇的对称性），$\mathsf{Stab}_{+,\,\epsilon}(\tilde{z}^{\mathbf{v}}\otimes 1)\,\mathsf{Stab}_{-}^{-1,\,\bar{\epsilon}}$ 等于微小移位算子 $\mathsf{S}(\sigma)$，其中 $\tilde{z}^{\mathbf{v}}$ 是对角算子，它在 $H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\mathbf{v},\,\mathbf{d}),\,\mathsf{W}^{\mathrm{fr}})$ 上的作用为标量 $(-1)^{|\mathbf{v}|}\cdot z^{\mathbf{v}}$。由一个标准论证可知（ [MO，命题 8.2.1，引理 8.3.1] ），对于任意带有作用 $\sigma\colon\,\mathbb{C}^*\to\mathsf{Aut}(X)$ 的光滑 X，移位算子 $\mathsf{S}(\sigma)$ 与修正量子乘法相交换；因此

$$[(\tilde{z}^{\mathbf{v}}\otimes 1)\,R^{\mathrm{sup}}(u),\Delta\widetilde{\mathsf{Q}}] = 0,\quad \text{i.e. } R^{\mathrm{sup}}(u)\,\Delta\widetilde{\mathsf{Q}}\,R^{\mathrm{sup}}(u)^{-1} = \sum_{\alpha}(-1)^{|\alpha|}z^{-\alpha}\Delta_\alpha\widetilde{\mathsf{Q}}.$$

我们还有

$$\begin{aligned} R^{\mathrm{sup}}(u)\,\Delta\widetilde{\mathsf{Q}}\,R^{\mathrm{sup}}(u)^{-1} &= R^{\mathrm{sup}}(u)\,\Delta c_1(\lambda)\,R^{\mathrm{sup}}(u)^{-1} + \sum_{\beta>0}(-1)^{(c_1(\mathsf{P}),\beta)+|\mathbf{v}|\cdot|\beta|}\lambda(\beta)z^\beta\,R^{\mathrm{sup}}(u)\,\Delta\mathsf{Q}_\beta\,R^{\mathrm{sup}}(u)^{-1}\\ &= \Delta^{\mathrm{op}}c_1(\lambda) + \sum_{\beta>0}(-1)^{(c_1(\mathsf{P}),\beta)+|\mathbf{v}|\cdot|\beta|}\lambda(\beta)z^\beta\,\Delta\mathsf{Q}_\beta\\ &= \Delta\widetilde{\mathsf{Q}} + (\Delta^{\mathrm{op}}-\Delta)(c_1(\lambda)). \end{aligned}$$

其中，在第二个等式中，我们用到了 (5.17)、引理 5.3、注 4.18 和 (5.18)。这意味着

$$\sum_{\alpha}(1-(-1)^{|\alpha|}z^{-\alpha})\Delta_\alpha\widetilde{\mathsf{Q}} = \Delta c_1(\lambda) - \Delta^{\mathrm{op}}c_1(\lambda) = \sum_{\alpha>0}\alpha(\lambda)\sum_s\left(e_\alpha^{(s)}\otimes e_{-\alpha}^{(s)} - (-1)^{|\alpha|}e_{-\alpha}^{(s)}\otimes e_\alpha^{(s)}\right), \tag{5.20}$$

~其中，最后一个等式用到了 (5.17)。方程 (5.20) 唯一确定了 $\alpha\neq 0$对应的 $\Delta_\alpha\mathsf{Q}$，其表达式为

$$\Delta_\alpha\widetilde{\mathsf{Q}} = \begin{cases} -\alpha(\lambda)\frac{z^\alpha}{(-1)^{|\alpha|}-z^\alpha}\sum_s e_\alpha^{(s)}\otimes e_{-\alpha}^{(s)}, & \text{if } \alpha>0\\ \alpha(\lambda)\frac{1}{(-1)^{|\alpha|}-z^{-\alpha}}\sum_s e_\alpha^{(s)}\otimes e_{-\alpha}^{(s)}, & \text{if } \alpha<0 \end{cases} \tag{5.21}$$

定义

$$\widetilde{\mathsf{Q}}_{\mathrm{remainder}} := \widetilde{\mathsf{Q}} - \left(c_1(\lambda) - \sum_{\alpha>0}\alpha(\lambda)\frac{z^\alpha}{(-1)^{|\alpha|}-z^\alpha}\sum_s e_\alpha^{(s)}e_{-\alpha}^{(s)}\right).$$

由 (5.16)、(5.19)、(5.21)，可得

$$\Delta\widetilde{\mathsf{Q}}_{\mathrm{remainder}} = \widetilde{\mathsf{Q}}_{\mathrm{remainder}}\otimes 1 + 1\otimes\widetilde{\mathsf{Q}}_{\mathrm{remainder}} + \text{a scalar operator}. \tag{5.22}$$

~$\Delta\mathsf{Q}_{\mathrm{remainder}}$ 保持权空间分解

$$\bigoplus_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''} H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\mathbf{v}',\mathbf{d}'))\otimes H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\mathbf{v}'',\mathbf{d}''))\,,$$

so

$$\left[|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\otimes\mathrm{id}\,,\,\Delta\widetilde{\mathsf{Q}}_{\mathrm{remainder}}\right] = 0\,.$$

~由引理 5.3、命题 4.48，$\mathsf{Q}_{\mathrm{remainder}}$ 由斯坦伯格对应诱导，因此根据注 4.18，可得

$$\left[R^{\mathrm{sup}}_{\mathbf{d}',\mathbf{d}''}\,,\,\Delta\widetilde{\mathsf{Q}}_{\mathrm{remainder}}\right] = 0.$$

结合上述两个方程与 (5.22)，得到

$$\left[\mathrm{tr}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathcal{H}^{\mathsf{W}=0}_{\mathbf{d}'}}\left((|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|\otimes\mathrm{id})R^{\mathrm{sup}}_{\mathbf{d}',\mathbf{d}''}(u)\right)\,,\,\widetilde{\mathsf{Q}}_{\mathrm{remainder}}\right] = 0\,.$$

~ ~引理 4.11 中的计算表明，$\mathsf{Q}_{\mathrm{remainder}}$ 与所有经典乘法交换，因此 $\mathsf{Q}_{\mathrm{remainder}}$~本身就是一个经典乘法。由于 $\mathsf{Q}_{\mathrm{remainder}}$ 的上同调次数为 2，它的形式为 $c_1(\mu)\,\cup\cdot + a\cdot$，其中 $\mu\in\mathbb{Z}^{Q_0}$ 和 $a\in H^2_{\mathsf{T}}(\mathrm{pt})$。由于对于非零的 α，$\Delta_\alpha\,\widetilde{}\,\mathsf{Q}_{\mathrm{remainder}} = 0$，根据余乘积公式 (4.20)，可知 $\mu\,\widetilde{}$必为零。因此，$\mathsf{Q}_{\mathrm{remainder}}$ 是一个标量乘法。 □

[7]引入修改 $z^\beta\mapsto(-1)^{(c_1(\mathsf{P}),\beta)+|\mathbf{v}|\cdot|\beta|}z^\beta$，以抵消式（5.7）中的符号。

推论 5.11. 假设特化映射 sp: $H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}),\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}) \to H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}))$ 是单射，则在 $H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}),\mathsf{w}^{\mathrm{fr}})$ 上的修正的除子量子乘法 λ由下式给出

$$c_1(\lambda)\widetilde{\star}\cdot = c_1(\lambda)\cup\cdot - \sum_{\alpha>0}\alpha(\lambda)\frac{z^\alpha}{(-1)^{|\alpha|}-z^\alpha}\mathrm{Cas}_\alpha + \cdots,$$

其中 $\mathsf{Cas}_\alpha = \sum_s e_\alpha^{(s)} e_{-\alpha}^{(s)}$ 是$\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{W}}$的卡西米尔算子，点表示标量算子。

证明。 由于 Q_β由一个对应诱导， $c_1(\lambda)\widetilde{\star}\cdot$与特化 [COZZ1，命题 7.17]可交换。根据命题 4.48，存在一个斯坦伯格对应 C_α，它同时诱导出 $H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}),\mathsf{w}^{\mathrm{fr}})$和 $H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}))$的算子 Cas_α。特别地，$\mathfrak{g}_{Q,0}$ 的卡西米尔算子在特化映射像上的限制，给出了$\mathfrak{g}_{Q,\mathsf{W}}$的卡西米尔算子。于是由定理 5.10 可得推论。□

5.4. **非对称情形**。 对于一个非必然对称的箭图簇，可以将其与某种对称化联系起来，并利用定理 5.10 和以下引理推导除子的量子乘法公式。

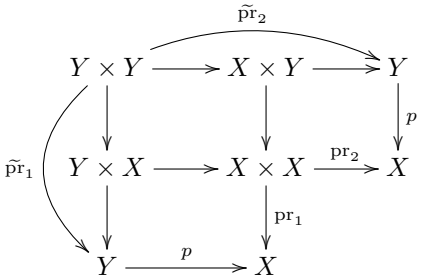
命题 5.12. 设 X是一个箭图簇 (2.2)，其仿射化为 $X \to X_0$， $p\colon Y = \mathrm{Tot}_X(E) \to X$是 X上的一个 T-等变向量丛 E的全空间。令 $[Z] \in H^{\mathsf{T}}(X\times X, \mathsf{w}\boxminus\mathsf{w})^{X\times_{X_0}X}$，并记 $[Z]_X\colon H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w}) \to H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w})$ 为由 $[Z]$诱导的卷积，记 $[Z]_Y\colon H^{\mathsf{T}}(Y,p^*\mathsf{w}) \to H^{\mathsf{T}}(Y,p^*\mathsf{w})$ 为由 $[Z]$ 在零截面 $X\times X \to Y\times Y$的推前像所诱导的卷积。

那么我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w}) & \xrightarrow[\cong]{p^*} & H^{\mathsf{T}}(Y,p^*\mathsf{w}) \\ \downarrow{\scriptstyle [Z]_X} & & \downarrow{\scriptstyle [Z]_Y} \\ H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w}) & \xrightarrow[\cong]{p^*(e(E)\cdot(-))} & H^{\mathsf{T}}(Y,p^*\mathsf{w}), \end{array} \tag{5.23}$$

其中 $e\,(E)\colon H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w}) \to H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w})$ 是欧拉类算子，参见例如 [COZZ1, Eqn. (2.10)] .

证明. 我们有如下交换图



其中所有方块均为笛卡尔方块。记 $0\times 0\colon X\times X \to Y\times Y$为零截面。

由基变换，对任意 $\alpha \in K^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w})$，有

$$((0\times 0)_*[F]) \otimes (\widetilde{\mathrm{pr}}_2^*\, p^*\alpha) = (0\times 0)_*([F]\otimes \mathrm{pr}_2^*\,\alpha).$$

因此，我们有

$$\widetilde{\mathrm{pr}}_{1*}\left((0\times 0)_*[F]\otimes(\widetilde{\mathrm{pr}}_2^*\,p^*\alpha)\right) = \widetilde{\mathrm{pr}}_{1*}(0\times 0)_*([F]\otimes\mathrm{pr}_2^*\,\alpha) = 0_*\,\mathrm{pr}_{1*}([F]\otimes\mathrm{pr}_2^*\,\alpha).$$

根据卷积的定义，上式恰好是

$$[F]_Y\circ(p^*\alpha) = 0_*([F]_X\circ\alpha) \in K^{\mathsf{T}}(Y,p^*\mathsf{w}).$$

应用 Gysin 拉回 0^*，我们得到

$$0^*([F]_Y\circ(p^*\alpha)) = e_K(E)\cdot([F]_X\circ\alpha)$$

由于 0^* 是光滑拉回 p^* 的逆映射，我们得到如下结论：

$$[F]_Y\circ(p^*\alpha) = p^*(e_K(E)\cdot([F]_X\circ\alpha)).$$

□

定理 5.13. 取态空间 $H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}),\mathsf{w}^{\mathrm{fr}})$，其中 $\mathbf{d}_{\mathrm{out}}-\mathbf{d}_{\mathrm{in}}=\mu\in\mathbb{Z}^{Q_0}_{\leqslant 0}$，且 $\mathsf{T}=\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}$。假设特化映射 $\mathrm{sp}\colon H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}),\mathsf{w}^{\mathrm{fr}})\to H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}))$ 是单射，则在 $H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}),\mathsf{w}^{\mathrm{fr}})$ 上由除子 λ 给出的修正的除子量子乘法为

$$c_1(\lambda)\mathbin{\widetilde{\star}}\cdot=c_1(\lambda)\cup\cdot-\sum_{\substack{\alpha>0\\ \alpha\cdot\mu=0}}\alpha(\lambda)\frac{z^\alpha}{(-1)^{|\alpha|}-z^\alpha}\mathrm{Cas}_{\alpha,\mu}-\sum_{\substack{\alpha>0\\ \alpha\cdot\mu\neq 0}}(-1)^{|\alpha|}\alpha(\lambda)\,z^\alpha\,\mathrm{Cas}_{\alpha,\mu}+\cdots,$$

其中 $\mathsf{Cas}_{\alpha,\,\mu}$ 是 $\mathsf{Y}\mu(Q,\,\mathsf{W})$ 中的移位卡西米尔算子，点号表示一个标量算子。

证明。只需证明零势情形，非零势情形可通过与推论 5.11 类似的论证得出（将命题 4.48 替换为命题 4.49）。设 $\mathbf{d}'$ 是一个对称框架向量，使得 $\mathbf{d}'_{\mathrm{in}}=\mathbf{d}'_{\mathrm{out}}=\mathbf{d}_{\mathrm{in}}$。记 $X=\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})$、$Y=\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}')$，则 Y 是向量丛 $E=\bigoplus_{i\in Q_0}\mathsf{Hom}(\mathsf{V}_i,\mathbb{C}^{\mathbf{d}_{\mathrm{in},\,i}-\mathbf{d}_{\mathrm{out},\,i}})$ 在 X 上的全空间。令环面 $\mathsf{T}\times\mathbb{C}^*_\hbar$ 作用于 Y，固定底空间 X，并以权 1 缩放 E 的纤维。

根据环面等变虚类的定义，我们有

$$[\overline{M}_{0,2}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}_{\mathsf{T}}=[\overline{M}_{0,2}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}_{\mathsf{T}\times\mathbb{C}^*_\hbar},\tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}[\overline{M}_{0,2}(Y,\beta)]^{\mathrm{vir}}_{\mathsf{T}\times\mathbb{C}^*_\hbar}&=i_*([\overline{M}_{0,2}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}_{\mathsf{T}\times\mathbb{C}^*_\hbar}\cdot e(-\pi_*\,\mathrm{ev}^*\,E))\\&=i_*[\overline{M}_{0,2}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}_{\mathsf{T}\times\mathbb{C}^*_\hbar}\cdot(\hbar^{-\,\mathrm{rk}\,E-\beta\cdot\mu}+\mathrm{l.o.t.}),\end{aligned}\tag{5.25}$$

其中 $i\colon M_{0,\,2}(X,\,\beta)\xrightarrow{\cong}M_{0,\,2}(Y,\,\beta)^{\mathbb{C}^*_\hbar}$ 由零截面 $X\hookrightarrow Y$ 诱导，$\pi\colon\mathcal{C}\to M_{0,\,2}(X,\,\beta)$ 是普适曲线，$\mathrm{ev}\colon\mathcal{C}\to X$ 是求值映射。记

$$[Z]_X:=\mathrm{ev}_*([\overline{M}_{0,2}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}_{\mathsf{T}\times\mathbb{C}^*_\hbar}),\ [Z]_Y:=i_*\circ\mathrm{ev}_*([\overline{M}_{0,2}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}_{\mathsf{T}\times\mathbb{C}^*_\hbar}),\ [Z]'_Y:=\mathrm{ev}_*([\overline{M}_{0,2}(Y,\beta)]^{\mathrm{vir}}_{\mathsf{T}\times\mathbb{C}^*_\hbar}).$$

由命题 5.12，得到

$$\begin{aligned}[Z]_X&=\frac{(p^*)^{-1}\circ[Z]_Y\circ p^*(-)}{e(E)}\\&=\frac{1}{(\hbar^{\mathrm{rk}\,E}+\mathrm{l.o.t.})(\hbar^{-\,\mathrm{rk}\,E-\beta\cdot\mu}+\mathrm{l.o.t.})}\left((p^*)^{-1}\circ[Z]'_Y\circ p^*(-)\right)\\&=-(-1)^{(c_1(\mathsf{P}_Y),\beta)+|\mathbf{v}|\cdot|\beta|}\sum_{\substack{\alpha>0\\ \alpha|\beta}}\frac{\alpha(\lambda)\,(-1)^{|\beta|}}{\hbar^{-\beta\cdot\mu}}\left((p^*)^{-1}\circ\mathrm{Cas}_{\alpha,0}\circ p^*(-)\right)+\mathrm{l.o.t.}+\text{scalar operator}.\end{aligned}$$

这里，第二个等号用到了 (5.25)，第三个等号用到了定理 5.10。由 (5.24)，$[Z]_X$ 与 $\hbar$的选择无关，因此我们可以取极限 $\hbar\to\infty$。命题 4.49 表明

$$\lim_{\hbar\to\infty}\frac{1}{(-\hbar)^{-\beta\cdot\mu}}\left((p^*)^{-1}\circ\mathrm{Cas}_{\alpha,0}\circ p^*(-)\right)=\begin{cases}\mathrm{Cas}_{\alpha,\mu}\,, & \text{if } \beta\cdot\mu=0,\\ \mathrm{Cas}_{\alpha,\mu}\,, & \text{if } \beta\cdot\mu\neq 0,\ \alpha=\beta,\\ 0\,, & \text{otherwise},\end{cases}$$

其中 $\mathsf{Cas}_{\alpha,\,\mu}$ 是移位卡西米尔算子（见定义 4.50）。于是结论得证。 □

我们应用定理 5.13，在第 10.4 节计算 $\mathrm{Hilb}(\mathbb{C}^3)$ 的除子的量子乘法公式。相应的 K-理论类比将在后续工作 [COZZ3] 中研究。

6. Bilinear form and anti-automorphism

本节中，在临界轨迹满足某些真性假设的条件下，我们讨论移位杨扬子代数 $\mathsf{Y}\mu(Q,\,\mathsf{W})$ 模上的一个双线性形式，以及它在移位杨扬子代数上诱导的反自同构（定理 6.8）。这些是沙波瓦洛夫形式和切瓦莱反对合的几何类比。我们继续使用 §4 中的记号。

6.1. **环面不动点轨迹的适当性**。

定义 6.1. 如果对于任意$\mathbf{v}$，$\mathrm{Crit}^{\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})}(\mathbf{w}^{\mathrm{fr}})^{\mathsf{T}_0}$ 都是真簇，我们就称辅助数据 $\mathfrak{c}=(\mathbf{d},\ \mathsf{T}_0\curvearrowright\mathcal{M}(\mathbf{d}),\ \mathbf{w}^{\mathrm{fr}})$ 为紧的。在此情形下，我们也称辅助空间 $\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}$ 紧。如果辅助数据集 $\mathcal{C}$ 中的每个辅助数据都是紧的，则称该辅助数据集 $\mathcal{C}$ 是紧的。类似地，如果对于任意$\mathbf{v}$，$\mathrm{Crit}^{\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})}(\mathbf{w}^{\mathrm{fr}})^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$ 都是真簇，则称态空间 $\mathcal{H}^{\mathbf{w}^{\mathrm{fr}}}{}_{\mathbf{d},\ \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}=H^{\mathsf{T}_0\times}{}_{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{M}(\mathbf{d}),\ \mathbf{w}^{\mathrm{fr}})$ 是紧的。

以下引理给出了丰富紧辅助数据以及态空间的一个判据。

引理 6.2。假设 $\left(\text{临界点集}^{\mathrm{Rep}(\mathbf{v},\mathbf{0})}(\mathbf{w})/\!\!/\mathrm{GL}(\mathbf{v})\right)^{\mathsf{T}_0}$ 是真（等价于有限），那么如果满足以下一般性条件，临界点集 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})(\mathbf{w}^{\mathrm{fr}})^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$ 也是真：

对于每对在 D_{in} 上的 $\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}$ 权重 λ 和在 $\mathsf{D}_{\mathrm{out}}$ 上的 T $\lambda'\,\mathsf{A}_{\mathrm{out}}$ 权重 λ'，其差 $\lambda-\lambda'\notin$ 属于 $\mathrm{Char}(\mathsf{T}_0)$.

证明。 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\ \mathbf{d})^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$ 是箭图簇的不交并

$$\bigsqcup_{\phi/\sim}\mathcal{M}(Q',\mathbf{v}_\phi,\underline{\mathbf{d}}_\phi),$$

对于某个箭图 Q'，其节点上有自然的 $\mathrm{Char}(\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}})$-分次，且 $\phi\colon \mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}\to\mathrm{GL}(\mathbf{v})$ 是一个群同态。由于稳定性是循环的，非空的 $\mathcal{M}(Q',\mathbf{v}_\phi,\mathbf{d}_\phi)$ 必须满足：$\mathbf{v}_\phi$ 的支撑包含在子空间 $\{\lambda+\ \text{中；}\ \mathrm{Char}(\mathsf{T}_0)\mid\lambda\ \text{是}\ \mathsf{D}_{\mathrm{in}}\}$ 的一个权。于是，一般性条件意味着，任何非空的 $\mathcal{M}(Q',\mathbf{v}_\phi,\mathbf{d}_\phi)$ 中，任一出射箭头的尾部的规范维数都必须为零。因此 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}\subseteq\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}')^{\mathsf{T}_0}$，其中 $\mathbf{d}'_{\mathrm{in}}=\mathbf{d}_{\mathrm{in}},\ \mathbf{d}'_{\mathrm{out}}=\mathbf{0}$。由此我们推得

$$\mathrm{Crit}_{\mathcal{M}(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})}(\mathbf{w}^{\mathrm{fr}})^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}\subseteq\mathrm{Crit}_{\mathcal{M}(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}}')}(\mathbf{w})^{\mathsf{T}_0}.$$

由于 Jordan-H¨older 映射 $\mathrm{Crit}_{\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}')}(\mathbf{w})\to\mathrm{Crit}_{\mathrm{Rep}(\mathbf{v},\mathbf{d}')}(\mathbf{w})/\!\!/\mathrm{GL}(\mathbf{v})$ 是射影的，因此只需证明后者具有有限个 T_0 不动点。注意，$\mathbb{C}\left[\mathrm{Crit}_{\mathrm{Rep}(\mathbf{v},\mathbf{d}')}(\mathbf{w})\right]^{\mathrm{GL}(\mathbf{v})}=\mathbb{C}\left[\mathrm{Crit}^{\mathrm{Rep}(\mathbf{v},\mathbf{0})}(\mathbf{w})\right]^{\mathrm{GL}(\mathbf{v})}$，因为没有出射箭头可以构成环。因此，$\mathrm{Crit}_{\mathrm{Rep}(\mathbf{v},\mathbf{d}')}(\mathbf{w})/\!\!/\mathrm{GL}(\mathbf{v})$ 与 $\mathrm{Crit}^{\mathrm{Rep}(\mathbf{v},\mathbf{0})}(\mathbf{w})/\!\!/\mathrm{GL}(\mathbf{v})$ 同构；根据假设，后者具有有限个 T_0 不动点。□

备注 6.3。假设无框架箭图上的 T_0-权为整数，并且我们可以取 $\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}$ 权在 D_{in}、$\mathsf{D}_{\mathrm{out}}$ 上为分数，那么引理 6.2 中的一般性条件为 $\lambda-\lambda'\in\mathrm{Char}(\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\setminus\mathrm{Char}(\mathsf{T}_0)$。特别地，允许 $\lambda-\lambda'\in\mathrm{Char}(\mathsf{T}_0)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\setminus\mathrm{Char}(\mathsf{T}_0)$。

例 6.4. 令 Q 为 Q 的三重箭图，令 W 为典范三次势，$\mathsf{T}_0=\mathbb{C}^*_\hbar$ 为环面，它按照例 2.4 中的方式作用于 $\widetilde{Q}$。记 $\widetilde{\mathbf{w}}=\mathrm{tr}(\widetilde{\mathbf{W}})$。那么 $\left(\mathrm{Crit}^{\mathrm{Rep}(\widetilde{Q},\mathbf{v},\mathbf{0})}(\widetilde{\mathbf{w}})/\!\!/\mathrm{GL}(\mathbf{v})\right)^{\mathbb{C}^*_\hbar}$ 由唯一的点 0 组成，该点对应于平凡表示。事实上，通过直接计算可得 $\mathrm{Crit}^{\mathrm{Rep}(\widetilde{Q},\mathbf{v},\mathbf{0})}(\widetilde{\mathbf{w}})=\{M\in\mathrm{Rep}(\Pi_Q,\mathbf{v})\ \mathcal{E}\in\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}(\Pi_Q,\mathbf{v})}(M)\}$，其中 Π_Q 是 Q 的预射影代数。在自然映射下

$$\mathrm{Crit}_{\mathrm{Rep}(\widetilde{Q},\mathbf{v},\mathbf{0})}(\widetilde{\mathbf{w}})/\!\!/\mathrm{GL}(\mathbf{v})\longrightarrow\left(\mathrm{Rep}(\Pi_{\overline{Q}},\mathbf{v})/\!\!/\mathrm{GL}(\mathbf{v})\right)\times(\mathfrak{gl}(\mathbf{v})/\!\!/\mathrm{GL}(\mathbf{v}))$$

左侧的 T_0 不动点轨迹映射到右侧的 T_0 不动点轨迹，即 $\{0\}\times\{0\}$。这意味着 $\left(\mathrm{Crit}^{\mathrm{Rep}(\widetilde{Q},\mathbf{v},\mathbf{0})}(\widetilde{\mathbf{w}})/\!\!/\mathrm{GL}(\mathbf{v})\right)^{\mathbb{C}^*_\hbar}$ 在商映射下的原像包含于这样的轨迹中：M 是一个幂零的 Π_Q-表示，且 $\mathcal{E}$ 是一个幂零端同态。$\{M\,\text{nilpotent}\ \mathcal{E}\ \text{nilpotent}\}$ 作为 $\widetilde{Q}$-表示的半单化是平凡表示；因此 $\left(\mathrm{Crit}^{\mathrm{Rep}(\widetilde{Q},\mathbf{v},\mathbf{0})}(\widetilde{\mathbf{w}})/\!\!/\mathrm{GL}(\mathbf{v})\right)^{\mathbb{C}^*_\hbar}=\{0\}$。

6.2. **对偶性与伴随算子**。对于带有正则函数 $f\colon\ X\to\mathbb{A}^1$ 的代数簇 X，我们有 Verdier 对偶

$$H^i(X,\varphi_f\omega_X)^\vee\cong H_c^{-i}(X,\varphi_f\mathbb{C}_X).$$

如果 X 光滑且临界点集(f) 是真簇，那么上述同构的右端同构于 $H^{-2d-i}(X,\ \varphi_f\omega_X)$，其中 $d=$维 X，且该对偶性由以下非退化配对诱导：

$$(\cdot,\cdot)_X:H(X,f)\otimes H(X,f)\cong H(X\times X,f\boxminus f)\xrightarrow{\Delta^!}H^{\mathrm{BM}}(X)_{\mathrm{Crit}(f)}\to\mathbb{C}\,. \tag{6.1}$$

这里，第一个同构使用了 $H^*(X,f)\cong H^*(X,-f)$ 以及汤姆-塞巴斯蒂亚尼同构；第二个映射是到对角线的 Gysin 拉回，第三个映射则是推前到该点。

考虑一对光滑簇 X 和 Y，其上分别带有函数 f_X 和 f_Y，并假设 $\mathrm{Crit}(f_X)$ 和 $\mathrm{Crit}(f_Y)$ 都是真。一个类 $\alpha \in H(X \times Y, f_X \boxminus f_Y)$ 诱导出一个卷积映射 [COZZ1, (3.3)]:

$$\alpha \colon H(Y, f_Y) \to H(X, f_X).$$

利用同构 $H(X \times Y,\ f_X \boxminus f_Y) \cong H(Y \times X,\ f_Y \boxminus f_X)$，$\alpha$ 的转置诱导出卷积映射 $\alpha^{\mathrm{t}} \colon H(X,\ f_X) \to H(Y,\ f_Y)$。$\alpha$ 和 α^{t} 互为伴随，具体而言

$$(\alpha(u), v)_X = (u, \alpha^{\mathrm{t}}(v))_Y, \text{ for } u \in H(Y, f_Y),\ v \in H(X, f_X).$$

这里，$(\cdot,\ \cdot)_X$ 和 $(\cdot,\ \cdot)_Y$ 分别是 X 和 Y 上的配对 (6.1)。

当 X 具有环面 T 作用时，我们可以用等变真性替代真性；也就是说，如果 X 光滑且 $\mathrm{Crit}(f)^{\mathsf{T}}$ 是真，则有非退化配对：

$$(\cdot,\cdot) \colon H^{\mathsf{T}}(X, f)_{\mathrm{loc}} \otimes H^{\mathsf{T}}(X, f)_{\mathrm{loc}} \cong H^{\mathsf{T}}(X \times X, f \boxminus f)_{\mathrm{loc}} \xrightarrow{\Delta^!} H^{\mathrm{BM}}(X)_{\mathrm{Crit}(f),\mathrm{loc}} \to \mathbb{C}(\mathsf{t}) = \operatorname{Frac} H_{\mathsf{T}}(\mathrm{pt}). \tag{6.2}$$

这里，“loc”表示 $- \otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}]} \mathbb{C}(\mathsf{t})$。关于转置对应和伴随算子的讨论自然推广到等变情形。

为此，我们为上同调 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}{}_{\mathbf{d},\ \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$ 上的配对 (6.2) 引入如下符号规则。

定义 6.5. 考虑带有 $\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}$ 作用和不变势 W^{fr} 的箭图簇 $\mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{d})$。假设 $\mathrm{Crit}(\mathsf{W}^{\mathrm{fr}})^{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$ 是真簇，我们定义 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}{}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathbf{v}) = H^{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}), \mathsf{W}^{\mathrm{fr}})$ 上的双线性形式：

$$(\cdot,\cdot) \colon \mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathbf{v}) \otimes \mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathbf{v}) \to \operatorname{Frac} H_{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt}) \tag{6.3}$$

为

$$(-1)^{\operatorname{rk} \mathsf{P}} \times (6.2) \text{ for } X = \mathcal{M}(\mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}}),\ \mathsf{T} = \mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}},\ f = \mathsf{w}^{\mathrm{fr}}.$$

其中 P 是 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 上的虚向量丛 (3.26)。

对于同态 $M \colon \mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}{}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathbf{v}) \to \mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}{}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathbf{v}')$，我们将其相对于上述配对的 $\mathbb{Z}/2$-分次（超）伴随算子记为

$$M^{\tau} \colon \mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathbf{v}') \to \mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathbf{v}) \tag{6.4}$$

相对于上述配对

$$(Mx, y) = (-1)^{|M| \cdot |\mathbf{v}|}(x, M^{\tau} y), \text{ where } x \in \mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathbf{v}),\ y \in \mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathbf{v}').$$

注意，$M^{\tau\tau} = (-1)^{|M|} M$。

对于上同调的张量积，我们采用超向量空间符号规则：

$$(a \otimes b, c \otimes d)_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'} = (-1)^{|b| \cdot |c|} (a, c)_{\mathcal{H}} \cdot (b, d)_{\mathcal{H}'}\ .$$

命题 6.6（关于 $\mathcal{DS}\widetilde{\mathcal{H}}_{\mu}(Q,\mathsf{W})$ 的反自同构）。对于任意 $\mu \in \mathbb{Z}^{Q_0}$，定义 3.6 中生成元 $e_i(z)$ $f_i(z)$ $h_i(z)$ 的如下赋值：

$$e_i(z) \mapsto (-1)^{|i|} f_i(z), \quad f_i(z) \mapsto e_i(z), \quad h_i(z) \mapsto h_i(z) \tag{6.5}$$

诱导出一个反自同构

$$\vartheta \colon \mathcal{DS}\widetilde{\mathcal{H}}_{\mu}(Q, \mathsf{W}) \to \mathcal{DS}\widetilde{\mathcal{H}}_{\mu}(Q, \mathsf{W}), \tag{6.6}$$

也就是说，ϑ 是一个 $\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]$-模自同构，满足

$$\vartheta(XY) = (-1)^{|X| \cdot |Y|} \vartheta(Y) \vartheta(X), \text{ where } X, Y \in \mathcal{DS}\widetilde{\mathcal{H}}_{\mu}(Q, \mathsf{W}).$$

此外，对于任意紧状态空间 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}{}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$，其中 $\mathbf{d}_{\mathrm{out}} - \mathbf{d}_{\mathrm{in}} = \mu$，$\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}{}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$ 上的双线性形式 $(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathcal{DS}\widetilde{\mathcal{H}}_{\mu}(Q,\mathsf{W})$-不变的，也就是说，

$$(a \cdot x, y) = (-1)^{|a| \cdot |x|}(x, \vartheta(a) \cdot y), \text{ for } a \in \mathcal{DS}\widetilde{\mathcal{H}}_{\mu}(Q, \mathsf{W}),\ x, y \in \mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}\ .$$

证明。映射 $e_i(z) \mapsto (-1)^{|i|} f_i(z)$ 是 $\widetilde{\mathcal{SH}}^{\mathrm{nil}}_{Q,\mathsf{W}} \to \widetilde{\mathcal{SH}}^{\mathrm{nil}\ \ \mathrm{op}}_{,Q\ \ \ ,\mathsf{W}}$ 的反同构，而 $f_i(z) \mapsto e_i(z)$ 则是相反方向上的反同构。此外，(6.5) 满足定义 3.6 中的定义关系；因此 $\widetilde{\ }$ 它诱导出一个反自同构 (6.6)。最后，$\mathcal{DSH}_{\mu}(Q,\mathsf{W})$-不变性可由直接计算得出。□

6.3. **Reshetikhin 型移位 Yangian 的反自同构**。

引理 6.7. 设 $\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}$ 为一个辅助空间，且 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}\,\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$ 为一个态空间，其中 $\mathbf{d}_{\mathrm{in}}-\mathbf{d}_{\mathrm{out}}\in\mathbb{Z}^{Q_0}_{\geqslant 0}$。假设 $\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}$ 和 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}\,\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$ 均为紧的，那么对于任意 $m\in\mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c}})[u]$，相对于 (6.4)，我们有

$$\mathsf{E}(m)^{\tau}=\mathsf{E}(m^{\tau}).$$

证明。根据根 R-矩阵和 [COZZ1 引理 3.29], 的定义

$$R^{\sup}(u)_{F,F'}=(-1)^{\mathrm{sgn}(F)}R(u)_{F,F'}=(-1)^{\mathrm{sgn}(F)}(-1)^{\mathrm{rk}\,\mathsf{P}|^{-}_{F}}\left([\mathrm{Stab}_{u>0}]^{\mathrm{t}}\circ[\mathrm{Stab}_{u>0}]\right)_{F,F'}(-1)^{\mathrm{rk}\,\mathsf{P}|^{+}_{F'}},$$

其中 $(-1)^{\mathrm{sgn}(F)}=(-1)^{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{v}'|}$ 在分支 $\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}(\mathbf{v})\otimes\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}\,\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathbf{v}')$ 上，这源自张量积上的超向量空间符号规则。因此

$$\begin{aligned}R^{\sup}(u)^{\tau}_{F',F}&=(-1)^{\mathrm{sgn}(F')}(-1)^{\mathrm{rk}\,\mathsf{P}|^{\mathrm{fixed}}_{F'}}(-1)^{\mathrm{rk}\,\mathsf{P}|^{+}_{F'}}\left([\mathrm{Stab}_{u>0}]^{\mathrm{t}}\circ[\mathrm{Stab}_{u>0}]\right)_{F',F}(-1)^{\mathrm{rk}\,\mathsf{P}|^{-}_{F}}(-1)^{\mathrm{rk}\,\mathsf{P}|^{\mathrm{fixed}}_{F}}\\&=(-1)^{\mathrm{sgn}(F')}(-1)^{\mathrm{rk}\,\mathsf{P}|^{-}_{F'}}\left([\mathrm{Stab}_{u>0}]^{\mathrm{t}}\circ[\mathrm{Stab}_{u>0}]\right)_{F',F}(-1)^{\mathrm{rk}\,\mathsf{P}|^{+}_{F}}\\&=R^{\sup}(u)_{F',F}\,.\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{Str}\left(m\cdot R^{\sup}(u)\right)^{\tau}=\mathrm{Str}\left(m^{\tau}\cdot R^{\sup}(u)^{\tau}\right)=\mathrm{Str}\left(m^{\tau}\cdot R^{\sup}(u)\right),$$

引理得证。 □

定理 6.8（$\mathsf{Y}_{\mu}(Q,\mathsf{W})$ 的反自同构）。设 $\mu\in\mathbb{Z}^{Q_0}_{\leqslant 0}$。假设存在一组紧致且可容许的辅助数据 $\mathcal{C}$。若 $\mu\neq 0$，我们还假设存在一个紧状态空间，使得 $\mathbf{d}_{\mathrm{out}}-\mathbf{d}_{\mathrm{in}}=\mu$。那么映射

$$\mathsf{E}(m)\mapsto\mathsf{E}(m^{\tau}),\ \text{for}\ m\in\mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c}})[u],\ \mathfrak{c}\in\mathcal{C}$$

给出一个反自同构

$$\varsigma\colon\mathsf{Y}_{\mu}(Q,\mathsf{W})\cong\mathsf{Y}_{\mu}(Q,\mathsf{W}).$$

此外，任意紧状态空间 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}\,\mathbf{d},\,\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$ 上满足 $\mathbf{d}_{\mathrm{out}}-\mathbf{d}_{\mathrm{in}}=\mu$ 的双线性形式 $(\cdot,\ \cdot)$（6.3）均为 $\mathsf{Y}_{\mu}(Q,\ \mathsf{W})$-不变。

证明。由定理 4.44，$\mathsf{Y}_{\mu}(Q,\ \mathsf{W})\cong\mathsf{Y}_{\mu}(Q,\ \mathsf{W}\ \mathcal{C})$。由命题 4.39，自然映射

$$\mathsf{Y}_{\mu}(Q,\mathsf{W},\mathcal{C})\longrightarrow\prod_{i_1,\cdots,i_n}\mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)[a_0,a_{i_1},\ldots,a_{i_n}]}\left(\mathcal{H}_0[a_0]\otimes\mathcal{H}_{i_1}[a_{i_1}]\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{i_n}[a_{i_n}]\right)\tag{6.7}$$

是单射，其中 $\mathcal{H}_0$ 是一个移位为 $\mathbf{d}_{\mathrm{out}}-\mathbf{d}_{\mathrm{in}}=\mu$ 的紧状态空间，而 $\left\{\mathcal{H}_i:=\mathcal{H}^{\mathsf{W}_i}_{\delta_i}\right\}_{i\in Q_0}$ 是一组紧致可容许辅助空间（视为状态空间）。根据引理 6.7，映射（6.7）的像在取伴随算子运算下保持不变，因为 $\mathsf{E}(m)^{\tau}=\mathsf{E}(m^{\tau})$。由于取伴随算子是代数反自同构，映射 $\mathsf{E}(m)\mapsto\mathsf{E}(m^{\tau})$ 给出一个反自同构

$$\varsigma\colon\mathsf{Y}_{\mu}(Q,\mathsf{W})\cong\mathsf{Y}_{\mu}(Q,\mathsf{W}).$$

设 $(\cdot,\cdot)$ 是紧状态空间 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}\,\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$ 上的双线性形式，且满足 $\mathbf{d}_{\mathrm{out}}-\mathbf{d}_{\mathrm{in}}=\mu$，则

$$(\mathsf{E}(m)\cdot x,y)=(-1)^{|m|\cdot|x|}(x,\mathsf{E}(m)^{\tau}\cdot y)\overset{\text{Lemma 6.7}}{=\!=\!=}(-1)^{|m|\cdot|x|}(x,\mathsf{E}(m^{\tau})\cdot y),$$

换言之，$(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathsf{Y}_{\mu}(Q,\mathsf{W})$-不变的。 □

注 6.9。若对所有 $\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^{Q_0}_{\geqslant 0}$，$\left(\mathrm{Crit}^{\mathrm{Rep}(\mathbf{v},\mathbf{0})}(\mathsf{W})/\!/\mathrm{GL}(\mathbf{v})\right)^{\mathsf{T}_0}$ 都是有限的，则引理 6.2 表明，总存在一组紧致且可容许的辅助数据 $\mathcal{C}$，并且对任意 $\mu\in\mathbb{Z}^{Q_0}_{\leqslant 0}$，都存在一个满足 $\mathbf{d}_{\mathrm{out}}-\mathbf{d}_{\mathrm{in}}=\mu$ 的紧状态空间。特别地，此时定理 6.8 的假设均成立。

7. Vacuum cogeneration and irreducibility

本节讨论移位杨扬子代数 $\mathsf{Y}_{\mu}(Q,\ \mathsf{W})$ 模的两个关键性质：真空余生成（定理 7.3）和不可约性（命题 7.6）。我们继续使用 §4 中相同的记号。

7.1. **真空余生成**。

定义 7.1。对于定义在域 $\mathbb{K}$ 上的代数 A，我们称一个 A-模 M 由向量$v \in M^\vee$ 余生成，如果映射

$$A \cdot v \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, \mathbb{K}) \tag{7.1}$$

由先与 A 的作用复合给出，且为满射。特别地，如果 v 是 $M = \mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}\ \mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$ 中到真空向量（视同基域 $\mathbb{K}$）的投影，而 M 由 v 余生成，则称 M 为由真空余生成。

注 7.2. 要证明 (7.1) 的满射性，只需证明：对于任意 $m \in M$，存在 $a \in A$ 使得$v(a \cdot m) \neq 0$。

定理 7.3. 设 $\mathbf{d}$ 是一个 框架，使得 $\mu := \mathbf{d}_{\mathrm{out}} - \mathbf{d}_{\mathrm{in}} \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}^{Q_0}$。若满足以下两个条件：

(i) 元素 $\{\mathsf{ch}_k(\mathsf{D}_{\mathrm{in},\ i})\}_{i \in Q_0,\ k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}} \subseteq H_{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt})$[8] 可以由 $\{\mathsf{ch}_k(\mathsf{D}_{\mathrm{in},\ i} - \mathsf{D}_{\mathrm{out},\ i})\}_{i \in Q_0,\ k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}}$ 在底域 $\mathrm{Frac}\, H_{\mathsf{T}_0}(\mathrm{pt})$ 上生成；(ii) 以下特化映射之一（如 [COZZ1，例 7.19] 中所构造）：

$$\mathsf{sp}_{\mathcal{M}} \colon H^{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}}), \mathsf{w}^{\mathrm{fr}}) \to H^{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}})), \quad \mathsf{sp}_{\mathfrak{M}} \colon H^{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathfrak{M}(\underline{\mathbf{d}}), \mathsf{w}^{\mathrm{fr}}) \to H^{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathfrak{M}(\underline{\mathbf{d}}))$$

在对基环 $H_{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$ 上的 $\mathrm{Frac} H_{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt})$ 进行张量积后是单射，

那么 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}\ \mathbf{d},}$ $_{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$ $_{\mathrm{r}}$ 作为 $\mathsf{Y}^{\leqslant}_{\mu}(Q,\ \mathsf{W})$-模，在基域 $\mathrm{Frac}\, H_{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt}$ 上由真空余生成).

证明。固定一个规范维数 $\mathbf{v}$，并考虑以下辅助数据：$(\mathbf{v},\ \mathsf{T}_0 \curvearrowright \mathcal{M}(\mathbf{v}),\ \mathsf{w})$，其中 T_0 在节点 i 处具有带非平凡权的出射框架 t_i，且势由无框架势 w 给出。取 $G' = \mathrm{GL}(\mathbf{v})$，令其通过基本表示作用于（入射和出射）框架向量空间 $\mathbb{C}^{\mathbf{v}}$，并选取 G' 的极大环面为 $T' \cong \prod_{i \in Q_o} (\mathbb{C}^*)^{\mathbf{v}_i}$。考虑稳定包络，随后将其限制到 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\ \mathbf{v}) \times \mathcal{M}(\mathbf{0},\ \mathbf{d})$：

$$\mathrm{Stab} \colon H^{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}} \times G'}\left(\overline{\mathcal{M}(\mathbf{0}, \mathbf{v})} \times \mathcal{M}(\mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}}), \mathsf{w} \boxplus \mathsf{w}^{\mathrm{fr}}\right) \to H^{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}} \times G'}\left(\mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \times \overline{\mathcal{M}(\mathbf{0}, \underline{\mathbf{d}})}, \mathsf{w} \boxplus \mathsf{w}^{\mathrm{fr}}\right)$$

其中约化后的空间是点。在取稳定包络时，我们使用 $\mathbb{C}^*$ 框架环面的正室，该环面以权 -1 缩放辅助空间的框架，并固定态空间的框架。令

$$\mathrm{id} \otimes 1 \colon H^{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}\left(\mathcal{M}(\mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}}), \mathsf{w}^{\mathrm{fr}}\right) \to H^{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}} \times G'}\left(\mathcal{M}(\mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}}), \mathsf{w}^{\mathrm{fr}}\right)$$

为标量扩张映射，其中 $1 \in H_{G'}(\mathrm{pt})$是单位元。考虑算子

$$\begin{aligned} & e^{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}} \times G'}\left(N^-_{\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{v}) \times \mathcal{M}(\mathbf{0},\underline{\mathbf{d}})}\right)^{-1} \cdot \mathrm{Stab} \circ (\mathrm{id} \otimes 1) \colon H^{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}\left(\mathcal{M}(\mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}}), \mathsf{w}^{\mathrm{fr}}\right) \\ & \longrightarrow H^{\mathsf{T}_0 \times G'}\left(\mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \mathsf{w}\right) \otimes_{H_{\mathsf{T}_0 \times G'}(\mathrm{pt})} \mathrm{Frac}\, H_{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}} \times G'}(\mathrm{pt}), \end{aligned} \tag{7.2}$$

它是高斯分解（4.6）中算子 $F(u)^{-1}$ 的一个矩阵元，差一个符号。将（7.2）与任意 $H^{\mathsf{T}_0 \times G'}(\mathrm{pt})$-线性泛函复合

$$H^{\mathsf{T}_0 \times G'}\left(\mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \mathsf{w}\right) \to H^{\mathsf{T}_0 \times G'}\left(\mathrm{pt}\right),$$

并取谱参数 $u \in H_{G'}(\mathrm{pt})$沿某个方向的 $u \to \infty$ 系数（由于魏尔群对称性，所有方向都是等价的），所得结果给出一个映射

$$H^{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}\left(\mathcal{M}(\mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}}), \mathsf{w}^{\mathrm{fr}}\right) \to \mathrm{Frac}\, H^{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}\left(\mathrm{pt}\right),$$

它属于代数$\mathsf{Y}^{\overline{\ }}_{\mu}(Q,\ \mathsf{W})$。记

$$N^-_{\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{v}) \times \mathcal{M}(\mathbf{0},\underline{\mathbf{d}})} = \sum_{i \in Q_0} \mathrm{Hom}(\mathsf{D}_{\mathrm{in},i}, \mathsf{V}'_i),$$

其中V'_i 是 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\ \mathbf{v})$上的典范向量丛，那么根据条件（i），就谱参数$u \in H_{G'}(\mathrm{pt})$而言，$e^{\mathsf{T}_0 \times_{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}} \times G'}\left(N^-_{\mathcal{M}}(\mathbf{v},\ \mathbf{v}) \times \mathcal{M}(\mathbf{0},\ \mathbf{d})\right)$ 的系数由代数$\mathsf{Y}^0_{\mu}(Q,\ \mathsf{W})$中的元素给出。

我们得出结论，复合

$$f \circ \mathrm{Stab} \circ (\mathrm{id} \otimes 1) \colon H^{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}\left(\mathcal{M}(\mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}}), \mathsf{w}^{\mathrm{fr}}\right) \to H^{\mathsf{T}_0 \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}} \times G'}\left(\mathrm{pt}\right) \tag{7.3}$$

[8]因为框架丛 $\mathsf{D}_{\mathrm{in},\ i}$ 是平凡的，它是从一个点拉回的。因此，我们将它们的陈特征视为点上的类 t.

对于线性泛函 $f \in \mathrm{Hom}_{H^{\mathsf{T}_0\times G'}(\mathrm{pt})}\left(H^{\mathsf{T}_0\times G'}(\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{v}),\mathsf{w})\ H^{\mathsf{T}_0\times G'}(\mathrm{pt})\right)$，再取谱参数 $u \in H_{G'}(\mathrm{pt})$ 沿 $u\to\infty$ 某个方向的系数，可得到一个映射

$$\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathbf{v}) = H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}\left(\mathcal{M}(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}}),\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}\right)\to H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt})\cong\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathbf{0}),$$

它属于代数 $\mathrm{Y}^{\leqslant}_{\mu}(Q,\mathsf{W})$。要证明该定理，只需证明对于某个 f，式 (7.3) 的 u-系数协生成 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}{}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathbf{v})$。

考虑如下选择的 f。令 $j\colon \mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{v})\hookrightarrow\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{v})$ 为开轨迹 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{v})$ 的自然嵌入，该轨迹由入射框架为同构的带框箭图表示构成。注意，存在一个 G'-等变同构

$$\mathring{\mathcal{M}}(\mathbf{v},\mathbf{v})\cong R(\mathbf{v},\mathbf{0})\times\prod_{i\in Q_0}\mathfrak{gl}(\mathbf{v}_i),$$

其中 G' 作用于 $R(\mathbf{v},\mathbf{0})$ 作为规范群，并以伴随表示作用于 $\prod_{i\in Q_0}\mathfrak{gl}(\mathbf{v}_i)$。特别是

$$H^{\mathsf{T}_0\times G'}\left(\mathring{\mathcal{M}}(\mathbf{v},\mathbf{v})\right)\cong H_{\mathsf{T}_0\times G'}(\mathrm{pt}).$$

考虑特化映射 [COZZ1，例 7.19]:

$$\mathsf{sp}_{\mathbf{v}}\colon H^{\mathsf{T}_0\times G'}\left(\mathring{\mathcal{M}}(\mathbf{v},\mathbf{v}),\mathsf{w}\right)\to H^{\mathsf{T}_0\times G'}\left(\mathring{\mathcal{M}}(\mathbf{v},\mathbf{v})\right)\cong H_{\mathsf{T}_0\times G'}(\mathrm{pt}).$$

我们定义线性泛函

$$f:=\mathsf{sp}_{\mathbf{v}}\circ j^*\colon H^{\mathsf{T}_0\times G'}\left(\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{v}),\mathsf{w}\right)\to H_{\mathsf{T}_0\times G'}(\mathrm{pt}).$$

我们声称，式 (7.3) 的 u-系数为上述 f 生成了 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}{}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathbf{v})$。

通过比较，我们发现

$$f\circ\mathrm{Stab}\circ(\mathrm{id}\otimes 1)=\mathsf{sp}_{\mathbf{v}}\circ i^*\circ e^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}\times G'}\left(\sum_{i\in Q_0}t_i\cdot\mathfrak{gl}(\mathbf{v}_i)\right)\cdot\mathbf{\Psi}_H,$$

其中 $\mathbf{\Psi}_H\colon H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}\left(\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}),\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}\right)\to H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}\left(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}),\mathsf{w}^{\mathrm{fr}}\right)$ 是 COZZ1 的插值映射 [，定义 9.1]，；而 $i\colon \mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0})\hookrightarrow\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 是由扩展平凡框架诱导的闭嵌入。

由于特化与 Gysin 拉回、欧拉类的乘法以及稳定包络相交换，我们有

$$f\circ\mathrm{Stab}\circ(\mathrm{id}\otimes 1)=i^*\circ e^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}\times G'}\left(\sum_{i\in Q_0}t_i\cdot\mathfrak{gl}(\mathbf{v}_i)\right)\cdot\mathsf{sp}_{\mathfrak{M}}\circ\mathbf{\Psi}_H=i^*\circ e^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}\times G'}\left(\sum_{i\in Q_0}t_i\cdot\mathfrak{gl}(\mathbf{v}_i)\right)\cdot\mathbf{\Psi}_H\circ\mathsf{sp}_{\mathcal{M}}.$$

注意，上述等式右端的 i^* 实际上是一个同构:

$$i^*\colon H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}\left(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})\right)\cong H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}\left(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0})\right)\cong H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}\times G'}\left(\mathrm{pt}\right).$$

根据 [COZZ1，引理 9.2]，$\mathbf{\Psi}_H$ 是单射。因此，条件 (ii) 蕴含

$$\mathbf{\Psi}_H\circ\mathsf{sp}_{\mathcal{M}}=\mathsf{sp}_{\mathfrak{M}}\circ\mathbf{\Psi}_H$$

局部化后是单射。因此，只需证明对于任意非零的 $x\in H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}\times G'}(\mathrm{pt})$，展开式 $e^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}\times G'}\left(\sum_{i\in Q_0}t_i\cdot\mathfrak{gl}(\mathbf{v}_i)\right)\cdot x$ 在 $u\to\infty$ 中存在一个非零的 u-系数。这等价于证明

$$e^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}\times G'}\left(\sum_{i\in Q_0}t_i\cdot\mathfrak{gl}(\mathbf{v}_i)\right)\cdot x\neq 0,$$

这由以下事实得出：t_i 是非平凡的，且 $H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}\times G'}(\mathrm{pt})$ 是一个整环。证毕。 □

推论 7.4. 令 $\mathcal{N}(\mathbf{d})=\bigsqcup_{\mathbf{v}}\mathcal{N}(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 为与双重箭图 Q 相关联的中岛簇，设 S 为环面，其通过味对称性作用于 $\mathrm{Rep}_Q(\mathbf{v},\mathbf{d})$（即与 $G=\prod_{i\in Q_0}\mathrm{GL}(\mathbf{v}_i)$ 作用可交换），则 $\mathsf{T}_0=\mathbb{C}^*_{\hbar}\times\mathsf{S}$ 通过识别 $T^*\mathrm{Rep}_Q(\mathbf{v},\mathbf{d})=\mathrm{Rep}_Q(\mathbf{v},\mathbf{d})\oplus\hbar\mathrm{Rep}_Q(\mathbf{v},\mathbf{d})^\vee$ 作用于 $\mathcal{N}(\mathbf{d})$。假设 S 不动点轨迹满足 $\mathrm{Rep}_Q(\mathbf{v},\mathbf{d})^{\mathsf{S}}\subset\mathrm{Rep}_Q(\mathbf{0},\mathbf{d})$，其中后者通过零延拓视为前者的子空间。取一个作用于框架向量空间的环面 A^{fr}，则 $H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{N}(\mathbf{d}))$ 作为基域 $\mathrm{Frac}H_{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt})$ 上的 $\mathrm{Y}^{\leqslant}_0(\widetilde{Q},\widetilde{\mathsf{W}})$-模，由真空余生成。

~ ~证明。令 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\ \mathbf{d}) = \mathcal{M}(Q,\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$ 为与三重箭图 Q 相关联的对称箭图簇，并令 T_0 通过权 $\hbar^{-1}$ 缩放添加的环，从而作用于 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\ \mathbf{d})$。以 ~W 表示标准三次势。由维数约化，我们得到 $\mathsf{Y}_0^{\leqslant}$ ($\widetilde{Q}$, ~W)-模的一个同构：

$$H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{N}(\mathbf{d}))\cong H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{M}(\mathbf{d}),\widetilde{\mathsf{w}}).$$

因此，只需对后者证明真空余生成。我们断言

(i) 元素 $\{\mathsf{ch}_k(\mathsf{D}_{\mathrm{in},i})\}_{i\in Q_0,k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}}\subseteq H_{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt})$ 可由 $\{\mathsf{ch}_k(\mathsf{D}_{\mathrm{in},i}-\mathsf{D}_{\mathrm{out},i})\}_{i\in Q_0,k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}}$在基域 $\mathrm{Frac}\,H_{\mathsf{T}_0}(\mathrm{pt})$ 上生成，(ii) 特化映射 $\mathrm{sp}_{\mathfrak{M}}$: $H^{\mathsf{T}_0\times_{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}}(\mathfrak{M}(\mathbf{d}),\mathsf{w}^{\mathrm{fr}})\to H^{\mathsf{T}_0\times_{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}}(\mathfrak{M}(\mathbf{d}))$ 是单射的。

断言 (i) 由如下事实得出：$\mathsf{ch}(\mathsf{D}_{\mathrm{out},i}) = e^{\hbar}\mathsf{ch}(\mathsf{D}_{\mathrm{in},i})$。由 [COZZ1，注记 7.16], ，我们有交换图

$$\begin{array}{ccc} H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(Z(\widetilde{\mathsf{w}})) & & \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{can}} & \searrow & \\ H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}),\widetilde{\mathsf{w}}) & \xrightarrow{\mathsf{sp}} & H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})), \end{array}$$

其中 $Z(\tilde{}\mathsf{w})$ 是 ~w 在 $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 中的零点集。注意，矩映射 μ: $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})\to[\mathfrak{g}/G]$ 的零点集是 $Z(\tilde{}\mathsf{w})$ 的一个闭子层，并且复合

$$\delta := \mathrm{can}\circ(Z(\mu)\hookrightarrow Z(\widetilde{\mathsf{w}}))_*\colon H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(Z(\mu))\to H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}),\widetilde{\mathsf{w}})$$

is 通过维数约化得到的一个同构。因此，对于 j: $Z(\mu)\hookrightarrow\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})$，我们有 e

$$\mathsf{sp} = j_*\circ\delta^{-1}.$$

我们断言推前映射 j_* 是单射。考虑另一个环面 $\mathbb{C}_a^*$，它以权 1 缩放框架向量空间，并固定其他箭图数据。这个 $\mathbb{C}_a^*$ 作用于 $\mathrm{Rep}\widetilde{Q}(\mathbf{v},\mathbf{d})$，等价于先将 $\mathbb{C}_a^*$ 对角地映入规范群 $\prod_{i\in Q_0}\mathrm{GL}(\mathbf{v}_i)$ 的中心 $\prod_{i\in Q_0}\mathbb{C}^*$，然后取其逆。由此可知， $H^{\mathsf{T}_0\times_{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}\times\mathbb{C}_a^*}(Z(\mu))$ 和 $H^{\mathsf{T}_0\times_{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}\times\mathbb{C}_a^*}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}))$ 是自由的 $H_{\mathbb{C}_a^*}(\mathrm{pt})$-模，并且我们有

$$H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(Z(\mu))\otimes H_{\mathbb{C}_a^*}(\mathrm{pt})\cong H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}\times\mathbb{C}_a^*}(Z(\mu)),\ H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}))\otimes H_{\mathbb{C}_a^*}(\mathrm{pt})\cong H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}\times\mathbb{C}_a^*}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})).$$

那么，我们对 $\mathsf{S}\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}\times\mathbb{C}_a^*$ 作用的选择满足 [Dav3, Thm. 10.2], 中的一般性条件，这意味着

$$j_*\colon H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}\times\mathbb{C}_a^*}(Z(\mu))\to H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}\times\mathbb{C}_a^*}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}))$$

是单射。由于 $\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}\times\mathbb{C}_a^*$ 等变推前是通过标量扩张从 $\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}$ 得到的，j_*: $H^{\mathsf{T}_0\times_{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}}(Z(\mu))\to H^{\mathsf{T}_0\times_{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}))$ 也必定是单射。这就证明了断言 (ii)。于是，由上述两个断言和定理 7.3 可得推论。□

推论 7.5. 在与推论 7.4 相同的假设下，设 $\phi=\mathsf{tr}(\mathsf{m})$ 是 $\mathcal{N}(\mathbf{d})$ 上的一个 $(\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}})$-不变势，则以下陈述等价：

(1) 特化映射 sp: $H^{\mathsf{T}_0\times_{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}}(\mathcal{N}(\mathbf{d}),\phi)\to H^{\mathsf{T}_0\times_{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}}(\mathcal{N}(\mathbf{d}))$ 在 [COZZ1, 例 7.19] 中经过十次后是单射 -
在基环 $H_{\mathsf{T}_0}(\mathrm{pt})$ 上与 $\mathrm{Frac}H_{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt})$ 张量后，(2) $H^{\mathsf{T}_0\times_{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}}(\mathcal{N}(\mathbf{d}),\phi)$ 作为基域 $\mathrm{Frac}\,H_{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt})$ 上的 $\mathsf{Y}_0(\widetilde{Q}$, ~W)-模由真空余生成。(3) $H^{\mathsf{T}_0\times_{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}}(\mathcal{N}(\mathbf{d}),\phi)$ 作为基域 $\mathrm{Frac}\,H_{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt})$ 上的 $\mathsf{Y}_0^{\leqslant}(\widetilde{Q}$, ~W)-模由真空余生成。

证明。(3) $\Longrightarrow$ (2)是显然成立的。

(2) $\Longrightarrow$ (1)。假设局部化后 $\ker(\mathsf{sp})$ 非平凡，那么

$$\ker(\mathsf{sp})_{\mathrm{loc}}\subseteq H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{N}(\mathbf{d}),\phi)_{\mathrm{loc}}$$

是一个 $\mathsf{Y}_0(\widetilde{Q},\widetilde{\mathsf{W}})$-子模 ，因为 sp 与稳定包络和 R-矩阵可交换。由构造可知，我们有 ve

$$\mathsf{sp}\colon H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{N}(\mathbf{0},\mathbf{d}),\phi)\xrightarrow{\cong}H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{N}(\mathbf{0},\mathbf{d})).$$

记 $\mathbb{K}=\mathrm{Frac}\,H_{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt})$，$|0\rangle\in H^{\mathsf{T}_0\times_{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}}(\mathcal{N}(\mathbf{0},\mathbf{d}),\phi)=H^{\mathsf{T}_0\times_{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}}(\mathrm{pt})$ 为一个生成元。那么映射

$$\mathsf{Y}_0(\widetilde{Q},\widetilde{\mathsf{W}})\cdot\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}\cdot|0\rangle,\mathbb{K})\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{N}(\mathbf{d}),\phi)_{\mathrm{loc}},\mathbb{K})$$

通过该 PROP 分解 er 子空间 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{im}(\mathsf{sp})_{\mathrm{loc}},\ \mathbb{K})$，这与 (2) 矛盾。因此 $\ker(\mathsf{sp})_{\mathrm{loc}}$ 是平凡的。

(1) $\Longrightarrow$(3)。sp： $H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{N}(\mathbf{d})\ \phi)\ \to H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{N}(\mathbf{d}))$ 与稳定包络交换，因此是一个 $\mathsf{Y}_0^{\leqslant}(\widetilde{Q},\ \widetilde{\ }\mathsf{W})$-模映射。根据推论 7.4， $H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{N}(\mathbf{d}))$ 作为基域 $\mathrm{Frac}\,H_{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt})$ 上的 $\mathsf{Y}_0^{\leqslant}(\widetilde{Q},\ \widetilde{\ }\mathsf{W})$-模由真空余生成，因此其子模 $H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{N}(\mathbf{d})\ \phi)$ 也是如此。□

7.2. **不可约性**。

命题 7.6。 设 $\mu\in\mathbb{Z}_{\leqslant 0}^{Q_0}$、$\mathbf{d}=(\mathbf{d}_{\mathrm{in}},\mathbf{d}_{\mathrm{out}})$ 满足 $\mathbf{d}_{\mathrm{out}}-\mathbf{d}_{\mathrm{in}}=\mu$。假设存在一组紧致且可容许的辅助数据 $\mathcal{C}$。如果态空间 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}{}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$ 在基域 分式域$H_{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt})$ 上是紧的并且由真空余生成，那么 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}{}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$ 是基域 分式域 $H_{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt})$ 上的不可约 $\mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W})$-模。

证明。由于 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}$ 是紧的，它具有一个非退化双线性形式 $(\cdot,\cdot)$（6.3），根据定理 6.8，该形式是 $\mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W})$-不变的。由对偶性，由真空余生成意味着 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}$ 也由真空向量 $|\mathbf{0}\rangle$ 在基域 分式域$H_{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt})$ 上生成。由真空余生成可知，对于任意 $x\in\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}$，存在$a\in\mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W})\otimes_{H_{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}}(\mathrm{pt})$ 分式域$H_{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt})$，使得 $a\cdot x=|\mathbf{0}\rangle$，因此 x 生成 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}$。所以 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}$ 是基域 分式域 $H_{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt})$ 上的不可约 $\mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W})$-模。□

8. Example: trivial quiver and modules of shifted Yangians of $\mathfrak{gl}_{1|1}$

In 本节考虑最简单的例子：带零势的平凡箭图：

$$Q\colon\quad \bigcirc,\quad \mathsf{W}=0\,.$$

令 $\mathsf{T}_0=\mathbb{C}_\hbar^*$ 为在 Q 上平凡作用的环面（T_0 对框架向量空间的作用将在后文规定）。在考虑相关箭图簇时，固定一个循环稳定性 $\theta<0$。

本节的主要定理是对移位杨扬子代数 $\mathsf{Y}_\mu(Q,\ 0)$ 的 显式描述，其中 Q 为 (4.5) .

定理 8.1。 令 Q 为平凡箭图。对于任意 $\mu\in\mathbb{Z}_{\leqslant 0}$，存在一个自然的代数同构

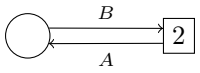
$$\varrho_\mu\colon Y_\mu(\mathfrak{gl}_{1|1})\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathbb{C}(\hbar)\cong\mathsf{Y}_\mu(Q,0)\,,$$

其中 $Y_\mu(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 是 μ-移位杨 Yangian（定义 8.2）。

在本节中，我们还在 §8.1 和 §8.2 中对上同调稳定包络和根 R-矩阵进行了显式 计算。这些计算取代了 [IMZ, §7.2], 中的结果，但其中的方法与我们不同。我们推导出了带框架箭图簇上除子的量子乘法的显式公式（命题 8.11）。特别地，这还重新得到了关于 $\mathrm{Gr}(n,\ r)$ 的著名结果。

与 $\mathfrak{gl}_{m|n}$ 相关的带势箭图也见例3.10 和附录 §A.2。在附录 §B 中，我们计算了与 $\mathfrak{gl}_{2|1}$相关的带势箭图的一些 R-矩阵。

8.1. **基本的 R-矩阵**。 考虑带框箭图



以及相应的对称箭图簇 $\mathcal{M}(\mathbf{2})$。取一个环面 $\mathsf{T}=\mathbb{C}_{t_1}^*\times\mathbb{C}_{t_2}^*\times\mathbb{C}_u^*$，使得 $(s_1,\ s_2,\ a)\in\mathbb{C}_{t_1}^*\times\mathbb{C}_{t_2}^*\times\mathbb{C}_u^*$ 按如下方式作用于箭图数据

$$(A_1,A_2,B_1,B_2)\mapsto(a^{-1}A_1,A_2,s_1aB_1,s_2B_2).$$

设 $\mathsf{A}=\mathbb{C}_u^*$，则 $\mathcal{M}(\mathbf{2})^{\mathsf{A}}=\mathcal{M}(\mathbf{1})\times\mathcal{M}(\mathbf{1})$。注意，

$$\mathcal{M}(\mathbf{1})=\mathcal{M}(0,\mathbf{1})\sqcup\mathcal{M}(1,\mathbf{1}),\quad \mathcal{M}(0,\mathbf{1})=\mathrm{pt},\quad \mathcal{M}(1,\mathbf{1})\cong\mathbb{C}.$$

我们取集合 $\mathcal{M}(n,\ \mathbf{1})$ 的基本类（$n=0,\ \mathbf{1}$）构成 $H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\mathbf{1}))$ 的一组基，并将它们记作

$$b_0=[\mathcal{M}(0,\mathbf{1})],\quad b_1=[\mathcal{M}(1,\mathbf{1})].$$

8.1.1. 稳定包络的计算。考虑 $\mathcal{M}(1,\ 2)$ 在“+”和“−”两个室中的稳定包络。设规范群 $\mathbb{C}^*$ 的等变变量为 x，即 $H_{\mathbb{C}^*}(\mathrm{pt}) = \mathbb{C}[x]$。根据 [COZZ1，推论 4.25], ，我们得到

$$\mathrm{Stab}_+(b_0\otimes b_1) = x-u,\quad \mathrm{Stab}_+(b_1\otimes b_0) = t_2-x,\quad \mathrm{Stab}_-(b_0\otimes b_1) = u+t_1-x,\quad \mathrm{Stab}_-(b_1\otimes b_0) = x.$$

稳定包络在基 $\{b_0\otimes b_1, b_1\otimes b_0\}$ 中的矩阵形式为

$$\mathrm{Stab}_+ = \begin{pmatrix} -u & t_2 \\ 0 & t_2-u \end{pmatrix},\qquad \mathrm{Stab}_- = \begin{pmatrix} u+t_1 & 0 \\ t_1 & u \end{pmatrix}.$$

8.1.2. R矩阵与杨-巴克斯特方程。 $\mathcal{M}(1,\ 2)$ 的 R矩阵为

$$R(u)\big|_{\mathcal{M}(1,\mathbf{2})} = \mathrm{Stab}_-^{-1}\mathrm{Stab}_+ = \frac{1}{u+t_1}\begin{pmatrix} -u & t_2 \\ t_1 & t_2-t_1-u \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{M}(0,\ 2)$ 和 $\mathcal{M}(2,\ 2)$ 的 R矩阵为

$$R(u)\big|_{\mathcal{M}(0,\mathbf{2})} = 1,\quad R(u)\big|_{\mathcal{M}(2,\mathbf{2})} = \frac{t_2-u}{u+t_1}.$$

取正规化子（ 将 3.27) 和定理 3.21 中的符号扭曲 Σ 纳入考虑后， $R^{\mathrm{sup}}(u)$ 矩阵由 b y

$$R^{\mathrm{sup}}(u,t_1,t_2) = \frac{1}{u+t_1}\begin{pmatrix} u+t_1 & & & \\ & u & t_2 & \\ & t_1 & u+t_1-t_2 & \\ & & & u-t_2 \end{pmatrix}. \tag{8.1}$$

杨-巴克斯特方程

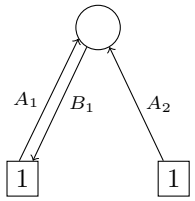
$$R^{\mathrm{sup}}_{12}(u,t_1,t_2)R^{\mathrm{sup}}_{13}(u+v,t_1,t_3)R^{\mathrm{sup}}_{23}(v,t_2,t_3) = R^{\mathrm{sup}}_{23}(v,t_2,t_3)R^{\mathrm{sup}}_{13}(u+v,t_1,t_3)R^{\mathrm{sup}}_{12}(u,t_1,t_2)$$

在 $\mathrm{End}(\mathbb{C}^{1|1}\otimes\mathbb{C}^{1|1}\otimes\mathbb{C}^{1|1})(u,\ v,\ t_1,\ t_2,\ t_3)$ 中成立，其中 $\mathbb{C}^{1|1} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{b_0, b_1\}$，且 b_0 为偶， b_1 为奇。

当 $t_1 = t_2 = \hbar$ 时，(8.1) 可写成紧凑形式：

$$R^{\mathrm{sup}}(u,\hbar) = \frac{u+\hbar P}{u+\hbar},\ \text{where}\ P(b_i\otimes b_j) = (-1)^{ij}b_j\otimes b_i\ \text{is the super permutation operator.} \tag{8.2}$$

8.2. **与克利福德模相关的拉克斯矩阵**。 考虑框架维数 $(\mathbf{d}_{\mathrm{in}},\ \mathbf{d}_{\mathrm{out}}) = (2,\ 1)$，如下图所示



以及相应的箭图簇 $\mathcal{M}((2,\ 1))$。取一个环面 $\mathsf{T} = \mathbb{C}^*_\hbar\times\mathbb{C}^*_u$，使得 $(s,\ a)\in\mathbb{C}^*_\hbar\times\mathbb{C}^*_u$ 按如下方式作用于箭图数据

$$(A_1, A_2, B)\mapsto(a^{-1}A_1, A_2, saB_1).$$

设 $\mathsf{A} = \mathbb{C}^*_u$，则 $\mathcal{M}((2,\ 1))^{\mathsf{A}} = \mathcal{M}(1)\times\mathcal{M}((1,\ 0))$。与上一小节一样，我们用 b_n（分别用 c_n）表示 $\mathcal{M}(n,\ 1)$（分别为 $\mathcal{M}(n,\ (1,\ 0))$）的基本类。对于 $n=0,\ 1,\ H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}((2,\ 1))^{\mathsf{A}})$ 是一个自由的 $H_{\mathsf{T}}(\mathrm{pt})$-模，其基为 $\{b_i\otimes c_j:\ 0\leqslant i,\ j\leqslant 1\}$。

令规范群 $\mathbb{C}^*$ 的等变变量为 x。利用 [COZZ1, Cor. 4.25], ，我们得到

$$\mathrm{Stab}_+(b_0\otimes c_1) = x-u,\ \mathrm{Stab}_+(b_1\otimes c_0) = 1,\ \mathrm{Stab}_-(b_0\otimes c_1) = u+\hbar-x,\ \mathrm{Stab}_-(b_1\otimes c_0) = x,$$

矩阵形式如下：

$$\mathrm{Stab}_+ = \begin{pmatrix} -u & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad \mathrm{Stab}_- = \begin{pmatrix} u+\hbar & 0 \\ \hbar & u \end{pmatrix}.$$

设 $L(u) := R^{\mathrm{sup}}(u)$ 对于 $\mathcal{M}((2,\ 1))$，则

$$L(u,\hbar) = \frac{1}{u+\hbar}\begin{pmatrix} u+\hbar & & & \\ & u & 1 & \\ & -\hbar & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

设 Cl 为具有两个奇生成元 ψ 和 ψ^* 的 $\mathbb{C}$-代数，满足关系 $\psi\psi^*+\psi^*\psi=1$。那么，通过规定下式，可以在 $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{c_0,c_1\}$ 上赋予 Cl- 模结构

$$\psi^* c_0 = c_1, \quad \psi c_1 = c_0.$$

令 $\mathcal{F}$ 表示此模。于是， $L(u,\ \hbar)$ 可表示为 $\mathrm{End}(\mathbb{C}^{1|1}) \otimes \mathrm{Cl}$ 中的一个元素：

$$L(u,\hbar) = \frac{1}{u+\hbar}\begin{pmatrix} u+\hbar\psi\psi^* & \psi^* \\ -\hbar\psi & 1 \end{pmatrix},$$

并且它满足 RLL 方程：

$$R_{12}^{\mathrm{sup}}(u-v,\hbar)L_1(u,\hbar)L_2(v,\hbar) = L_2(v,\hbar)L_1(u,\hbar)R_{12}^{\mathrm{sup}}(u-v,\hbar)$$

作用于 $\mathbb{C}^{1|1}\otimes\mathbb{C}^{1|1}\otimes\mathcal{F}$ 时。

8.3. $\mathfrak{gl}_{1|1}$ **的移位杨扬子代数**。令

$$R(z) = z\,\mathrm{id} + \hbar P \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{1|1})^{\otimes 2}[z,\hbar]. \tag{8.3}$$

这里 $P(a\otimes b) = (-1)^{|a|\cdot|b|} b\otimes a$ 是超置换算子。

定义 8.2. 固定 $\mu\in\mathbb{Z}_{\leqslant 0}$。 μ-移位杨扬子代数 $Y_\mu(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 是由以下元素生成的 $\mathbb{C}[\hbar]$ 代数：

$$\{e_r, f_r, g_{1,r}, g_{2,s}\}_{r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}, s\in\mathbb{Z}_{\geqslant -\mu}},$$

满足以下关系：

$$R(u-v)\,T_1(u)\,T_2(v) = T_2(v)\,T_1(u)\,R(u-v), \tag{8.4}$$

其中 $T(z) \in Y_\mu(\mathfrak{gl}_{1|1})[\![z,z^{-1}]\!] \otimes \mathrm{End}(\mathbb{C}^{1|1})$ 定义如下：

$$T(z) = F(z)\,G(z)\,E(z), \ \text{ where } \ E(z) = \mathrm{id}_{1|1} + e(z)\otimes E_{12}, \ \ F(z) = \mathrm{id}_{1|1} + f(z)\otimes E_{21}, \ \ G(z) = \sum_{i=1}^{2} g_i(z)\otimes E_{ii},$$

and

$$e(z) = \sum_{r\geqslant 0} e_r z^{-r-1}, \quad f(z) = \sum_{r\geqslant 0} f_r z^{-r-1}, \quad g_1(z) = 1 + \sum_{r\geqslant 0} g_{1,r} z^{-r-1}, \quad g_2(z) = z^\mu + \sum_{s\geqslant -\mu} g_{2,s} z^{-s-1}. \tag{8.5}$$

这里，(8.4) 是 $Y_\mu(\mathfrak{gl}_{1|1})[\![u,v,u^{-1},v^{-1}]\!] \otimes \mathrm{End}(\mathbb{C}^{1|1})^{\otimes 2}$ 中的一个方程。

注记 8.3. 特殊情形 $\mu=0$ 给出了 [G] 中未移位杨扬子代数 $Y(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 的定义。下文中，我们也将 $Y(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 记作 $=Y_0(\mathfrak{gl}_{1|1})$。

设 $\mathfrak{c}$ 是辅助数据，其框架维数为一，势为平凡的，并且 $\mathsf{T}_0=\mathbb{C}^*_\hbar$ 固定入射框架，并以权一缩放出射框架。辅助数据集 $\mathcal{C}=\{\mathfrak{c}\}$ 是可容许的（定义 4.1）；因此

$$\mathsf{Y}_\mu(Q,0) = \mathsf{Y}_\mu(Q,0,\mathcal{C}).$$

根据 (8.2)，与 $\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}\otimes\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}$ 编织的 R-矩阵，除一个标量常数外，就是 (8.3) 中的 R-矩阵。因此，对于任意态空间 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}{}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$，其中 $\mathbf{d}_{\mathrm{out}}-\mathbf{d}_{\mathrm{in}}=\mu$，与 $\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}\otimes\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}{}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$ 编织的 R-矩阵，记作 $L(u)$，满足方程

$$R(u-v)\,L_1(u)\,L_2(v) = L_2(v)\,L_1(u)\,R(u-v).$$

由于 $L(u)$ 具有形式为 (3.28) 的高斯分解，因此它诱导出一个 $\mathbb{C}(\hbar)$-代数同态：

$$Y_\mu(\mathfrak{gl}_{1|1})\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathbb{C}(\hbar) \to \prod_{\mathbf{d},\mathsf{W}^{\mathrm{fr}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}} \mathrm{End}^{\mathbb{Z}/2}_{\mathbb{C}(\hbar)[\mathfrak{a}^{\mathrm{fr}}]}(\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}),$$

由 $L(u)$ 的系数给出。根据 $\mathsf{Y}_\mu(Q,0,\mathcal{C})$ 的定义，上述映射诱导出一个满射 $\mathbb{C}(\hbar)$-代数同态

$$\varrho_\mu\colon Y_\mu(\mathfrak{gl}_{1|1})\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathbb{C}(\hbar) \twoheadrightarrow \mathsf{Y}_\mu(Q,0,\mathcal{C}) = \mathsf{Y}_\mu(Q,0). \tag{8.6}$$

引理 8.4。 映射 $\varrho_0\colon Y(\mathfrak{gl}_{1|1})\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathbb{C}(\hbar) \to \mathsf{Y}_0(Q,\ 0)$ 是一个同构。

证明。只需证明 ϱ_0 是单射。将 $\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}$ 视为一个态空间，其 $Y(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 模结构由下式给出

$$T(z) \mapsto \frac{z+\hbar P}{z+\hbar}.$$

作为 $\mathfrak{gl}_{1|1}$ 模， $\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}$ 是基本表示，因此 $\mathfrak{gl}_{1|1} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}\llbracket\hbar\rrbracket}^{\mathbb{Z}/2}(\mathcal{H}_{\mathfrak{c}})$ 是单射的。特别地， ϱ_0 单射地映射$\mathfrak{gl}_{1|1}$ 入 $\mathsf{Y}_0(Q,0)$。我们注意到， $\varrho_0(\mathfrak{gl}_{1|1}) \subseteq \mathfrak{g}_{Q,0}$。

如同 [G, (1.6)]， $Y(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 通过规定 $\deg X_r = r$ for $X = e, f, g_1, g_2$ 而成为一个滤过代数。映射 ϱ_0 保持滤过：$\varrho_0(F_k Y(\mathfrak{gl}_{1|1}) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar)) \subseteq F_k \mathsf{Y}_0(Q,0)$，因此它在伴随分次代数之间诱导出一个映射： $\bar{\varrho}_0 \colon \operatorname{gr} Y(\mathfrak{gl}_{1|1}) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar) \to \operatorname{gr} \mathsf{Y}_0(Q,0)$。根据 $Y(\mathfrak{gl}_{1|1})$ [G 的 PBW 定理，Cor. 2.1], 存在一个自然同构

$$\operatorname{gr} Y(\mathfrak{gl}_{1|1}) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{1|1}[u]).$$

由定理 4.26，我们有一个自然同构

$$\operatorname{gr} \mathsf{Y}_0(Q,0) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{Q,0}[u]).$$

此外，诱导映射 $\bar{\varrho}_0 \colon \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{1|1}[u]) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{Q,\,0}[u])$ 是通过将多项式变量 u 接到自然映射 $\mathfrak{gl}_{1|1} \to \mathfrak{g}_{Q,\,0}$ 上，再取包络代数得到的。正如我们已经证明的，$\mathfrak{gl}_{1|1} \to \mathfrak{g}_{Q,\,0}$ 是单射，因此 $\bar{\varrho}_0 \colon \operatorname{gr} Y(\mathfrak{gl}_{1|1}) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar) \to \operatorname{gr} \mathsf{Y}_0(Q,\,0)$ 也是单射。因此 ϱ_0 是单射。□

注 8.5. 由定理 3.21， $Y_\mu(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 生成元的生成级数被映射为作用在 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}}{}_{\mathbf{d},\,\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$ 上的算子，如下所示：

$$g_1(z) \mapsto c_{-1/z}((1-\hbar^{-1})\mathsf{V}), \quad g_2(z)/g_1(z) \mapsto z^\mu c_{-1/z}(\mathsf{D}_{\mathrm{out}} - \mathsf{D}_{\mathrm{in}}),$$
$$e(z) \mapsto \frac{[\overline{\mathfrak{P}}(n+1,n,\underline{\mathbf{d}})]}{z - c_1(\mathcal{L})}, \quad f(z) \mapsto \frac{(-1)^{\mathbf{d}_{\mathrm{out}}+n}\,\hbar}{z - c_1(\mathcal{L})}[\overline{\mathfrak{P}}(n,n-1,\underline{\mathbf{d}})]^{\mathrm{t}}.$$

在 $\mu = 0$ 的情形下，我们有

$$-g_{1,0} \otimes g_{2,0} - g_{2,0} \otimes g_{1,0} + 2g_{1,0} \otimes g_{1,0} + e_0 \otimes f_0 - f_0 \otimes e_0 \mapsto \hbar \boldsymbol{r}, \tag{8.7}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是经典的 R-矩阵 (4.12)。

8.4. **定理 8.1 的证明。**

定义 8.6. 令 $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1$ 为具有偶部 $\mathfrak{Y}^0 = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}(\hbar)}\{\mathfrak{a}_r, \mathfrak{h}_r\}_{r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 和奇部 $\mathfrak{Y}^1 = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}(\hbar)}\{\mathfrak{e}_r, \mathfrak{f}_r\}_{r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$的 $\mathbb{C}(\hbar)$ 李超代数，且 $\mathfrak{Y}$ 上的李括号定义为

$$\begin{gathered}
\mathfrak{h}_r \text{ is central for all } r, \\
[\mathfrak{e}_n, \mathfrak{e}_m] = [\mathfrak{f}_n, \mathfrak{f}_m] = [\mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}_m] = 0, \\
[\mathfrak{e}_n, \mathfrak{f}_m] = -\hbar\, \mathfrak{h}_{n+m}, \\
[\mathfrak{a}_n, \mathfrak{e}_m] = \mathfrak{e}_{n+m}, \quad [\mathfrak{a}_n, \mathfrak{f}_m] = -\mathfrak{f}_{n+m}.
\end{gathered} \tag{8.8}$$

令 $\mathcal{U}(\mathfrak{Y})$ 为 $\mathfrak{Y}$的包络代数（在 $\mathbb{C}(\hbar)$ 上）。定义 $\mathcal{U}_0(\mathfrak{Y}) = \mathcal{U}(\mathfrak{Y})$，并且对于 $\mu < 0$，定义 $\mathcal{U}_\mu(\mathfrak{Y})$ 为 $\mathcal{U}(\mathfrak{Y})$ 对于所有 $i < -\mu - 1$ 和 $\mathfrak{h}_{-\mu-1} - 1$被 $\mathfrak{h}_i$ 生成的双边理想的商。

注记 8.7. $\mathfrak{Y}$与 $\mathfrak{gl}_{1|1}[u]$同构，我们给出上述显式生成元和李括号，并使用记号$\mathfrak{Y}$ 而非 $\mathfrak{gl}_{1|1}[u]$ ，因为我们将提供一个显式的代数同构 $\mathcal{U}(\mathfrak{Y}) \cong Y(\mathfrak{gl}_{1|1}) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar)$，并且希望保留记号 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{1|1}[u])$，它与 $\operatorname{gr} Y(\mathfrak{gl}_{1|1}) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar)$同构。

We denote $X(z) = \sum_{n\geqslant 0} X_n z^{-n-1}$ for $X = \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{a}, \mathfrak{h}$.

引理 8.8。 对于任意 $\mu \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$，映射

$$\mathfrak{e}(z) \mapsto e(z), \quad \mathfrak{f}(z) \mapsto f(z), \quad \exp\left(\sum_{n\geqslant 0} \mathfrak{a}_n \psi_n(z)\right) \mapsto g_1(z), \quad \mathfrak{h}(z) \mapsto g_1(z)^{-1} g_2(z), \tag{8.9}$$

唯一确定一个满射 $\mathbb{C}(\hbar)$ 代数同态 $\varphi_\mu \colon \mathcal{U}_\mu(\mathfrak{Y}) \twoheadrightarrow Y_\mu(\mathfrak{gl}_{1|1}) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar)$。这里 $\{\psi_n(z)\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant}}$是一列由该方程唯一确定的幂级数

$$\exp\left(\sum_{n\geqslant 0} a^n \psi_n(z)\right) = \frac{z-a}{z+\hbar-a}$$

对于形式变量 a。

证明。我们首先证明，(8.9) 生成了一个从 $\mathcal{U}(\mathfrak{Y})$ 到 $Y_\mu(\mathfrak{gl}_{1|1})\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathbb{C}(\hbar)$ 的满射 $\mathbb{C}(\hbar)$ 代数同态。由 RTT 关系 (8.4) 可推得

$$\begin{aligned}
[g_i(u),g_j(v)] &= 0 \text{ for all } 1\leqslant i,j\leqslant 2\,,\\
[e(u),e(v)] &= 0 = [f(u),f(v)]\,,\\
(u-v)[e(u),f(v)] &= \hbar\,(g_1(u)^{-1}g_2(u)-g_1(v)^{-1}g_2(v))\,,\\
(u-v)[g_i(u),e(v)] &= \hbar\,g_i(u)(e(u)-e(v))\,,\quad \text{for } 1\leqslant i\leqslant 2\,,\\
(u-v)[g_i(u),f(v)] &= \hbar\,(f(v)-f(u))g_i(u)\,,\quad \text{for } 1\leqslant i\leqslant 2\,.
\end{aligned}\tag{8.10}$$

T注意到，除了 (8.8) 中最后一行之外，所有关系显然都被映射 (8.9).

注意，$\mathsf{ad}_{\mathfrak{a}_n}(\mathfrak{e}_m)=\mathsf{ad}^n_{\mathfrak{a}_1}(\mathfrak{e}_m)$。令 $\mathfrak{A}(z)=\exp\left(\sum_{n\geqslant 0}\mathfrak{a}_n\psi_n(z)\right)$，则有

$$\mathfrak{A}(z)\mathfrak{e}(w)\mathfrak{A}(z)^{-1}=\exp\left(\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}_n}\,\psi_n(z)\right)\mathfrak{e}(w)=\exp\left(\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{ad}^n_{\mathfrak{a}_1}\,\psi_n(z)\right)\mathfrak{e}(w)=\frac{z-\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}_1}}{z+\hbar-\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}_1}}e(w).$$

利用关系 $\mathsf{ad}_{\mathfrak{a}_1}\,\mathfrak{e}(w)=w\,\mathfrak{e}(w)-\mathfrak{e}_0$，我们可以将上面的等式改写如下

$$(z-w)[\mathfrak{A}(z),\mathfrak{e}(w)]=-\hbar\,\mathfrak{A}(z)\mathfrak{e}(w)+[\mathfrak{e}_0,\mathfrak{A}(z)].$$

取 $w=z$，得到 $[\mathfrak{e}_0,\mathfrak{A}(z)]=\hbar\,\mathfrak{A}(z)\mathfrak{e}(z)$，将其代回上式，便有

$$(z-w)[\mathfrak{A}(z),\mathfrak{e}(w)]=\hbar\,\mathfrak{A}(z)(\mathfrak{e}(z)-\mathfrak{e}(w))\,.\tag{8.11}$$

类似的论证可得

$$(z-w)[\mathfrak{A}(z),\mathfrak{f}(w)]=\hbar\,(\mathfrak{f}(w)-\mathfrak{f}(z))\,\mathfrak{A}(z)\,.\tag{8.12}$$

若记 $\mathfrak{A}(z)=1+\sum_{n\geqslant 0}\mathfrak{A}_n z^{-n-1}$，则对所有 $n\geqslant 0$, $\mathfrak{A}_n=-\hbar\,\mathfrak{a}_n+f_n(\{\mathfrak{a}_i\}_{i<n})$，存在某个多项式 f_n（我们设定$\mathfrak{a}_{-1}:=-1$）。因此，(8.11) 和 (8.12) 分别等价于 (8.8) 中最后两个关系。与 (8.10) 中最后两个方程比较可知，(8.9) 也满足 (8.8) 中最后两个关系，因此 (8.9) 生成了一个从 $\mathcal{U}(\mathfrak{Y})$ 到 $Y_\mu(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 的 $\mathbb{C}(\hbar)$ 代数同态。它显然是满射。当 $\mu<0$, $\{\mathfrak{h}_i\}_{i<-\mu-1}\cup\{\mathfrak{h}_{-\mu-1}-1\}$属于核时。这就证明了该引理。□

定义 $\widetilde{\varrho}_\mu$ 为复合映射 $\mathcal{U}_\mu(\mathfrak{Y})\xrightarrow{\varphi_\mu}Y_\mu(\mathfrak{gl}_{1|1})\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathbb{C}(\hbar)\xrightarrow{\varrho_\mu}\mathrm{Y}\mu(Q,\ 0)$。它是满射，因为 ϱ_μ 和φ_μ 都是满射。定理 8.1 由下一个命题得证。

命题 8.9。对于所有 $\mu\in\mathbb{Z}_{\leqslant 0}$，映射 $\widetilde{\varrho}_\mu\colon\ \mathcal{U}_\mu(\mathfrak{Y})\to\mathrm{Y}\mu(Q,\ 0)$ 是单射。

证明。$\mu=0$ 情形。通过令 $X_n=n$ 对于 $X=\mathfrak{e}$、$\mathfrak{f}$、$\mathfrak{a}$、$\mathfrak{h}$，得到分次。令 $F_\bullet\mathcal{U}(\mathfrak{Y})$ 为 $\mathfrak{Y}$ 上由该分次诱导的滤过，则映射 (8.9) 保持滤过，即 $\varphi_0(F_k\,\mathcal{U}(\mathfrak{Y}))\subseteq F_k\,Y(\mathfrak{gl}_{1|1})\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathbb{C}(\hbar)$。因此，$\varphi_0$ 诱导了伴随分次代数之间的自然映射 $\bar{\varphi}_0\colon\ \mathcal{U}(\mathfrak{Y})\to\mathrm{gr}\ Y(\mathfrak{gl}_{1|1})\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathbb{C}(\hbar)$。注意，由于该滤过由分次诱导，$\mathcal{U}(\mathfrak{Y})$ 与 $\mathrm{gr}\,\mathcal{U}(\mathfrak{Y})$ 是典范同构的。$\mathrm{gr}\ Y(\mathfrak{gl}_{1|1})\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathbb{C}(\hbar)$ 与 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{1|1}[u])$ 同构。令 $\bar{x}_n$ 为 x_n 在 $\mathrm{gr}\,Y(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 中的像，其中 $x=e$、f、g_1、g_2。则 $\mathfrak{gl}_{1|1}[u]$ 有一组基 $\{\bar{e}_n,f_n,\bar{g}_{1,n},\bar{g}_{2,n}\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$。由 (8.9) 直接计算可得，$\bar{\varphi}_0(\mathfrak{e}_n)=\bar{e}_n$、$\bar{\varphi}_0(\mathfrak{f}_n)=f_n$、$\bar{\varphi}_0(\mathfrak{a}_n)=-\bar{g}_{1,\ n}/\hbar$，以及 $\bar{\varphi}_0(\mathfrak{h}_n)=\bar{g}_{2,\ n}-\bar{g}_{1,\ n}$。特别地，$\bar{\varphi}_0$ 诱导了一个同构。因此 φ_0 是单射。然后由引理 8.4 可得 $\widetilde{\varrho}_0$ 的单射性。

$\mu<0$ 情形。定义一个 $\mathbb{C}(\hbar)$ 代数同态 $\mathfrak{S}^\mu_z\colon\ \mathcal{U}_\mu(\mathfrak{Y})\to\mathcal{U}(\mathfrak{Y})((z^{-1}))$ 如下：

$$\mathfrak{S}^\mu_z(\mathfrak{e}_n)=(-1)^\mu\sum_{k=0}^{\infty}(-z)^{\mu-k}\binom{\mu}{k}\mathfrak{e}_{n+k},\quad \mathfrak{S}^\mu_z(\mathfrak{f}_n)=(-1)^\mu\mathfrak{f}_n,\quad \mathfrak{S}^\mu_z(\mathfrak{a}_n)=\mathfrak{a}_n,\quad \mathfrak{S}^\mu_z(\mathfrak{h}_n)=\sum_{k=0}^{n+\mu+1}(-z)^k\binom{\mu}{k}\mathfrak{h}_{n+\mu-k},$$

其中，在最后一个等式的右侧，我们令 $\mathfrak{h}_i=0$ 表示 $i<-1$ 和 $\mathfrak{h}_{-1}=0$。证明 $\mathfrak{S}^\mu_z$ 是代数同态是直接的，故略去。

我们断言 $\mathfrak{S}^\mu_z$是单射。令 $\mathfrak{E}_\mu$, $\mathfrak{F}_\mu$, $\mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{H}_\mu$分别为 $\mathcal{U}_\mu(\mathfrak{Y})$ 中由 $\{\mathfrak{e}_r\}_{r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$、$\{\mathfrak{f}_r\}_{r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$、$\{\mathfrak{a}_r\}_{r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$和 $\{\mathfrak{h}_s\}_{s\in\mathbb{Z}_{\geqslant -\mu}}$生成的子代数。$\mathcal{U}(\mathfrak{Y})$ 的 PBW 定理表明，$\mathcal{U}_\mu(\mathfrak{Y})$ 在$\mathbb{C}(\hbar)$ 上有一组基，由 $\{\mathfrak{e}_r,\mathfrak{f}_r,\mathfrak{a}_r,\mathfrak{h}_s\}_{r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ s\in\mathbb{Z}_{\geqslant -\mu}}$中的有序超单项式组成。特别地，$\mathcal{U}_\mu(\mathfrak{Y})\cong\mathfrak{E}_\mu\otimes\mathfrak{F}_\mu\otimes\mathfrak{A}_\mu\otimes\mathfrak{H}_\mu$，其中张量积取在 $\mathbb{C}(\hbar)$ 上。因此，只需证明以下限制映射：

$$\mathfrak{S}^\mu_{z,\mathfrak{E}}\colon\ \mathfrak{E}_\mu\to\mathfrak{E}_0[\![z^{-1}]\!],\quad \mathfrak{S}^\mu_{z,\mathfrak{F}}\colon\ \mathfrak{F}_\mu\to\mathfrak{F}_0,\quad \mathfrak{S}^\mu_{z,\mathfrak{A}}\colon\ \mathfrak{A}_\mu\to\mathfrak{A}_0,\quad \mathfrak{S}^\mu_{z,\mathfrak{H}}\colon\ \mathfrak{H}_\mu\to\mathfrak{H}_0[z],$$

是单射。$\mathfrak{S}_z^\mu$，$\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{S}_z^\mu$，$\mathfrak{A}$：$\mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{A}_0$ 显然是同构。复合映射 $\mathfrak{H}_\mu \xrightarrow{\mathfrak{S}_z^\mu\cdot} \mathfrak{H}_0[z] \xrightarrow{\text{模 } z} \mathfrak{H}_0$ 由 $\mathfrak{h}_n \mapsto \mathfrak{h}_{n+\mu}$给出，它诱导出一个同构；因此 $\mathfrak{S}_z^\mu$，$\mathfrak{H}$ 是单射。$\mathfrak{S}_z^\mu$，$\mathfrak{E}$ 分解为

$$\mathfrak{S}_{z,\mathfrak{E}}^\mu = \underbrace{\{z^{-1}\}\circ\cdots\circ\{z^{-1}\}}_{-\mu \text{ copies}} \circ \overline{\mathfrak{S}}_{z,\mathfrak{E}}^\mu,$$

其中 $\mathfrak{S}_{z,\mathfrak{E}}^\mu$：$\mathfrak{E}_\mu \to \mathfrak{E}_0[\![z^{-1}]\!]$ 由 $\mathfrak{S}_z^\mu(\mathfrak{e}_n) = (-1)^\mu \sum_{k=0}^\infty (-z)^{-k}\binom{\mu}{k}\mathfrak{e}_{n+k}$ 给出，$\{z^{-1}\}$：$\mathfrak{E}_0[\![z^{-1}]\!] \to \mathfrak{E}_0[\![z^{-1}]\!]$ 是由 $\mathfrak{e}_n \mapsto z^{-1}\mathfrak{e}_n$ 生成的端同态。复合映射 $\mathfrak{E}_\mu \xrightarrow{\mathfrak{S}_z^\mu\cdot} \mathfrak{E}_0[z] \xrightarrow{\text{模 } z} \mathfrak{E}_0$ 由 $\mathfrak{e}_n \mapsto (-1)^\mu \mathfrak{e}_n$ 给出，它诱导出一个同构；因此 $\mathfrak{S}_z^\mu$，$\mathfrak{E}$ 是单射。另一方面，$\mathfrak{E}_0$是自由外代数 $\bigwedge^\bullet\left(\mathrm{Span}_{\mathbb{C}(\hbar)}\{\mathfrak{e}_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}\right)$。假设

$$f = \sum_{m=0}^\infty \sum_{r\geqslant 0} f_{m,r} z^{-m} \in \ker(\{z^{-1}\}),$$

其中，对任意固定的 m，第二个求和都是有限的，且 $f_{m,\,r} \in \bigwedge^r\left(\mathrm{Span}_{\mathbb{C}(\hbar)}\{\mathfrak{e}_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}\right)$。于是我们有

$$0 = \{z^{-1}\}(f) = \sum_{m=0}^\infty \sum_{r\geqslant 0} f_{m,r} z^{-m-r}, \quad \text{equivalently} \quad \sum_{m+r=n} f_{m,r} = 0 \ \text{ for any } \ n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

$\bigwedge^r\left(\mathrm{Span}_{\mathbb{C}(\hbar)}\{\mathfrak{e}_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}\right)$ 对不同的 r 线性无关，因此 $f_{m,\,r} = 0$ 对所有 m 和 r 都成立。因此 $\ker(\{z^{-1}\}) = 0$。这表明 $\mathfrak{S}_z^\mu$，$\mathfrak{e}$ 是单射，结论得证。

最后，直接比较可得，$\mathfrak{S}_z^\mu$ 与反向移位同态（定义 4.30）相容：

$$\widetilde{\varrho}_0 \circ \mathfrak{S}_z^\mu = \mathsf{S}_z^{0,\mu} \circ \widetilde{\varrho}_\mu.$$

根据我们已证明的结果，左边是单射，因此 $\widetilde{\varrho}_\mu$ 是单射。 □

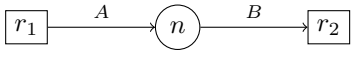
由证明可知，φ_μ：$\mathcal{U}_\mu(\mathfrak{Y}) \to Y_\mu(\mathfrak{gl}_{1|1}) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar)$ 是一个同构。

推论 8.10。 $Y_\mu(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 是一个自由的 $\mathbb{C}[\hbar]$-模，其基由以下有序超单项式给出：

$$\{e_r, f_r, g_{1,r}, g_{2,s}\}_{r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}, s\in\mathbb{Z}_{\geqslant -\mu}}.$$

证明。 关系 (8.10) 表明，$\{e_r, f_r, g_{1,r}, g_{2,s}\}_{r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ s\in\mathbb{Z}_{\geqslant -\mu}}$ 中的有序超单项式生成 $Y_\mu(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 作为一个 $\mathbb{C}[\hbar]$-模。为了证明这些单项式 $\mathbb{C}[\hbar]$线性无关，只需证明局部化后它们在 $\mathbb{C}(\hbar)$ 中线性无关。注意，$\{e_r, f_r, g_{1,r}, g_{2,s}\}_{r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ s\in\mathbb{Z}_{\geqslant -\mu}}$ 中的有序超单项式可以被 $\mathbb{C}(\hbar)$ 线性表示为 $\{\rho_\mu(\mathfrak{e}_r)\rho_\mu(\mathfrak{f}_r)\rho_\mu(\mathfrak{a}_r)\rho_\mu(\mathfrak{h}_s)\}_{r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ s\in\mathbb{Z}_{\geqslant -\mu}}$ 中的有序超单项式，反之亦然；根据关于 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 的 PBW 定理，后一组单项式是 $\mathcal{U}_\mu(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 的一组基。这就证明了线性无关性。 □

8.5. **除子的量子乘法**。 考虑以下带零势的带框箭图，其框架维数为 $\mathbf{d} = (r_1,\ r_2)$，其中 $r_1 \geqslant r_2$：



$\mathsf{W} = 0.$

记作 $X_{n,\,r_1,\,r_2} = \mathcal{M}(n,\ \mathbf{d})$。对 $X_{n,\,r_1,\,r_2}$ 应用定理 5.13，我们便得到 $X_{n,\,r_1,\,r_2}$上修正的除子量子乘法的显式公式。注意，$X_{r_1,\,r_1,\,r_2}$ 是一个仿射空间，因此我们将重点讨论 $r_1 > n$ 情形。

命题 8.11。 假设 $r_1 > n$。令 $\mathcal{O}(1)$ 为 $X_{n,\,r_1,\,r_2}$ 上典范丛 V 的行列式，则

$$c_1(\mathcal{O}(1))\,\widetilde{\star}\,\cdot = \begin{cases} c_1(\mathcal{O}(1)) \cup \cdot + \hbar^{-1}\frac{z}{1+z} e_0 f_0, & \text{if } r_1 = r_2\ , \\ c_1(\mathcal{O}(1)) \cup \cdot + \hbar^{-1} z\, e_0 f_0, & \text{if } r_1 > r_2\ , \end{cases}$$

其中 z 是参数 曲线类参数，e_0，f_0 是定义 8.2 中 $Y_{r_2-r_1}(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 的生成元的一部分。

证明。 根据定理 4.45 和经典 R-矩阵的公式 (8.7)，$\mathsf{Y}_0(Q,\ 0)$ 的 Casimir 算子为

$$\mathrm{Cas}_1 = \hbar^{-1} e_0 f_0, \quad \mathrm{Cas}_i = 0, \text{ if } i > 1.$$

由定理 5.10，我们有

$$c_1(\mathcal{O}(1)) \widetilde{\star} \cdot = c_1(\mathcal{O}(1)) \cup \cdot + \hbar^{-1} \frac{z}{1+z} e_0 f_0 + \text{const.}$$

该常数由 $-\hbar^{-1} \frac{z}{1+z} e_0 f_0$ 作用于 $1 \in H^{\mathsf{T}_0}(X_{n,\ r_1,\ r_2})$ 给出。根据定理 3.7，$f_0(1)$ 由基本类 $[\mathfrak{P}(n,\ n-1,\ \mathbf{d})]^{\mathrm{t}}$ 到 $X_{n-1,\ r_1,\ r_2}$ 的推前给出。由 (3.9) 可知，$\mathfrak{P}(n,\ n-1,\ \overline{\mathbf{d}})$ 是 $\mathbb{P}^{r_1-n}$ 上的一个 $X_{n-1,\ r_1,\ r_2}$ 丛，因此根据我们关于 $\overline{r_1} > n$ 的假设，$f_0(1) = 0$。这就证明了 $r_1 = r_2$ 情形。

对于 $r_1 > r_2$ 情形，只需证明

$$\mathrm{Cas}_{1, r_2 - r_1} = \hbar^{-1} e_0 f_0,$$

其中，e_0，f_0 是 $Y_{r_2-r_1}(\mathfrak{gl}_2)$ 的生成元的一部分。我们在 $Y_{r_2-r_1}(\mathfrak{gl}_2)$ 的生成元上加横线，以区别于 $Y_0(\mathfrak{gl}_2)$ 中与之对应的生成元。由引理 4.27 的证明，我们有如下算子方程:

$$i^* e(u)\, p^* = H_z\, \bar{e}(u)\, H_z^{-1} = \frac{(z - c_1(\mathcal{L}))^{r_1 - r_2}}{u - c_1(\mathcal{L})} [\overline{\mathfrak{P}}(n+1, n, \underline{\mathbf{d}})] = z^{r_1 - r_2} \bar{e}(u) + \text{lower order in } z,$$

$$i^* f(u)\, p^* = (-1)^{r_1 - r_2} \bar{f}(u).$$

按 u 幂展开，可得

$$i^* e_r\, p^* = z^{r_1 - r_2}\, \bar{e}_r + \text{lower order in } z, \quad i^* f_r\, p^* = (-1)^{r_1 - r_2} \bar{f}_r.$$

这意味着

$$i^* \mathrm{Cas}_1\, p^* = \hbar^{-1} i^* e_0 f_0\, p^* = (-z)^{r_1 - r_2}\, \hbar^{-1}\, \bar{e}_0 \bar{f}_0 + \text{lower order in } z,$$

因此，根据定义 4.50，$\mathsf{Cas}_{1,\ r_2 - r_1} = \lim_{z \to \infty} (-z)^{r_2 - r_1} i^* \mathsf{Cas}_1\, p^* = \hbar^{-1} \bar{e}_0 \bar{f}_0$。 □

9. Example: Jordan quiver and modules of shifted Yangians of $\mathfrak{gl}_2$

本节考虑由一个节点和一个边环组成的 Jordan 箭图这一例:

Q : 

我们将 Q 视为与 A_1 箭图（其中只有一个节点且没有边）相关联的三重箭图（例 2.4）。设 $\mathsf{T}_0 = \mathbb{C}_\hbar^*$ 为将环按权 -1 缩放的环面。在考虑相关箭图簇时，固定一种循环稳定性 $\theta < 0$。

本节的主要定理是对 Q (4.5) 的移位杨 Yangian $\mathsf{Y}_\mu(Q,\ 0)$ 的显式描述。

定理 9.1。令 Q 为 Jordan 箭图。对于任意的 $\mu \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$，存在一个自然的代数同构

$$Y_\mu(\mathfrak{gl}_2) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar) \cong \mathsf{Y}_\mu(Q, 0)\,,$$

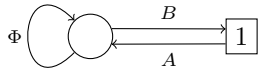
其中 $Y_\mu(\mathfrak{gl}_2)$ 是 $\mathfrak{gl}_2$ 的 Frassek-Pestun-Tsymbaliuk μ-移位杨 Yangian（定义 9.11）.

定理 9.1 的 $\mu = 0$ 情形可由定理 4.45 以及 $\mathsf{Y}_Q^{\mathrm{MO}} \cong Y_0(\mathfrak{gl}_2)$ [MO 命题 11.3.1] 这一事实推出。在 §9.6 中，我们将给出适用于所有 $\mu \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ 的定理 9.1 的统一证明。

我们还研究了由临界上同调构造的移位杨扬子代数 $Y_\mu(\mathfrak{gl}_2)$ 的若干表示，包括高自旋模、对偶 Verma 模和预基本模。我们在 §9.2 和 §9.3 中对上同调稳定包络和根 R-矩阵进行了明确的 计算。我们在 §9.8 中详细研究了几何构造中的融合过程 （融合公式见推论 9.29）。我们推导出带框架箭图簇上除子的量子乘法的显式公式（命题 9.31）。

9.1. **的基** $\mathcal{H}_N$, $\mathcal{V}$ **和** $\mathcal{F}$。 以下是框架和势的三个基本情形:

(1)（高自旋模）$\mathbf{d} = \mathbf{1} = (1, 1)$, $\mathsf{W}_N = B\Phi^N A$（带有 $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$），并要求 $\mathbb{C}_\hbar^*$ 以权 N 缩放 B，且固定 A。记 $\mathsf{w}_N = \mathrm{tr}(\mathsf{W}_N)$。

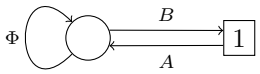


$\mathsf{W}_N = B\Phi^N A.$

我们定义

$$\mathcal{H}_N(n) := H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathcal{M}(n, \mathbf{1}), \mathsf{w}_N), \quad \mathcal{H}_N := H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathcal{M}(\mathbf{1}), \mathsf{w}_N) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \mathcal{H}_N(n). \tag{9.1}$$

(2)（对偶 Verma 模）$\mathbf{d} = \mathbf{1} = (1, 1)$, $\mathsf{W} = 0$, 并取另一个环面 $\mathbb{C}_t^*$，它以权 1 缩放 B，并固定其他箭图数据。

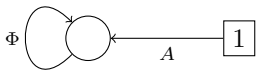


$\mathsf{W} = 0.$

我们定义

$$\mathcal{V}(n) := H^{\mathbb{C}_\hbar^* \times \mathbb{C}_t^*}(\mathcal{M}(n, \mathbf{1})), \quad \mathcal{V} := H^{\mathbb{C}_\hbar^* \times \mathbb{C}_t^*}(\mathcal{M}(\mathbf{1})) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \mathcal{V}(n).$$

(3)（预基本模）$\mathbf{d} = \mathbf{0^1} = (1, 0)$, $\mathsf{W} = 0$。



$\mathsf{W} = 0.$

我们定义

$$\mathcal{F}(n) := H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathcal{M}(n, \underline{\mathbf{0}^\mathbf{1}})), \quad \mathcal{F} := H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathcal{M}(\underline{\mathbf{0}^\mathbf{1}})) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \mathcal{F}(n). \tag{9.2}$$

注意，由于 $\mathcal{M}(\mathbf{1})$ 是 $\mathcal{M}(\mathbf{0^1})$ 上的向量丛，因此存在自然同构 $\mathcal{V} \cong \mathcal{F}[t]$，但我们将看到，它们的稳定包络和 R-矩阵并非通过标量扩张得到。

为了表示稳定包络和 R-矩阵，我们需要 $\mathcal{H}_N$、$\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{F}$ 的基。

由于 $\mathcal{M}(n, \mathbf{1})$ 是 $\mathcal{M}(n, \mathbf{0_1})$ 上的向量丛，其纤维由 $B \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ 下降到 GIT 商得到，根据维数约化 [Dav1, Thm. A.1]，存在同构

$$H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathcal{M}(n, \mathbf{1}), \mathsf{w}_N) \cong H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(Z_n'),$$

其中，$Z_n' \subset \mathcal{M}(n, \underline{\mathbf{0_1}})$ 是截面 $\Phi^N A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n)$ 的零点集。注意，

$$\mathcal{M}(n, \underline{\mathbf{0}^\mathbf{1}}) \cong \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}) \cong S^n\mathbb{C} \cong \mathbb{C}^n,$$

以及方程 $\Phi^N A = 0$ 这等价于要求 $\mathbb{C}$ 上的 n 点支撑在谱 $\mathbb{C}[z]/(z^N)$ 上；因此

$$Z_n' = \begin{cases} \text{the zero of } \mathbb{C}^n, & n \leqslant N, \\ \emptyset, & n > N. \end{cases}$$

特别地，$H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(Z_n') = \mathbb{C}[\hbar] \cdot [Z_n']$。设 Z_n 为 Z_n' 在 $\mathcal{M}(n, \mathbf{1})$ 中的原像，则有 :

引理 9.2。

$$\mathcal{H}_N(n) = H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathcal{M}(n, \mathbf{1}), \mathsf{w}_N) \cong \begin{cases} \mathbb{C}[\hbar] \cdot [Z_n], & n \leqslant N, \\ 0, & n > N, \end{cases}$$

其中同构 hism 由典范映射 $H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(Z_n) \to H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(Z(\mathsf{w}_N)) \xrightarrow{\text{诱导}} H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathcal{M}(n, \mathbf{1}), \mathsf{w}_N)$。

对于 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{F}$，自然的底空间选择由基本类给出：

$$\mathcal{V}(n) \cong \mathbb{C}[\hbar, t] \cdot [\mathcal{M}(n, \mathbf{1})], \quad \mathcal{F}(n) \cong \mathbb{C}[\hbar] \cdot [\mathcal{M}(n, \underline{\mathbf{0}^{\mathbf{1}}})].$$

引理 9.3。 存在一个单射特化映射

$$\mathsf{sp}\colon \mathcal{H}_N \to \mathcal{V}\big|_{t=N\hbar}, \quad \mathsf{sp}([Z_n]) = n!\hbar^n[\mathcal{M}(n, \mathbf{1})] \quad (n \leqslant N).$$

证明。 注意， $\mathcal{V}|_{t=N\hbar}$ 是 $H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathcal{M}(n,\ \mathbf{1}))$，其中 $\mathbb{C}_\hbar^*$ 按权 N 进行缩放，而 $\mathbb{C}_\hbar^*$ 固定 A。根据 [COZZ1，例 7.19]，特化映射存在，其显式公式使用 $e^{\mathbb{C}_\hbar^*}(N_{Z_n/\mathcal{M}(n,\ \mathbf{1})}) = n!\ \hbar^n$。特别地，它是单射的。□

为后续使用，我们引入向量空间的识别

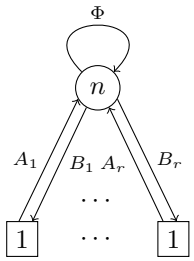
$$\mathcal{V} \cong \mathbb{C}[\hbar, t][\mathbf{x}], \quad \mathcal{F} \cong \mathbb{C}[\hbar][\mathbf{x}],$$

使得基通过下式得到识别

$$[\mathcal{M}(n, \mathbf{1})] \longleftrightarrow \frac{\mathbf{x}^n}{n!} \longleftrightarrow [\mathcal{M}(n, \underline{\mathbf{0}^{\mathbf{1}}})]. \tag{9.3}$$

注 9.4。 临界上同调 $\mathcal{H}_N(n)$、 $\mathcal{V}(n)$ 和 $\mathcal{F}(n)$ 是纯的，因此根据注 2.11，Thom–Sebastiani 定理适用于乘积 $\prod_{i=1}^a \mathcal{M}(n_i,\ \mathbf{1}) \times \prod_{j=1}^b \mathcal{M}(m_j,\ \mathbf{0_1})$，其势为 $= \boxplus_{i=1}^{a'} \mathsf{W}^{N_i}(a' \leqslant a)$，无需进行局部化。

9.2. 稳定包络的计算 。考虑如下所示的箭图簇 $\mathcal{M}(n,\mathbf{r})$.



定义一个 $\mathsf{A} \cong (\mathbb{C}^*)^r$ 作用，由 $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^r z_i \cdot \mathbf{1}^{(i)}$ 给出。令 $\mathsf{T} = \mathsf{A} \times \mathbb{C}_\hbar^* \times \prod_{i=1}^r \mathbb{C}_{t_i}^*$，其中 $(q, p_1, \cdots, p_r) \in \mathbb{C}_\hbar^* \times \prod_{i=1}^r \mathbb{C}_{t_i}^*$通过以下方式作用于箭图数据：

$$(\Phi, A_1, B_1, \ldots, A_k, B_k) \mapsto (q^{-1}\Phi, A_1, p_1B_1, \ldots, A_r, p_rB_r).$$

我们有

$$\mathcal{M}(n, \mathbf{r})^{\mathsf{A}} = \bigsqcup_{\substack{\vec{n}=(n_1,\cdots,n_r) \\ n_1+\cdots+n_r=n}} F_{\vec{n}}, \quad \text{where} \quad F_{\vec{n}} = \prod_{i=1}^r \mathcal{M}(n_i, \mathbf{1}).$$

令 $\mathfrak{C}$ 为室 $\{z_1 > \cdots > z_r\}$。记 $H_{\mathrm{GL}_n}(\mathrm{pt}) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r]$。则 [COZZ1，命题 9.7] 蕴含 :

命题 9.5。 稳定包络有如下显式公式：

$$\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}\colon H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(n, \mathbf{r})^{\mathsf{A}}) \to H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(n, \mathbf{r})),$$

$$\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}([F_{\vec{n}}]) = \mathbf{W}_{\mathfrak{C},\vec{n}}(\{x_\alpha\}, \{z_i\}, \{t_i\}) \cdot [\mathcal{M}(n, \mathbf{r})], \tag{9.4}$$

$$\mathbf{W}_{\mathfrak{C},\vec{n}}(\{x_\alpha\}, \{z_i\}, \{t_i\}) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}\{S_1,\ldots,S_r\}} \sigma \left[\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant r} \left(\prod_{\alpha \in S_j} (x_\alpha - z_i) \right) \left(\prod_{\beta \in S_i} (z_j + t_j - x_\beta) \right) \left(\prod_{\substack{\alpha \in S_j \\ \beta \in S_i}} \frac{x_\alpha - x_\beta - \hbar}{x_\alpha - x_\beta} \right) \right],$$

其中， $S_1 \sqcup S_2 \sqcup \cdots \sqcup S_r = \{1, 2, \ldots, n\}$ 是一个固定的分解，满足 $|S_i| = n_i$； $\mathrm{Sh}\{S_1, \ldots, S_r\}$ 是保持每个 S_i中元素顺序的置换集合 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ，也就是说，对于所有满足γ， $\nu \in S_i$的 $\gamma < \nu \Leftrightarrow \sigma(\gamma) < \sigma(\nu)$对。$\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}$ 的矩阵元由下式给出

$$\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}([F_{\vec{n}}])\Big|_{[F_{\vec{n}'}]} = \mathbf{W}_{\mathfrak{C},\vec{n}}(\{x_\alpha\}, \{z_i\}, \{t_i\})\Big|_{x_\alpha \mapsto z_{p_{\vec{n}'}(\alpha)} + l_{\vec{n}'}(\alpha)\hbar}[F_{\vec{n}'}].$$

这里，记号$p_{\vec{n}'}(\alpha)$和$l_{\vec{n}'}(\alpha)$由以下条件确定： α 属于子集 $S'_{p(\alpha)}$ ，且 $S'_{p(\alpha)}$ 中恰有 $l(\alpha)$个元素小于 α，其中 $S'_1 \sqcup S'_2 \sqcup \cdots \sqcup S'_r = \{1, 2, \ldots, n\}$ 是一个满足 $|S'_i| = n'_i$的固定分解。

注 9.6. 公式 (9.4) 的 K理论版本最早见于 [Ta, (60), (61)]。函数$\mathbf{W}_{\mathfrak{C},\ \vec{n}}$ 在 [YZJ]中称为“权函数”。

要得到相反室 $-\mathfrak{C}=\{z_1<\cdots<z_r\}$ 的稳定包络，我们将 (9.4) 中的 $\mathbf{W}_{\mathfrak{C},\vec{n}}(\{x_\alpha\},\{z_i\},\{t_i\})$ 改为

$$\mathbf{W}_{-\mathfrak{C},\vec{n}}(\{x_\alpha\},\{z_i\},\{t_i\})=\sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}\{S_1,\dots,S_r\}}\sigma\left[\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left(\prod_{\alpha\in S_i}(x_\alpha-z_j)\right)\left(\prod_{\beta\in S_j}(z_i+t_i-x_\beta)\right)\left(\prod_{\substack{\alpha\in S_i\\ \beta\in S_j}}\frac{x_\alpha-x_\beta-\hbar}{x_\alpha-x_\beta}\right)\right].$$

9.2.1. 稳定包络的转置。 转置 $\mathsf{Stab}^\tau_{\mathfrak{C}}$: $H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(n,\mathbf{r}))_{\mathrm{loc}}\to H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(n,\mathbf{r})^{\mathsf{A}})_{\mathrm{loc}}$ 是由稳定包络对应的转置诱导的映射（[COZZ1, §3.4.2]），即

$$\begin{aligned}\mathrm{Stab}^\tau_{\mathfrak{C}}([F_{\vec{n}'}])\Big|_{[F_{\vec{n}}]}&=\frac{\int_{[F_{\vec{n}'}]}1}{\int_{[F_{\vec{n}}]}1}\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}([F_{\vec{n}}])\Big|_{[F_{\vec{n}'}]}\\&=\left(\prod_{i=1}^r\frac{n_i!\prod_{k=0}^{n_i-1}(t_i-k\hbar)}{n_i'!\prod_{m=0}^{n_i'-1}(t_i-m\hbar)}\right)\mathbf{W}_{\mathfrak{C},\vec{n}}(\{x_\alpha\},\{z_i\},\{t_i\})\Big|_{x_\alpha\mapsto z_{p_{\vec{n}'}(\alpha)}+l_{\vec{n}'}(\alpha)\hbar}\cdot[F_{\vec{n}}].\end{aligned}$$

9.2.2. R-矩阵。 R-矩阵 $R_{-\mathfrak{C},\mathfrak{C}}\in\mathsf{End}(H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(n,\mathbf{r})^{\mathsf{A}})_{\mathrm{loc}})$ 定义为

$$R_{-\mathfrak{C},\mathfrak{C}}([F_{\vec{n}}])\Big|_{F_{\vec{n}'}}=\sum_{\vec{n}''}\frac{1}{e^{\mathsf{T}}(N_{F_{\vec{n}''}/\mathcal{M}(n,\mathbf{r})})}\mathrm{Stab}^\tau_{\mathfrak{C}}([F_{\vec{n}''}])\Big|_{[F_{\vec{n}'}]}\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}([F_{\vec{n}}])\Big|_{[F_{\vec{n}''}]}\cdot[F_{\vec{n}'}].$$

9.2.3. 加入势 $\mathsf{w}=\sum_{i=1}^r B_i\Phi^{N_i}A_i$。 为保持势不变，我们令 $t_i=N_i\hbar$ with $\mathsf{T}'=\mathsf{A}\times\mathbb{C}^*_\hbar$。汤姆-塞巴斯蒂亚尼同构意味着

$$H^{\mathsf{T}'}(F_{\vec{n}},\mathsf{w})\cong\bigotimes_{i=1}^r H^{\mathsf{T}'}(\mathcal{M}(n_i,\mathbf{1}),\mathsf{w}_{N_i})\cong\begin{cases}\mathbb{C}[\hbar,z_1,\dots,z_r]\cdot[Z_{n_1}]\otimes\cdots\otimes[Z_{n_r}], & \text{if }\ \forall\, i,n_i\leqslant N_i,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

由 [COZZ1，命题 7.18] 和引理 9.3，我们得到：

命题 9.7。 稳定包络

$$\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}\colon H^{\mathsf{T}'}(\mathcal{M}(n,\mathbf{r})^{\mathsf{A}},\mathsf{w})\to H^{\mathsf{T}'}(\mathcal{M}(n,\mathbf{r}),\mathsf{w})$$

是　　零势情形 (9.4) 在特化映射的像上的限制。也就是说，

$$\mathsf{sp}\circ\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}([Z_{n_1}]\otimes\cdots\otimes[Z_{n_r}])=\hbar^n\left(\prod_{i=1}^r n_i!\right)\mathbf{W}_{\mathfrak{C},\vec{n}}(\{x_\alpha\},\{z_i\},\{t_i\})\Big|_{t_i\mapsto N_i\hbar}\cdot[\mathcal{M}(n,\mathbf{r})].\tag{9.5}$$

$\mathsf{Stab}_{\mathfrak{C}}$ 的矩阵元为

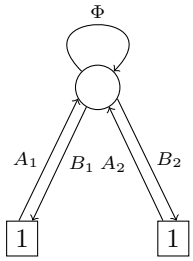
$$\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}([Z_{n_1}]\otimes\cdots\otimes[Z_{n_r}])\Big|_{F_{\vec{n}'}}=\left(\prod_{i=1}^r\frac{n_i!}{n_i'!}\right)\mathbf{W}_{\mathfrak{C},\vec{n}}(\{x_\alpha\},\{z_i\},\{t_i\})\Big|_{\substack{t_i\mapsto N_i\hbar\\ x_\alpha\mapsto z_{p_{\vec{n}'}(\alpha)}+l_{\vec{n}'}(\alpha)\hbar}}\cdot[Z_{n_1'}]\otimes\cdots\otimes[Z_{n_r'}].$$

而其转置为

$$\mathrm{Stab}^\tau_{\mathfrak{C}}([Z_{n_1'}]\otimes\cdots\otimes[Z_{n_r'}])\Big|_{F_{\vec{n}}}=\left(\prod_{i=1}^r\frac{\prod_{k=0}^{n_i-1}(N_i-k)}{\prod_{m=0}^{n_i'-1}(N_i-m)}\right)\mathbf{W}_{\mathfrak{C},\vec{n}}(\{x_\alpha\},\{z_i\},\{t_i\})\Big|_{\substack{t_i\mapsto N_i\hbar\\ x_\alpha\mapsto z_{p_{\vec{n}'}(\alpha)}+l_{\vec{n}'}(\alpha)\hbar}}\cdot[Z_{n_1}]\otimes\cdots\otimes[Z_{n_r}].$$

9.3. 根 R-矩阵。我们显式计算了若干个根 R-矩阵。

9.3.1. R-矩阵 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{V}$。考虑以下带势箭图



$\mathsf{W} = B_1\Phi A_1.$

令 $\mathsf{A} \cong \mathbb{C}_u^*$ 通过 $u\mathbf{1}^{(1)} + \mathbf{1}^{(2)}$作用于框架，并令 $\mathsf{T} = \mathsf{A} \times \mathbb{C}_\hbar^* \times \mathbb{C}_t^*$，其中 $(q,\ p) \in \mathbb{C}_\hbar^* \times \mathbb{C}_t^*$通过以下方式作用于箭图数据：

$$(\Phi, A_1, B_1, A_2, B_2) \mapsto (q^{-1}\Phi, A_1, qB_1, A_2, pB_2).$$

在基 $[Z_0] \otimes [\mathcal{M}(n,\ \mathbf{1})]$ 和 $[Z_1] \otimes [\mathcal{M}(n-1,\ \mathbf{1})]$, 中，$\mathsf{Stab}_{u>0}$ 由以下矩阵给出

$$\begin{pmatrix} \prod_{j=0}^{n-1}(j\hbar - u) & n\hbar\,(t-(n-1)\hbar)\prod_{j=0}^{n-2}(j\hbar-u) \\ 0 & (t-u)\prod_{j=0}^{n-2}((j-1)\hbar-u) \end{pmatrix},$$

$\mathsf{Stab}_{u<0}$ 由以下矩阵给出

$$\begin{pmatrix} \prod_{i=0}^{n-1}(u-(i-1)\hbar) & 0 \\ \prod_{i=0}^{n-2}(u-(i-1)\hbar) & (u-(n-1)\hbar)\prod_{i=0}^{n-2}(u-(i-1)\hbar) \end{pmatrix}.$$

T为恰当地归一化 R-矩阵的对角元素，我们引入归一化 子（[COZZ1，定义 3.5]）:

$$\epsilon|_F = (-1)^{\mathrm{rk}\,\mathcal{P}|_F^+}. \tag{9.6}$$

这里，$\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{M}(2)$上的向量丛是 $\mathsf{Hom}(V, D_{\mathrm{out}})$ 的下降，其中 D_{out} 是出向框架向量空间，V 是规范向量空间。$\mathcal{P}|_F^+$ 是将 $\mathcal{P}$ 限制在不动分支 F上所得的吸引子丛。

那么，在基 $[Z_0] \otimes [\mathcal{M}(n,\ \mathbf{1})]$ 和 $[Z_1] \otimes [\mathcal{M}(n-1,\ \mathbf{1})]$, 下，我们有

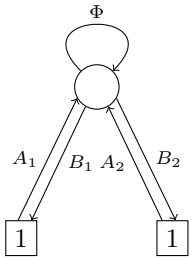
$$\begin{aligned} R_{\mathcal{H}_1,\mathcal{V}}(u) = \mathrm{Stab}_{u<0,\epsilon}^{-1} \circ \mathrm{Stab}_{u>0,\epsilon} &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} \end{pmatrix} \mathrm{Stab}_{u<0}^{-1}\ \mathrm{Stab}_{u>0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{u+\hbar} \begin{pmatrix} u-(n-1)\hbar & n\hbar\,(t-(n-1)\hbar) \\ 1 & u+n\hbar-t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

利用基 $[\mathcal{M}(n,\ \mathbf{1})] = \mathbf{x}^{\overset{n}{!}}$，在 (9.3) 中可将 $R_{\mathcal{H}_1,\ \mathcal{V}}(u)$ 写成如下紧凑形式

$$R_{\mathcal{H}_1,\mathcal{V}}(u) = \mathrm{id} + \frac{1}{u+\hbar} \begin{pmatrix} -\mathbf{xy} & \hbar\mathbf{x}(t-\mathbf{xy}) \\ \mathbf{y}/\hbar & \mathbf{xy}-t \end{pmatrix}, \tag{9.7}$$

其中 $\mathbf{y} = \hbar\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$作为微分算子作用于 $\mathbb{C}[\hbar][\mathbf{x}]$。

9.3.2. R-矩阵，对应于 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_N$。考虑以下带势箭图



$\mathsf{W} = B_1\Phi A_1 + B_2\Phi^N A_2.$

令 $\mathsf{A} \cong \mathbb{C}_u^*$ 通过 $u\mathbf{1}^{(1)} + \mathbf{1}^{(2)}$作用于框架，并令 $\mathsf{T} = \mathsf{A} \times \mathbb{C}_\hbar^*$，其中 $q \in \mathbb{C}_\hbar^*$ 通过以下方式作用于箭图数据

$$(\Phi, A_1, B_1, A_2, B_2) \mapsto (q^{-1}\Phi, A_1, qB_1, A_2, q^N B_2).$$

利用正规化子 (9.6)，我们定义

$$R_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_N}(u) := \mathrm{Stab}_{u<0,\epsilon}^{-1} \circ \mathrm{Stab}_{u>0,\epsilon} \in \mathrm{End}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_N)(u).$$

命题 9.8。$R_{\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_N}(u)$ 是 $R_{\mathcal{H}_1,\ \mathcal{V}}(u)_{t=N\hbar}$ 在 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_N$ 上的限制；$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_N$ 通过特化恒等映射 $\otimes\mathsf{sp}$: $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_N \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{V}\big|_{t=N\hbar}$与其像相识别。

证明。 在 $\mathcal{M}(n,\ \mathbf{2})$ 上取另一个 $\mathbb{C}^*$ 作用，该作用以权 1 作用于 B_2 ，并固定所有其他箭；这个 $\mathbb{C}^*$-作用可用于构造特化映射（如 [COZZ1，定义 7.14]）：

$$\mathsf{sp}\colon H^{\mathsf{A}\times\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(\mathbf{2}), B_1\Phi A_1 + B_2\Phi^N A_2) \to H^{\mathsf{A}\times\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(\mathbf{2}), B_1\Phi A_1).$$

取不动点轨迹后，诱导的特化映射为

$$\mathrm{id}\otimes\mathsf{sp}'\colon H^{\mathsf{A}\times\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(\mathbf{1}), B_1\Phi A_1)\otimes H^{\mathsf{A}\times\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(\mathbf{1}), B_2\Phi^N A_2) \longrightarrow H^{\mathsf{A}\times\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(\mathbf{1}), B_1\Phi A_1)\otimes H^{\mathsf{A}\times\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(\mathbf{1})),$$

其中 $\mathsf{sp}'\colon\ H^{\mathsf{A}\times\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(\mathbf{1})\ B_2\Phi^N A_2) \to\ H^{\mathsf{A}\times\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(\mathbf{1}))$ 是由前述$\mathbb{C}^*$-作用诱导的特化映射。根据 [COZZ1，第 7.19], 个例子，我们还有

$$\mathsf{sp}\colon H^{\mathsf{A}\times\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(\mathbf{1}), B_2\Phi^N A_2) \to H^{\mathsf{A}\times\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(\mathbf{1})),$$

它由 $\mathbb{C}^*$-作用诱导，该作用将每个箭的权缩放为 1。我们断言 $\mathsf{sp}\ =\mathsf{sp}'$。事实上，根据 [COZZ1，第 7.16], 条注记，我们有 $\mathsf{sp}\ \circ\mathsf{can}\ =\mathsf{sp}'\circ\mathsf{can}\ =$从 $Z(B_2\Phi^N A_2)$ 到 $\mathcal{M}(\mathbf{1})$ 的推前映射。注意

$$\mathrm{can}\colon H^{\mathsf{A}\times\mathbb{C}^*_\hbar}(Z(B_2\Phi^N A_2)) \to H^{\mathsf{A}\times\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(\mathbf{1}), B_2\Phi^N A_2)$$

是满射的，因为复合映射

$$H^{\mathsf{A}\times\mathbb{C}^*_\hbar}(Z_n) \to H^{\mathsf{A}\times\mathbb{C}^*_\hbar}(Z(B_2\Phi^N A_2)) \xrightarrow{\mathrm{can}} H^{\mathsf{A}\times\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(n,\mathbf{1}), B_2\Phi^N A_2)$$

是满射的。这就证明了该断言。于是结论由 [COZZ1，第 7.18]条命题得出。 □

令 $\bar{}\mathbf{x}:=\hbar\mathbf{x}$，并令李代数 $\mathfrak{gl}_2=\mathsf{Span}_{\mathbb{C}}\{\mathbf{e}_{ij}\}_{i,j\in\{1,2\}}$ 通过以下方式作用于 $\mathcal{H}_N=\mathsf{Span}_{\mathbb{C}[\hbar]}\{1,\bar{}\mathbf{x}\ldots,\bar{}\mathbf{x}^{N-1},\bar{}\mathbf{x}^N\}$：

$$\mathbf{e}_{11}\mapsto 1-\bar{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial\bar{\mathbf{x}}},\quad \mathbf{e}_{12}\mapsto\frac{\partial}{\partial\bar{\mathbf{x}}},\quad \mathbf{e}_{21}\mapsto\bar{\mathbf{x}}\left(N-\bar{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial\bar{\mathbf{x}}}\right),\quad \mathbf{e}_{22}\mapsto 1-N+\bar{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial\bar{\mathbf{x}}}.$$

于是 $R_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_N}(u)$ 具有如下形式：

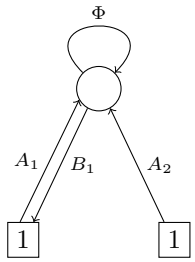
$$R_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_N}(u)=\frac{u\,\mathrm{id}+\hbar\,\Omega}{u+\hbar},\qquad \Omega=\sum_{i,j}\mathbf{e}_{ij}\otimes\mathbf{e}_{ji}. \tag{9.8}$$

特别地,

$$R_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_1}(u)=\frac{u\,\mathrm{id}+\hbar P}{u+\hbar},\qquad P(\bar{\mathbf{x}}^i\otimes\bar{\mathbf{x}}^j)=\bar{\mathbf{x}}^j\otimes\bar{\mathbf{x}}^i. \tag{9.9}$$

注 9.9。 获得 $R_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_1}(u)$ 的另一种方式是通过维数约化（[COZZ1，定理 6.10]）得到具有一个节点且无边的中岛箭图。相应的 R-矩阵在 [MO，第 4.1 节2] 中计算。

9.3.3. R-矩阵，对于 $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{F}$。 考虑以下带势箭图



势 $\mathsf{W}\ =B_1\Phi A_1$.

令 $\mathsf{A}\cong\mathbb{C}^*_u$ 通过 $u\mathbf{1}+\mathbf{0^1}$作用于框架。在基 $[Z_0]\otimes[\mathcal{M}(n,\ \mathbf{0_1})]$ 和 $[Z_1]\otimes[\mathcal{M}(n-1,\ \mathbf{0_1})]$, $\mathsf{Stab}_{u>0}$由矩阵给出

$$\begin{pmatrix}\prod_{j=0}^{n-1}(j\hbar-u) & n\hbar\prod_{j=0}^{n-2}(j\hbar-u)\\ 0 & \prod_{j=0}^{n-2}((j-1)\hbar-u)\end{pmatrix},$$

$\mathsf{Stab}_{u<0}$ 由矩阵给出

$$\begin{pmatrix}\prod_{i=0}^{n-1}(u-(i-1)\hbar) & 0\\ \prod_{i=0}^{n-2}(u-(i-1)\hbar) & (u-(n-1)\hbar)\prod_{i=0}^{n-2}(u-(i-1)\hbar)\end{pmatrix}.$$

利用正规化子（9.6），我们有

$$R_{\mathcal{H}_1,\mathcal{F}}(u)=\mathrm{Stab}^{-1}_{u<0,\epsilon}\circ\mathrm{Stab}_{u>0,\epsilon}=\frac{1}{u+\hbar}\begin{pmatrix}u-(n-1)\hbar & n\hbar\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

注记 9.10. 仿射商 $\mathcal{M}_0(n,\mathbf{1_1})$ 上的 A-作用是吸引的。由 [COZZ1，命题 3.35], $\mathsf{Stab}_{u>0}^{-1}$ 对整上同调类有定义。因此 $R_{\mathcal{H}_1,\mathcal{F}}(u)^{-1} \in \mathsf{End}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{F})[u]$ 是 u 中的多项式。直接计算得

$$R_{\mathcal{H}_1,\mathcal{F}}(u)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -n\hbar \\ 1 & u-(n-1)\hbar \end{pmatrix}.$$

利用 (9.3) 中的基 $[\mathcal{M}(\underline{n},\ \mathbf{0_1})] = \mathbf{x}^n/n!$，我们可以将 $R_{\mathcal{H}_1,\ \mathcal{F}}(u)$ 写成以下紧凑形式

$$R_{\mathcal{H}_1,\mathcal{F}}(u) = \frac{1}{u+\hbar}\begin{pmatrix} u+\hbar-\mathbf{xy} & \hbar\mathbf{x} \\ -\mathbf{y}/\hbar & 1 \end{pmatrix}, \tag{9.10}$$

其中 $\mathbf{y} = \hbar\partial_{\mathbf{x}}$ 作为微分算子作用于 $\mathbb{C}[\hbar][\mathbf{x}]$。

9.4. **Frassek-Pestun-Tsymbaliuk 移位杨氏代数。**令

$$R(z) = z\,\mathrm{id} + \hbar P \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2}[z,\hbar]. \tag{9.11}$$

这里 $P = \sum_{1\leqslant i,\ j\leqslant 2} E_{ij}\otimes E_{ji}$ 是置换算子，其中 E_{ij} 是在 $(i,\ j)$ 位置为 1、其余位置为 0 的矩阵。

定义 9.11 ([FPT, §2.3])。固定 $\mu \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$。Frassek-Pestun-Tsymbaliuk μ-移位杨氏代数 $Y_\mu(\mathfrak{gl}_2)$ 是由 $\{e_r, f_r, g_{1,r}, g_{2,s}\}_{r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ s\in\mathbb{Z}_{\geqslant -\mu}}$ 生成的 $\mathbb{C}[\hbar]$代数，并满足以下关系

$$R(u-v)\,T_1(u)\,T_2(v) = T_2(v)\,T_1(u)\,R(u-v), \tag{9.12}$$

其中 $T(z) \in Y_\mu(\mathfrak{gl}_2)[\![z,z^{-1}]\!]\otimes \mathsf{End}(\mathbb{C}^2)$ 定义为

$$T(z) = F(z)\,G(z)\,E(z),\ \text{ where }\ E(z) = \mathrm{id}_2 + e(z)\otimes E_{12},\ \ F(z) = \mathrm{id}_2 + f(z)\otimes E_{21},\ \ G(z) = \sum_{i=1}^{2} g_i(z)\otimes E_{ii},$$

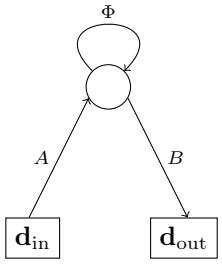
and

$$e(z) = \sum_{r\geqslant 0} e_r z^{-r-1},\quad f(z) = \sum_{r\geqslant 0} f_r z^{-r-1},\quad g_1(z) = 1 + \sum_{r\geqslant 0} g_{1,r} z^{-r-1},\quad g_2(z) = z^\mu + \sum_{s\geqslant -\mu} g_{2,s} z^{-s-1}. \tag{9.13}$$

这里，(9.12) 是 $Y_\mu(\mathfrak{gl}_2)[\![u,v,u^{-1},v^{-1}]\!]\otimes \mathsf{End}(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2}$ 中的一个等式。

μ-移位杨氏代数 $Y_\mu(\mathfrak{sl}_2)$ 是由 $\{e_r, f_r\}_{r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 和 $h(z) = g_1(z)^{-1}g_2(z)$ 的系数生成的 $\mathbb{C}[\hbar]$-子代数，包含于 $Y_\mu(\mathfrak{gl}_2)$ 中。当 $\mu = 0$ 时，我们也记作 $Y(\mathfrak{sl}_2) = Y_0(\mathfrak{sl}_2)$、$Y(\mathfrak{gl}_2) = Y_0(\mathfrak{gl}_2)$。

接下来，我们说明如何通过稳定包络来描述 Frassek-Pestun-Tsymbaliuk 移位杨氏代数的模。考虑以下带框箭图，其中有 $\mathbf{d}_{\mathrm{in}} \geqslant \mathbf{d}_{\mathrm{out}} \in \mathbb{N}$:



$$\mathsf{W} \in \mathbb{C}Q^{\mathbf{d}}/[\mathbb{C}Q^{\mathbf{d}}, \mathbb{C}Q^{\mathbf{d}}], \tag{9.14}$$

其中 $\mathbb{C}Q^{\mathbf{d}}$ 是 §3 开头定义的 Crawley-Boevey 箭图 $Q^{\mathbf{d}}$ 的路径代数。我们假设 W 是$\mathbb{C}^*_\hbar \times \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}$-不变的，其中 A^{fr} 是一个环面，它作用于 $\mathbb{C}^{\mathbf{d}_{\mathrm{in}}}$ 和 $\mathbb{C}^{\mathbf{d}_{\mathrm{out}}}$（即框架环面），$\mathbb{C}^*_\hbar$ 以权 -1缩放 Φ（它在 A、B 上的作用可以任意，只要保持 w 不变）。这意味着

$$\mathsf{W}\big|_{A=0,B=0} = 0,$$

因为对任意 $k>0$，$\mathsf{tr}(\Phi^k)$ 都不是 $\mathbb{C}^*_\hbar$-不变的。记 $\mathsf{w} = \mathsf{tr}(\mathsf{W})$。

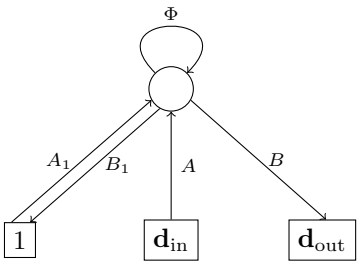
考虑态空间

$$\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}} := H^{\mathbb{C}^*_\hbar\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}}),\mathsf{w}).$$

当 A^{fr} 是恒等元群时，我们记作 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\mathbf{d}} = \mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$。

我们可以通过考虑以下带势箭图来“组合” $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}}{}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$：

(9.15)



$$\mathsf{W}' = B_1 \Phi A_1 + \mathsf{W}.$$

令 $\mathsf{A} \cong \mathbb{C}_u^*$ 通过 $u\mathbf{1}+\mathbf{d}$ 作用于框架，并令 $\underline{\mathsf{T}} = \mathsf{A} \times \mathbb{C}_\hbar^* \ltimes \mathsf{A}^{\mathrm{fr}}$。将变形维数约化（[COZZ1，定理 C.1]）应用于沿 B_1 的 $\mathrm{tr}(B_1\Phi A_1)\boxplus\mathsf{w}$，可得

$$H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(m,\underline{\mathbf{1}})\times\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}}),\mathrm{tr}(B_1\Phi A_1)\boxplus\mathsf{w}) \cong H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}}),\mathsf{w}),\quad m\in\{0,1\}$$

这意味着

$$\mathcal{H}_1 \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[u] \cong H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\underline{\mathbf{1}}+\underline{\mathbf{d}})^{\mathsf{A}},\mathsf{w}'^{\mathsf{A}}),\ \text{ for }\ \mathsf{w}'=\mathrm{tr}(\mathsf{W}')$$

在基 $[Z_0],[Z_1]$ 中，$u>0$ 室中的、正规化子为 (9.6) 的稳定包络可表示为如下矩阵形式：

$$\mathrm{Stab}_{u>0,\epsilon} = \begin{pmatrix} (-1)^n e^{\mathsf{T}}(N^-_{\mathcal{M}(0,\mathbf{1})\times\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}})/\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}}+\underline{\mathbf{1}})}) & \star_1 \\ 0 & (-1)^{n-1}e^{\mathsf{T}}(N^-_{\mathcal{M}(1,\mathbf{1})\times\mathcal{M}(n-1,\underline{\mathbf{d}})/\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}}+\underline{\mathbf{1}})}) \end{pmatrix},$$

其中 $\deg_u \star_1 < \mathrm{rk}\, N^-_{\mathcal{M}(0,\mathbf{1})\times\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}})/\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}}+\underline{\mathbf{1}})}$。在充足偏序（[COZZ1，注 3.8]）中，我们有

$$\mathcal{M}(1,\mathbf{1})\times\mathcal{M}(n-1,\underline{\mathbf{d}}) < \mathcal{M}(0,\mathbf{1})\times\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}}),$$

因此，$\mathrm{Stab}_{u>0,\epsilon}$ 的 21-分支由于 [COZZ1，定义 3.4]中的公理 (i) 而为零。类似地

$$\mathrm{Stab}_{u<0,\epsilon} = \begin{pmatrix} e^{\mathsf{T}}(N^+_{\mathcal{M}(0,\mathbf{1})\times\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}})/\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}}+\underline{\mathbf{1}})}) & 0 \\ \star_2 & (-1)^{\mathbf{d}_{\mathrm{out}}} e^{\mathsf{T}}(N^+_{\mathcal{M}(1,\mathbf{1})\times\mathcal{M}(n-1,\underline{\mathbf{d}})/\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}}+\underline{\mathbf{1}})}) \end{pmatrix},$$

次数为 $\deg_u \star_2 < \mathrm{rk}\, N^+_{\mathcal{M}(1,\mathbf{1})\times\mathcal{M}(n-1,\underline{\mathbf{d}})/\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}}+\underline{\mathbf{1}})}$。

命题 9.12。对于任意的$\mathbf{d}$以及 (9.14) 中的 W，该映射

$$\begin{aligned} e(u) &\mapsto \frac{(-1)^n\star_1}{e^{\mathsf{T}}(N^-_{\mathcal{M}(0,\mathbf{1})\times\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}})/\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}}+\underline{\mathbf{1}})})}, \qquad f(u) \mapsto \frac{(-1)^{\mathbf{d}_{\mathrm{out}}-1}\star_2}{e^{\mathsf{T}}(N^+_{\mathcal{M}(1,\mathbf{1})\times\mathcal{M}(n-1,\underline{\mathbf{d}})/\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}}+\underline{\mathbf{1}})})}, \\ g_1(u) &\mapsto \frac{(-1)^n e^{\mathsf{T}}(N^-_{\mathcal{M}(0,\mathbf{1})\times\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}})/\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}}+\underline{\mathbf{1}})})}{e^{\mathsf{T}}(N^+_{\mathcal{M}(0,\mathbf{1})\times\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}})/\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}}+\underline{\mathbf{1}})})}, \qquad g_2(u) \mapsto \frac{(-1)^{n+\mathbf{d}_{\mathrm{out}}-1}e^{\mathsf{T}}(N^-_{\mathcal{M}(1,\mathbf{1})\times\mathcal{M}(n-1,\underline{\mathbf{d}})/\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}}+\underline{\mathbf{1}})})}{e^{\mathsf{T}}(N^+_{\mathcal{M}(1,\mathbf{1})\times\mathcal{M}(n-1,\underline{\mathbf{d}})/\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}}+\underline{\mathbf{1}})})}, \end{aligned} \tag{9.16}$$

给出了 $Y_\mu(\mathfrak{gl}_2)$ 在 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}}{}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$ 上的作用，其中 $\mu = \mathbf{d}_{\mathrm{out}} - \mathbf{d}_{\mathrm{in}}$。这里所有有理函数都在 $u\to\infty$ 中展开。

证明。 $e(u)$ 和 $f(u)$ 在 u 中具有正确形式的幂级数，因为

$$\lim_{u\to\infty} e(u) = 0 = \lim_{u\to\infty} f(u).$$

$u\to\infty$ 的 $g_1(u)$ 和 $g_2(u)$ 的首项分别为 1 和 $u^{\mathbf{d}_{\mathrm{out}}-\mathbf{d}_{\mathrm{in}}}$。因此，$e(u)$、$f(u)$ 和 $g_i(u)$ 的像都是形如 (9.13) 的幂级数。通过直接计算，在映射 (9.16) 下，我们有

$$T(u) = F(u)\,G(u)\,E(u) \mapsto R_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\underline{\mathbf{d}}}}(u) = (\mathrm{Stab}_{u<0,\epsilon})^{-1}\circ\mathrm{Stab}_{u>0,\epsilon}\,.$$

由辫关系 (2.8)，RTT 关系成立：

$$R_{\mathcal{H}_1^{(1)},\mathcal{H}_1^{(2)}}(u-v)\,R_{\mathcal{H}_1^{(1)},\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\underline{\mathbf{d}}}}(u)\,R_{\mathcal{H}_1^{(2)},\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\underline{\mathbf{d}}}}(v) = R_{\mathcal{H}_1^{(2)},\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\underline{\mathbf{d}}}}(v)\,R_{\mathcal{H}_1^{(1)},\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\underline{\mathbf{d}}}}(u)\,R_{\mathcal{H}_1^{(1)},\mathcal{H}_1^{(2)}}(u-v).$$

由 (9.9)，$R_{\mathcal{H}_1^{(1)},\mathcal{H}_1^{(2)}}(z)$ 与 (9.11) 一致（相差一个常数）。于是由定义 9.11 可得该命题。 □

注记 9.13。对于零势 Jordan 箭图 Q，根据定义 3.13，$\mathcal{H}_1$ 是可容许的，因此由命题 9.12 和定理 4.44，(9.16) 中的映射诱导出一个从 $Y_\mu(\mathfrak{gl}_2)\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathbb{C}(\hbar)$ 到 Jordan 箭图 Q 的 $Y_\mu(Q,0)$ 的满射代数映射。

例 9.14。在 $\mathcal{V}$、$\mathcal{H}_N$ 和 $\mathcal{F}$ 的例子中，通过将 R-矩阵 (9.7)、(9.8) 和 (9.10) 与已知的 Lax 矩阵 [FPT] 进行比较，我们可以明确确定它们的移位杨扬子代数模结构。为简单起见，我们将范围限定于子代数 $Y_\mu(\mathfrak{sl}_2)$；当 $\mu=0$ 时，它也记作 $Y(\mathfrak{sl}_2)$。于是我们有

- $\tau_\hbar^*\mathcal{V}$ 同构于由求值映射 $Y(\mathfrak{sl}_2) \to U(\mathfrak{sl}_2)[\hbar]$ 诱导的、最高权为 t 的通用对偶 Verma 模；
- $\tau_\hbar^*\mathcal{H}_N$同构于基本表示 $\mathbb{C}[\hbar]^{\oplus 2}$的 N 次对称幂，该表示由求值映射 $Y(\mathfrak{sl}_2) \to U(\mathfrak{sl}_2)[\hbar]$诱导得到；
- $\tau_\hbar^*\mathcal{F}$同构于 $Y_{-1}(\mathfrak{sl}_2)$的预基本模 L_0^-。

这里的自同构定义如下：

$$\tau_a \colon Y_\mu(\mathfrak{gl}_2) \cong Y_\mu(\mathfrak{gl}_2), \quad T(z) \mapsto T(z-a).$$

它在杨 Yangian 模上诱导出一个拉回映射：

$$\tau_a^* \colon Y_\mu(\mathfrak{gl}_2)\text{–Mod} \cong Y_\mu(\mathfrak{gl}_2)\text{–Mod}. \tag{9.17}$$

子代数 Y_μ $(\mathfrak{sl}_2)$ 是 τ_a 不变的，因此 τ_a^* 限制为自同构 $Y_\mu(\mathfrak{sl}_2)$–Mod $\cong Y_\mu(\mathfrak{sl}_2)$–Mod .

备注 9.15. $g_1(u)$ 和 $g_2(u)$ 的像可以写成 $\mathcal{M}(\mathbf{d}$上的典范类 _):

$$g_1(u) \mapsto c_{-1/u}\left((1-\hbar^{-1})\mathsf{V}\right), \quad g_2(u) \mapsto u^{\mathbf{d}_{\rm out}-\mathbf{d}_{\rm in}} \cdot c_{-1/u}\left((1-\hbar)\mathsf{V} + \mathsf{D}_{\rm out} - \mathsf{D}_{\rm in}\right),$$

其中 V 是 $\mathbb{C}^n$ 在 GIT 商 $\mathcal{M}(n,\mathbf{d})$ 上的下降，$\mathsf{D}_{\rm in}$ 和 $\mathsf{D}_{\rm out}$ 分别是入射框架向量空间和出射框架向量空间到 $\mathcal{M}(n,\mathbf{d})$ 上的拉回。V、$\mathsf{D}_{\rm in}$ 和 $\mathsf{D}_{\rm out}$ 是 $\mathcal{M}(n,\mathbf{d})$ 上的 T_0-等变向量丛，而 $c_{-1/u}(\cdots)$ 是变量为 $-1/u$ 的 T_0-等变陈多项式。例如，

$$g_{1,0} \mapsto -\hbar\mathbf{v}, \quad g_{2,-\mu} \mapsto c_1(\mathsf{D}_{\rm in}) - c_1(\mathsf{D}_{\rm out}) + \hbar\mathbf{v}\,.$$

在 $\mu=0$的情形下，与命题 4.23 中李代数生成元的比较给出：$g_{1,0} \mapsto -\hbar\mathbf{v}$, $g_{2,0} \mapsto \mathbf{d}+\hbar\mathbf{v}$，以及

$$-g_{2,0}\otimes g_{1,0} - g_{1,0}\otimes g_{2,0} - 2g_{1,0}\otimes g_{1,0} + e_0\otimes f_0 + f_0\otimes e_0 \mapsto \hbar\boldsymbol{r}\,. \tag{9.18}$$

注 9.16。 命题 9.12 是 [YZJ] 在 $\mathbf{d}_{\rm in}=\mathbf{d}_{\rm out}=\mathbf{d}$ 且 $\mathsf{W}=\sum_{i=1}^{\mathbf{d}} B_i\Phi^{N_i}A_i$ 的特殊情形。同上。 中证明了 $Y(\mathfrak{sl}_2)$ 在 $\mathcal{H}_{\mathbf{d}}^{\mathsf{W}}$ 上作用，且该作用通过求值映射 $Y(\mathfrak{sl}_2) \to U(\mathfrak{sl}_2)[\hbar]$，使 $\mathcal{H}_N$ 成为基本模的 N 次对称幂。同上。 中的方法与我们的方法不同。他们使用维数约化，将问题约化到 $\{\Phi^{N_i}A_i\}_{i=1}^{\mathbf{d}}$ 的零点集的 Borel-Moore 同调上，构造生成元的对应并验证关系。

9.5. **余乘法与稳定包络**。 Frassek-Pestun-Tsymbaliuk 移位杨氏代数具有以下余乘法映射 [FPT, Prop.2.316]:

$$\Delta_{\mu',\mu''} \colon Y_{\mu'+\mu''}(\mathfrak{gl}_2) \to Y_{\mu'}(\mathfrak{gl}_2) \otimes Y_{\mu''}(\mathfrak{gl}_2), \qquad T(z) \mapsto T(z)\otimes T(z).$$

余乘法在模范畴上诱导出张量积：

$$\left(Y_{\mu'}(\mathfrak{gl}_2)\text{–Mod}\right) \times \left(Y_{\mu''}(\mathfrak{gl}_2)\text{–Mod}\right) \xrightarrow{\otimes} Y_{\mu'+\mu''}(\mathfrak{gl}_2)\text{–Mod}.$$

在几何一侧，我们有稳定包络：

$$\mathrm{Stab}_{a>0,\epsilon} \colon \mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}'}^{\mathsf{W}'} \otimes \mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}''}^{\mathsf{W}''} \longrightarrow \mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}'+\underline{\mathbf{d}}''}^{\mathsf{W}},$$

该映射利用环面对框架的 $\mathbb{C}_a^*$ 作用定义： $a\mathbf{d}'+\mathbf{d}''$，其正规化子为 (9.6)。根据 §4.2，我们有：

$$\mathrm{Stab}_{a>0,\epsilon}^{-1}\, R_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}'+\underline{\mathbf{d}}''}^{\mathsf{W}}}(u)\, \mathrm{Stab}_{a>0,\epsilon} = R_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}''}^{\mathsf{W}''}}(u)\, R_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}'}^{\mathsf{W}'}}(u-a).$$

因此，$\mathrm{Stab}_{a>0\,\epsilon}$ 诱导出一个 $Y_{\mu'+\mu''}(\mathfrak{gl}_2)$-模映射（其中 $\mu'=(0,\ \mathbf{d}'_{\rm in}-\mathbf{d}'_{\rm out})$、 $\mu''=(0,\ \mathbf{d}''_{\rm in}-\mathbf{d}''_{\rm out})$）：

$$\mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}''}^{\mathsf{W}''} \otimes \tau_a^*\mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}'}^{\mathsf{W}'} \to \mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}'+\underline{\mathbf{d}}''}^{\mathsf{W}},$$

其中 τ_a^* 是杨 Yangian 模拉回映射 (9.17)。

类似地，$\mathrm{Stab}_{a<0,\ \epsilon}$ 诱导出一个 $Y_{\mu'+\mu''}(\mathfrak{gl}_2)$-模映射

$$\tau_a^*\mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}'}^{\mathsf{W}'} \otimes \mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}''}^{\mathsf{W}''} \to \mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}'+\underline{\mathbf{d}}''}^{\mathsf{W}}.$$

命题 9.17。The R-矩阵

$$R_{\mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}'}^{\mathsf{W}'},\mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}''}^{\mathsf{W}''}}(a) := \left(\mathrm{Stab}_{a<0,\epsilon}\right)^{-1} \circ \mathrm{Stab}_{a>0,\epsilon} \colon \mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}''}^{\mathsf{W}''} \otimes \tau_a^*\mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}'}^{\mathsf{W}'} \longrightarrow \tau_a^*\mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}'}^{\mathsf{W}'} \otimes \mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}''}^{\mathsf{W}''}$$

是一个 $Y_{\mu'+\mu''}(\mathfrak{gl}_2)$-模映射。

此外，如果 $\mathbf{d}'_{\rm out}=0$ 那么 $R_{\mathcal{H}^{\mathsf{W}'}\mathbf{d}',\ \mathcal{H}^{\mathsf{W}''}\mathbf{d}''}(a)$ 是关于 a 的多项式；如果 $\mathbf{d}''_{\rm out}=0$ 那么 $R_{\mathcal{H}^{\mathsf{W}'}\mathbf{d}',\ \mathcal{H}^{\mathsf{W}''}\mathbf{d}''}(a)^{-1}$ 是关于 a 的多项式。

证明。 关于交织性质的陈述由上述讨论得出。关于多项式性的陈述由 [COZZ1，命题 3.35] 得出。□

注 9.18。 与 [MO，第 4.5 号命题1], 类似，上述交织算子是幺正的：

$$R_{\mathcal{H}^{\mathsf{W}'}_{\underline{\mathbf{d}}'},\mathcal{H}^{\mathsf{W}''}_{\underline{\mathbf{d}}''}}(a)^{-1} = R_{\mathcal{H}^{\mathsf{W}''}_{\underline{\mathbf{d}}''},\mathcal{H}^{\mathsf{W}'}_{\underline{\mathbf{d}}'}}(-a).$$

例 9.19。 记 $\mathcal{F}^{(i)} = \mathbb{C}[\hbar][\mathbf{x}_i]$ 和 $\mathbf{y}^i = \hbar\,\partial_{\mathbf{x}_i}$ 为 $i \in \{1, 2\}$，于是有 $\mathcal{F}^{(1)} \otimes \mathcal{F}^{(2)} = \mathbb{C}[\hbar][\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$。则该$R$-矩阵具有如下显式形式

$$R_{\mathcal{F}^{(1)},\mathcal{F}^{(2)}}(a) = (1 - \mathbf{x}_2\mathbf{y}_1)^{a/\hbar}\, S_{12}, \tag{9.19}$$

其中 $S_{12}(f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) = f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$。事实上，通过直接计算，$(1 - \mathbf{x}_2\mathbf{y}_1)^{a/\hbar}\, S_{12}$满足交织方程：

$$(1 - \mathbf{x}_2\mathbf{y}_1)^{\frac{u-v}{\hbar}}\; S_{12}\, R_{\mathcal{F}^{(1)},\mathcal{H}_1}(u)\, R_{\mathcal{F}^{(2)},\mathcal{H}_1}(v) = R_{\mathcal{F}^{(2)},\mathcal{H}_1}(v)\, R_{\mathcal{F}^{(1)},\mathcal{H}_1}(u)\, (1 - \mathbf{x}_2\mathbf{y}_1)^{\frac{u-v}{\hbar}}\; S_{12}.$$

交织算子　　根据 [HZ，第 5.2 号定理 (i)],，将 $1 \in \mathbb{C}[\hbar][\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ 映射到自身的交织算子是唯一的，因此 (9.19) 成立。

9.6. **定理 9.1 的证明**。 定理 9.1 由注记 9.13 和以下命题 9.20 得出。**命题 9.20**。 对于任意 $\mu \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$，自然映射

$$\iota\colon Y_\mu(\mathfrak{gl}_2) \to \prod_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{W},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}} \mathrm{End}(\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}})$$

是单射，其中乘积遍历 (9.14) 中所有满足 $\underline{\mathbf{d}}$ 以及 W 的项，使得 $\mathbf{d}_{\mathrm{out}} - \mathbf{d}_{\mathrm{in}} = \mu$。

证明。 我们对 μ 进行归纳。当 $\mu = 0$ 时，可以将范围限制为以下形式的表示

$$\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}} \cong \tau^*_{a_1}\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \tau^*_{a_n}\mathcal{H}_1,$$

则诱导映射

$$Y_0(\mathfrak{gl}_2) \to \prod_{a_1,\dots,a_n} \mathrm{End}(\tau^*_{a_1}\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \tau^*_{a_n}\mathcal{H}_1)$$

根据 [MO, §11.3.2]，是单射。

F或者 $\mu < 0$，假设对于 $\mu' = \mu + 1$，ι 是单射的，我们取以下形式的表示

$$\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\underline{\mathbf{d}},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}} \cong \tau^*_{a_1}\mathcal{F} \otimes \tau^*_{a_2}\mathcal{H}^{\mathsf{W}'}_{\underline{\mathbf{d}}'},$$

其中 $\mathbf{d}'_{\mathrm{out}} - \mathbf{d}'_{\mathrm{in}} = \mu'$ 和 $\mathcal{F}$ 是预基本模 (9.2)。此处的张量积由稳定包络诱导，如上一小节所述。于是，$Y_\mu(\mathfrak{gl}_2)$ 在 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}}{}_{\mathbf{d},\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}$ 上的作用经由

$$Y_\mu(\mathfrak{gl}_2) \xrightarrow{\Delta} Y_{(0,1)}(\mathfrak{gl}_2) \otimes Y_{\mu'}(\mathfrak{gl}_2) \twoheadrightarrow D \otimes Y_{\mu'}(\mathfrak{gl}_2)$$

其中 $D = \mathbb{C}[\hbar]\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle/([\mathbf{y},\mathbf{x}] - \hbar)$ 是魏尔代数。由归纳法以及 D 在 $\mathcal{F}$上的作用是忠实的这一事实，诱导映射

$$D \otimes Y_{\mu'}(\mathfrak{gl}_2) \to \prod_{a_1,a_2,\underline{\mathbf{d}}',\mathsf{w}'} \mathrm{End}(\tau^*_{a_1}\mathcal{F} \otimes \tau^*_{a_2}\mathcal{H}^{\mathsf{W}'}_{\underline{\mathbf{d}}'})$$

是单射。因此，只需证明 $Y_\mu(\mathfrak{gl}_2) \to D \otimes Y_{\mu'}(\mathfrak{gl}_2)$ 是单射。

由在 $\mathbb{C}[\hbar]$ 上的平坦性，只需证明取经典极限 $\hbar = 0$ 后的单射性。已知 $Y_\mu(\mathfrak{gl}_2)/(\hbar)$ 是交换代数，它是前有限型仿射簇 $\mathcal{W}_\mu$ 的函数环。 $\mathcal{W}_\mu$ 是群归纳概形 $\mathrm{GL}_2((z^{-1}))$ 的闭子概形，由具有如下形式的矩阵构成：

$$\begin{pmatrix} 1 + a(z) & b(z) \\ c(z) & * \end{pmatrix} \text{ with determinant } z^{-m}(1 + d(z)),$$

其中 $a(z)$ $b(z)$ $c(z)$ $d(z)$ $\in z^{-1}\mathbb{C}[\![z^{-1}]\!]$ 是幂级数。 D的经典极限变为两个变量的多项式环，它自然地与 $\mathrm{GL}_2((z^{-1}))$ 中由如下形式的矩阵构成的子概形 $\mathcal{W}^{(1,0)}{}_{(0,1)}$ 相识别：

$$\frac{1}{z}\begin{pmatrix} z + xy & x \\ y & 1 \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{C}^2.$$

映射 $Y_\mu(\mathfrak{gl}_2) \to D \otimes Y_{\mu'}(\mathfrak{gl}_2)$ 的 $\hbar = 0$ 极限是由 $\mathrm{GL}_2((z^{-1}))$ 中的乘法诱导的函数环之间的映射：

$$\mathcal{W}^{(1,0)}_{(0,1)} \times \mathcal{W}_{\mu'} \to \mathcal{W}_\mu\,.$$

容易看出，上述映射是满射。由于 $\mathbb{C}[\mathcal{W}_\mu]$ 是一个整环，诱导映射$\mathbb{C}[\mathcal{W}_\mu] \to \mathbb{C}\left[\mathcal{W}^{(1,0)}_{0,1}{}_{()}\right] \otimes \mathbb{C}[\mathcal{W}_{\mu'}]$ 是单射。□

9.7. **作为模交织算子的特化映射**。 我们推广命题 9.8 的构造，该构造将在 §9.8 中使用。取一个作用于 $\mathcal{M}(n,\mathbf{d})$ 的 $\mathbb{G}_m$-作用，该作用以权 1 缩放箭图 (9.14) 中的 B-，并固定所有其他箭。令 $\mathsf{w} = \mathsf{tr(W)}$ 和 T_0 如 (9.14) 中所述。此 $\mathbb{G}_m$-作用可嵌入 [COZZ1 的 Setting 7.1], 中的 $\mathbb{G}_m$-作用，并可用于构造特化映射（如 [COZZ1, Def. 7.14] 中所述）：

$$\mathsf{sp}\colon \mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\underline{\mathbf{d}}} = H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}}), \mathsf{w}) \to H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}})) = \mathcal{H}^0_{\underline{\mathbf{d}}}. \tag{9.20}$$

命题 9.21. 我们有

$$R_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}^0_{\underline{\mathbf{d}}}}(u) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathsf{sp}) = (\mathrm{id} \otimes \mathsf{sp}) \circ R_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}^{\mathsf{w}}_{\underline{\mathbf{d}}}}(u).$$

特别地，sp 是一个 $Y_\mu(\mathfrak{gl}_2)$-模映射。

证明。 考虑箭图 (9.15) 及其模空间 $\mathcal{M}(n,\mathbf{d}+\mathbf{1})$，其中 $\mathsf{T} = \mathsf{A} \times \mathsf{T}_0$, , 且 $\mathsf{A} \cong \mathbb{C}^*_u$ 通过 $u\mathbf{1}+\mathbf{d}$ 作用于框架。再取另一个 $\mathbb{C}^*$-作用，该作用以权 1 作用于箭图 (9.15) 中的 B，并固定所有其他箭。如 [COZZ1, Def. 7.14], 中所述，存在一个特化映射：

$$H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}}+\underline{\mathbf{1}}), B_1\Phi A_1 + \mathrm{tr}(\mathsf{m})) \to H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}}+\underline{\mathbf{1}}), B_1\Phi A_1).$$

取 A-不动点轨迹后，诱导的特化映射为

$$\mathrm{id} \otimes \mathsf{sp}\colon H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\mathbf{1}), B_1\Phi A_1) \otimes H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}}), \mathrm{tr}(\mathsf{m})) \to H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\mathbf{1}), B_1\Phi A_1) \otimes H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}}))$$

w其中 sp 是式 (9.20) 中定义的映射。于是由 [COZZ1，命题 7.18 可得结论]. □

注 9.22。 同样的论证表明

$$R_{\mathcal{H}^{\mathsf{w}'}_{\underline{\mathbf{d}}'},\mathcal{H}^0_{\underline{\mathbf{d}}}}(u) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathsf{sp}) = (\mathrm{id} \otimes \mathsf{sp}) \circ R_{\mathcal{H}^{\mathsf{w}'}_{\underline{\mathbf{d}}'},\mathcal{H}^{\mathsf{w}}_{\underline{\mathbf{d}}}}(u) \tag{9.21}$$

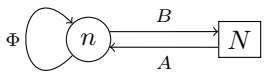
对于式 (9.14) 中任意的 $\mathbf{d}'$ 和 W'，

9.8. **来自几何的融合过程**。 已知 $\mathcal{H}_N$ 与 $\mathcal{H}_M$ 之间的交织算子可以通过基本的 R-矩阵得到

$$R(u) = u\,\mathrm{id} + \hbar P,$$

通过 t 在融合过程 [KRS]中。本节将从几何角度推导融合过程 ly.

考虑以下带势框架箭图：



$$\mathsf{W}_* = B\Phi A - \Xi BA, \quad \mathsf{w}_* = \mathrm{tr}(\mathsf{W}_*),$$

其中 $\Xi \in \mathsf{End}(\mathbb{C}^N)$ 是一个秩为 $(N-1)$ 的固定幂零矩阵。令 $q \in \mathbb{C}^*_\hbar$ 作用于箭图数据 b y

$$(\Phi, B, A) \mapsto (q^{-1}\Phi, q\cdot\sigma(q)B, A\sigma(q)^{-1}), \tag{9.22}$$

其中 σ: $\mathbb{C}^*_\hbar \to \mathsf{GL}_N$ 是一个同态，使得 Ξ 是 $\sigma(\mathbb{C}^*_\hbar)$ 在伴随作用下特征值为 1 的特征向量。给定一个基 $\mathbb{C}^N = \mathsf{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1,\dots,e_N\}$，满足 $\Xi(e_i) = e_{i+1}$，我们可以取 $\sigma(q) = \mathsf{diag}(1,\ q,\ \dots\dots,\ q^{N-1})$。

根据命题 9.12，态空间

$$\mathcal{H}^{\mathsf{W}_*}_{\underline{\mathbf{N}}} := H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(\mathbf{N}), \mathsf{w}_*) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}} H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(n,\mathbf{N}), \mathsf{w}_*)$$

配备了自然的 由稳定包络导出的杨量子代数 $Y(\mathfrak{gl}_2)$ 作用。同样，空间 (9.1):

$$\mathcal{H}_N = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}} H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(n,\mathbf{1}), \mathsf{w}_N), \ \text{with}\ \mathsf{w}_N = \mathrm{tr}(B\Phi^N A)$$

也是一个杨扬代数模。

命题 9.23。 存在一个 $Y(\mathfrak{gl}_2)$ 模同构

$$\delta\colon \mathcal{H}_N \cong \mathcal{H}_{\underline{\mathbf{N}}}^{\mathsf{W}_*}, \tag{9.23}$$

使得

$$R_{\mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}}^{\mathsf{W}},\mathcal{H}_{\underline{\mathbf{N}}}^{\mathsf{W}_*}}(u)\circ(\mathrm{id}\otimes\delta)=(\mathrm{id}\otimes\delta)\circ R_{\mathcal{H}_{\underline{\mathbf{d}}}^{\mathsf{W}},\mathcal{H}_N}(u)$$

对于任意的$\mathbf{d}$ 以及（9.14）中的 W。

我们将证明推迟到本节末尾，现在先使用它。

考虑同一个箭图簇 $\mathcal{M}(\mathbf{N})$，其带有典范三次势 $\mathsf{w}_1=\mathrm{tr}(B\Phi A)$。由维数约化，我们有一个同构

$$\mathcal{H}_{\mathbf{N}}^{\mathsf{W}_1}:=H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathcal{M}(\mathbf{N}),\mathsf{w}_1)\cong H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathcal{N}(\mathbf{N})), \tag{9.24}$$

其中 $\mathcal{N}(\mathbf{N})=\bigsqcup_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{N}(m,\mathbf{N})$ 是 Nakajima 簇的并，它们对应于 A_1 箭图 [Nak1].

引理 9.24。 (9.24) 是 $Y(\mathfrak{gl}_2)$ 模的一个同构。

证明。 由命题 9.12， $\mathcal{H}^{\mathsf{W}_1}{}_{\mathbf{N}}$ 是一个 $Y(\mathfrak{gl}_2)$ 模。 $H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathcal{N}(\mathbf{N}))$ 上的 $Y(\mathfrak{gl}_2)$ 模结构由 Nakajima 簇的 [MO] 的稳定包络 $\mathbf{Stab}_{u>0}$ 给出。于是由下图可交换可得结论：

$$\begin{array}{ccc} H^{\mathbb{C}_\hbar^*\times\mathbb{C}_u^*}(\mathcal{M}(n,\mathbf{1})\times\mathcal{M}(m,\mathbf{N}),B_1\Phi A_1+\mathrm{tr}(B\Phi A)) & \xrightarrow{\mathrm{Stab}_{u>0,\epsilon}} & H^{\mathbb{C}_\hbar^*\times\mathbb{C}_u^*}(\mathcal{M}(n+m,\mathbf{1}+\mathbf{N}),B_1\Phi A_1+\mathrm{tr}(B\Phi A)) \\ \cong\uparrow & & \uparrow\cong \\ H^{\mathbb{C}_\hbar^*\times\mathbb{C}_u^*}(\mathcal{N}(n,\mathbf{1})\times\mathcal{N}(m,\mathbf{N})) & \xrightarrow{\mathbf{Stab}_{u>0}} & H^{\mathbb{C}_\hbar^*\times\mathbb{C}_u^*}(\mathcal{N}(n+m,\mathbf{1}+\mathbf{N})), \end{array}$$

其中， $\mathbb{C}_u^*$ 通过 $u\mathbf{1}+\mathbf{N}$作用于框架，竖直同构是维数约化映射（见 [COZZ1，定理 6.10], 例 2.4 和 [COZZ1，注 9.14]）。 □

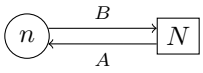
我们将 $Y(\mathfrak{gl}_2)$ 模 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}_1}{}_{\mathbf{N}}$ 与 $\mathcal{H}_{\underline{1}}$ 联系起来。

引理 9.25。 存在一个 $Y(\mathfrak{gl}_2)\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathbb{C}(\hbar)$ 模同构

$$\mathcal{H}_{\underline{\mathbf{N}},\mathrm{loc}}^{\mathsf{W}_1}\cong\tau_{(N-1)\hbar}^*\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}\otimes\cdots\otimes\tau_\hbar^*\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}\otimes\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}\,.$$

这里，“loc”表示 $-\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathbb{C}(\hbar)$，张量积均取自底域 $\mathbb{C}(\hbar$).

证明。 考虑与下列箭图相关联的中岛簇



并令 $(q,p)\in\mathbb{C}_\hbar^*\times\mathbb{C}_t^*$通过以下方式作用于箭图数据

$$(B,A)\mapsto(q\cdot\sigma(p)B,A\sigma(p)^{-1}),$$

其中 σ 是 (9.22) 中 GL_N 的余特征标。稳定包络

$$\mathbf{Stab}_{t<0}\colon H^{\mathbb{C}_\hbar^*\times\mathbb{C}_t^*}(\mathcal{N}(\mathbf{N})^{\mathbb{C}_t^*})\to H^{\mathbb{C}_\hbar^*\times\mathbb{C}_t^*}(\mathcal{N}(\mathbf{N}))$$

根据第 4.2 节中的论证，它是一个 $Y(\mathfrak{gl}_2)$-模映射。在 $t=\hbar$ 处的求值映射相当于取关于对角子环面 $\mathbb{C}_\hbar^*{}_{\mathrm{diag}}\longrightarrow\mathbb{C}_\hbar^*\times\mathbb{C}_t^*$的等变上同调。由于 $\mathcal{N}(\mathbf{N})^{\mathbb{C}_t^*}=\mathcal{N}(\mathbf{1})^{\times N}$，且一维框架向量空间上的对角权为 $\mathbb{C}_\hbar^*$，我们得到一个 $Y(\mathfrak{gl}_2)$-模映射：

$$\mathbf{Stab}_{t<0}\colon\tau_{(N-1)\hbar}^*\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\tau_\hbar^*\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_1\to H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathcal{N}(\mathbf{N})).$$

容易看出，诱导的 $\mathbb{C}_t^*$ 作用在对角不动点轨迹 $\mathbb{C}_\hbar^*(\mathbf{N})^{\mathbb{C}_\hbar^*}{}_{,\mathrm{diag}}$ 上是排斥的。于是根据[COZZ1，命题 3.36]，上述映射经局部化后是单射。由维数计数可得：

$$\dim_{\mathbb{C}(\hbar)}\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}^{\otimes N}=2^N=\dim_{\mathbb{C}(\hbar)}H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathcal{N}(\mathbf{N}))_{\mathrm{loc}},$$

映射

$$\mathbf{Stab}_{t<0}\colon\tau_{(N-1)\hbar}^*\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}\otimes\cdots\otimes\tau_\hbar^*\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}\otimes\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}\to H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathcal{N}(\mathbf{N}))_{\mathrm{loc}}$$

[9] **稳定子**$_{u>0}$ = 稳定子$_{u>0,\ \epsilon'}$ 其中 ϵ' 是正规化子 $\epsilon'\big|_F=(-1)^{\mathrm{rk}\,T^{1/2}|^+_{F/\mathcal{N}(\mathbf{N}+\mathbf{1})}}$，对应于极化 $T^{1/2}=\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{N+1},\ V)-\mathrm{End}(V)$。

是一个同构。结合维数约化 (9.24)，我们得到所需的模同构。 □

注记 9.26. 由于稳定包络与维数约化相容（[COZZ1，定理 6.10]），映射

$$\mathrm{Stab}_{t<0,\epsilon}\colon H^{\mathbb{C}_\hbar^*\times\mathbb{C}_t^*}(\mathcal{M}(\mathbf{N})^{\mathbb{C}_t^*},\mathsf{w}_1)\big|_{t=\hbar}\to H^{\mathbb{C}_\hbar^*\times\mathbb{C}_t^*}(\mathcal{M}(\mathbf{N}),\mathsf{w}_1)\big|_{t=\hbar}$$

在局部化后是一个同构。辫关系 (2.8) 意味着：

$$\mathsf{Stab}_{t<0,\epsilon}^{-1}\,R_{\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\underline{\mathbf{d}}},\mathcal{H}^{\mathsf{W}_1}_{\underline{\mathbf{N}}}}(u)\,\mathrm{Stab}_{t<0,\epsilon}=R_{\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\underline{\mathbf{d}}},\mathcal{H}_1^{(1)}}(u-(N-1)\hbar)\cdots R_{\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\underline{\mathbf{d}}},\mathcal{H}_1^{(N-1)}}(u-\hbar)\,R_{\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\underline{\mathbf{d}}},\mathcal{H}_1^{(N)}}(u)$$

对于 (9.14) 中任意的$\mathbf{d}$ 和 W。

考虑 W_* 和 W_1对应的特化映射 (9.20)：

$$\mathsf{sp}_*\colon\mathcal{H}^{\mathsf{W}_*}_{\underline{\mathbf{N}}}\to\mathcal{H}^0_{\underline{\mathbf{N}}},\qquad \mathsf{sp}_1\colon\mathcal{H}^{\mathsf{W}_1}_{\underline{\mathbf{N}}}\to\mathcal{H}^0_{\underline{\mathbf{N}}}.$$

引理 9.27. 映射 sp_* 和 sp_1 是单射。此外，sp_* 的像包含于 sp_1 的像中。

证明. • （sp_* 的单射性）。由命题 9.23 和例 9.14，$\mathcal{H}^{\mathsf{W}_*}_{\mathbf{N}}\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathbb{C}(\hbar)$ 是一个不可约的 $Y(\mathfrak{gl}_2)\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathbb{C}(\hbar)$ 模，因为它作为 $\mathfrak{sl}_2$ 模本身已不可约。根据命题 9.21，sp_* 是一个 $Y(\mathfrak{gl}_2)$ 模映射，而零次分量 $\mathsf{sp}_*\colon\mathcal{H}^{\mathsf{W}_*}_{\mathbf{N}}(0)\to\mathcal{H}^0_{\mathbf{N}}(0)$ 是恒等映射；因此，局部化后 sp_* 必定是单射。正如我们在第 9.1 节中所见，$\mathcal{H}_N$ 是一个自由的 $\mathbb{C}[\hbar]$ 模，因此 sp_* 是单射。

• （sp_1 的单射性）。由引理 9.25 证明中的维数约化论证，$\mathcal{H}_{\mathsf{W}^1\mathbf{N}}$ 与中岛簇 $\mathcal{N}(\mathbf{N})$ 的 BM 同调同构，而根据 [Nak3 定理 7.3，5] 后者是一个自由的 $\mathbb{C}[\hbar]$ 模。于是，sp_1 单射性的证明归结为证明其局部化后的单射性。

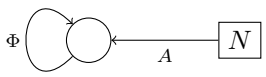
由于 w_1 关于 B是线性的，且 B 不涉及稳定性条件，因此沿 B进行维数约化后，我们得到

$$H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(Z(\Phi A))\cong H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathcal{M}(\mathbf{N}),\mathsf{w}_*),$$

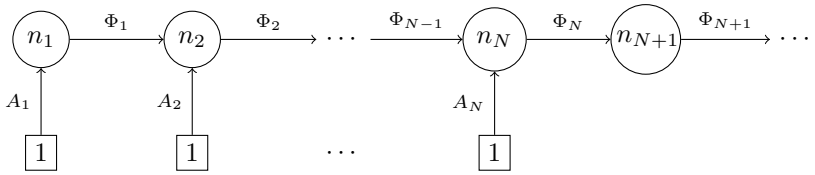
其中 $Z(\Phi A)$ 是 $\mathcal{M}(\mathbf{N})$中 ΦA的零点集，且该同构由典范映

$$H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(Z(\Phi A))\to H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(Z(\mathsf{w}_*))\xrightarrow{\mathrm{can}}H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathcal{M}(\mathbf{N}),\mathsf{w}).$$

根据 [COZZ1，注记 7.16],，只需证明推前映射 $H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(Z(\Phi A))\to H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathcal{M}(\mathbf{N}))$ 在局部化后是单射。等价地，我们需要证明推前映射 $H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(Z'(\Phi A))\to H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathcal{M}(\mathbf{0}^{\mathbf{N}}))$ 在局部化后是单射，其中 $\mathcal{M}(\mathbf{0}^{\mathbf{N}})$ 是以下箭图簇：



且 $Z'(\Phi A)$ 是 $\mathcal{M}(\mathbf{0}^{\mathbf{N}})$ 中 ΦA 的零点。容易看出，不动点轨迹 $Z'(\Phi A)^{\mathbb{C}_\hbar^*}$ 是离散的，并且 $\mathcal{M}(\mathbf{0}^{\mathbf{N}})^{\mathbb{C}_\hbar^*}$ 的每个连通分支都是真簇。注意，任意真簇 X 中的点类 $[x]$ 在其 Borel-Moore 同调中非零。因此，我们只需证明 $\mathcal{M}(\mathbf{0}^{\mathbf{N}})^{\mathbb{C}_\hbar^*}$ 的每个连通分支 F 在 $Z'(\Phi A)$ 中至多包含一个点，即方程 $\Phi A=0$ 在 F 上至多有一个解。具体而言，对于某个具有循环稳定性的 $(n_1,\dots,n_N,n_{N+1},\dots)$，$F$ 同构于以下箭图簇：



我们看到，$\Phi A=0$ 在 F上至多有一个解。

• （包含 $\mathsf{im}(\mathsf{sp}_*)\subseteq\mathsf{im}(\mathsf{sp}_1)$）。由于 w_* 关于 B是线性的，且 B 不影响稳定性条件，我们可以沿 B 进行维数约化，并且以下映射的复合是同构

$$H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(Z(\Phi A-A\Xi))\to H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(Z(\mathsf{w}_*))\xrightarrow{\mathrm{can}}H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathcal{M}(\mathbf{N}),\mathsf{w}_*),$$

其中 $Z(\Phi A - A\Xi)$ 是 $\mathcal{M}(\mathbf{N})$ 中 $\Phi A - A\Xi$ 的零点集。特别地，$H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(Z(\mathsf{w}_*))$ 可以 $\longrightarrow H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(\mathbf{N}),\ \mathsf{w}_*)$ 是满射。引入一个辅助的 $\mathbb{C}^*$，使其以权 1 缩放 B，以权 -1 缩放 Φ，并固定 A；那么这个 $\mathbb{C}^*$ 作用符合 [COZZ1，设定 7。1] 并且我们有一个特化映射[10]

$$\mathsf{sp}_Z\colon H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(Z(\mathsf{w}_*)) \to H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(Z(\mathsf{w}_1)).$$

由 [COZZ1，注 7.16], sp_* ∘可将 = 从 $Z(\mathsf{w}_*)$推前到 $\mathcal{M}(\mathbf{N})$，且 sp_1 ∘ 可将 = 从 $Z(\mathsf{w}_1)$推前到$\mathcal{M}(\mathbf{N})$。结合 [COZZ1，注 7.9],，得到以下图表

$$\begin{array}{ccccc} H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(Z(\mathsf{w}_*)) & & \xrightarrow{\qquad\mathsf{sp}_Z\qquad} & & H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(Z(\mathsf{w}_1)) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{can}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{can}} \\ H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(\mathbf{N}),\mathsf{w}_*) & \xrightarrow{\mathsf{sp}_*} & H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(\mathbf{N})) & \xleftarrow{\mathsf{sp}_1} & H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(\mathbf{N}),\mathsf{w}_1) \end{array}$$

图表可交换。由典范映射的满射性可得 $\mathrm{im}(\mathsf{sp}_*) \subseteq \mathrm{im}(\mathsf{sp}_1)$。 □

由引理 9.27，我们得到一个诱导的单射

$$\overline{\mathsf{sp}}\colon \mathcal{H}^{\mathsf{W}_*}_{\underline{\mathbf{N}}} \hookrightarrow \mathcal{H}^{\mathsf{W}_1}_{\underline{\mathbf{N}}}.$$

等式 (9.21) 表明

$$R_{\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\underline{\mathbf{d}}},\mathcal{H}^{\mathsf{W}_1}_{\underline{\mathbf{N}}}}(u)\circ(\mathrm{id}\otimes\overline{\mathsf{sp}}) = (\mathrm{id}\otimes\overline{\mathsf{sp}})\circ R_{\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\underline{\mathbf{d}}},\mathcal{H}^{\mathsf{W}_*}_{\underline{\mathbf{N}}}}(u) \tag{9.25}$$

对于 (9.14) 中任意的$\mathbf{d}$ 和 W。特别地，sp 是一个 $Y(\mathfrak{gl}_2)$ 模映射。

为陈述融合公式，我们定义 η 为以下复合

$$\eta\colon \mathcal{H}_{N,\mathrm{loc}} \xrightarrow[\cong]{(9.23)} \mathcal{H}^{\mathsf{W}_*}_{\underline{\mathbf{N}},\mathrm{loc}} \xhookrightarrow{\overline{\mathsf{sp}}} \mathcal{H}^{\mathsf{W}_1}_{\underline{\mathbf{N}},\mathrm{loc}} \xrightarrow[\cong]{\text{Lem. 9.25}} \tau^*_{(N-1)\hbar}\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}\otimes\cdots\otimes\tau^*_{\hbar}\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}\otimes\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}\,. \tag{9.26}$$

于是 η 是一个 $Y(\mathfrak{gl}_2)\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathbb{C}(\hbar)$ 模嵌入。

定理 9.28. η 诱导一个同构

$$\eta\colon \mathcal{H}_{N,\mathrm{loc}} \cong S^N(\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}})$$

到 $\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}$的第 N 个对称张量 $S^N(\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}})$。此外，我们有

$$(\mathrm{id}\otimes\eta)\circ R_{\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\underline{\mathbf{d}}},\mathcal{H}_N}(u) = R_{\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\underline{\mathbf{d}}},\mathcal{H}_1^{(1)}}(u-(N-1)\hbar)\cdots R_{\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\underline{\mathbf{d}}},\mathcal{H}_1^{(N-1)}}(u-\hbar)\,R_{\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\underline{\mathbf{d}}},\mathcal{H}_1^{(N)}}(u)\circ(\mathrm{id}\otimes\eta)\,,$$

对任意 $\mathbf{d}$ 以及 (9.14) 中的 W。这里 $\mathcal{H}_1^{(i)}$ 表示 (9.26) 右端的第 i 个分支。

证明。 作为 $Y(\mathfrak{sl}_2)\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathbb{C}(\hbar)$ 模，$\mathcal{H}_{N,\mathrm{loc}}$ 在抽象意义下同构于由求值映射$Y(\mathfrak{sl}_2)\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}\mathbb{C}(\hbar) \to U(\mathfrak{sl}_2)\otimes\mathbb{C}(\hbar)$ 诱导的 $S^N(\mathbb{C}(\hbar)^{\oplus 2})$（例 9.14）。因此，$\eta$的像必为 $S^N(\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}})$，因为它是 $\mathcal{H}_1^{\otimes N}{}_{,\mathrm{loc}}$ 中唯一一个作为 $\mathfrak{sl}_2$ 模与 $S^N(\mathbb{C}(\hbar)^{\oplus 2})$ 同构的直和项。其余结论由我们已经得到的结果推出。□

将上述定理中的 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\mathbf{d}} = \mathcal{H}_M$ 代入，我们得到:

推论 9.29。 我们有 R-矩阵 $R_{\mathcal{H}_M,\mathcal{H}_N}(u)$ 的融合公式：

$$(\eta\otimes\eta)\circ R_{\mathcal{H}_M,\mathcal{H}_N}(u) = \left(\prod_{\alpha=1}^{\overleftarrow{M}}\prod_{\beta=1}^{\overrightarrow{N}}\frac{(u+(\beta-\alpha+M-N)\hbar)\,\mathrm{id}+\hbar P_{\alpha\beta}}{u+(\beta-\alpha+M-N+1)\hbar}\right)\circ(\eta\otimes\eta)$$

其中，$P_{\alpha\beta}\in\mathrm{End}\left(\mathcal{H}_1^{\otimes M}\otimes\mathcal{H}_1^{\otimes N}\right)$ 是一个算子，它置换 $\mathcal{H}_1^{\otimes M}$ 中第 α 个分支和 $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$中第 β 个分支；乘积按指标沿着箭的方向递增的顺序排列。

命题 *9.23* 的证明。 为便于表述，与 $\mathcal{M}(\mathbf{1})$ 相关的箭图数据将用小写字母表示：(φ,a,b)；与 $\mathcal{M}(\mathbf{N})$ 相关的箭图数据仍用 (Φ,A,B) 表示。

回顾记号 $\mathbf{0^k} = (k,\underline{0})$，并令

$$Y' = \mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{0}^{\mathbf{1}}}),\quad X' = \mathrm{Tot}(E') = \mathcal{M}(n,\mathbf{1})$$
$$s' = \varphi^N a \in \Gamma(Y', E'^{\vee}),\quad \phi' = 0,\quad \mathsf{w}_N = \langle s', b\rangle,$$

[10]然而，这个辅助的 $\mathbb{C}^*$作用不满足 [COZZ1，假设 7。12], 因此我们无法用它来定义临界上同调之间的特化映射$H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(\mathbf{N}),\ \mathsf{w}_*) \to H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(\mathbf{N}),\ \mathsf{w}_1)$。

其中 E' 是由 $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n,\ \mathbb{C})$下降得到的向量丛，其坐标由 b给出，而 $\langle -,\ -\rangle$ 是自然配对。令

$$Y := \mathcal{M}(n, \underline{\mathbf{0}}^{\mathbf{N}}), \quad X = \mathrm{Tot}(E) = \mathcal{M}(n, \mathbf{N}), \tag{9.27}$$
$$s = \Phi A - A\Xi \in \Gamma(Y, E^\vee), \quad \phi = 0, \quad \mathsf{w}_* = \langle s, B\rangle.$$

其中 E 是从 $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n,\ \mathbb{C}^N)$ 下降而来的向量丛，其坐标由 B 给出。注意，上同调维数约化对 $(X',\ Y',\ s',\ \phi')$ 和 $(X,\ Y,\ s,\ \phi)$ 成立（见 [COZZ1，定义 6.1]）。

我们证明这两组数据按照 [COZZ1，定义 6.2] 的意义是相容的。

引理 9.30。(1) 映射

$$i\colon R(n,\mathbf{1}) \to R(n,\mathbf{N}), \quad (\varphi, a, b) \mapsto (\Phi, A, B)$$

with $\Phi = \varphi$, $A = (a, \varphi a, \dots, \varphi^{N-1}a)$, $B = \begin{pmatrix} b\varphi^{N-1} \\ \vdots \\ b\varphi \\ b \end{pmatrix}$ is a $(\mathrm{GL}_n \times \mathbb{C}^*_\hbar)$-equivariant closed immersion such that

$$i^*\mathsf{w}_* = \mathsf{w}_N, \quad \mathrm{Crit}(\mathsf{w}_N) \overset{i}{\cong} \mathrm{Crit}(\mathsf{w}_*).$$

这诱导出一个闭嵌入 $i\colon X' \hookrightarrow X$，其在 Y' 上的限制给出 $i\colon Y' \hookrightarrow Y$。

(2) $(\mathrm{GL}_n \times \mathbb{C}^*_\hbar)$-等变投影

$$\mathrm{pr}\colon \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^N) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} \mapsto b_N$$

诱导出一个满射向量丛映射

$$\mathrm{pr}\colon E|_{Y'} \twoheadrightarrow E' \tag{9.28}$$

使得条件 在 [COZZ1，定义 6.2] 中成立。此外，存在一个向量丛同构

$$\ker(\mathrm{pr}) \cong N^\vee_{Y'/Y}.$$

证明。(1) 很容易验证，映射 i 是 $(\mathrm{GL}_n \times \mathbb{C}^*_\hbar)$-等变的，且 nd

$$i^*\,\mathrm{tr}(\Phi AB) = N \cdot \mathrm{tr}(b\varphi^N a), \quad i^*\,\mathrm{tr}(A\Xi B) = (N-1)\cdot \mathrm{tr}(b\varphi^N a),$$

因此第一个结论成立。为证明第二个结论，注意到 $\partial_{\mathsf{w}_{\partial A}{}^*} = 0$, $\partial_{\mathsf{w}_{\partial B}{}^*} = 0$ 给出

$$B\Phi = \Xi B, \quad \Phi A = A\Xi.$$

这意味着 A 具有 $(a, \varphi a, \dots, \varphi^{N-1}a)$ 的形式，而 B 具有 $\begin{pmatrix} b\varphi^{N-1} \\ \dots \\ b\varphi \\ b \end{pmatrix}$ 的形式，使得

$$\varphi^N a = 0, \quad b\varphi^N = 0.$$

这与 $\partial_{\mathsf{w}_{\partial a}{}^N} = 0$, $\partial_{\mathsf{w}_{\partial b}{}^N} = 0$ 完全一致。其余等式也很容易验证是一致的。

(2) 通过直接计算，我们得到 $\phi|_{Y'} = \phi'$, $s|_{Y'} = \mathrm{pr}^\vee \circ s'$。如 (1) 所示，零点集 $Z(s)$ 中的元素具有 $(a, \varphi a, \cdots, \varphi^{N-1}a)$ 的形式，因此它包含于 Y' 中。存在一个显然的同构

$$\ker(\mathrm{pr}) \cong N^\vee_{Y'/Y}$$

b由构造可知。根据 [COZZ1, 命题 6.4], , [COZZ1, 定义 6.2] 中的所有条件均满足 . □

结合引理 9.30 和 [COZZ1, 命题 6.9], , 映射

$$\delta_H = (Y' \times_Y X \hookrightarrow X)_* \circ \mathrm{pr}^*\colon H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(n,\mathbf{1}), \mathsf{w}_N) \to H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathcal{M}(n,\mathbf{N}), \mathsf{w}_*)$$

是一个同构，其中 pr 是投影 (9.28)。

此外，对于 任意的$\mathbf{d}$ 以及 (9.14) 中的 W，我们都可以重复上述构造并得到一个映射

$$\delta_{H,\underline{\mathbf{d}}}\colon H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(n, \underline{\mathbf{d}} + \mathbf{1}), \mathsf{w} + \mathsf{w}_N) \to H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(n, \underline{\mathbf{d}} + \mathbf{N}), \mathsf{w} + \mathsf{w}_*),$$

它由一个相容的维数约化对诱导。这里 T 是一个环面，包含 $\mathbb{C}_\hbar^*\times\mathbb{C}_u^*$，且框架分别具有 $\mathbb{C}_u^*$ 权 $u\mathbf{d}+\mathbf{1}$ 和 $u\mathbf{d}+\mathbf{N}$。$\delta_{H,\mathbf{d}}$ 根据 [COZZ1，命题 6.9] 是一个同构。令

$$\delta=(-1)^{(N-1)n}\cdot\delta_H,\quad \delta_{\underline{\mathbf{d}}}=(-1)^{(N-1)n}\cdot\delta_{H,\underline{\mathbf{d}}},$$

于是由 [COZZ1，定理 6.10]，，图表

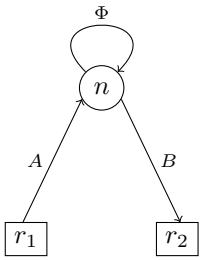
$$\begin{array}{ccc} H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}}),\mathsf{w})\otimes H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\mathbf{N}),\mathsf{w}_*) & \xrightarrow{\mathrm{Stab}_{u\gtrless 0,\epsilon}} & H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}}+\mathbf{N}),\mathsf{w}+\mathsf{w}_*)\\ \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\delta} & & \uparrow{\scriptstyle \delta_{\underline{\mathbf{d}}}}\\ H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}}),\mathsf{w})\otimes H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\mathbf{1}),\mathsf{w}_N) & \xrightarrow{\mathrm{Stab}_{u\gtrless 0,\epsilon}} & H^{\mathsf{T}}(\mathcal{M}(\underline{\mathbf{d}}+\mathbf{1}),\mathsf{w}+\mathsf{w}_N). \end{array}$$

可交换，其中正规化子 ϵ 由 (9.6) 给出。因此

$$R_{\mathcal{H}^{\mathsf{w}}_{\underline{\mathbf{d}}},\mathcal{H}^{\mathsf{w}_*}_{\underline{\mathbf{N}}}}(u)\circ(\mathrm{id}\otimes\delta)=(\mathrm{id}\otimes\delta)\circ R_{\mathcal{H}^{\mathsf{w}}_{\underline{\mathbf{d}}},\mathcal{H}_N}(u).$$

取 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}}_{\mathbf{d}}=\underline{\mathcal{H}}_1$ 可得 δ 是一个 $Y(\mathfrak{gl}_2)$ 模同构。命题 9.23 的证明至此完成。 □

9.9. **除子的量子乘法**。考虑以下零势带框箭图中的框架维数 $\mathbf{d}=(r_1,\ r_2)$，其中 $\underline{r_1}\geqslant r_2$：



$\mathsf{W}=0.$

记作 $X_{n,\ r_1,\ r_2}=\mathcal{M}(n,\ \mathbf{d})$。将定理 5.13 应用于 $X_{n,\ r_1,\ r_2}$，便可得到 $X_{n,\ r_1,\ r_2}$ 上修正的除子量子乘法的显式公式。注意到 $X_{n,\ 1,\ r_2}$ 是仿射空间，因此我们将重点讨论 $r_1>1$ 情形。

命题 9.31。 假设 $r_1>1$。设 $\mathcal{O}(1)$ 为 $X_{n,\ r_1,\ r_2}$ 上典范丛 V 的行列式，则

$$c_1(\mathcal{O}(1))\widetilde{\star}\cdot=\begin{cases}c_1(\mathcal{O}(1))\cup\cdot-\hbar^{-1}\frac{z}{1-z}e_0f_0, & \text{if } r_1=r_2\ ,\\ c_1(\mathcal{O}(1))\cup\cdot-\hbar^{-1}z\,e_0f_0, & \text{if } r_1>r_2\ ,\end{cases}$$

其中 e_0，f_0 是定义 9.11 中 $Y_{r_2-r_1}(\mathfrak{gl}_2)$ 的生成元的一部分。

证明。 由定理 4.45， 以及经典 R-矩阵的公式 (9.18)，$\mathrm{Y}_0(Q,\ 0)$ 的卡西米尔算子为

$$\mathrm{Cas}_1=\hbar^{-1}e_0f_0,\quad \mathrm{Cas}_i=0,\ \text{if } i>1.$$

由定理 5.10 可得

$$c_1(\mathcal{O}(1))\widetilde{\star}\cdot=c_1(\mathcal{O}(1))\cup\cdot-\hbar^{-1}\frac{z}{1-z}e_0f_0+\mathrm{const}.$$

该常数由作用于 $1\in H^{\mathsf{T}_0}(X_{n,\ r_1,\ r_2})$ 的 $\hbar^{-1}\frac{z}{1-z}e_0f_0$ 给出。根据定理 3.7， $f_0(\mathbf{1})$ 由基本类 $[\mathfrak{P}(n,\ n-1,\ \mathbf{d})]^{\mathrm{t}}$ 到 $X_{n-1,\ r_1,\ r_2}$ 的推前给出。由 (3.9) 可知， $\mathfrak{P}(n,\ n-1,\ \mathbf{d})$ 是 $\mathbb{P}^{r_1-1}$ 上的一个丛，其底空间为 $X_{n-1,\ r_1,\ r_2}$，因此 $f_0(\mathbf{1})=0$。这证明了 $r_1=r_2$ 情形。

对于 $r_1>r_2$ 情形，只需证明

$$\mathrm{Cas}_{1,r_2-r_1}=\hbar^{-1}e_0f_0,$$

其中 e_0，f_0 是 $Y_{r_2-r_1}(\mathfrak{gl}_2)$ 的一部分生成元。我们在 $Y_{r_2-r_1}(\mathfrak{gl}_2)$ 的生成元上加横线，以区别于它们在 $Y_0(\mathfrak{gl}_2)$ 中的对应元。由引理 4.27 的证明可得以下算子等式：

$$(p^*)^{-1}e(u)\,p^*=H_z\,\bar{e}(u)\,H_z^{-1}=\frac{(z-c_1(\mathcal{L}))^{r_1-r_2}}{u-c_1(\mathcal{L})}\,[\overline{\mathfrak{P}}(n+1,n,\underline{\mathbf{d}})]=z^{r_1-r_2}\bar{e}(u)+\text{lower order in } z,$$

$$(p^*)^{-1}f(u)\,p^*=(-1)^{r_1-r_2}\bar{f}(u).$$

通过按 u 幂展开，我们得到

$$(p^*)^{-1}e_r\,p^*=z^{r_1-r_2}\,\bar{e}_r+\text{lower order in } z,\quad (p^*)^{-1}f_r\,p^*=(-1)^{r_1-r_2}\bar{f}_r.$$

这意味着

$$(p^*)^{-1}\mathrm{Cas}_1\, p^* = \hbar^{-1}(p^*)^{-1}e_0 f_0\, p^* = (-z)^{r_1-r_2}\,\hbar^{-1}\,\bar{e}_0\bar{f}_0 + \text{lower order in } z,$$

因此，根据定义 4.50，$\mathsf{Cas}_{1,\ r_2-r_1} = \lim_{z\to\infty}(-z)^{r_2-r_1}(p^*)^{-1}\mathsf{Cas}_1\, p^* = \hbar^{-1}\bar{e}_0\bar{f}_0$。 □

注 9.32。 取 $r_1 = r_2 = r$，并令 $\mathsf{w} = \mathrm{tr}(\Phi AB)$，由维数约化可得

$$H^{\mathsf{T}_0}(X_{n,r,r},\mathsf{w}) \cong H^{\mathsf{T}_0}(T^*\,\mathrm{Gr}(n,r)).$$

修正量子 在 $T^*\,\mathrm{Gr}(n,\ r)$ 上由 $c_1(\mathcal{O}(1))$ 作用的乘法见 [MO，命题 11.2.2][11]，，其中 b y

$$c_1(\mathcal{O}(1))\,\widetilde{\star}\,\cdot = c_1(\mathcal{O}(1))\cup\cdot - \hbar^{-1}\frac{z}{1-z}e_0 f_0 + \mathrm{const},$$

for 是某个非零常数。另一方面，我们有一个单射特化映射

$$H^{\mathsf{T}_0}(X_{n,r,r},\mathsf{w}) \to H^{\mathsf{T}_0}(X_{n,r,r}).$$

因此，根据定理 5.13， $H^{\mathsf{T}_0}(X_{n,r,r},\mathsf{w})$ 上由 $c_1(\mathcal{O}(1))$ 给出的修正量子乘法为

$$c_1(\mathcal{O}(1))\cup\cdot - \hbar^{-1}\frac{z}{1-z}e_0 f_0.$$

这个例子表明，使用稳定映射定义的除子量子乘法 (5.5) 通常不与维数约化相容。我们预期，使用扭曲映射定义量子乘法时两者相容，见注 5.4。

10. Example: tripled Jordan quiver and modules of shifted affine Yangians of $\mathfrak{gl}_1$

本节中，我们聚焦于带势的三重 Jordan 箭图：

(10.1)
$$Q:\quad \begin{array}{ccc} & Z & \\ \circlearrowleft & \bullet & \circlearrowright \\ X & & Y \end{array} \qquad \mathsf{W} = Z[X,Y].$$

设 $\mathbb{C}^*_{q_1}$ $\mathbb{C}^*_{q_2}$ 以及 $\mathbb{C}^*_{q_3}$ 是缩放环 X, Y 和 Z 的环面，其权分别为 -1。令

$$\mathsf{S} = \mathbb{C}^*_{q_1}\times\mathbb{C}^*_{q_2}\times\mathbb{C}^*_{q_3},$$

and

$$\mathsf{T}_0 = \ker(\mathsf{S}\to\mathbb{C}^*),\quad (t_1,t_2,t_3)\mapsto t_1t_2t_3.$$

令 $\hbar_i$ 为 $\mathbb{C}^*_{q_i}$的等变参数，则

$$\mathbb{C}[\mathfrak{t}_0] = \mathbb{C}[\hbar_1,\hbar_2,\hbar_3]/(\hbar_1+\hbar_2+\hbar_3).$$

本节在考察相关箭图簇时，固定一个循环稳定性 $\theta < 0$。

我们通过显式生成元与关系定义 $\mathfrak{gl}_1$ 的 ℓ-移位仿射 Yangian $Y_\ell(\mathfrak{gl}_1)$（定义 10.1）。当$\ell \leqslant 0$时，我们构造了一个从该代数到上述 $(Q,\ \mathsf{W})$ 的 Reshetikhin 型移位 Yangian $\mathrm{Y}_\ell(Q,\ \mathsf{W})$ 的自然满射，并证明当 $\ell = 0$ 时它是同构（定理 10.7）。以此为基础，我们推导出 $\mathbb{C}^3$ 上点的 Hilbert 概形的除子的量子乘法显式公式（推论 10.21）。

我们还研究了平移仿射杨氏代数的各种表示，包括 Kirillov-Reshetikhin 模、真空 MacMahon 模、预基本模（定理 10.12），以及与 Gaiotto-Rapčák 的角 W代数相关的模（命题 10.18）。

[11]生成元 e_0 和 f_0 分别与 [MO，§11], 中的 $\hbar e$ 和 $-\hbar f$ 相对应。

10.1. $\mathfrak{gl}_1$的移位仿射 Yangian。

定义 10.1。对于整数 $\ell \in \mathbb{Z}$，我们将 $\mathfrak{gl}_1$ 的 ℓ-平移仿射杨氏代数定义为 $Y_\ell(\mathfrak{gl}_1)$，记作$\mathbb{C}(\mathsf{t}_0) = \mathbb{C}(\hbar_1, \hbar_2)$ 代数，该代数由 $\{e_j, f_j, g_j, c_j\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 生成，并满足以下关系：

$$[g_i, g_j] = 0, \quad c_j \text{ is central}, \tag{Y0}$$

$$[e_{i+3}, e_j] - 3[e_{i+2}, e_{j+1}] + 3[e_{i+1}, e_{j+2}] - [e_i, e_{j+3}] + \sigma_2([e_{i+1}, e_j] - [e_i, e_{j+1}]) = \sigma_3\{e_i, e_j\}, \tag{Y1}$$

$$[f_{i+3}, f_j] - 3[f_{i+2}, f_{j+1}] + 3[f_{i+1}, f_{j+2}] - [f_i, f_{j+3}] + \sigma_2([f_{i+1}, f_j] - [f_i, f_{j+1}]) = -\sigma_3\{f_i, f_j\}, \tag{Y2}$$

$$[e_i, f_j] = \sigma_3 h_{i+j}, \tag{Y3}$$

$$[g_i, e_j] = e_{i+j}, \tag{Y4}$$

$$[g_i, f_j] = -f_{i+j}, \tag{Y5}$$

$$\mathrm{Sym}_{\mathfrak{S}_3}[e_{i_1}, [e_{i_2}, e_{i_3+1}]] = 0, \quad \mathrm{Sym}_{\mathfrak{S}_3}[f_{i_1}, [f_{i_2}, f_{i_3+1}]] = 0, \tag{Y6}$$

其中 $\sigma_2 = \hbar_1\hbar_2 + \hbar_2\hbar_3 + \hbar_3\hbar_1$、$\sigma_3 = \hbar_1\hbar_2\hbar_3$，且 (Y3) 的右端为

$$1 + \sum_{n\geqslant 0} h_{n-\ell} x^{-n-1} = \exp\left(\sum_{j\geqslant 1} \frac{c_{j-1}}{j\cdot x^j} + \sum_{k\geqslant 0} g_k \psi_k(x)\right), \quad h_{-\ell-1} = 1, \quad \text{and} \quad h_j = 0 \text{ for } j < -\ell - 1,$$

其中 $(\psi_k(x))^{k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 是一列函数，使得 $\exp\left(\sum_{k\geqslant 0} a^k \psi_k(x)\right) = \prod_{s=1}^{3} \frac{x+\hbar_s - a}{x-\hbar_s - a}$，其中$a$是形式参数。

我们设

$$e(u) = \sum_{j\geqslant 0} e_j u^{-j-1}, \quad f(u) = \sum_{j\geqslant 0} f_j u^{-j-1}.$$

备注 10.2。$Y_\ell(\mathfrak{gl}_1)$ 的关系 (Y1)–(Y6) 仅依赖于 σ_2 和 σ_3，而它们在 $\{\hbar_1, \hbar_2, \hbar_3\}$的 $\mathfrak{S}_3$置换下保持不变，因此 $Y_\ell(\mathfrak{gl}_1)$ 具有一个置换 $\{\hbar_1, \hbar_2, \hbar_3\}$的 $\mathfrak{S}_3$ 自同构。

备注 10.3。令 $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)^+$ 为由 $\{e_j\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 生成、满足 (Y1) 和 (Y6) 的第一个等式的 $\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$-代数。根据 [Dav2，定理 5.11]，赋值

$$e_j \mapsto c_1(\mathcal{L})^j \cap [\mathfrak{M}(1, \mathbf{0})]$$

诱导出一个同构：

$$Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)^+ \cong \widetilde{\mathcal{H}}_{Q,\mathsf{W}} \otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]} \mathbb{C}(\mathsf{t}_0),$$

其中 $\mathcal{H}_{Q,\ \mathsf{w}}$ 是 $(Q,\ \mathsf{W})$ 的卷积上同调代数，其乘法为扭曲乘积 (3.10)。

引理 10.4。对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，赋值

$$e_j \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k z^{n-k} \binom{n}{k} e_{j+k}, \quad f_j \mapsto (-1)^n f_j, \quad g_j \mapsto g_j, \quad c_j \mapsto c_j - n z^{j+1}$$

生成一个 $\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$-代数映射 $\mathsf{S}_{\ell,\ \ell-n;z}\colon\ Y_\ell(\mathfrak{gl}_1) \to Y_{\ell-n}(\mathfrak{gl}_1)[z]$。

证明。我们需要证明该赋值满足关系 (Y0)–(Y6)。注意，除 (Y1) 和 (Y6) 中的第一个等式外，所有关系都可以直接验证。原则上，也可以直接验证 (Y1) 和 (Y6)；这里我们提供另一种利用卷积上同调代数的策略。根据备注 10.3，只需证明

$$c_1(\mathcal{L})^j \cap [\mathfrak{M}(1, \mathbf{0})] \mapsto (z - c_1(\mathcal{L}))^n c_1(\mathcal{L})^j \cap [\mathfrak{M}(1, \mathbf{0})]$$

延拓为一个 $\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]$-代数同态 $\mathcal{H}_{Q,\ \mathsf{w}} \to \mathcal{H}_{Q,\ \mathsf{w}}[z]$。设 V 是 $\mathfrak{M}(r,\ \mathbf{0})$ 上的秩为 r 的典范丛，

那么我们断言，齐次线性映射 $\phi = (\phi_r\colon \mathcal{H}_{Q,\ \mathsf{w}(r)} \to \mathcal{H}_{Q,\ \mathsf{w}(r)}[z])^{r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 满足

$$\phi_r(\alpha) = z^{nr} c_{-1/z}(\mathsf{V})^n \cdot \alpha$$

生成一个 $\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]$-代数同态 $\mathcal{H}_{Q,\ \mathsf{w}} \to \mathcal{H}_{Q,\ \mathsf{w}}[z]$。事实上，CoHA 乘法得以保持，因为

$$z^{nr} c_{-1/z}(\mathsf{V})^n = z^{nr'} c_{-1/z}(\mathsf{V}')^n \cdot z^{nr''} c_{-1/z}(\mathsf{V}'')^n \quad \text{for an SES } \ 0 \longrightarrow \mathsf{V}' \longrightarrow \mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{V}''' \longrightarrow 0.$$

由于 $\phi_1(c_1(\mathcal{L})^j \cap [\mathfrak{M}(1,\ \mathbf{0})]) = (z - c_1(\mathcal{L}))^n c_1(\mathcal{L})^j \cap [\mathfrak{M}(1,\ \mathbf{0})]$，该引理得证。 □

注 10.5. </style}我们的平移仿射杨氏代数 $Y_\ell(\mathfrak{gl}_1)$ 与 $\mathfrak{gl}_1$ 中定义的不同，参见 [RSYZ2, §4.1]。

在零平移情形下， $Y_0(\mathfrak{gl}_1)$ 同构于 [SV2, §1.8]，中的代数 $\mathbf{SH}^{\mathbf{c}}$，这是一个由 $\{D_{0,j}, D_{1,k}, D_{-1,k}, \mathbf{c}_k\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}, k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 生成的 $\mathbb{C}(\xi)$ 代数，其完整关系见 [AS]。这些生成元由下式确定：

$$\xi \mapsto -\frac{\hbar_3}{\hbar_1}, \quad D_{1,j} \mapsto \frac{-e_j}{\hbar_3\,\hbar_1^j}, \quad D_{-1,j} \mapsto \frac{-f_j}{\sigma_3\,\hbar_1^j}, \quad D_{0,j+1} \mapsto \frac{g_j}{\hbar_1^j}, \quad \sum_{i\geqslant 0}(-1)^{i+1}\mathbf{c}_i\phi_i(s) \mapsto \sum_{j\geqslant 1}\frac{c_{j-1}}{j\,\hbar_1^j}s^j, \tag{10.2}$$

其中 $\phi_i(s)$ 在 [SV2, (1.68)]，中定义，即，对所有 $a\in\mathbb{C}$，$\exp\left(\sum_{i\geqslant 0}(-1)^{i+1}a^i\phi_i(s)\right) = \frac{1+\xi s+as}{1+as}$.

注 10.6. 根据 [SV2, Thm. 7.9]，$Y_0(\mathfrak{gl}_1)$ 存在余乘法，该余乘法由 b 唯一确定

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Delta}(e_0) = \square(e_0), \quad \boldsymbol{\Delta}(f_0) = \square(f_0), \quad \boldsymbol{\Delta}(g_0) = \square(g_0),\\
&\boldsymbol{\Delta}(c_j) = \square(c_j),\ j\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},\\
&\boldsymbol{\Delta}(g_1) = \square(g_1) + \sigma_3\sum_{n>0} nJ_n\otimes J_{-n},
\end{aligned} \tag{10.3}$$

其中 $\square(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x$, $J_n = \frac{\sigma_3^{-n}}{(n-1)!}\mathrm{ad}_{-f_1}^{n-1}f_0$ 和 $J_{-n} = -\frac{\sigma_3^{-n}}{(n-1)!}\mathrm{ad}_{e_1}^{n-1}e_0$ 适用于 $n>0$。

对三重 Jordan 箭图 Q 应用高斯分解 (3.28)，得到

$$\begin{pmatrix} \langle\mathbf{0}|R^{\sup}(u)|\mathbf{0}\rangle & \langle\mathbf{0}|R^{\sup}(u)|\delta_i\rangle \\ \langle\delta_i|R^{\sup}(u)|\mathbf{0}\rangle & \langle\delta_i|R^{\sup}(u)|\delta_i\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-t}{\sigma_3}\mathsf{f}(u) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathsf{g}(u) & 0 \\ 0 & \mathsf{g}(u)\mathsf{h}(u) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mathsf{e}(u) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 t 是辅助空间 $\mathcal{M}(\delta_i)$出射框架的 T_0 权，而 $\mathsf{e}(u), \mathsf{f}(u), \mathsf{g}(u), \mathsf{h}(u)$是 $\mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W})$ 中由下式给出的元素

$$\mathsf{e}(u) = \frac{(-1)^{n+1}}{u-c_1(\mathcal{L})}\,[\overline{\mathfrak{P}}(n+1,n,\underline{\mathbf{d}})], \quad \mathsf{f}(u) = \frac{(-1)^{n+\mathbf{d}_{\mathrm{out}}}}{u-c_1(\mathcal{L})}\,[\overline{\mathfrak{P}}(n,n-1,\underline{\mathbf{d}})]^{\mathrm{t}},$$
$$\mathsf{g}(u) = c_{-1/u}((1-t^{-1})\mathsf{V}), \quad \mathsf{h}(u) = u^\mu c_{-1/u}\left((q_1^{-1}+q_2^{-1}+q_3^{-1}-q_1-q_2-q_3)\mathsf{V}+\mathsf{D}_{\mathrm{out}}-\mathsf{D}_{\mathrm{in}}\right).$$

这里，$\overline{\mathfrak{P}}(n+1,n,\underline{\mathbf{d}}) \subset \mathcal{M}(n+1,\underline{\mathbf{d}}) \times \mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{d}})$是方程 (3.3) 下方定义的对应，$\mathcal{L}$ 是 $\mathfrak{P}(n+1,n,\mathbf{d})$上的典范线丛，$\mathsf{V}$ 是 $\mathcal{M}(n,\mathbf{d})$ 上秩为 n 的典范向量丛。

定理 10.7. 设 Q 为三重 Jordan 箭图，并赋予其典范三次势 $\mathsf{W} = Z[X,Y]$。对于任意的 $\mu\in\mathbb{Z}_{\leqslant 0}$，赋值

$$e(u)\mapsto \mathsf{e}(u), \quad f(u)\mapsto \mathsf{f}(u), \quad g_j\mapsto j!\,\mathrm{ch}_j(\mathsf{V}), \quad c_j\mapsto (j+1)!\,\mathrm{ch}_{j+1}(\mathsf{D}_{\mathrm{in}}-\mathsf{D}_{\mathrm{out}}), \tag{10.4}$$

生成一个满射的 $\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$-代数映射

$$\varrho_\mu\colon Y_\mu(\widehat{\mathfrak{gl}}_1) \twoheadrightarrow \mathsf{Y}_\mu(Q,\mathsf{W}).$$

此外，映射族ϱ_μ 满足以下性质：

(1) the map ϱ_0 is a bialgebra isomorphism.

(2) 对于 $\mu'<\mu\leqslant 0$，参数化移位同态 $\mathsf{S}_{\mu,\,\mu';\,z}$ §4.5 和 $\mathsf{S}_{\mu,\,\mu';\,z}$ （在引理 10.4 中定义）与 ϱ_μ 和 $\varrho_{\mu'}$ 相容，也就是说，

$$\mathsf{S}_{\mu,\mu';z}\circ\varrho_\mu = \varrho_{\mu'}\circ\bar{\mathsf{S}}_{\mu,\mu';z}\,.$$

证明。 **步骤 1**。 我们证明 (10.4) 定义了一个 $\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$-代数映射。令 $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)^+$ 为由$\{e_j\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 生成、满足 (Y1) 和 (Y6) 第一条等式的 $\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$-代数。我们断言

$$e_j\mapsto c_1(\mathcal{L})^j\cap[\mathfrak{M}(1,\mathbf{0})^{\mathrm{nil}}] \in \widetilde{\mathcal{SH}}^{\mathrm{nil}}_{Q,\mathsf{W}}$$

给出一个 $\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$-代数同构

$$Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)^+ \cong \widetilde{\mathcal{SH}}^{\mathrm{nil}}_{Q,\mathsf{W}}\otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]}\mathbb{C}(\mathsf{t}_0). \tag{10.5}$$

根据备注 10.3，赋值

$$e_j\mapsto c_1(\mathcal{L})^j\cap[\mathfrak{M}(1,\mathbf{0})]$$

诱导出一个同构

$$Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)^+ \cong \widetilde{\mathcal{H}}_{Q,\mathsf{W}}\otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]}\mathbb{C}(\mathsf{t}_0).$$

由于 $e_j \mapsto -\sigma_3 e_j$ 是 $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)^+$的自同构，我们只需证明自然映射

$$H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(n,\mathbf{0}),\mathsf{w})_{\mathfrak{M}(n,\mathbf{0})^{\mathrm{nil}}} \to H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(n,\mathbf{0}),\mathsf{w})$$

与 $\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$ 张量后是一个同构。考虑半单化映射

$$\mathsf{JH}\colon \mathfrak{M}(n,\mathbf{0}) \to \mathcal{M}_0(n,\mathbf{0}),$$

其中目标是仿射商空间，则 $\mathfrak{M}(n,\ \mathbf{0})^{\mathrm{nil}} = \mathsf{JH}^{-1}(0)$，其中 $0 \in \mathcal{M}_0(n,\ \mathbf{0})$ 对应于平凡箭图表示。于是问题归结为证明

$$H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}_0(n,\mathbf{0}), i_*i^!\mathsf{JH}_*\varphi_{\mathsf{w}}\omega_{\mathfrak{M}(n,\mathbf{0})}) \to H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}_0(n,\mathbf{0}), \mathsf{JH}_*\varphi_{\mathsf{w}}\omega_{\mathfrak{M}(n,\mathbf{0})}) \tag{10.6}$$

与 $\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$ 张量后是一个同构。注意，消失循环层 $\varphi_{\mathsf{w}}\omega_{\mathfrak{M}(n,\mathbf{0})}$ 支撑在临界轨迹 Crit(w) 上，而 JH 将 Crit(w) 映射到其仿射商 Crit(w)$/\!\!/$GL(n)，该仿射商与 $\mathbb{C}^{3n}/\mathfrak{S}_n$同构。由于 $\mathbb{C}^{3n}/\mathfrak{S}_n$ 的 T_0-不动点轨迹仅由一个点 0 构成，对 $\mathsf{JH}_*\varphi_{\mathsf{w}}\omega_{\mathfrak{M}(n,\mathbf{0})}$ 应用 T_0-局部化可知，(10.6) 与 $\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$ 张量后是一个同构。这就证明了所声称的同构 (10.5)。

结合上述断言与定理 3.7，我们看到 (10.4) 保持关系 (Y1) 和 (Y6) 的第一个方程。取相反关系可知，(10.4) 也保持 (Y2) 和 (Y6) 的第二个方程。容易看出，(Y0)、(Y4) 和 (Y5) 都由 (10.4) 保持。(Y3) 由定理 3.7 得出。这证明了 (10.4) 定义了一个 $\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$-代数映射 ϱ_μ。

步骤 2。我们证明性质 (2)。比较引理 10.4 中关于 $\mathsf{S}_{\mu,\ \mu';\ z}$ 的公式与备注 4.31 中关于 $\mathsf{S}_{\mu,\ \mu';\ z}$ 的公式，可以直接看出 $\mathsf{S}_{\mu,\ \mu';\ z} \circ \varrho_\mu = \varrho_{\mu'} \circ \mathsf{S}_{\mu,\ \mu';\ z}$。

步骤 3. 我们证明性质 (1)。将用到如下同构（定理 4.45）：

$$\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W}) \cong \mathsf{Y}^{\mathrm{MO}}_{Q'} \otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]} \mathbb{C}(\mathsf{t}_0),$$

其中 Q' 是 Jordan 箭图。该同构由维数约化诱导；不失一般性，我们可以假设约化沿着箭图 Q 中的 Z-环进行。算子 $e(u)$ $f(u)$ g_j，c_j 映射为

$$\begin{aligned} e(u) \mapsto \frac{-\sigma_3}{u-c_1(\mathcal{L})}\,[\mathfrak{B}(n+1,n,r)], \quad f(u) \mapsto \frac{(-1)^r\sigma_3}{u-c_1(\mathcal{L})}\,[\mathfrak{B}(n,n-1,r)]^{\mathrm{t}}, \\ g_j \mapsto j!\,\mathrm{ch}_j(\mathsf{V}), \quad c_j \mapsto (j+1)!\,\mathrm{ch}_{j+1}((1-q_3)\mathsf{D}_{\mathrm{in}}). \end{aligned} \tag{10.7}$$

这里 $\mathfrak{B}(n+1,n,r) \subset \mathcal{N}(n+1,r) \times \mathcal{N}(n,r)$ 是如下对应：若将 $\mathcal{N}(n,r)$ 认作 $\mathbb{P}^2$上具有第二陈数 $-n$ 的秩为 r 的带框无挠层模空间，那么 $\mathfrak{B}(n+1,n,r)$ 由满足 $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ 且长度为 $\mathcal{F}'/\mathcal{F} = 1$的层对 $(\mathcal{F},\mathcal{F}')$ 组成。$\mathcal{L}$ 是 $\mathfrak{B}(n+1,n,r)$ 上的线丛，其在 $(\mathcal{F},\mathcal{F}')$ 处的纤维为 $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$；V 是 $\mathcal{N}(n,r)$ 上秩为 n 的典范向量丛。

鉴于同构 $Y_0(\widehat{\mathfrak{gl}}_1) \cong \mathbf{SH}^{\mathbf{c}}$ (10.2)，$\mathbf{SH}^{\mathbf{c}}$ 在 $H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{N}(r))$ 上的诱导表示 (10.7) 与 [SV2, 定理 3.2] 中给出的表示一致。这里，A^{fr} 以权 $a_1,\dots,a_r$ 作用于框架 $\mathbb{C}^r$。根据 [SV2, 定理 3.2],，诱导映射 $\mathbf{SH}^{\mathbf{c}} \to \prod_r \mathrm{End}(H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{N}(r)))$ 是单射。因此，$\varrho_0\colon Y_0(\widehat{\mathfrak{gl}}_1) \to \mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W})$ 是单射。

关于 ϱ_0 的满射性，我们注意到 e_0（分别为 f_0）是巴拉诺夫斯基算子 $\beta_{-1}(-\sigma_3)$（分别为 $\beta_1(-\sigma_3)$）[MO, §12.2], ，而典范类 $\{\mathrm{ch}_j(\mathsf{V}),\mathrm{ch}_j(\mathsf{D}_{\mathrm{in}})\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 属于 ϱ_0 的像。于是，根据 [MO, 定理 18.1.1], ϱ_0 是满射。这意味着 ϱ_0 是双射。

Fina如下文引理 10.8 和 [MO, §12.4.9], 所示，$\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W})$ 的经典 R-矩阵 $\mathbf{r}$ 为[12]

$$\mathbf{r} = \mathsf{v}\otimes\mathsf{d} + \mathsf{d}\otimes\mathsf{v} - \sigma_3 \sum_{n\neq 0} \varrho_0(J_n)\otimes\varrho_0(J_{-n}). \tag{10.8}$$

于是，余乘积公式 (4.20) 写作：

$$\Delta c_1(\mathsf{V}) = \square\, c_1(\mathsf{V}) + \sigma_3 \sum_{n>0} n\varrho_0(J_n)\otimes\varrho_0(J_{-n}),$$

也就是说，

$$\Delta(\varrho_0(g_1)) = (\varrho_0\otimes\varrho_0)\mathbf{\Delta}(g_1).$$

容易看出，对于 $x = e_0, f_0, g_0, c_j$ $(j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$，有

$$\Delta(\varrho_0(x)) = (\varrho_0\otimes\varrho_0)\mathbf{\Delta}(x).$$

ϱ_0 是一个双代数映射。

[12]经典 由于归一化不同，$\mathsf{Y}_0(Q,\ \mathsf{W})$ 的 cal R-矩阵 $\mathbf{r}$ 是 $\mathsf{Y}^{\mathrm{MO}}_{Q'}$ 的经典 R-矩阵的 $-\hbar_3$ 倍 s.

步骤 4. 我们证明 ϱ_μ 的满射性。根据引理 4.32，$\mathsf{Y}_\mu(Q,\ \mathsf{W})$ 由 $\bigcup_{a\in\mathbb{C}} \mathsf{S}_{0,\ \mu;z}(\mathsf{Y}_0(Q,\ \mathsf{W}))\big|_{z=a}$ 生成。由于 ϱ_0 是同构，我们有

$$\mathsf{S}_{0,\mu;z}(\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W})) = \mathsf{S}_{0,\mu;z}(\varrho_0(Y_0(\widehat{\mathfrak{gl}}_1))) = \varrho_\mu(\bar{\mathsf{S}}_{0,\mu;z}(Y_0(\widehat{\mathfrak{gl}}_1))) \subseteq \varrho_\mu(Y_\mu(\widehat{\mathfrak{gl}}_1))[z],$$

由此可得 $\bigcup_{a\in\mathbb{C}} \mathsf{S}_{0,\ \mu;z}(\mathsf{Y}_0(Q,\ \mathsf{W}))\big|_{z=a} \subseteq \varrho_\mu(Y_\mu(\widehat{\mathfrak{gl}}_1))$; 因此 ϱ_μ 是满射。 □

引理 10.8。设 $J_{\pm n}$ 为注 10.6 中定义的算子，则 $\varrho_0(J_{\pm n}) = \beta_{\pm n}(1)$，其中 $\beta_{\pm n}(1)$ 是 MO, §12.2] 中定义的巴拉诺夫斯基算子。

证明。对 $e_j \propto \alpha_1^{(j)}$ [13] 反复应用 [Dav2, 命题 5.2]，可知 $J_{-n} = -\frac{\sigma_3^{-n}}{(n-1)!}\mathrm{ad}_{e_1}^{n-1} e_0$ 在 ϱ_0 下的像属于 BPS 李代数（根据 [BD]，它与 MO 李代数 $\mathfrak{g}_{Q'}^{\mathrm{MO}}$ 同构）；因此 $\varrho_0(J_{\pm n}) \propto \beta_{\pm n}(1)$，因为 $\mathfrak{g}_{Q'}^{\mathrm{MO}}$ 的基为 $\{\mathrm{v},\ \mathrm{d}\ \beta_n(1) \mid n \neq 0\}$ [MO, §12.4.10]。

我们按如下方式确定系数。$\varrho_0(J_{-n})$ 和 $\beta_{-n}(1)$ 都是本原的，也就是说，

$$\Delta\varrho_0(J_{\pm n}) = \square\varrho_0(J_{\pm n}), \quad \Delta\beta_{-n}(1) = \square\beta_{-n}(1).$$

接下来，为了证明 $\varrho_0(J_{-n}) = \beta_{-n}(1)$，只需证明 $\varrho_0(J_{-n})$ 和 $\beta_{-n}(1)$ 在 $H^{\mathsf{T}_0}(\mathrm{Hilb}\,\mathbb{C}^2)$ 上的作用相同。$\beta_{-n}(1)$ 在 $H^{\mathsf{T}_0}(\mathrm{Hilb}\,\mathbb{C}^2)$ 上的作用是 Nakajima 的升算子 α_{-n}，而 $\varrho_0(J_{-n})$ 在 $H^{\mathsf{T}_0}(\mathrm{Hilb}\ \mathbb{C}^2)$ 上的作用是 $\frac{1}{(n-1)!}\mathrm{ad}_{-\alpha'_{-1}}^{n-1}\alpha_{-1}$，其中 α'_{-1} 是 Lehn 在 [Leh, 定义 3.8] 中定义的 α_{-1} 的导数。

根据 [Leh, 定理 3.10]，我们有

$$\alpha_{-n} = \frac{1}{(n-1)!}\mathrm{ad}_{-\alpha'_{-1}}^{n-1}\alpha_{-1}.$$

这表明 $\varrho_0(J_{-n}) = \beta_{-n}(1)$。比较对易子 $[J_n, J_{-n}] = \frac{n}{\sigma_3}c_0$（直接计算可得）and

$$[\beta_n(1), \beta_{-n}(1)] = \frac{-rn}{\hbar_1\hbar_2} = \frac{n}{\sigma_3}\varrho_0(c_0),$$

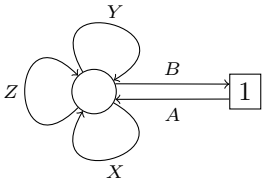
（由 [MO、（12.6）]，我们得出 $\varrho_0(J_n) = \beta_n(1)$。 □

我们猜想，同构 ϱ_0 可推广到任意 $\mu \leqslant 0$。

猜想 10.9. 对于任意 $\mu \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$，映射 ϱ_μ: $Y_\mu(\mathfrak{gl}_1) \to \mathsf{Y}_\mu(Q, \mathsf{W})$ 是一个同构。

10.2. **来自带势带框三重 Jordan 箭图的各种表示**。考虑以下带势框架:

（1）（Kirillov-Reshetikhin 模）$\mathbf{d} = \mathbf{1} = (1,1)$，势为 $\mathsf{W}_N = \mathsf{W} + BZ^NA$（其中有 $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$），并要求 T_0 按特征标 q_3^N 对 B 进行缩放，并保持 A 不变。

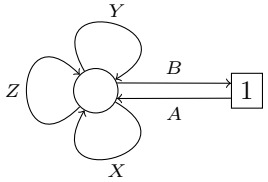


$$\mathsf{W}_N = Z[X,Y] + BZ^NA, \quad \mathsf{w}_N = \mathrm{tr}(\mathsf{W}_N).$$

我们定义

$$\mathcal{H}_N(n) := H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(n,\mathbf{1}), \mathsf{w}_N), \quad \mathcal{H}_N := H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(\mathbf{1}), \mathsf{w}_N) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \mathcal{H}_N(n).$$

(2)（真空 MacMahon 模）$\mathbf{d} = \mathbf{1} = (1,\ 1)$，势为 W，并取另一个环面 $\mathbb{C}_t^*$，它以权 1 缩放 B，并固定其他箭图数据。



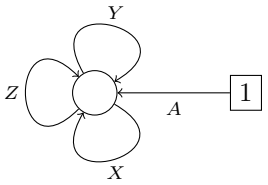
$$\mathsf{W} = Z[X,Y], \quad \mathsf{w} = \mathrm{tr}(\mathsf{W}).$$

[13]这里，$\alpha_1^{(j)}$ 在 [Dav2 第5]节中给出，$\propto$ 表示相差一个标量因子。

我们定义

$$\mathcal{V}(n) := H^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}_t^*}(\mathcal{M}(n,\mathbf{1}),\mathsf{w}),\quad \mathcal{V} := H^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}_t^*}(\mathcal{M}(\mathbf{1}),\mathsf{w}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \mathcal{V}(n).$$

(3)（预基本模）$\mathbf{d} = \mathbf{0^1} = (1,\underline{0})$，势为 W。



$$\mathsf{W} = Z[X,Y],\quad \mathsf{w} = \mathrm{tr}(\mathsf{W}).$$

我们定义

$$\mathcal{F}(n) := H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{0}^{\mathbf{1}}}),\mathsf{w}),\quad \mathcal{F} := H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(\underline{\mathbf{0}^{\mathbf{1}}}),\mathsf{w}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \mathcal{F}(n).$$

注10.10。导出整体截面 RΓ(M(n, 1), w) 和 RΓ(M(n, 01), w) 上的混合霍奇结构是纯的。可如下看出：RΓ(M(n, 1), w) 是 RΓ(M(n, 1), w) 的直和项（使用非阿贝尔稳定包络，见 [COZZ1, §9.1]）。经向量丛拉回同构并进行维数约化后，RΓ(M(n, 1), w) 与 RΓ(X(n, 0)) 同构，差别仅在次数平移和 Tate 扭曲，其中 X(n, 0) 是零框架 Jordan 箭图的预投射栈。根据 [Dav3, Thm. A], , RΓ(X(n, 0)) 是纯的，这说明 RΓ(M(n, 1), w) 的纯性。RΓ(M(n, 01), w) 的纯性则由向量丛拉回同构得出

$$\mathrm{R}\Gamma(\mathcal{M}(n,\mathbf{1}),\mathsf{w}) \cong \mathrm{R}\Gamma(\mathcal{M}(n,\underline{\mathbf{0}^{\mathbf{1}}}),\mathsf{w}).$$

由于纯性，等变上同调 $\mathcal{V}(n)$ 和 $\mathcal{F}(n)$ 是形式的，因此它们分别是 $H_{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}_t^*}(\mathrm{pt})$ 和 $H_{\mathsf{T}_0}(\mathrm{pt})$ 上的自由模。

注10.11。 如果我们在例 (1) 中引入一个额外的 $\mathbb{G}_m$ 作用，使其以权 1 缩放 B，并固定所有其他箭图数据，那么它符合 COZZ1 §7.2], 中对 $\mathbb{G}_m$-作用的假设，而 *loc.cit.* 中的构造给出一个特化映射

$$\mathsf{sp}\colon \mathcal{H}_N = H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(\mathbf{1}),\mathsf{w}_N) \longrightarrow H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(\mathbf{1}),\mathsf{w}) = \mathcal{V}|_{t=N\hbar_3}\,, \tag{10.9}$$

这是一个 $\mathrm{Y}_0(Q,\mathsf{W})$-模映射，因为它与稳定包络交换，因此也与 R-矩阵交换。我们很快会看到，局部化后 sp 是单射。

记号。 下文中，我们使用以下记号。

- T_0-局部化记为 $(\cdots)_{\mathrm{loc}} = (\cdots)\otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]}\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$。
- $\mathcal{H}_{\mathsf{W}_{\mathrm{fr}},\mathbf{d},\mathsf{A}_{\mathrm{fr}}}[a]$ 表示上同调 $H_{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}_{\mathrm{fr}}\times\mathbb{C}_a^*}(\mathcal{M}(\mathbf{d}),\mathsf{W}_{\mathrm{fr}})$，它由原态空间$\mathcal{H}_{\mathsf{W}_{\mathrm{fr}},\mathbf{d},\mathsf{A}_{\mathrm{fr}}}$ 通过引入一个环面 $\mathbb{C}_a^*$ 而得到，该环面以权 1 缩放框架向量空间。

定理 10.12. 在上述例子中，我们有如下结论。

(a) $\mathcal{H}_1$ 与 [MO, §13.1], 中的福克模同构，并且 $\mathcal{H}_{N,\mathrm{loc}}$ 与由真空 $|\mathbf{0}\rangle\otimes\cdots\otimes|\mathbf{0}\rangle$生成的 $\mathrm{Y}_0(Q,\mathsf{W})$-子模 $\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}[(N-1)\hbar_3]\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}[\hbar_3]\otimes\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}$同构。(b) 当 $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2\setminus\mathbb{Z}^2$ 时，$\mathcal{H}_{N,\mathrm{loc}}$ 和 $\mathcal{V}_{\mathrm{loc}}|_{t=\lambda_1\hbar_1+\lambda_2\hbar_2}$ 是不可约的 $\mathrm{Y}_0(Q,\mathsf{W})$-模，而 $\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ 是不可约的 $\mathrm{Y}_{-1}(Q,\mathsf{W})$-模。(c) (10.9) 的局部化特化映射 $\mathsf{sp}:\mathcal{H}_{N,\mathrm{loc}}\to\mathcal{V}_{\mathrm{loc}}|_{t=N\hbar_3}$ 是一个单射 $\mathrm{Y}_0(Q,\mathsf{W})$-模映射。

证明。 (a) 通过维数约化，我们得到 $\mathcal{H}_1\cong H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{N}(\mathbf{1}))$，其中 $\mathcal{N}(\mathbf{1})$ 是与框架维数为一的双重化约当箭图相关联的中岛簇。鉴于同构

$$\mathrm{Y}_0(Q,\mathsf{W}) \cong \mathrm{Y}^{\mathrm{MO}}_{Q'}\otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]}\mathbb{C}(\mathsf{t}_0),$$

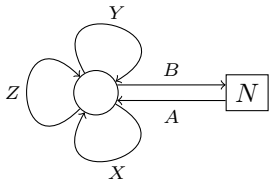
$\mathcal{H}_1\cong H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{N}(\mathbf{1}))$ 是一个 $\mathrm{Y}_0(Q,\mathsf{W})$ 模同构，而后者是 [MO, §13.1 中的福克模].

关于 $\mathcal{H}_{N,\mathrm{loc}}$ 的陈述可用与定理 9.28 类似的思路证明。我们将 η 定义为以下复合

$$\eta\colon \mathcal{H}_{N,\ \mathrm{loc}} \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{H}^{\mathsf{W}_*}_{\mathbf{N},\ \text{局部}} \xrightarrow{\delta_2^{-1}} H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{N}(\mathbf{N}))_{\mathrm{loc}} \xrightarrow{\mathsf{sp}} H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{N}(\mathbf{N}))_{\mathrm{loc}\,\mathbf{Stab}} \xrightarrow{\substack{-1\\ s<0}} \mathcal{H}_{1,\ \mathrm{loc}}[(N-1)\hbar_3]\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{1,\ \mathrm{loc}}[\hbar_3]\otimes\mathcal{H}_{1,\ \mathrm{loc}}, \tag{10.10}$$

其中中间步骤中的记号解释如下。

令 $\mathcal{H}^{\mathsf{W}_*}_{\mathbf{N}} = H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(\mathbf{N}),\ \mathsf{w}_*)$（其中 $\mathsf{w}_* = \mathrm{tr}(\mathsf{W}_*)$）为下述带势箭图的临界上同调



$$\mathsf{W}_* = Z[X,Y] + ZAB - A\Xi B,$$

其中，$\Xi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^N)$ 是正则幂零矩阵，使得对于给定的基 $\mathbb{C}^N = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1,\dots,e_N\}$，有 $\Xi(e_i) = e_{i+1}$。我们将 $(t_1, t_2, t_3) \in \mathsf{T}_0 \subset \mathbb{C}^*_{q_1} \times \mathbb{C}^*_{q_2} \times \mathbb{C}^*_{q_3}$ 对箭图数据的作用定义为

$$(X,Y,Z,B,A) \mapsto (t_1^{-1}X, t_2^{-1}Y, t_3^{-1}Z, t_3\cdot\sigma(t_3)B, A\sigma(t_3)^{-1}), \tag{10.11}$$

其中，$\sigma\colon\ \mathbb{C}^*_{q_3} \to \mathrm{GL}_N$ 是同态 $\sigma(t_3) = \mathrm{diag}(1, t_3, \dots, t_3^{N-1})$，其中矩阵以此前所述的基表示。$\mathcal{N}(\mathbf{N})$ 是与双重化约当箭图（带有环 X 和 Y）相关联的中岛簇，其 T_0 作用由在（10.11）中省略 Z 所诱导。ϕ 是定义在 $\mathcal{N}(\mathbf{N})$ 上的函数，给出为

$$\phi = \mathrm{tr}(A\Xi B).$$

(10.10) 中涉及的映射如下所示。

- δ_1 是 [COZZ1, 命题 6.7] 中构造的插值映射 δ_H，其依据是以下相容的维数约化数据。回忆记号 $\mathbf{0_k} = (k,0)$，并令

$$\mathcal{Y}' = \mathcal{M}(n, \underline{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}), \quad \mathcal{X}' = \mathrm{Tot}(E') = \mathcal{M}(n, \mathbf{1}),$$

$$s' = Z^N A \in \Gamma(\mathcal{Y}', E'^{\vee}), \quad \varphi' = \mathrm{tr}(Z[X,Y]), \quad \mathsf{w}_N = \varphi' + \langle s', B\rangle,$$

  其中，E' 是由 $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ 下降得到的向量丛，其坐标由 B 给出，而 $\langle -,-\rangle$ 是自然配对。令

$$\mathcal{Y} := \mathcal{M}(n, \underline{\mathbf{0}}^{\mathbf{N}}), \quad \mathcal{X} = \mathrm{Tot}(E) = \mathcal{M}(n, \mathbf{N}),$$

$$s = ZA - A\Xi \in \Gamma(\mathcal{Y}, E^{\vee}), \quad \varphi = \mathrm{tr}(Z[X,Y]), \quad \mathsf{w}_* = \varphi + \langle s, B\rangle,$$

  其中，E 是由 $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^N)$ 下降得到的向量丛，其坐标由 B 给出。维数约化数据 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, s, \varphi)$ 与 $(\mathcal{X}', \mathcal{Y}', s', \varphi')$ 的相容性可用与引理 9.30 类似的方法证明，这里不再重复。根据 [COZZ1, 命题 6.9]，δ_1 是一个同构。

- δ_2 是沿着 Z 的变形维数约化（根据 [COZZ1, 定理 C.1]，这是一个同构）。
- sp 是 [COZZ1, §7.2] 中的特化映射，它是利用缩放 B 的附加 $\mathbb{G}_m$ 作用构造的。 h 权为 1，并固定其他箭图数据。
- 稳定包络映射 $\mathbf{Stab}_{s<0}$ 的构造如下。令 $(t_1, t_2, t_3, p) \in \mathsf{T}_0 \times \mathbb{C}^*_s$ 通过以下方式作用于 $\mathcal{N}(\mathbf{N})$：

$$(X,Y,B,A) \mapsto (t_1^{-1}X, t_2^{-1}Y, t_3\cdot\sigma(p)B, A\sigma(p)^{-1}).$$

  稳定包络

$$\mathbf{Stab}_{s<0}\colon H^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_s}(\mathcal{N}(\mathbf{N})^{\mathbb{C}^*_s}) \to H^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_s}(\mathcal{N}(\mathbf{N}))$$

  根据 §4.2 中的论证，它是一个 $\mathrm{Y}_0(Q,\mathrm{W})$-模映射。在 $s = \hbar_3$ 处求值，相当于关于子环面取等变上同调

$$\mathsf{T}_0 \xrightarrow{(\mathrm{id}, q_3)} \mathsf{T}_0 \times \mathbb{C}^*_s,$$

  它将称为“对角线”T_0。由于 $\mathcal{N}(\mathbf{N})^{\mathbb{C}^*_s} = \mathcal{N}(\mathbf{1})^{\times N}$，且一维框架向量空间上的权为 $\{0,1,\dots,N-1\}$，我们得到一个 $\mathrm{Y}_0(Q,\mathrm{W})$-模映射：

$$\mathbf{Stab}_{s<0}\colon \mathcal{H}_1[(N-1)\hbar_3] \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_1[\hbar_3] \otimes \mathcal{H}_1 \to H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{N}(\mathbf{N})).$$

  容易看出，诱导的 $\mathbb{C}^*_s$ 作用在对角线 T_0 不动点轨迹 $\mathcal{N}(\mathbf{N})^{\mathsf{T}_0}$ 上是排斥的。然后根据 [COZZ1，第 3.36],条命题，上述映射在局部化后是单射的。此外，该映射

$$\mathbf{Stab}_{s<0}\colon \mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}[(N-1)\hbar_3] \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}[\hbar_3] \otimes \mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}} \to H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{N}(\mathbf{N}))_{\mathrm{loc}}$$

  根据分次维数计数论证，这是一个同构。

我们已经看到，在 (10.10) 中，除了特化映射 sp 之外，所有中间映射都是同构；我们断言 sp 是单射。为证明这一断言，只需证明在 T_0 不动点轨迹处的特化映射：

$$H(\mathcal{N}(\mathbf{N})^{\mathsf{T}_0},\phi)\xrightarrow{\mathsf{sp}} H(\mathcal{N}(\mathbf{N})^{\mathsf{T}_0})$$

是单射。注意，$\mathcal{N}(\mathbf{N})^{\mathsf{T}_0}$ 与箭图的不动点轨迹 T_0-fixed locus 相同，因此该断言由下文的引理10.13得出。映射 δ_1、δ_2 和 sp 是 $\mathrm{Y}_0(Q,\mathsf{W})$-模映射，因为它们与稳定包络相交换，因此也与 R-矩阵相交换。正如我们上文所解释的，$\mathbf{Stab}_{s<0}$ 是一个 $\mathrm{Y}_0(Q,\mathsf{W})$-模映射。由此可知，$\eta$ 是一个单射 $\mathrm{Y}_0(Q,\mathsf{W})$-模映射。我们还注意到，$\eta$ 将真空 $|\mathbf{0}\rangle\in\mathcal{H}_{N,\mathrm{loc}}$ 映射到真空

$$|\mathbf{0}\rangle\otimes\cdots\otimes|\mathbf{0}\rangle\in\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}[(N-1)\hbar_3]\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}[\hbar_3]\otimes\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}.$$

要证明 $\mathcal{H}_{N,\mathrm{loc}}$ 与 $\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}[(N-1)\hbar_3]\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}[\hbar_3]\otimes\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}$ 中的 $\mathrm{Y}_0(Q,\mathsf{W})$-子模同构，且该子模由真空 $|\mathbf{0}\rangle\otimes\cdots\otimes|\mathbf{0}\rangle$生成，只需证明 $\mathcal{H}_{N,\mathrm{loc}}$ 不可约；我们将在下文证明这一点。

子群 $\{(x,\ x^{-1},\ \mathbf{1})|x\in\mathbb{C}^*\}\subset\mathsf{T}_0$ 满足推论 7.4 中关于 S环面的假设，因此 $H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{N}(\mathbf{N}))_{\mathrm{loc}}$由真空余生成。作为一个子模，$\mathcal{H}_{N,\ \mathrm{loc}}$ 也由真空余生成。

让我们证明 $\mathcal{H}_{N,\ \mathrm{loc}}$ 是紧的。根据 [COZZ1，命题 6.5], ，我们有概形之间的 T_0-等变同构

$$\mathrm{Crit}_{\mathcal{M}(\mathbf{1})}(\mathsf{w}_N)\cong\mathrm{Crit}_{\mathcal{M}(\mathbf{N})}(\mathsf{w}_*)\cong\mathrm{Crit}_{\mathcal{N}(\mathbf{N})}(\phi).$$

临界点集$\mathcal{N}(\mathbf{N})(\phi)$可以明确描述如下：它是模空间

$$M=\{(X,Y,A,B)\,|\,[X,Y]+AB=0\},$$

其点表示双重化约当箭图 Q'的带框预射影代数 $\Pi^{\mathrm{fr}}_{Q'}$ 的稳定表示，以及一个 $\Pi_{Q'^{\mathrm{fr}}}$-模自同态 $\mathcal{E}$，该自同态作用于 $\overline{M}$，使得 $\mathcal{E}$ 在框架向量空间上按 Ξ作用。注意，循环稳定性条件约束了这样的 $\mathcal{E}$，使其由 Ξ唯一确定。$\mathcal{E}$ 在 M 上诱导出一个 $\Pi^{\mathrm{fr}}_{Q'}$-模滤过，使得每个伴随分次块的框架维数均为一。在 Jordan-H¨older 映射下 —

$$\mathsf{JH}\colon\mathcal{N}(n,\mathbf{N})\to\mathcal{N}_0(n,\mathbf{N}),$$

$\mathsf{JH}(\mathrm{Crit}^{\mathcal{N}(n,\mathbf{N})}(\phi))$ 包含于直和映射 $\prod_{i=1}^N\mathcal{N}_0(n_i、\mathbf{1})\to\mathcal{N}_0(n、\mathbf{N})$ 的像之并中，其中并集取遍所有分解 $n=\sum_{i=1}^N n_i$。由于 $\mathcal{N}_0(n_i、\mathbf{1})^{\mathsf{T}_0}=\{0\}$，我们看到 $\mathsf{JH}(\mathrm{Crit}^{\mathcal{N}(n,\mathbf{N})}(\phi)^{\mathsf{T}_0})=\{0\}$，这意味着 $\mathrm{Crit}^{\mathcal{N}(n,\mathbf{N})}(\phi)^{\mathsf{T}_0}$ 是紧的。

由于 $\mathcal{H}_{N,\ \mathrm{loc}}$ 是紧的，且由真空余生成，因此根据命题 7.6，它是不可约的。这证明了 (a)　　.

(b) 我们已在 (a) 的证明中说明 $\mathcal{H}_{N,\ \mathrm{loc}}$ 是不可约的。我们断言 $\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ 是紧的。事实上，$\mathcal{M}(n、\mathbf{0_1})\cong\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)$，且 $\mathsf{T}_0\subset\mathbb{C}^*_{q_1}\times\mathbb{C}^*_{q_2}\times\mathbb{C}^*_{q_3}$ 以权 $(q_1,\ q_2,\ q_3)$作用于 $\mathbb{C}^3$。众所周知，$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)^{\mathsf{T}_0}$是有限个点，因而是紧的。

法丛 $N_{\mathcal{M}(\mathbf{1})^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_t}/\mathcal{M}(\mathbf{1})}$ 中出现的 $(\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_t)$-权具有如下形式

$$\{a_1\hbar_1+a_2\hbar_2,\ t+b_1\hbar_1+b_2\hbar_2\,|\,a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{Z}\}.$$

因此，对于满足 $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2\setminus\mathbb{Z}^2$ 的 $t=\lambda_1\hbar_1+\lambda_2\hbar_2$，等变局部化表明，嵌入$\mathcal{M}(\mathbf{1})^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_t}\hookrightarrow\mathcal{M}(\mathbf{1})$ 诱导出一个同构

$$H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(\mathbf{1})^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_t},\mathsf{w})_{\mathrm{loc}}\cong H^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_t}(\mathcal{M}(\mathbf{1}),\mathsf{w})_{\mathrm{loc}}\big|_{t=\lambda_1\hbar_1+\lambda_2\hbar_2}.$$

注意到 $\mathcal{M}(n,\mathbf{1})^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_t}=\mathcal{M}(n,\mathbf{0_1})^{\mathsf{T}_0}$，且后者是紧的。因此，$\mathcal{V}_{\mathrm{loc}}|_{t=\lambda_1\hbar_1+\lambda_2\hbar_2}$ 具有一个 $\mathrm{Y}_0(Q,\mathsf{W})$-不变的非退化双线性形式。

根据命题 7.6，要证明 $\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ 和 $\mathcal{V}_{\mathrm{loc}}|_{t=\lambda_1\hbar_1+\lambda_2\hbar_2}$ 不可约，还需证明它们由真空余生成。根据定理 7.3，只需检验 *loc.cit.*中的条件 (i) 和 (ii)。对于 $\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ 和 $\mathcal{V}_{\mathrm{loc}}|_{t=\lambda_1\hbar_1+\lambda_2\hbar_2}$，条件 (i) 显然成立。对于条件 (ii)，我们断言特化映射

$$\mathsf{sp}_{\mathbf{1}}\colon H^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_t}(\mathfrak{M}(\mathbf{1}),\mathsf{w})\big|_{t=a_1\hbar_1+a_2\hbar_2}\to H^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_t}(\mathfrak{M}(\mathbf{1}))\big|_{t=a_1\hbar_1+a_2\hbar_2},\quad \mathsf{sp}_{\underline{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}}\colon H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\underline{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}),\mathsf{w})\to H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\underline{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}})),$$

是单射的，对所有$(a_1,a_2)\in\mathbb{C}^2$。事实上，由于 $\mathfrak{M}(\mathbf{1})$ 和 $\mathfrak{M}(\mathbf{0}^{\mathbf{1}})$ 是无框表示栈 $\mathfrak{M}(\mathbf{0})$ 上的向量丛，且势 w 是拉回得到的，我们有自然同构

$$H^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_t}(\mathfrak{M}(\mathbf{1}),\mathsf{w})\cong H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{0}),\mathsf{w})\otimes\mathbb{C}[t],\quad H^{\mathsf{T}_0\times\mathbb{C}^*_t}(\mathfrak{M}(\mathbf{1}))\cong H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{0}))\otimes\mathbb{C}[t],$$
$$H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\underline{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}),\mathsf{w})\cong H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{0}),\mathsf{w}),\quad H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\underline{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}))\cong H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{0})).$$

注意到，$\mathsf{sp}_{\mathbf{1}}$ 和 $\mathsf{sp}_{\mathbf{0}^{\mathbf{1}}}$ 是通过基底栈上的特化映射得到的

$$\mathsf{sp}_{\mathbf{0}}\colon H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{0}),\mathsf{w})\to H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{0}))$$

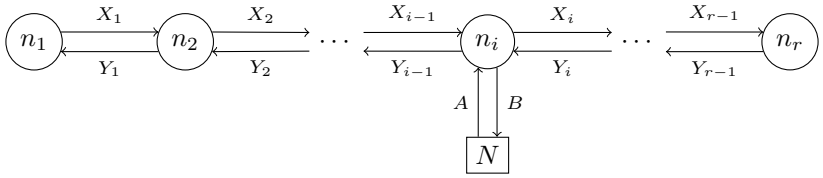
借助上述同构。由 [COZZ1，注 7.16], 可知

$$\mathsf{sp}_{\mathbf{0}} = j_* \circ \delta^{-1},$$

其中 δ: $H^{\mathsf{T}_0}(Z(\mu)) \cong H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{0}),\ \mathsf{w})$ 是维数约化同构（$\mu(X,\ Y,\ Z) = [X,Y]$ 是矩映射态射），j: $Z(\mu) \hookrightarrow \mathfrak{M}(\mathbf{0})$ 是自然嵌入。根据 [Dav3，定理 10.2], ，推前映射 j_* 是单射，因此 sp_0、sp_1、和 sp_{0^1} 都是单射。这证明了 (b)。

(c) 特化 sp: $\mathcal{H}_{N,\ \mathrm{loc}} \to \bar{\mathcal{V}}_{\mathrm{loc}}|_{t=N\hbar_3}$ 是 $\mathsf{Y}_0(Q,\ \mathsf{W})$-模映射，因为它与稳定包络交换，因此也与 R-矩阵交换。显然，$\mathsf{sp}(|\mathbf{0}\rangle) = |\mathbf{0}\rangle$，尤其是 sp 非零。sp 的单射性由 $\mathcal{H}_{N,\ \mathrm{loc}}$ 的不可约性可得。□

引理10.13。 设 Γ 是一个 A_r 型箭图，并设 i 是满足 $1 \leqslant i \leqslant r$的整数。考虑双箭图 Γ的如下带框表示:



其中 T_0 作用为

$$(t_1,t_2,t_3) \in \mathsf{T}_0 :\ (X_\bullet, Y_\bullet, B, A) \mapsto (t_1^{-1}X_\bullet, t_2^{-1}Y_\bullet, t_3 \cdot \sigma(t_3)B, A\sigma(t_3)^{-1}),$$

其中，在给定的基 $\mathbb{C}^N = \mathsf{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1,\dots,e_N\}$下，$\sigma(t_3) = \mathsf{diag}(1, t_3, \cdots, t_3^{N-1}) \in \mathrm{GL}_N$。上述箭图的Nakajima簇记为 $\mathcal{N}(N\delta_i) = \bigsqcup_{\mathbf{n}=(n_1,\dots,n_r)} \mathcal{N}(\mathbf{n}\ N\delta_i)$。在 $\mathcal{N}(N\delta_i)$ 上定义势 ϕ: $\phi(X_\bullet, Y_\bullet, B, A) = \mathsf{tr}(\Xi BA)$，其中 Ξ 是幂零矩阵，使得在上述基下 $\Xi(e_k) = e_{k+1}$。那么，特化映射 $\mathsf{sp}: H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{N}(N\delta_i)\ \phi) \to H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{N}(N\delta_i))$ 在进行 T_0-局部化后是单射的。

证明。只需证明 $H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{N}(N\delta_i)\ \phi)_{\mathrm{loc}}$ 是一个不可约的 $\mathsf{Y}_\Gamma^{\mathrm{MO}}$-模。由 [McB, Cor. 6.2.3], 可知，高斯分解 (3.28) 中的算子 $\{e_i(u)\ f_i(u)\ h_i(u)\}_{i\in Q_0}$ 生成了 $\mathsf{Y}_\Gamma^{\mathrm{MO}}$ 的一个子代数，该子代数同构于 [V] 中定义的杨量子代数 $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_{r+1})$。这里的参数通过 $2\hbar = \hbar_3$ 进行对应。根据 [VV2, §3], 中临界卷积代数作用的构造，$H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{N}(N\delta_i)\ \phi)_{\mathrm{loc}}$ 上的 $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_{r+1})$-模结构与 [VV2, Thm. 4.3(e)], 中的结构一致；由 [VV2, Thm. 4.5] 可知，该模不可约（是一个 Kirillov-Reshetikhin 模）。这意味着 $H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{N}(N\delta_i)\ \phi)_{\mathrm{loc}}$ 是一个不可约的 $\mathsf{Y}_\Gamma^{\mathrm{MO}}$-模。□

注记 10.14. 将 Γ 替换为任意 Dynkin 箭图，并令 $i \in \Gamma_0$ 为任意节点，引理10.13 仍然成立。

注记 10.15. $\mathcal{V}(n)_{\mathrm{loc}}$（以及 $\mathcal{F}(n)_{\mathrm{loc}}$）的基由以 n 个方块构成的三维杨图标记。由 n 个方块构成的三维杨图是一个集合 $\mathcal{D}$，由 n 个三元组 $\{(i,j,k) \in \mathbb{Z}^3_{\geqslant 0}\}$ 组成，满足：若 $(i,j,k) \in \mathcal{D}$，则 (i^-,j,k)、(i,j^-,k)、$(i,j,k^-) \in \mathcal{D}$，其中 $x^- = \max\{0, x-1\}$。特化映射的像

$$\mathsf{sp}\colon \mathcal{H}_N(n)_{\mathrm{loc}} \to \mathcal{V}(n)_{\mathrm{loc}}|_{t=N\hbar_3}$$

（由定理 10.12 可知它是单射）由满足以下条件的三维杨图 $\mathcal{D} = \{(i,\ j,\ k) \in \mathbb{Z}^3_{>0}\}$ 张成：对于所有的 $(i,\ j,\ k) \in \mathcal{D}$，均有 $k < N$。

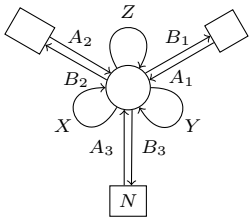
注 10.16. 我们预期，本节讨论的 K-理论类比将为 [FJMM] 中量子环面代数$U_{q_1,q_2,q_3}(\mathfrak{gl}_1)$ 的 MacMahon 模、共振轨迹和子模的构造提供几何实现。

10.3. **更多例子：尖峰瞬子及相关几何**。 让我们考虑以下带有势的框架。

(4)（自由场实现）我们固定

$$\underline{\mathbf{d}} = \mathbf{L} + \mathbf{M} + \mathbf{N} = (L+M+N, L+M+N),$$

如下所示的势 $\mathsf{W}_{\mathrm{cub}}$，并要求 T_0 按权 q_i 对 B_i 进行缩放，并对 A_i保持不变，对所有 $i=1,2,3$ 均成立。设 $\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}=(\mathbb{C}^*)^{L+M+N}$ 在框架向量空间 $\mathbb{C}^{L+M+N}$ 上作用为对角线形式，

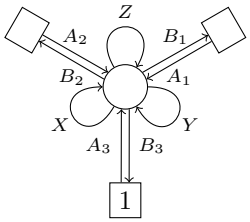


$$\mathsf{W}_{\mathrm{cub}}=Z[X,Y]+XA_1B_1+YA_2B_2+ZA_3B_3,\ \mathsf{w}_{\mathrm{cub}}=\mathrm{tr}(\mathsf{W}_{\mathrm{cub}}).$$

我们定义

$$\mathcal{S}_{L,M,N}(n):=H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{M}(n,\mathbf{L}+\mathbf{M}+\mathbf{N}),\mathsf{w}_{\mathrm{cub}}),\quad \mathcal{S}_{L,M,N}:=H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{M}(\mathbf{L}+\mathbf{M}+\mathbf{N}),\mathsf{w}_{\mathrm{cub}})=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}\mathcal{S}_{L,M,N}(n).$$

(5)（退化模）$\mathbf{d}=\mathbf{3}=(3,3,3)$，势为 $\mathsf{W}_{L,M,N}$，如下所示；并要求 T_0 按权重（B_1，B_2，B_3）缩放（q_1^L，q_2^M，q_3^N），且固定 A_i，对所有 $i=1$，2，3 均成立。令 $\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}=(\mathbb{C}^*)^3$ 在框架向量空间 $\mathbb{C}^3$ 上按对角线作用，



$$\mathsf{W}_{L,M,N}=Z[X,Y]+B_1X^LA_1+B_2Y^MA_2+B_3Z^NA_3,\ \mathsf{w}_{L,M,N}=\mathrm{tr}(\mathsf{W}_{L,M,N}).$$

我们定义

$$\mathcal{H}_{L,M,N}(n):=H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{M}(n,\mathbf{3}),\mathsf{w}_{L,M,N}),\quad \mathcal{H}_{L,M,N}:=H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{M}(\mathbf{3}),\mathsf{w}_{L,M,N})=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}\mathcal{H}_{L,M,N}(n).$$

通过维数约化，我们得到

$$\mathcal{S}_{0,0,N}\cong H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{N}(\mathbf{N})),$$

其中 $\mathcal{N}(\mathbf{N})$ 是 Nakajim pe 具有箭图数据（X、Y、B、A）的双重化约当箭图的一个簇。稳定包络

$$\mathbf{Stab}\colon \mathcal{H}_1[a_1]\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_1[a_N]\to H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{N}(\mathbf{N}))$$

在 A^{fr} 局部化后是一个 $\mathsf{Y}^{\mathrm{MO}}_{Q'}$-模同构。这里（$a_1$，…，$a_N$）是 $H_{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt})=\mathbb{C}[a_1,\dots,a_N]$ 中的等变参数。根据 [MO, 命题 19.2.2],，$\mathsf{Y}^{\mathrm{MO}}_{Q'}$ 在 $\mathcal{H}_1[a_1]\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_1[a_N]$ 上的作用通过 W代数 $\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N)$ 的模代数 $\mathfrak{U}(\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N))$ 分解。另已知，根据 [MO，命题 19.2.3]，映射 $\mathsf{Y}^{\mathrm{MO}}_{Q'}\to\mathfrak{U}(\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N))$ 的像是稠密的。我们将一个 $\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$-代数映射定义为以下复合

$$\Psi^{(3)}_N\colon Y_0(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)\xrightarrow[\cong]{\varrho_0}\mathsf{Y}_0(Q,\mathsf{W})\cong\mathsf{Y}^{\mathrm{MO}}_{Q',\mathrm{loc}}\to\mathfrak{U}(\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N))_{\mathrm{loc}},$$

并将 $Y_{0,0,N}$ 记作商代数

$$Y_{0,0,N}:=Y_0(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)/\ker(\Psi^{(3)}_N).$$

对于 $\{1,2,3\}$ 中两个不同元素组成的一对（i、j），令 $s_{ij}\in\mathrm{Aut}\ \mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$ 为交换 $\hbar_i\leftrightarrow\hbar_j$ 与 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$、并固定第三个元素的自同构。根据备注 10.2，s_{ij} 可扩张为一个 $\mathbb{C}$-代数自同构 $s_{ij}\colon Y_0(\mathfrak{gl}_1)\cong Y_0(\mathfrak{gl}_1)$。对于 $i\in\{1,2\}$，我们将一个 $\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$-斜线性映射定义为以下复合

$$\Psi^{(i)}_N\colon Y_0(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)\xrightarrow[\cong]{s_{i3}}Y_0(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)\xrightarrow{\Psi^{(i)}_N}\mathfrak{U}(\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N))_{\mathrm{loc}},$$

并将商代数记作

$$Y_{N,0,0}:=Y_0(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)/\ker(\Psi^{(1)}_N),\quad Y_{0,N,0}:=Y_0(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)/\ker(\Psi^{(2)}_N).$$

$\widehat{\ }$注意到，$\mathcal{S}_{N,0,0}$ 上的 $Y_0(\mathfrak{gl}_1)$-模结构是由 $\mathcal{S}_{0,0,N}$ 沿着 $\mathbb{C}$-代数自-

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$态射 $s_{13}\colon Y_0(\mathfrak{gl}_1)\cong Y_0(\mathfrak{gl}_1)$ 拉回得到的，因此 $\mathcal{S}_{N,0,0}$ 上的 $Y_0(\mathfrak{gl}_1)$-作用通过 $Y_{N,0,0}$ 分解。类似地，$\mathcal{S}_{0,N,0}$ 上的 $Y_0(\mathfrak{gl}_1)$-作用通过 $Y_{0,N,0}$ 分解。

定义 10.17。 我们将Y-代数 $Y_{L,M,N}$ 定义为 $Y_0(\mathfrak{gl}_1)$ 除以以下复合映射的核所得的商

$$Y_0(\widehat{\mathfrak{gl}}_1) \xrightarrow{(\Delta\otimes\mathrm{id})\circ\Delta} Y_0(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)\widehat{\otimes}Y_0(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)\widehat{\otimes}Y_0(\widehat{\mathfrak{gl}}_1) \xrightarrow{\Psi_L^{(1)}\otimes\Psi_M^{(2)}\otimes\Psi_N^{(3)}} Y_{L,0,0}\widehat{\otimes}Y_{0,M,0}\widehat{\otimes}Y_{0,0,N}. \tag{10.12}$$

命题 10.18. $\mathcal{S}_{L,M,N,\mathrm{loc}}$ 上的 $Y_0(\mathfrak{gl}_1)$-作用以及 $\mathcal{H}_{L,M,N,\mathrm{loc}}$ 上的 $Y_0(\mathfrak{gl}_1)$-作用均经由 $Y_{L,M,N}$分解。此外，$\mathcal{S}_{L,M,N,\mathrm{loc}}$ 和 $\mathcal{H}_{L,M,N,\mathrm{loc}}$ 在经 A^{fr} 局部化后是不可约的 $Y_{L,M,N}$ 模。

证明。 稳定包络

$$\mathrm{Stab}\colon \mathcal{S}_{L,0,0,\mathrm{loc}}\otimes\mathcal{S}_{0,M,0,\mathrm{loc}}\otimes\mathcal{S}_{0,0,N,\mathrm{loc}}\to\mathcal{S}_{L,M,N,\mathrm{loc}}$$

是一个 $Y_0(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$-模映射，且经 A^{fr} 局部化后是同构。这意味着， $Y_0(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$ 对 $\widetilde{\mathcal{S}}_{L,M,N,\mathrm{loc}}$ 的作用经由映射 (10.12) 分解，因此 $Y_0(\mathfrak{gl}_1)$ 对 $\mathcal{S}_{L,M,N,\mathrm{loc}}$ 的作用经由 $Y_{L,M,N}$分解。

$\widetilde{\mathcal{H}}_{0,0,N}$与 §10.2 中的 $\mathcal{H}_N$ 相同，而 $\mathcal{H}_{N,\mathrm{loc}}$根据定理 10.12 同构于 $Y_0(\mathfrak{gl}_1)$-子模 $\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}[(N-1)\hbar_3]\otimes\cdots\otimes\widetilde{\mathcal{H}}_{1,\mathrm{loc}}[\hbar_3]\otimes\mathcal{H}_{1,\mathrm{loc}}$。特别地， $Y_0(\mathfrak{gl}_1)$ 对 $\mathcal{H}_{N,\mathrm{loc}}$ 的作用经由 $Y_{0,0,N}$分解。利用$\widehat{\ }$自同构 s_{13} （分别为 s_{23}），可知 $Y_0(\mathfrak{gl}_1)$ 对 $\mathcal{H}_{N,0,0}$（分别对 $\mathcal{H}_{0,N,0}$）的作用经由 $Y_{0,0,N}$ （分别经由 $Y_{0,N,0}$）分解。稳定包络

$$\mathrm{Stab}\colon \mathcal{H}_{L,0,0,\mathrm{loc}}\otimes\mathcal{H}_{0,M,0,\mathrm{loc}}\otimes\mathcal{H}_{0,0,N,\mathrm{loc}}\to\mathcal{H}_{L,M,N,\mathrm{loc}}$$

是一个 $Y_0(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$-模映射，并且在 A^{fr} 局部化后是一个同构。因此， $Y_0(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$ 对 $\mathcal{H}_{L,M,N,\mathrm{loc}}$ 的作用经由 $Y_{L,M,N}$ 因子化。

根据命题 7.6，要证明 $\mathcal{S}_{L,M,N,\mathrm{loc}}$ 和$\mathcal{H}_{L,M,N,\mathrm{loc}}$ 不可约，只需证明它们是紧的，且由真空余生成。

$\mathcal{S}_{L,M,N}$ 是紧的，因为

$$\mathcal{M}(\mathbf{L}+\mathbf{M}+\mathbf{N})^{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}} = \prod_{i=1}^{L+M+N}\mathcal{M}(\mathbf{1}),$$

并且临界轨迹相应地分解

$$\mathrm{Crit}_{\mathcal{M}(n,\mathbf{L}+\mathbf{M}+\mathbf{N})}(\mathsf{w}_{L,M,N})^{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}} = \bigsqcup_{\sum n_i=n}\prod_{i=1}^{L+M+N}\mathrm{Crit}_{\mathcal{M}(n_i,\mathbf{1})}(\mathsf{w}_1),$$

而后者具有紧的 T_0-不动点轨迹，正如我们在定理 10.12(a) 的证明中所见。类似的论证表明，$\mathcal{H}_{L,M,N}$ 是紧的。

对于 $\mathcal{S}_{L,M,N}$ 和 $\mathcal{H}_{L,M,N}$ 两种情形，考虑将 B_i 的权设为 1（对所有 $i=1$、2、3），并固定其他箭图数据的 $\mathbb{G}_m$ 作用。根据 [COZZ1，§7.2]，该 $\mathbb{G}_m$ 作用诱导出特化

$$\mathsf{sp}_{\mathcal{S}}\colon \mathcal{S}_{L,M,N}\to H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{M}(\mathbf{L}+\mathbf{M}+\mathbf{N}),\mathsf{w}),\quad \mathsf{sp}_{\mathcal{H}}\colon \mathcal{H}_{L,M,N}\to H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{M}(\mathbf{3}),\mathsf{w}),$$

它们是 $Y_0(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$-模映射。经过 $(\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}})$-局部化后，$\mathsf{sp}_{\mathcal{S}}$是 $(L+M+N)$ 个特化映射 $H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(1),\mathsf{w}_1)_{\mathrm{loc}}\to H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(1),\mathsf{w})_{\mathrm{loc}}$的张量积；根据定理 10.12(c)，该映射是单射。因此，局部化后 $\mathsf{sp}_{\mathcal{S}}$ 是单射。同理，局部化后 $\mathsf{sp}_{\mathcal{H}}$ 也是单射。接下来，只需证明$H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{M}(\mathbf{L}+\mathbf{M}+\mathbf{N}),\mathsf{w})$和 $H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{M}(\mathbf{3}),\mathsf{w})$ 由真空余生成。根据定理 7.3，只需检验其中的条件 (i) 和 (ii)。对于 $H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{M}(\mathbf{L}+\mathbf{M}+\mathbf{N}),\mathsf{w})$和$H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathcal{M}(\mathbf{3}),\mathsf{w})$，条件 (i) 显然成立。对于条件 (ii)，我们断言特化映射

$$\mathsf{sp}_{\mathbf{L}+\mathbf{M}+\mathbf{N}}\colon H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathfrak{M}(\mathbf{L}+\mathbf{M}+\mathbf{N}),\mathsf{w})\to H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathfrak{M}(\mathbf{L}+\mathbf{M}+\mathbf{N})),$$
$$\mathsf{sp}_{\mathbf{3}}\colon H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{3}),\mathsf{w})\to H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{3})),$$

是单射。事实上，由于 $\mathfrak{M}(\mathbf{3})$ 和 $\mathfrak{M}(\mathbf{L}+\mathbf{M}+\mathbf{N})$ 是无框表示栈$\mathfrak{M}(\mathbf{0})$ 上的向量丛，且势 w 是由拉回得到的，因此我们有自然同构

$$H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathfrak{M}(\mathbf{L}+\mathbf{M}+\mathbf{N}),\mathsf{w})\cong H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{0}),\mathsf{w})\otimes H_{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt}),\quad H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathfrak{M}(\mathbf{L}+\mathbf{M}+\mathbf{N}))\cong H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{0}))\otimes H_{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt}),$$
$$H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathfrak{M}(\mathbf{3}),\mathsf{w})\cong H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{0}),\mathsf{w})\otimes H_{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt}),\quad H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathfrak{M}(\mathbf{3}))\cong H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{0}))\otimes H_{\mathsf{A}^{\mathrm{fr}}}(\mathrm{pt}).$$

此外，$\mathsf{sp}_{\mathbf{L}+\mathbf{M}+\mathbf{N}}$和$\mathsf{sp}_{\mathbf{3}}$通过上述同构，由基底栈上的特化映射 $\mathsf{sp}_{\mathbf{0}}$: $H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{0}),\mathsf{w})\to H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{0}))$ 得到。正如我们在定理 10.12(c) 的证明中所见，$\mathsf{sp}_{\mathbf{0}}$ 是单射。这意味着 $\mathsf{sp}_{\mathbf{L}+\mathbf{M}+\mathbf{N}}$ 和 $\mathsf{sp}_{\mathbf{3}}$ 是单射；因此，$\mathcal{S}_{L,M,N}$ 以及 $\mathcal{H}_{L,M,N}$ 由真空余生成。□

注10.19。 由于 $\mathcal{W}_N$ 顶点代数是 Heisenberg 代数的 N 个副本的张量积的顶点子代数，我们有

$$Y_{0,0,N} \subset \widehat{\mathsf{H}}^{\widehat{\otimes} N}_{-\hbar_3/\sigma_3},$$

其中，H_λ 是海森堡代数 H_λ 在层级 λ下的完备化，它是一个由 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$生成、满足关系 $[b_n, b_m] = \lambda n \delta_{n,\,-m}$的 $\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$-代数。由 $Y_{L,\,M,\,N}$ 的定义可得

$$Y_{L,M,N} \subset \widehat{\mathsf{H}}^{\widehat{\otimes} L}_{-\hbar_1/\sigma_3} \widehat{\otimes} \widehat{\mathsf{H}}^{\widehat{\otimes} M}_{-\hbar_2/\sigma_3} \widehat{\otimes} \widehat{\mathsf{H}}^{\widehat{\otimes} N}_{-\hbar_3/\sigma_3}.$$

在 [RSYZ1, §10] 中的计算表明，$Y_{L,M,N}$ 在 $\widehat{\mathsf{H}}^{\widehat{\otimes} L}_{-\hbar_1/\sigma_3} \widehat{\otimes} \widehat{\mathsf{H}}^{\widehat{\otimes} M}_{-\hbar_2/\sigma_3} \widehat{\otimes} \widehat{\mathsf{H}}^{\widehat{\otimes} N}_{-\hbar_3/\sigma_3}$ 中的像包含于子代数 $\mathfrak{U}(\mathcal{W}_{L,M,N})$ 中，该子代数定义为 $L+M+N-1$ 个筛选算子的核之交 [RSYZ1, §9]。$\mathcal{W}_{L,M,N}$ 是上述筛选算子的湮灭子所构成的顶点代数。Proch´azka 和 Rapˇc´ak 在 [PR] 中猜想，$\mathcal{W}_{L,M,N}$ 与 Gaiotto-Rapˇc´ak 在 [GR]中的角顶点代数 $\mathcal{Y}_{L,M,N}$ 同构。

10.4. **Hilb() 上除子的量子乘法**。 考虑由 (10.1) 给出的带势箭图（Q，W）以及箭图簇

$$X := \mathcal{M}(n,(1,0)), \quad Y := \mathcal{M}(n,(1,1)).$$

我们将 w 平凡地扩展为 X 和 Y 上的势。对于任意 $d \in \mathrm{Hom}(\mathrm{char}(\mathrm{GL}_n)\ \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$，取

$$[Z] := M_d(\gamma) \in H^{\mathsf{T}_0}(X^2, \mathsf{w} \boxminus \mathsf{w})$$

使其为 (5.1)。存在一个投影

$$p\colon Y \to X$$

并记 $\hbar$ 为其纤维 $\mathbb{C}^*$-作用的等变参数。令

$$\mathsf{T} := \mathsf{T}_0 \times \mathbb{C}^*_{e^\hbar}.$$

存在一个同构

$$p^*\colon H^{\mathsf{T}_0}(X,\mathsf{w})[\hbar] \cong H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w}) \xrightarrow{\cong} H^{\mathsf{T}}(Y, p^*\mathsf{w}).$$

推论10.20。 对于 Y 上的 T-等变线丛 L，我们有

$$c_1(L) \widetilde{\star} \cdot = c_1(L) \cup \cdot + \sigma_3 \deg(L) \sum_{i \in \mathbb{Z}_{>0}} \frac{i z^i}{1-z^i} J_{-i}\, J_i \ + \mathrm{const},$$

其中 $\sigma_3 = \hbar_1\hbar_2\hbar_3$, $J_i = \frac{\sigma_3^{-i}}{(i-1)!} \mathsf{ad}^{i-1}_{-f_1} f_0$, $J_{-i} = -\frac{\sigma_3^{-i}}{(i-1)!} \mathsf{ad}^{i-1}_{e_1} e_0$，适用于 $i>0$；而 e_i, f_i 是$\widehat{\ }$ Yangian $Y_0(\mathfrak{gl}_1)$ 的生成元的一部分（定义 10.1），它们通过定理 10.7 作用于临界上同调。

Proof. 我们记 $Y_n := \mathcal{M}(n,\ (1,\ 1))$。根据 [COZZ1，例 7.19]，，存在一个特化映射

$$H^{\mathsf{T}}(Y_n, p^*\mathsf{w}) \to H^{\mathsf{T}}(Y_n).$$

对 n取直和，得到一个 $\mathrm{Y}_0(Q,\ \mathrm{W})$-模映射

$$\bigoplus_{n\geqslant 0} H^{\mathsf{T}}(Y_n, p^*\mathsf{w})_{\mathrm{loc}} \to \bigoplus_{n\geqslant 0} H^{\mathsf{T}}(Y_n)_{\mathrm{loc}},$$

使得真空（即 $H^{\mathsf{T}}(Y_0,\ p^*\mathsf{w})_{\mathrm{loc}}$）映射到真空（即 $H^{\mathsf{T}}(Y_0)_{\mathrm{loc}}$）。根据定理 10.12˙(b)，左端是一个不可约的 $\mathrm{Y}_0(Q,\ \mathrm{W})$-模。因此，这些特化映射是单射。将推论 5.11 应用于带有函数 T-不变函数 w: $Y \to \mathbb{C}$ 的对称箭图簇 Y，并比较 (4.12) 和 (10.8)，即可得证。□

我们推导出以下　利用定理 5.1，得到 $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)$ 上除子的量子乘法公式　3.

推论 10.21. 对于上述 (X,w) 以及 X 上任意的 T_0-等变除子类 L，我们有

$$c_1(L) \widetilde{\star}_d \cdot = \sigma_3 \deg(L) \cdot d \cdot J_{-d}\, J_d + \mathrm{const}\,, \quad \forall\ d>0. \tag{10.13}$$

这里 $\sigma_3 = \hbar_1\hbar_2\hbar_3$, $J_i = \frac{\sigma_3^{-i}}{(i-1)!} \mathsf{ad}^{i-1}_{-f_1} f_0$, $J_{-i} = -\frac{\sigma_3^{-i}}{(i-1)!} \mathsf{ad}^{i-1}_{e_1} e_0$ for $i>0$，而 e_i, f_i 是移位杨 Yangian $Y_{-1}(\mathfrak{gl}_1)$ (10.1) 的生成元的一部分，它们通过定理 10.7 作用于临界上同调。

证明。 根据定理 5.13，只需证明对所有 $i>0$，$\mathsf{Cas}_{i,\,-1}=\sigma_3 J_{-i}\,J_i$。我们将 Yangian $Y_0(\mathfrak{gl}_1)$ 中的元素 $e(u)$ $f(u)$、$e(u)'$，$f(u)'$ 分别记为 $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$。

由引理 4.27 的证明可知，我们有作用在临界上同调上的算子方程 y:

$$(p^*)^{-1}e(u)\,p^*=H_\hbar\,e(u)'\,H_\hbar^{-1}=\frac{\hbar-c_1(\mathcal{L})}{u-c_1(\mathcal{L})}\,[\overline{\mathfrak{P}}(n+1,n,\underline{\mathbf{d}})]=(\hbar-u)e(u)'+e_0',$$
$$(p^*)^{-1}f(u)\,p^*=-f(u)'.$$

按 u 的幂展开，我们得到

$$(p^*)^{-1}e_k\,p^*=\hbar e_k'-e_{k+1}',\quad (p^*)^{-1}f_k\,p^*=-f_k'.$$

这意味着

$$(p^*)^{-1}\mathrm{Cas}_i\,p^*=\sigma_3(p^*)^{-1}J_{-i}J_i\,p^*=\sigma_3(-1)^i\hbar^i J_{-i}'J_i'+\text{l.o.t.},\tag{10.14}$$

其中，J_i'可由 J_i 分别将 e_k, f_k 替换为 e_k', f_k' 得到，而 l.o.t. 表示 $\hbar$的低阶项。根据定义 4.50，$\mathsf{Cas}_{i,-1}=\sigma_3 J_{-i}\,J_i$。□

注 10.22. 在这种情况下，我们有 $\widetilde{\star}_d=(-1)^d\star_d$。

注 10.23。 按次数计数可得

$$c_1(L)\widetilde{\star}_d\cdot\colon H_*^{\mathsf{T}_0}(X,\mathsf{w})\to H_{*+2-2d}^{\mathsf{T}_0}(X,\mathsf{w}),$$

因此，当 $d>1$ 时，(10.13) 中的常数项消失。

Appendix A. Positive part of several Yangians

在本附录中，我们考虑三类（移位、仿射）Yangian 的例子，其正部由显式生成元与关系描述。我们构造从它们到相应带势对称箭图的球面幂零CoHA 的满射代数同态（命题 A.3、A.7、A.10）。这些同态用于构造从完整的（移位、仿射）Yangian 到 Drinfeld双杨扬子代数的满射代数同态（例 3.9、3.10、3.11）。

A.1. 可对称化卡茨-穆迪代数的 Yangian 的正部。

定义 A.1。 设对 (A, D) 是一个带对称化子的广义卡当矩阵，即

- $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,\,j\leqslant n}\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Z})$，满足：$a_{ii}=2$ 对所有 $1\leqslant i\leqslant n$；$a_{ij}\leqslant 0$ 对所有 $1\leqslant i\neq j\leqslant n$；$a_{ij}\neq 0\Leftrightarrow a_{ji}\neq 0$。
- $D=\mathsf{diag}(d_1,\dots,d_n)$ 是一个对角矩阵，其对角线元素为正整数，且 DA 是对称的。

~由这一对 $(A,\ D)$ 出发，按照 [GLS],，我们构造一个带有势 W 的箭图 Q。我们从一个箭图 Q 开始，其中有 $Q_0=\{1,\dots,n\}$；对于任意 $1\leqslant i<j\leqslant n$，从 i到 j的箭数为

$$n_{ij}=|\gcd(a_{ij},a_{ji})|\,.$$

~ ~设 Q 为 Q的三重箭图，则 Q 中的边集可分解为 $Q_1=Q_1\sqcup Q_1^*\sqcup\mathcal{E}$，其中 $\mathcal{E}\cong Q_0$ 是添加的边环集合。设 $\{X_a\}_{a\in Q_1}$、$\{X_{a^*}\}_{a^*\in Q_1^*}$、$\{\Phi_i\}_{i\in Q_0}$ 分别为 Q_1、Q_1^*和 $\mathcal{E}$ 中的边。

当 $i<j$ 时，我们定义：

$$l_{ij}=\left|\frac{a_{ij}}{n_{ij}}\right|,\quad l_{ji}=\left|\frac{a_{ji}}{n_{ij}}\right|,$$

以及势[14]:

$$\mathsf{W}:=\sum_{(a:i\to j)\in Q_1}\Phi_i^{l_{ij}}X_{a^*}X_a-\Phi_j^{l_{ji}}X_aX_{a^*},\quad \mathsf{w}:=\mathrm{tr}(\mathsf{W}).$$

注意，W 的雅可比代数是 [GLS] 的广义预投射代数。在有限维单李代数的情形下，该势也由 [CD] 构造。

将 Q_1从 i到 j的箭的集合标记为 $\{a_1,\dots,a_{n_{ij}}\}$。取 $\mathsf{T}_0=\mathbb{C}_\hbar^*$，它以权 $(n_{ij}/2+1-p)d_il_{ij}$ 缩放 X_{a_p}，以权 $(p-n_{ij}/2)d_il_{ij}$ 缩放 $X_{a_p^*}$，并以权 $-d_i$ 缩放 Φ_i。由于 DA 是对称的，W 是 $\mathbb{C}_\hbar^*$-不变的。

[14]我们对势的约定 ls 与 [YZ1, Eqn. (1)] 相同，唯一的区别是 [GLS]将 A转置，参见 [YZ1, Rmk. 4.2] .

定义 A.2. 与 (A, D) 相关的 *Kac-Moody*李代数 记为 $\mathfrak{g}_{A,D}$，由 $\{e_i, f_i \mid i \in Q_0\}$生成，并满足以下关系

$$\begin{aligned}&\mathrm{ad}_{e_i}^{1-a_{ij}}(e_j) = 0 = \mathrm{ad}_{f_i}^{1-a_{ij}}(f_j), \quad [e_i, f_j] = 0,\ i \neq j,\\ &[[e_i, f_i], e_j] = a_{ij} e_j, \quad [[e_i, f_i], f_j] = -a_{ij} f_j,\ \forall\, i, j \in Q_0.\end{aligned}$$

杨 Yangian 的正部分 $Y^+(\mathfrak{g}_{A,D})$ 由 $\mathfrak{g}_{A,D}$ [GTL、YZ2] 生成，并满足关系

$$\begin{aligned}&(u-v)[x_i^+(u), x_j^+(v)] - d_i a_{ij}\hbar/2\{x_i^+(u), x_j^+(v)\} = [x_{i,0}^+, x_j^+(v)] - [x_i^+(u), x_{j,0}^+],\ \forall\, i, j \in Q_0,\\ &[x_i^+(u), x_j^+(v)] = 0,\ \text{if } a_{ij} = 0,\\ &\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{1-a_{ij}}} [x_i^+(u_{\sigma(1)}), [x_i^+(u_{\sigma(2)}), [\cdots, [x_i^+(u_{\sigma(1-a_{kl})}), x_j^+(v)]]]] = 0,\ \text{for } i \neq j.\end{aligned} \tag{A.1}$$

这里 $x_i^+(z) := \sum_{r \geqslant 0} x_{i,r}^+ z^{-r-1}$。

我们建立了从杨 Yangian 的正部分到球面幂零卷积上同调代数（Q，W）的满射代数映射，该卷积上同调代数的定义见第 3.2 节。当目标为球面洗牌代数时，类似结果已在 [YZ2，定理 5.1] 中证明。

命题 A.3。 存在一个 $\mathbb{C}(\hbar)$-代数的满射：

$$Y^+(\mathfrak{g}_{A,D}) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar) \twoheadrightarrow \widetilde{\mathcal{SH}}^{\mathrm{nil}}_{\widetilde{Q},\mathsf{W}} \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar), \quad x_i^+(z) \mapsto e_i(z).$$

证明。 只需证明 $x_i^+(z) \mapsto e_i(z)$ 给出一个 $\mathbb{C}(\hbar)$-代数同态，随后根据定义，$\{e_i(z)\}_{i \in Q_0}$ 生成 $\widetilde{\mathcal{SH}}^{\mathrm{nil}}_{\widetilde{Q},\mathsf{w}}$，即可推出满射性。令 $\widetilde{\mathcal{SH}}_{\widetilde{Q},0}$ 为零势的球面卷积上同调代数，它与球面洗牌代数同构。根据 [YZ2, 定理 5.1]，存在一个 $\mathbb{C}[\hbar]$-代数同态

$$Y^+(\mathfrak{g}_{A,D}) \to \widetilde{\mathcal{SH}}_{\widetilde{Q},0}, \quad x_i^+(z) \mapsto \tilde{e}_i(z),$$

其中 $\tilde{e}_i(z) = \sum_{r \geqslant 0} \tilde{e}_{i,r} z^{-r-1}$ 是卷积上同调代数元素的生成函数

$$\tilde{e}_{i,r} := c_1(\mathcal{L}_i)^r \cap [\mathfrak{M}(\delta_i, \mathbf{0})], \quad \forall\, r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},$$

且 $\mathcal{L}_i$ 是 $\mathfrak{M}(\delta_i, \mathbf{0}) \cong [\mathbb{C}/\mathbb{C}^*]$上的泛线丛。特化映射

$$\mathsf{sp}\colon \widetilde{\mathcal{H}}_{\widetilde{Q},\mathsf{W}} \to \widetilde{\mathcal{H}}_{\widetilde{Q},0}$$

是一个 $\mathbb{C}[\hbar]$-代数同态。在下文的引理 A.4 中，我们证明 sp 在经过 $\mathbb{C}(\hbar)$-局部化后是单射。将 $\tilde{e}_i(z)$ 视为带势 W 的球面卷积上同调代数的生成元，记作 $\widetilde{\mathcal{SH}}_{\widetilde{Q},\mathsf{w}}$，则 $x_i^+(z) \mapsto \tilde{e}_i(z)$ 给出一个$\mathbb{C}(\hbar)$-代数同态

$$Y^+(\mathfrak{g}_{A,D}) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar) \to \widetilde{\mathcal{SH}}_{\widetilde{Q},\mathsf{W}} \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar).$$

沿闭嵌入的推前

$$\iota\colon \widetilde{\mathcal{SH}}^{\mathrm{nil}}_{\widetilde{Q},\mathsf{W}} \to \widetilde{\mathcal{SH}}_{\widetilde{Q},\mathsf{W}}$$

maps $e_i(z)$ 到 $d_i\hbar\,\tilde{e}_i(z)$。注意，$x_i^+(z) \mapsto d_i\hbar\, x_i^+(z)$ 给出了一个 $\mathbb{C}(\hbar)$-代数自同构

$$Y^+(\mathfrak{g}_{A,D}) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar) \cong Y^+(\mathfrak{g}_{A,D}) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar).$$

于是，只需检查对于关系式(A.1)中出现的那些次数，ι 在经过 $\mathbb{C}^*_\hbar$-局部化后是单射的。这一点将在下面的引理 A.5 中验证。□

引理 A.4。 $\mathbb{C}^*_\hbar$-局部化特化映射

$$\mathsf{sp}\colon H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{0}), \mathsf{w}) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar) \to H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{0})) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar)$$

是单射的。

证明。 考虑辅助箭图 $Q^\sharp$，它由 $\widetilde{Q}$ 删除 Q_1^* 中的所有箭得到。则 $\mathfrak{M}(\widetilde{Q}, \mathbf{v}, \mathbf{0})$ 是 $\mathfrak{M}(Q^\sharp, \mathbf{v}, \mathbf{0})$ 上的一个向量丛 E，带有自然投影 π，并且 w 可以写成

$$\mathsf{w} = \langle e, s \rangle,\ e \text{ is the fiber coordinate of } E, \quad s = (X_a \Phi_i^{l_{ij}} - \Phi_j^{l_{ji}} X_a)_{(a:i\to j)\in Q_1} \in \Gamma(\mathfrak{M}(Q^\sharp, \mathbf{v}, \mathbf{0}), E^\vee).$$

于是我们得到维数约化同构

$$H^{\mathbb{C}^*_\hbar}\left(\mathfrak{M}(\widetilde{Q}, \mathbf{v}, \mathbf{0}), \mathsf{w}\right) \cong H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathfrak{Z}(s)),$$

其中 $\mathfrak{Z}(s)$ 是 $\mathfrak{M}(Q^\sharp, \mathbf{v}, \mathbf{0})$ 中 s 的零点集。根据 [COZZ1，注 7.16],，我们有

$$\mathsf{sp} = \tilde{j}_* \circ \delta^{-1},$$

其中，$\delta\colon H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(\pi^{-1}\mathfrak{Z}(s)) \cong H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathfrak{M}(\widetilde{Q}, \mathbf{v}, \mathbf{0}), \mathsf{w})$ 是维数约化同构，而 $\tilde{j}\colon \pi^{-1}\mathfrak{Z}(s) \hookrightarrow \mathfrak{M}(\widetilde{Q}, \mathbf{v}, \mathbf{0})^{\sim}$ 是闭嵌入。因此，只需证明 j_* 在 $\mathbb{C}^*_\hbar$-局部化后是单射；或者根据光滑拉回同构，等价地，只需证明 j_* 在 $\mathbb{C}^*_\hbar$-局部化后是单射，其中 $j\colon \mathfrak{Z}(s) \hookrightarrow \mathfrak{M}(Q^\sharp, \mathbf{v}, \mathbf{0})$ 是闭嵌入。

考虑 Jordan-H¨older 映射

$$\mathsf{JH}\colon \mathfrak{M}\left(Q^\sharp, \mathbf{v}, \mathbf{0}\right) \to \mathcal{M}_0\left(Q^\sharp, \mathbf{v}, \mathbf{0}\right) = \mathrm{Rep}_{Q^\sharp}(\mathbf{v}, \mathbf{0}) /\!\!/ \mathrm{GL}(\mathbf{v}).$$

由于 $Q^\sharp$ 中的所有循环都是边环的复合，我们有

$$\mathcal{M}_0\left(Q^\sharp, \mathbf{v}, \mathbf{0}\right) \cong \mathfrak{gl}(\mathbf{v}) /\!\!/ \mathrm{GL}(\mathbf{v}).$$

那么我们有 $\mathcal{M}_0\left(Q^\sharp, \mathbf{v}\ \mathbf{0}\right)^{\mathbb{C}^*_\hbar} = \{0\}$。令 $\mathfrak{M}(Q^\sharp, \mathbf{v}, \mathbf{0})^{\mathrm{nil}} := \mathsf{JH}^{-1}(\{0\})$，则推前映射 m

$$\mathrm{ap}$$

$$H^{\mathbb{C}^*_\hbar}\left(\mathfrak{M}(Q^\sharp, \mathbf{v}, \mathbf{0})^{\mathrm{nil}}\right) \to H^{\mathbb{C}^*_\hbar}\left(\mathfrak{M}(Q^\sharp, \mathbf{v}, \mathbf{0})\right)$$

可表示为

$$\begin{aligned} H^{\mathbb{C}^*_\hbar}\left(\mathfrak{M}(Q^\sharp, \mathbf{v}, \mathbf{0})^{\mathrm{nil}}\right) &\cong H^{\mathbb{C}^*_\hbar}\left(\mathcal{M}_0(Q^\sharp, \mathbf{v}, \mathbf{0}), i_* i^! \mathsf{JH}_* \omega_{\mathfrak{M}(Q^\sharp, \mathbf{v}, \mathbf{0})}\right) \\ &\to H^{\mathbb{C}^*_\hbar}\left(\mathcal{M}_0(Q^\sharp, \mathbf{v}, \mathbf{0}), \mathsf{JH}_* \omega_{\mathfrak{M}(Q^\sharp, \mathbf{v}, \mathbf{0})}\right) \cong H^{\mathbb{C}^*_\hbar}\left(\mathfrak{M}(Q^\sharp, \mathbf{v}, \mathbf{0})\right), \end{aligned}$$

其中 $i\colon \{0\} \hookrightarrow \mathcal{M}_0(Q^\sharp, \mathbf{v}, \mathbf{0})$ 是自然映射，在进行 $\mathbb{C}^*_\hbar$-局部化后变为同构 .

类似地，若令 $\mathfrak{Z}(s)^{\mathrm{nil}} = \mathfrak{Z}(s) \cap \mathsf{JH}^{-1}(\{0\})$，则推前映射 $H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathfrak{Z}(s)^{\mathrm{nil}}) \to H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathfrak{Z}(s))$ 在进行 $\mathbb{C}^*_\hbar$-局部化后变为同构。因此，只需证明 j_*^{nil} 在进行 $\mathbb{C}^*_\hbar$-局部化后是单射，其中 $j^{\mathrm{nil}}\colon \mathfrak{Z}(s)^{\mathrm{nil}} \hookrightarrow \mathfrak{M}(Q^\sharp, \mathbf{v}, \mathbf{0})^{\mathrm{nil}}$ 是闭嵌入。

我们有

$$H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathfrak{Z}(s)^{\mathrm{nil}}) \cong H^{\mathbb{C}^*_\hbar \times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}(Z(s)^{\mathrm{nil}}), \quad H^{\mathbb{C}^*_\hbar}(\mathfrak{M}(Q^\sharp, \mathbf{v}, \mathbf{0})^{\mathrm{nil}}) \cong H^{\mathbb{C}^*_\hbar \times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}(\mathrm{Rep}_{Q^\sharp}(\mathbf{v}, \mathbf{0})^{\mathrm{nil}}),$$

其中，$Z(s)^{\mathrm{nil}}$ 和 $\mathrm{Rep}^{Q^\sharp}(\mathbf{v}, \mathbf{0})^{\mathrm{nil}}$ 分别是 Rep $\mathfrak{Z}(s)^{\mathrm{nil}}$ 和 Rep $\mathfrak{M}(Q^\sharp, \mathbf{v}, \mathbf{0})^{\mathrm{nil}}$ 中的原像。

我们断言

(a) $H^{\mathbb{C}^*_\hbar \times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}(Z(s)^{\mathrm{nil}})$ 和 $H^{\mathbb{C}^*_\hbar \times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}(\mathrm{Rep}^{Q^\sharp}(\mathbf{v}, \mathbf{0})^{\mathrm{nil}})$ 是 $H_{\mathbb{C}^*_\hbar \times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}(\mathrm{pt})$ 的自由模；(b) 自然映射 $H^{\mathbb{C}^*_\hbar \times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}(Z(s)^{\mathrm{nil}}) \to H^{\mathbb{C}^*_\hbar \times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}(\mathrm{Rep}^{Q^\sharp}(\mathbf{v}, \mathbf{0})^{\mathrm{nil}})$ 是单射。

断言 (b) 表明，无需进行 $\mathbb{C}^*_\hbar$-局部化，j_*^{nil} 就是单射的，而这将推出该引理。

注意，$\mathrm{Rep}^{Q^\sharp}(\mathbf{v}, \mathbf{0})^{\mathrm{nil}} = \mathrm{Rep}^{Q}(\mathbf{v}, \mathbf{0}) \times \mathcal{N}_{\mathfrak{gl}(\mathbf{v})}$，其中 $\mathcal{N}_{\mathfrak{gl}(\mathbf{v})}$ 是 $\mathfrak{gl}(\mathbf{v})$ 的幂零锥。注意，$\mathcal{N}_{\mathfrak{gl}(\mathbf{v})}$ 可分层为有限多个 GL(v)-轨道

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{gl}(\mathbf{v})} = \bigsqcup_{\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i \in Q_0}} \mathcal{N}_{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathcal{N}_{\boldsymbol{\lambda}} = \prod_{i \in Q_0} \mathcal{N}_{\lambda_i},$$

其中 λ_i 是$\mathbf{v}_i$ 的一个分拆，而 $\mathcal{N}_{\lambda_i}$ 是类型为 λ_i的$\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i$ 幂零矩阵的集合。记自然投影

$$\mathrm{pr}\colon \mathrm{Rep}_{Q^\sharp}(\mathbf{v}, \mathbf{0})^{\mathrm{nil}} \to \mathcal{N}_{\mathfrak{gl}(\mathbf{v})}.$$

为证明断言 (a)，利用切除序列，只需证明

$$H^{\mathbb{C}^*_\hbar \times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}\left(Z(s)^{\mathrm{nil}} \cap \mathrm{pr}^{-1}\mathcal{N}_{\boldsymbol{\lambda}}\right), \quad H^{\mathbb{C}^*_\hbar \times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}\left(\mathrm{pr}^{-1}\mathcal{N}_{\boldsymbol{\lambda}}\right)$$

对所有 $\boldsymbol{\lambda}$，都是$H_{\mathbb{C}^*_\hbar \times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}(\mathrm{pt})$的自由模，且集中于偶数次数。注意到

$$\mathrm{pr}^{-1}\mathcal{N}_{\boldsymbol{\lambda}} \cong \mathrm{Rep}_Q(\mathbf{v}, \mathbf{0}) \times \mathcal{N}_{\boldsymbol{\lambda}}$$

是 $\mathcal{N}_{\boldsymbol{\lambda}}$上的等变向量丛，而 $\mathcal{N}_{\boldsymbol{\lambda}} \cong \mathrm{GL}(\mathbf{v})/C_{\mathrm{GL}(\mathbf{v})}(x)$，其中 $C_{\mathrm{GL}(\mathbf{v})}(x)$是点$x \in \mathcal{N}_{\boldsymbol{\lambda}}$的中心化子。于是我们有

$$H^{\mathbb{C}^*_\hbar \times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}\left(\mathrm{pr}^{-1}\mathcal{N}_{\boldsymbol{\lambda}}\right) \cong H_{\mathbb{C}^*_\hbar \times C_{\mathrm{GL}(\mathbf{v})}(x)}(\mathrm{pt}),$$

且后者是 $H_{\mathbb{C}^*_\hbar \times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}(\mathrm{pt})$ 上的自由模，并且集中在偶数次数。令 $x = (\Phi_i)_{i \in Q_0} \in \mathcal{N}_{\boldsymbol{\lambda}}$，则 $\mathrm{pr}^{-1}(x) \cap Z(s)^{\mathrm{nil}}$ 是 $\mathrm{Rep}^{Q}(\mathbf{v},\mathbf{0})$ 中由满足以下方程的 $(X_a)_{a \in Q_1}$ 构成的子空间

$$X_a \Phi_i^{l_{ij}} - \Phi_j^{l_{ji}} X_a = 0, \quad \forall\ (a : i \to j) \in Q_1.$$

由于该方程关于 X 是线性的，$\mathrm{pr}^{-1}(x) \cap Z(s)^{\mathrm{nil}}$ 是 $\mathrm{Rep}_Q(\mathbf{v},\mathbf{0})$ 的线性子空间。沿 $\mathrm{GL}(\mathbf{v})$-作用进行传递后，我们看到 $\mathrm{pr}^{-1}(x) \cap Z(s)^{\mathrm{nil}}$ 是 $\mathrm{Rep}_Q(\mathbf{v},\mathbf{0}) \times \mathcal{N}_{\boldsymbol{\lambda}} \to \mathcal{N}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 的向量子丛。特别地，我们有

$$H^{\mathbb{C}_\hbar^* \times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}\left(Z(s)^{\mathrm{nil}} \cap \mathrm{pr}^{-1}\mathcal{N}_{\boldsymbol{\lambda}}\right) \cong H^{\mathbb{C}_\hbar^* \times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}(\mathcal{N}_{\boldsymbol{\lambda}}) \cong H_{\mathbb{C}_\hbar^* \times C_{\mathrm{GL}(\mathbf{v})}(x)}(\mathrm{pt}),$$

这是一个自由的 $H_{\mathbb{C}_\hbar^* \times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}(\mathrm{pt})$ 模，且集中在偶数次数上。这证明了断言（ a).

由于 $\mathrm{Rep}_{Q^\sharp}(\mathbf{v},\mathbf{0})^{\mathbb{C}_\hbar^*} \subset Z(s)^{\mathrm{nil}}$，$I$ 局部化后的推前映射

$$H^{\mathbb{C}_\hbar^* \times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}\left(Z(s)^{\mathrm{nil}}\right)_I \to H^{\mathbb{C}_\hbar^* \times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}\left(\mathrm{Rep}_{Q^\sharp}(\mathbf{v},\mathbf{0})^{\mathrm{nil}}\right)_I$$

是一个同构，其中 $I \subset H_{\mathbb{C}_\hbar^* \times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}(\mathrm{pt})$ 是由投影 $H_{\mathbb{C}_\hbar^* \times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}(\mathrm{pt}) \twoheadrightarrow H_{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathrm{pt})$ 的核所定义的素理想。然后，断言（b）由 I 局部化后的单射性以及自由性（断言（ a ））得出。□

引理 A.5. 沿闭嵌入的推前

$$\iota\colon H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0}),\mathsf{w})_{\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0})^{\mathrm{nil}}} \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar) \to H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0}),\mathsf{w}) \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}(\hbar)$$

当 $\mathbf{v} = n\delta_i,\ n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 或 $\mathbf{v} = m\delta_i + \delta_j,\ i \neq j,\ m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 时是单射。

证明。 考虑 th e Jordan-H¨older 映射 $\mathrm{JH}\colon \mathfrak{M}(\mathbf{v},\ \mathbf{0}) \to \mathcal{M}_0(\mathbf{v},\ \mathbf{0})$，其目标为仿射商

$$\mathcal{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{0}) = \mathrm{Rep}_{\widetilde{Q}}(\mathbf{v},\mathbf{0}) /\!\!/ \mathrm{GL}(\mathbf{v}).$$

于是，ι 由将超上同调 $H^{\mathbb{C}_\hbar^*}(\mathcal{M}_0(\mathbf{v},\ \mathbf{0})\ -)$ 应用于复形之间的自然映射而诱导出：

$$i_* i^! \mathsf{JH}_* \varphi_{\mathsf{w}} \omega_{\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0})} \to \mathsf{JH}_* \varphi_{\mathsf{w}} \omega_{\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0})},$$

其中 $i\colon \{0\} \hookrightarrow \mathcal{M}_0(\mathbf{v},\ \mathbf{0})$ 是由平凡箭图表示给出的闭嵌入。注意，$\mathrm{JH}_* \varphi_{\mathsf{w}} \omega_{\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0})}$的支撑位于

$$\mathsf{JH}(\mathrm{Crit}_{\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0})}(\mathsf{w})) \cong \mathrm{Crit}_{\mathrm{Rep}_{\widetilde{Q}}(\mathbf{v},\mathbf{0})}(\mathsf{w}) /\!\!/ \mathrm{GL}(\mathbf{v}).$$

于是，只需证明在以下两种情形中，$\mathrm{Crit}_{\mathrm{Rep}_{\widetilde{Q}}(\mathbf{v},\ \mathbf{0})}(\mathsf{w}) /\!\!/ \mathrm{GL}(\mathbf{v})$ 的 $\mathbb{C}_\hbar^*$-不动点是 $\{0\}$ ：

(i) $\mathbf{v} = n\delta_i,\ n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, (ii) $\mathbf{v} = m\delta_i + \delta_j,\ i \neq j,\ m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$.

在情形 (i) 中，w 在 $\mathrm{Rep}_{\widetilde{Q}}(\mathbf{v},\mathbf{0})$ 上为零，因此我们有

$$\mathcal{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{0}) \cong \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\mathrm{tr}(\Phi_i), \mathrm{tr}(\Phi_i^2), \ldots, \mathrm{tr}(\Phi_i^n)].$$

由于 $\mathbb{C}_\hbar^*$ 以非平凡权缩放 Φ_i，我们有 $\mathcal{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{0})^{\mathbb{C}_\hbar^*} = \{0\}$。

在情形 (ii) 中，不失一般性，我们可以假设 $i < j$，而 $i > j$ 的情形可用同样的方法证明。考虑自然映射

$$\mathrm{Crit}_{\mathrm{Rep}_{\widetilde{Q}}(\mathbf{v},\mathbf{0})}(\mathsf{w}) /\!\!/ \mathrm{GL}(\mathbf{v}) \to \mathfrak{gl}(\mathbf{v}) /\!\!/ \mathrm{GL}(\mathbf{v})$$

该映射将 (Φ_k, X_a, X_{a^*}) 映至 $(\Phi_k)_{k \in Q_0} \in \mathfrak{gl}(\mathbf{v})$。$\mathbb{C}_\hbar^*$ $\mathrm{GL}(\mathbf{v})$ 在 $\mathfrak{gl}(\mathbf{v}) /\!\!/$ 中的不动点为 $\{0\}$，因此，对于 $\mathrm{Crit}_{\mathrm{Rep}_{\widetilde{Q}}(\mathbf{v},\mathbf{0})}(\mathsf{w}) /\!\!/ \mathrm{GL}(\mathbf{v})$ 中任意一个不动点的代表元 (Φ_k, X_a, X_{a^*})，$(\Phi_k)_{k \in Q_0}$ 必为幂零。幂零性意味着当 $\mathbf{v}_j = 1$ 时 $\Phi_j = 0$，并且对于所有 $s > 0$，函数 $\mathrm{tr}(\Phi_i^s)$ 在 $\mathrm{Crit}_{\mathrm{Rep}_{\widetilde{Q}}(\mathbf{v},\mathbf{0})}(\mathsf{w}) /\!\!/ \mathrm{GL}(\mathbf{v})$ 上为零。于是，根据不变量理论，$\mathbb{C}\left[\left(\mathrm{Crit}_{\mathrm{Rep}_{\widetilde{Q}}(\mathbf{v},\mathbf{0})}(\mathsf{w}) /\!\!/ \mathrm{GL}(\mathbf{v})\right)^{\mathbb{C}_\hbar^*}\right]$ 由 $\{X_b \Phi_i^r X_{a^*}\}_{(a,b:i \to j) \in Q_1, r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 生成。另一方面，$\partial \mathsf{w} / \partial X_a = 0$ 对所有 $(a\colon i \to j) \in Q_1$ 给出 $\Phi_i^{l_{ij}} X_{a^*} = 0$（此处我们用到了 $\Phi_j = 0$）。于是，只有满足 $r < l_{ij}$ 的那些 $X_b \Phi_i^r X_{a^*}$ 才可能非零。然而，$X_b \Phi_i^r X_{a^*}$ 具有 $\mathbb{C}_\hbar^*$ 权 $d_i(r - l_{ij})$，当 $r \neq l_{ij}$ 时该权非零。因此，

$$\mathbb{C}\left[\left(\mathrm{Crit}_{\mathrm{Rep}_{\widetilde{Q}}(\mathbf{v},\mathbf{0})}(\mathsf{w}) /\!\!/ \mathrm{GL}(\mathbf{v})\right)^{\mathbb{C}_\hbar^*}\right] = \mathbb{C},$$

由此得出 $\left(\text{临界点集}_{\mathrm{Rep}_{\widetilde{Q}}(\mathbf{v},\mathbf{0})}(\mathsf{w}) /\!\!/ \mathrm{GL}(\mathbf{v})\right)^{\mathbb{C}_\hbar^*} = \{0\}$。

□

A.2. **仿射杨 Yangian $\mathfrak{sl}_{n|m}$的正部分**。设 $m,n\in\mathbb{N}$ 且 $\max\{mn,m,n\}\geqslant 3$。类型为 (m,n) 的奇偶序列是一个元组 $\mathbf{s}=(s_1,s_2,\dots,s_{m+n})$，其中 ±1 有 m 个条目等于 1。设 $Q_0=\mathbb{Z}/(m+n)\mathbb{Z}$。

给定一个奇偶序列 $\mathbf{s}$，我们定义矩阵 $A=(a_{i,\ j})_{i,\ j\in Q_0}$ 和 $M=(m_{i,\ j})_{i,\ j\in Q_0}$ 如下：

$$\begin{aligned} a_{ij}&=(s_i+s_{i+1})\delta_{ij}-s_i\delta_{i,j+1}-s_j\delta_{i+1,j},\\ m_{i,i+1}&=-m_{i+1,i}=-s_{i+1},\\ m_{i,j}&=0 \text{ if } |i-j|\neq 1. \end{aligned}\tag{A.2}$$

通过令 $Q_1=Q_1^+\sqcup Q_1^-\sqcup\mathcal{E}$ with，定义一个对称箭图 $Q=(Q_0,\ Q_1)$

$$Q_1^+=\{X_i:i\to i+1\mid i\in Q_0\},\quad Q_1^-=\{Y_i:i+1\to i\mid i\in Q_0\},\quad \mathcal{E}=\{\Phi_i:i\to i\mid s_i+s_{i+1}\neq 0\}.$$

注意，奇节点为 $Q_0^{\mathrm{f}}=\{i\in Q_0:\ s_i+s_{i+1}=0\}$。定义势

$$\mathsf{W}=\sum_{i\in Q_0}\Phi_i(Y_iX_i-X_{i-1}Y_{i-1})+\sum_{j\in Q_0^{\mathrm{f}}}Y_jX_jX_{j-1}Y_{j-1},$$

并记 $\mathsf{w}=\mathrm{tr}(\mathsf{W})$。令 $\mathsf{T}_0=\mathbb{C}_\hbar^*\times\mathbb{C}_\varepsilon^*$，并令其按下式作用于 Q：

$$(q,t)\in\mathbb{C}_\hbar^*\times\mathbb{C}_\varepsilon^*:(X_i,Y_i,\Phi_j)\mapsto(q^{s_{i+1}}t^{-s_{i+1}}X_i,q^{s_{i+1}}t^{s_{i+1}}Y_i,q^{-2s_j}\Phi_j),\ \text{for } i\in Q_0,j\in Q_0^{\mathrm{f}}.$$

于是 W 是 T_0-不变的。

定义 A.6 ([U, VV1])。 $\mathfrak{sl}_{n|m}$ 的仿射杨 Yangian 的正部分，记作 $Y^+(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n|m})$，是由 $\{x_{i,r}^+\}_{i\in Q_0,r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 生成的 $\mathbb{C}[\hbar,\varepsilon]$ 代数，满足以下关系

$$\begin{aligned} &(u-v+m_{ij}\varepsilon)[x_i^+(u),x_j^+(v)]-a_{ij}\hbar\{x_i^+(u),x_j^+(v)\}=[x_{i,0}^+,x_j^+(v)]-[x_i^+(u),x_{j,0}^+],\ \forall\, i,j\in Q_0,\\ &[x_i^+(u),x_j^+(v)]=0,\ \text{if } a_{ij}=0,\\ &\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2}[x_i^+(u_{\sigma(1)}),[x_i^+(u_{\sigma(2)}),x_j^+(v)]]=0,\ \text{for } i\in Q_0^{\mathrm{b}} \text{ and } |i-j|=1,\\ &\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2}[x_i^+(u_{\sigma(1)}),[x_{i+1}^+(v),[x_i^+(u_{\sigma(2)}),x_{i-1}^+(w)]]]=0,\ \text{for } i\in Q_0^{\mathrm{f}} \text{ and } i\pm1\in Q_0^{\mathrm{b}}. \end{aligned}\tag{A.3}$$

这里 $[a,b]=ab-(-1)^{|a|\cdot|b|}ba$、$\{a,b\}=ab+(-1)^{|a|\cdot|b|}ba$，以及 $|x_{i,r}^+|=|i|$

命题 A.7. 存在一个满射 $\mathbb{C}(\hbar,\varepsilon)$-代数映射

$$Y^+(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n|m})\otimes_{\mathbb{C}[\hbar,\varepsilon]}\mathbb{C}(\hbar,\varepsilon)\twoheadrightarrow\widetilde{\mathcal{SH}}^{\mathrm{nil}}_{Q,\mathsf{W}}\otimes_{\mathbb{C}[\hbar,\varepsilon]}\mathbb{C}(\hbar,\varepsilon),\quad x_i^+\mapsto e_i(z).$$

证明。只需证明 $x_i^+(z)\mapsto e_i(z)$ 给出一个 $\mathbb{C}(\hbar)$-代数同态，随后根据定义，$\{e_i(z)\}_{i\in Q_0}$ 生成 $\widetilde{\mathcal{SH}}^{\mathrm{nil}}_{Q,\mathsf{W}}$，即可得到满射性。设 $\widetilde{\mathcal{SH}}_{Q,\mathsf{W}}$ 是势 W 的球面CoHA。

由 [VV1 定理 C.2]，，存在一个 $\mathbb{C}[\hbar,\varepsilon]$-代数同态

$$Y^+(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n|m})\to\widetilde{\mathcal{SH}}_{Q,\mathsf{W}},\quad x_i^+(z)\mapsto\tilde{e}_i(z),$$

其中 $\tilde{e}_i(z)=\sum_{r\geqslant 0}\tilde{e}_{i,\ r}z^{-r-1}$ 是 CoHA元素的生成函数

$$\tilde{e}_{i,r}:=c_1(\mathcal{L}_i)^r\cap[\mathfrak{M}(\delta_i,\mathbf{0})],\quad\forall\, r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},$$

并且 $\mathcal{L}_i$ 是 $\mathfrak{M}(\delta_i,\ \mathbf{0})\cong[\mathbb{C}^{\mathfrak{g}_i}/\mathbb{C}^*]$上的泛线丛。这里，若 i 为偶数，则 $\mathfrak{g}_i=1$；若 i 为奇数，则 $\mathfrak{g}_i=0$。

沿闭嵌入的推前

$$\iota\colon\widetilde{\mathcal{SH}}^{\mathrm{nil}}_{Q,\mathsf{W}}\to\widetilde{\mathcal{SH}}_{Q,\mathsf{W}}$$

若 i 为偶数，则将 $e_i(z)$ 映射到 $-2s_i\hbar\,\tilde{e}_i(z)$；若 i 为奇数，则映射到 $\tilde{e}_i(z)$。注意，

$$x_i^+(z)\mapsto\begin{cases}-2s_i\hbar x_i^+(z), & i\in Q_0^{\mathrm{b}},\\ x_i^+(z), & i\in Q_0^{\mathrm{f}},\end{cases}$$

给出一个 $\mathbb{C}(\hbar,\ \varepsilon)$-代数自同构

$$Y^+(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n|m})\otimes_{\mathbb{C}[\hbar,\varepsilon]}\mathbb{C}(\hbar,\varepsilon)\cong Y^+(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n|m})\otimes_{\mathbb{C}[\hbar,\varepsilon]}\mathbb{C}(\hbar,\varepsilon).$$

因此，只需检查对于关系 (A.3) 中出现的那些次数，ι 在 T_0-局部化后是单射的即可。这将在下面的引理 A.8 中得到验证。□

引理 A.8。 沿闭嵌入的推前

$$\iota\colon H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0}),\mathsf{w})_{\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0})^{\mathrm{nil}}}\otimes_{\mathbb{C}[\hbar,\varepsilon]}\mathbb{C}(\hbar,\varepsilon)\to H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0}),\mathsf{w})\otimes_{\mathbb{C}[\hbar,\varepsilon]}\mathbb{C}(\hbar,\varepsilon)$$

当$\mathbf{v}=n\delta_i,\ n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$，或$\mathbf{v}=m\delta_i+\delta_j,\ i\neq j,\ m\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$，或$\mathbf{v}=\delta_{i-1}+2\delta_i+\delta_{i+1}$, i为奇数且 $i\pm 1$为偶数时，是单射。

证明。 与引理 A.5 的证明类似，我们需要证明，在以下三种情形中，T_0 是 $\mathrm{Crit}_{\mathrm{Rep}_Q(\mathbf{v},\ \mathbf{0})}(\mathsf{w})/\!\!/\mathrm{GL}(\mathbf{v})$ 的固定点 $\{0\}$：

(i) $\mathbf{v}=n\delta_i, n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, (ii) $\mathbf{v}=m\delta_i+\delta_j, i\neq j$, $m\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, (iii) $\mathbf{v}=\delta_{i-1}+2\delta_i+\delta_{i+1}$, i 为奇数且 $i\pm 1$ 为偶数。

前两种情形的证明与引理 A.5 类似，此处不再重复。对于情形 (iii)，我们有一个自然映射

$$\mathrm{Crit}_{\mathrm{Rep}_Q(\mathbf{v},\mathbf{0})}(\mathsf{w})/\!\!/\mathrm{GL}(\mathbf{v})\to\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*,$$

它将 $(X_i,X_{i-1},Y_i,Y_{i-1},\Phi_{i+1},\Phi_{i-1})$ 映为 $(\Phi_{i-1},\Phi_{i+1})\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$。 $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ 的 T_0 不动点为$\{0\}$，因此，对于 $\mathrm{Crit}_{\mathrm{Rep}_{\bar{Q}}}(\mathbf{v},\mathbf{0})(\mathsf{w})/\!\!/\mathrm{GL}(\mathbf{v})$ 中任意一个 T_0 不动点的代表 $(X_i,X_{i-1},Y_i,Y_{i-1},\Phi_{i+1},\Phi_{i-1})$，我们有$\Phi_{i\pm 1}=0$。于是，根据不变量理论， $R=\mathbb{C}\left[\left(\mathrm{Crit}_{\mathrm{Rep}_Q}(\mathbf{v},\mathbf{0})(\mathsf{w})/\!\!/\mathrm{GL}(\mathbf{v})\right)^{\mathbb{C}^*_\hbar}\right]$ 由 $\{X_i,X_{i-1},Y_i,Y_{i-1}\}$形成的循环的迹生成。另一方面， $\partial\mathsf{w}/\partial X_i=0$ 意味着 $X_{i-1}Y_{i-1}Y_i=0$，因此 R 的非平凡生成元为 $\mathrm{tr}(X_iY_i)^m$ 和 $\mathrm{tr}(X_{i-1}Y_{i-1})^m$，其中 $m\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$。这两类生成元的 T_0 权均非零，因此 $R=\mathbb{C}$，由此得出 $\left(\mathrm{Crit}_{\mathrm{Rep}_Q}(\mathbf{v},\mathbf{0})(\mathsf{w})/\!\!/\mathrm{GL}(\mathbf{v})\right)^{\mathsf{T}_0}=\{0\}$。 □

A.3. **$D(2,\ 1;\ \lambda)$的杨 Yangian 正部**。 回顾一下例外单李超代数 $\mathfrak{g}=D(2,\ 1;\lambda)$，它有两种表示 D_λ 和 D_λ°，对应非共轭的根系。具体而言， $\mathfrak{g}$ 由 $\{e_i,f_i\}_{i=1、2、3}$生成，其奇偶性由 $|e_i|=|f_i|=i+1$ 给定：若 $\mathfrak{g}=D_\lambda$ 则为（模 2），若 $\mathfrak{g}=D_\lambda^\circ$则为 $|e_i|=|f_i|=1$，并满足以下关系

$$[e_i,f_j]=0,\ i\neq j,\quad [[e_i,f_i],e_j]=a_{ij}e_j,\quad [[e_i,f_i],f_j]=-a_{ij}f_j,\ \forall\ i,j\in Q_0,$$

and

$$\mathrm{ad}_{e_i}^{1+\delta(a_{ij}\neq 0)}(e_j)=0=\mathrm{ad}_{f_i}^{1+\delta(a_{ij}\neq 0)}(f_j),\ \text{ if } \mathfrak{g}=D_\lambda,$$
$$a_{13}[[e_1,e_2],e_3]=a_{12}[[e_1,e_3],e_2],\ a_{13}[[f_1,f_2],f_3]=a_{12}[[f_1,f_3],f_2],\ \text{ if } \mathfrak{g}=D_\lambda^\circ.$$

这里，若满足 (–)，则 δ(–) 为 $=1$；否则， δ(–) 为 $=0$。Cartan 矩阵 (a_{ij}) 定义如下

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&\lambda\\0&-1&2\end{pmatrix}\ \text{ if }\ \mathfrak{g}=D_\lambda,\quad (a_{ij})=\begin{pmatrix}0&-1&1+\lambda\\-1&0&-\lambda\\1+\lambda&-\lambda&0\end{pmatrix}\ \text{ if }\ \mathfrak{g}=D_\lambda^\circ. \tag{A.4}$$

定义对角矩阵 (d_{ij})，如下所示

$$(d_{ij})=\mathrm{diag}(1,-1,\lambda)\ \text{ if }\ \mathfrak{g}=D_\lambda,\quad (d_{ij})=\mathrm{id}_{3\times 3}\ \text{ if }\ \mathfrak{g}=D_\lambda^\circ.$$

定义 A.9. $D(2,\ 1;\ \lambda)$ 的 Yangian 正部，记作 $Y^+(\mathfrak{g})$（ $\mathfrak{g}=D_\lambda$时）或 $\mathfrak{g}=D_\lambda^\circ$，是由 $\{x_{i,r}^+\}_{i\in\{1,2,3\}、\ r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 生成的 $\mathbb{C}[\hbar,\lambda]$-代数，并满足关系

$$\begin{gathered}(u-v)[x_i^+(u),x_j^+(v)]-d_{ii}a_{ij}\hbar/2\{x_i^+(u),x_j^+(v)\}=[x_{i,0}^+,x_j^+(v)]-[x_i^+(u),x_{j,0}^+],\ \forall\, i,j,\\ [x_i^+(u),x_j^+(v)]=0,\ \text{if } a_{ij}=0,\\ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2}[x_i^+(u_{\sigma(1)}),[x_i^+(u_{\sigma(2)}),x_j^+(v)]]=0,\ \text{if } \mathfrak{g}=D_\lambda,\ a_{ij}\neq 0,\ \text{and } i\neq j,\\ a_{13}[[x_1^+(v_1),x_2^+(v_2)],x_3^+(v_3)]=a_{12}[[x_1^+(v_1),x_3^+(v_3)],x_2^+(v_2)],\ \text{if } \mathfrak{g}=D_\lambda^\circ.\end{gathered} \tag{A.5}$$

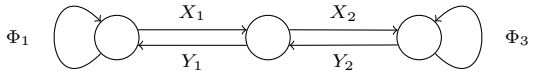
其中 $x_i^+(z):=\sum_{r\geqslant 0}x_i^+{}_{,\ r}z^{-r-1}$、 $[a,b]=ab-(-1)^{|a|\cdot|b|}ba$、 $\{a,b\}=ab+(-1)^{|a|\cdot|b|}ba$，以及

$$|x_{i,r}^+|=\begin{cases}i+1\pmod 2, & \text{if } \mathfrak{g}=D_\lambda,\\ 1, & \text{if } \mathfrak{g}=D_\lambda^\circ.\end{cases}$$

A.3.1. $Y^+(D_\lambda)$ 和卷积上同调代数。设 $Q=(Q_0,\ Q_1)$ 为具有 $Q_0=\{1,2,3\}$ 和 $Q_1=Q_1^+\sqcup Q_1^-\sqcup\mathcal{E}$ 的对称箭图，其中

$$Q_1^+=\{X_i: i\to i+1\mid i=1,2\},\quad Q_1^-=\{Y_i: i+1\to i\mid i=1,2\},\quad \mathcal{E}=\{\Phi_j: j\to j\mid j=1,3\},$$

如下所示：



令 $\mathsf{T}_0=\mathbb{C}^*_{\hbar_1}\times\mathbb{C}^*_{\hbar_2}$ 作用于 Q，其作用为

$$(t_1,t_2)\in\mathbb{C}^*_{\hbar_1}\times\mathbb{C}^*_{\hbar_2}:(X_1,Y_1,X_2,Y_2,\Phi_1,\Phi_3)\mapsto(t_1X_1,t_1Y_1,t_2X_2,t_2Y_2,t_1^{-2}\Phi_1,t_2^{-2}\Phi_3).$$

取势 W 为

$$\mathsf{W}=\Phi_1Y_1X_1+\Phi_3X_2Y_2,$$

并记 $\mathsf{w}=\mathrm{tr}(\mathsf{W})$。

命题 A.10。存在一个满射的 $\mathbb{C}$-代数映射

$$Y^+(D_\lambda)\otimes_{\mathbb{C}[\hbar,\lambda]}\mathbb{C}(\hbar,\lambda)\twoheadrightarrow\widetilde{\mathcal{SH}}^{\mathrm{nil}}_{Q,\mathsf{W}}\otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]}\mathbb{C}(\mathsf{t}_0),\quad x_i^+(z)\mapsto e_i(z),\quad \hbar\mapsto 2\hbar_1,\quad \lambda\mapsto\hbar_2/\hbar_1.$$

证明。我们注意到，关于 $\mathfrak{g}=D_\lambda$ 的关系 (A.5) 最多只涉及箭图 Q 中的两个节点。由于节点 1 和 3 不相连，关系 $[e_1(u)\ e_3(v)]=0$ 在 $\widetilde{\mathcal{SH}}^{\mathrm{nil}}_Q$,w 中成立。因此，要在卷积上同调代数一侧验证 (A.5)，只需考察支撑在两个相邻节点上的箭图表示，也就是以下两个由 W 限制得到的带势子箭图：

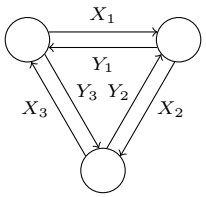


上述两个带势箭图是 §A.2 中带势箭图的特殊情形，其余关系 (A.5) 可由命题 A.7 推出。□

A.3.2. $Y^+(D^\circ_\lambda)$ 与卷积上同调代数。设 $Q^\circ=(Q^\circ_0,Q^\circ_1)$ 为具有 $Q^\circ_0=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 和 $Q^\circ_1=Q_1^{\circ+}\sqcup Q_1^{\circ-}$ 的对称箭图，其中

$$Q_1^{\circ+}=\{X_i: i\to i+1\mid i\in Q_0\},\quad Q_1^{\circ-}=\{Y_i: i+1\to i\mid i\in Q_0\},$$

如下所示：



令 $\mathbb{C}^*_{\hbar_1}\times\mathbb{C}^*_{\hbar_2}\times\mathbb{C}^*_{\hbar_3}$ 按如下方式作用于 Q°

$$(t_1,t_2,t_3)\in\mathbb{C}^*_{\hbar_1}\times\mathbb{C}^*_{\hbar_2}\times\mathbb{C}^*_{\hbar_3}:(X_i,Y_i)\mapsto(t_iX_i,t_iY_i).$$

取势 W° 为

$$\mathsf{W}^\circ=X_3X_2X_1+Y_1Y_2Y_3,$$

它由子环面固定

$$\mathsf{T}_0=\{(t_1,t_2,t_3)\in\mathbb{C}^*_{\hbar_1}\times\mathbb{C}^*_{\hbar_2}\times\mathbb{C}^*_{\hbar_3}\mid t_1t_2t_3=1\},$$

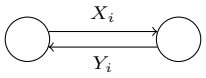
并记为 $\mathsf{w}^\circ=\mathrm{tr}(\mathsf{W}^\circ)$。将等变基环记为

$$\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]:=H_{\mathsf{T}_0}(\mathrm{pt})\cong\mathbb{C}[\hbar_1,\hbar_2,\hbar_3]/(\hbar_1+\hbar_2+\hbar_3).$$

命题 A.11. 存在一个满射 $\mathbb{C}$-代数映射

$$Y^+(D_\lambda^\circ)\otimes_{\mathbb{C}[\hbar,\lambda]}\mathbb{C}(\hbar,\lambda)\twoheadrightarrow \widetilde{\mathcal{SH}}^{\mathrm{nil}}_{Q^\circ,\mathsf{w}^\circ}\otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]}\mathbb{C}(\mathsf{t}_0),\quad x_i^+(z)\mapsto e_i(z),\quad \hbar\mapsto 2\hbar_1,\quad \lambda\mapsto \hbar_2/\hbar_1.$$

证明。 与命题 A.10 的证明类似，(A.5) 中除最后一个关系外，其余关系都归结为以下箭图



它是命题 A.7 中带势箭图的一个特例。还需证明方程

$$\hbar_3[[e_1(v_1),e_2(v_2)],e_3(v_3)]=\hbar_1[[e_1(v_1),e_3(v_3)],e_2(v_2)] \tag{A.6}$$

在 $\widetilde{\mathcal{SH}}^{\mathrm{nil}}_{Q^\circ,\mathsf{w}^\circ}\otimes_{\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]}\mathbb{C}(\mathsf{t}_0)$ 中成立。令 $\mathbf{v}=(1,1,1)$，则我们断言

(i) 局部化后，推前映射 $H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0}),\mathsf{w}^\circ)_{\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0})^{\mathrm{nil}}}\to H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0}),\mathsf{w}^\circ)$ 是单射，

(ii) 特化映射 sp: $H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0}),\mathsf{w}^\circ)\to H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0}))$ 是单射。

暂且假设这些断言成立，只需证明 (A.6) 在 $\mathcal{SH}_{Q^\circ,0}$ 中成立，其中的上同调霍尔代数具有Q° 零势。(A.6) 等价于以下对称形式

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}\hbar_{i+1}\left(e_{i-1}(v_{i-1})e_i(v_i)e_{i+1}(v_{i+1})-e_{i+1}(v_{i+1})e_i(v_i)e_{i-1}(v_{i-1})\right)=0\,. \tag{A.7}$$

对于维数向量 $\mathbf{v}=(1,1,1)$，每个节点的维数均为一。令 x_i 为节点 i的等变参数，则 $H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0}))\cong\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]\otimes\mathbb{C}[\mathsf{t}_0]$,，并且有 $e_i(v_i)=\sum_{n\geqslant 0}x_i^n v_i^{-n-1}=\frac{1}{v_i-x_i}$。注意，对于 Q°，(3.11) 中的符号扭曲是平凡的。直接计算可得

$$e_{i-1}(v_{i-1})e_i(v_i)e_{i+1}(v_{i+1})=\frac{(x_{i+1}-x_{i-1}+\hbar_{i+1})(x_i-x_{i-1}+\hbar_{i-1})(x_{i+1}-x_i+\hbar_i)}{(v_1-x_1)(v_2-x_2)(v_3-x_3)}\,,$$
$$e_{i+1}(v_{i+1})e_i(v_i)e_{i-1}(v_{i-1})=\frac{(x_{i-1}-x_{i+1}+\hbar_{i+1})(x_{i-1}-x_i+\hbar_{i-1})(x_i-x_{i+1}+\hbar_i)}{(v_1-x_1)(v_2-x_2)(v_3-x_3)}\,.$$

Then

$$\text{LHS of (A.7)}=2\sum_{i\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}\frac{-\hbar_{i+1}(x_1-x_3)(x_2-x_1)(x_3-x_2)+(x_i-x_{i-1})(\hbar_{i+1}^2\hbar_i+\hbar_i^2\hbar_{i+1}-\hbar_i\hbar_{i-1}\hbar_{i+1})}{(v_1-x_1)(v_2-x_2)(v_3-x_3)}=0.$$

接下来，我们证明断言 (i) 和 (ii)。

断言 (i) 的证明与引理 A.5 类似，即我们需要证明

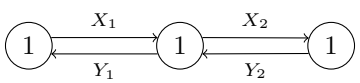
$$\left(\mathrm{Crit}_{\mathrm{Rep}_{Q^\circ}(\mathbf{v},\mathbf{0})}(\mathsf{w}^\circ)/\!\!/\mathrm{GL}(\mathbf{v})\right)^{\mathsf{T}_0}=\{0\}. \tag{A.8}$$

对于 $i\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\partial\mathsf{w}^\circ/\partial X_i=0$ 得到 $X_{i-1}X_{i+1}=0$，而 $\partial\mathsf{w}^\circ/\partial Y_i=0$ 得到 $Y_{i+1}Y_{i-1}=0$。于是，$\mathbb{C}[\mathrm{Crit}_{\mathrm{Rep}_{Q^\circ}(\mathbf{v},\mathbf{0})}(\mathsf{w}^\circ)]$ 中的 $\mathrm{GL}(\mathbf{v})$-不变函数由 $\{X_iY_i\}_{i\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$ 生成，并满足关系 $X_iY_iX_jY_j=0$，其中任意一对$i\neq j$均如此。因此，$\mathbb{C}[\mathrm{Crit}_{\mathrm{Rep}_{Q^\circ}(\mathbf{v},\mathbf{0})}(\mathsf{w}^\circ)/\!\!/\mathrm{GL}(\mathbf{v})]$ 由单项式 $\{(X_iY_i)^n\}_{i\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}^{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 张成，其中唯一的 T_0-不变函数是常数函数。这就证明了 (A.8)。

由维数约化可得

$$H^{\mathsf{T}_0}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{0}),\mathsf{w}^\circ)\cong H^{\mathsf{T}_0\times\mathrm{GL}(\mathbf{v})}(Z),$$

其中，Z是箭图表示空间 $R\cong\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[X_1,X_2,Y_1,Y_2]$ 中的轨迹 $\{X_1X_2=0,\,Y_1Y_2=0\}$



由特化映射与典范映射 [COZZ1 的交换性可知，注 7.16], 中的断言 (ii) 等价于断言推前 $H^{\mathsf{T}_0\times_{\mathrm{GL}(\mathbf{v})}}(Z)\to H^{\mathsf{T}_0\times_{\mathrm{GL}(\mathbf{v})}}(R)$ 是单射。注意，$\mathbb{C}[R/\!\!/\mathrm{GL}(\mathbf{v})]$ 由 $X_1X_2,Y_1Y_2,X_1Y_1,X_2Y_2$ 生成，它们相对于对角子环面 $\mathbb{C}^*\hookrightarrow\mathbb{C}^*_{\hbar_1}\times\mathbb{C}^*_{\hbar_2}\cong\mathsf{T}_0$, 均为正，因此 $(R/\!\!/\mathrm{GL}(\mathbf{v}))^{\mathsf{T}_0}=\{0\}$。由于 $\{0\}\in Z/\!\!/\mathrm{GL}(\mathbf{v})$, $H^{\mathsf{T}_0\times_{\mathrm{GL}(\mathbf{v})}}(Z)\to H^{\mathsf{T}_0\times_{\mathrm{GL}(\mathbf{v})}}(R)$ 在 T_0-局部化后是单射。

我们可以按 $Z=Z_0\cup Z_1\cup Z_2\cup Z_3$ 对 Z 分层，其中

$$Z_0=Z\cap\{X_1\neq 0,Y_2\neq 0\},\ Z_1=Z\cap\{X_1\neq 0,Y_2=0\},\ Z_2=Z\cap\{X_1=0,Y_2\neq 0\},\ Z_4=Z\cap\{X_1=0,Y_2=0\}.$$

设 $\mathrm{GL}(\mathbf{v}) = \mathbb{C}^*_{x_1} \times \mathbb{C}^*_{x_2} \times \mathbb{C}^*_{x_3}$，并令 $\mathrm{GL}(\mathbf{v})$ 的等变参数为 x_1, x_2, x_3，则

$$H^{\mathsf{T}_0\times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}(Z_0) \cong \mathbb{C}[\hbar_1,\hbar_2,x_1,x_2,x_3]/(x_2-x_1+\hbar_1, x_2-x_3+\hbar_2),$$
$$H^{\mathsf{T}_0\times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}(Z_1) \cong \mathbb{C}[\hbar_1,\hbar_2,x_1,x_2,x_3]/(x_2-x_1+\hbar_1),$$
$$H^{\mathsf{T}_0\times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}(Z_2) \cong \mathbb{C}[\hbar_1,\hbar_2,x_1,x_2,x_3]/(x_2-x_3+\hbar_2),$$
$$H^{\mathsf{T}_0\times \mathrm{GL}(\mathbf{v})}(Z_3) \cong \mathbb{C}[\hbar_1,\hbar_2,x_1,x_2,x_3].$$

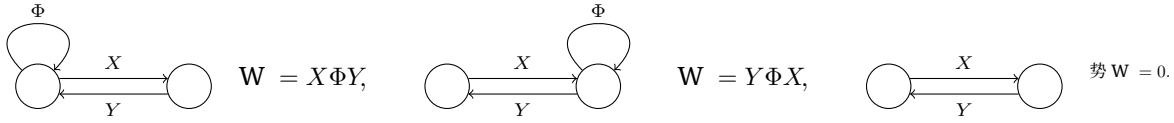
上述所有上同调都是自由的 $\mathbb{C}[\hbar_1,\hbar_2]$-模，并且集中在偶数次数上；对分层 $Z = Z_0 \cup Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3$ 应用切除序列表明，$H^{\mathsf{T}_0\times_{\mathrm{GL}(\mathbf{v})}}(Z)$ 是自由的 $\mathbb{C}[\hbar_1,\hbar_2]$-模。因此，$H^{\mathsf{T}_0\times_{\mathrm{GL}(\mathbf{v})}}(Z) \to H^{\mathsf{T}_0\times_{\mathrm{GL}(\mathbf{v})}}(R)$ 在未经局部化的情况下是单射的。□

Appendix B. R-matrices for quivers with potentials associated to $\mathfrak{gl}_{2|1}$

众所周知，$\mathfrak{gl}_{2|1}$ 具有以下三种 Kac-Dynkin 图：



我们将其分别称为偶-奇、奇-偶和奇-奇情形。我们为上述三种 Kac-Dynkin 图分别关联以下三个带势箭图：



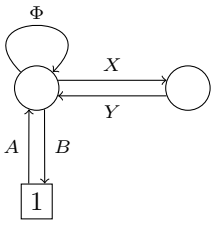
在这三种情形中，令环面 $\mathsf{T}_0 = \mathbb{C}^*_\hbar$ 以权 0、1 和 -1分别作用于箭 X、Y 和 Φ（若存在）。与 §3.2 开头一样，我们固定边的分解 $Q_1 = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{A}^* \sqcup \mathcal{E}$，其中 $\mathcal{A} = \{X\}$、$\mathcal{A}^* = \{Y\}$、$\mathcal{E} = \{\Phi\}$ 或为空。

下面，在定义箭图簇时，我们采用循环稳定性条件（$\theta < 0$）。框架维数向量取为

$$\mathbf{d} = (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = (1, 0).$$

我们计算对称箭图簇 $\mathcal{M}(2\mathbf{d})$ 的 $R^{\mathrm{sup}}(u)$ 矩阵，其中环面 $\mathsf{A} = \mathbb{C}^*_u$ 在框架上的作用为 $u\mathbf{d} + \mathbf{d}$。这里，$R^{\mathrm{sup}}(u)$由定理 3.21 定义。带框架势将按具体情形分别给出。

B.1. 偶奇情形。 考虑以下带势框架箭图：



$$\mathsf{W}^{\mathrm{fr}} = X\Phi Y + B\Phi A\ ,$$

以及 T_0-等变临界上同调

$$\mathcal{H}^{\mathrm{eo}}_{\mathbf{d}} = \bigoplus_{\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^2_{\geqslant 0}} \mathcal{H}^{\mathrm{eo}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v}), \quad \mathcal{H}^{\mathrm{eo}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v}) = H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}), \operatorname{tr}\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}).$$

这里令 $\mathsf{T}_0 = \mathbb{C}^*_\hbar$ 作用于 A 和 B，其权分别为 0 和 1。

[Dav3，命题 6.3] 中的论证可应用于上述带势箭图簇，并且我们对临界轨迹有一个显式描述

$$\mathrm{Crit}_{\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})}(\operatorname{tr}\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}) = \{XY + AB = 0,\ \Phi = 0\} /\!\!/_\theta \mathrm{GL}(\mathbf{v}) =: \mathcal{M}'(\mathbf{v},\mathbf{d}).$$

沿 Φ进行维数约化，我们得到一个同构

$$\mathcal{H}^{\mathrm{eo}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v}) \cong H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}'(\mathbf{v},\mathbf{d})). \tag{B.1}$$

注意

$$\mathcal{M}'(\mathbf{v},\mathbf{d}) \cong \begin{cases} \mathrm{pt}, & \mathbf{v}=(0,0), \\ \mathrm{pt}, & \mathbf{v}=(1,0), \\ \mathbb{C}, & \mathbf{v}=(1,1), \\ \emptyset, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

令 $b_{\mathbf{v}}$ 为基本类 $[\mathcal{M}'(\mathbf{v},\mathbf{d})]$ 在 $\mathcal{H}^{\mathrm{eo}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v})$ 中经同构 (B.1) 映得的像。我们还使用简写记号 b_0、b_1 和 b_2，分别表示 $b_{(0,0)}$、$b_{(1,0)}$ 和 $b_{(1,1)}$。于是，$\mathcal{H}^{\mathrm{eo}}_{\mathbf{d}}$ 是一个自由 $\mathbb{C}[\hbar]$ 模，其基为 $\{b_0,b_1,b_2\}$。

考虑特化映射 [COZZ1，定义 7.14]:

$$\mathrm{sp}\colon H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}),\mathrm{tr}\,\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}) \to H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})).$$

根据 [COZZ1，注 7.16]，，$\mathrm{sp}(b_{\mathbf{v}})$ 与 $\{XY+AB=0\}/\!\!/_{\theta}\mathrm{GL}(\mathbf{v})$ 的基本类推前到 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})$ 中的结果一致，即

$$\mathrm{sp}(b_0)=[\mathcal{M}((0,0),\mathbf{d})],\quad \mathrm{sp}(b_1)=\hbar\,[\mathcal{M}((1,0),\mathbf{d})],\quad \mathrm{sp}(b_2)=\hbar\,[\mathcal{M}((1,1),\mathbf{d})].$$

特别地，sp 是单射。

命题 B.1。在基 $\{b_i\otimes b_j\}_{0\leqslant i,j\leqslant 2}$ 下，$R^{\mathrm{sup}}(u)$ 矩阵为 $\mathcal{H}^{\mathrm{eo}}_{\mathbf{d}}\otimes\mathcal{H}^{\mathrm{eo}}_{\mathbf{d}}$

$$R^{\mathrm{sup}}(u)=\frac{u+\hbar P^{\mathrm{eo}}}{u+\hbar}.$$

这里，P_{eo} 是作用在 $\mathbb{C}^{2|1}\otimes\mathbb{C}^{2|1}$ 上的超置换矩阵，其中 $\mathbb{C}^{2|1}=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{b_0,b_1,b_2\}$ 由 b_0, b_1 偶元素和 b_2 奇元素构成。

证明。由于根据 [COZZ1, 命题 7.18]，，特化与稳定包络可交换，因此稳定包络

$$\mathrm{Stab}_{\pm}\colon H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}}(\mathcal{M}(\mathbf{v},2\mathbf{d})^{\mathsf{A}},\mathrm{tr}\,\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}) \to H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}}(\mathcal{M}(\mathbf{v},2\mathbf{d}),\mathrm{tr}\,\mathsf{W}^{\mathrm{fr}})$$

与其零势对应对象 $\mathrm{Stab}_{\pm}$: $H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}}(\mathcal{M}(\mathbf{v},2\mathbf{d})^{\mathsf{A}}) \to H^{\mathsf{T}_0\times\mathsf{A}}(\mathcal{M}(\mathbf{v},2\mathbf{d}))$ 在特化映射的像上的限制一致。为计算稳定包络和 $R^{\mathrm{sup}}(u)$矩阵，我们有如下观察：若$\mathbf{v}_2=0$，则箭图簇 $\mathcal{M}(\mathbf{v},2\mathbf{d})$ 是 §9.2 中的一个特例，我们可以直接应用其中的结果并得到

$$R^{\mathrm{sup}}(u)(b_i\otimes b_j)=\frac{1}{u+\hbar}\left(u\,b_i\otimes b_j+\hbar\,b_j\otimes b_i\right),\ \text{ for }\ 0\leqslant i,j\leqslant 1.$$

由于 $\mathcal{M}((2,2),2\mathbf{d})$ 只有一个不动分支 $\mathcal{M}((1,1),\mathbf{d})\times\mathcal{M}((1,1),\mathbf{d})$，因此在$\mathbf{v}=(2,2)$情形下，$R^{\mathrm{sup}}(u)$矩阵是一个标量。容易计算得

$$R^{\mathrm{sup}}(u)(b_2\otimes b_2)=\frac{u-\hbar}{u+\hbar}\,b_2\otimes b_2\,.$$

注意，$\mathcal{M}((1,1),2\text{维})\cong\mathrm{Tot}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}(-1)^{\oplus 2})\times\mathbb{C}^2$，其中 $\mathbb{C}^2$ 上的 A 作用是平凡的，而 $\mathrm{Tot}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}(-1)^{\oplus 2})$ 是在 §8.1 开头定义的规范秩为 1 的箭图簇。我们可以直接应用其中的结果，得到

$$R^{\mathrm{sup}}(u)(b_i\otimes b_j)=\frac{1}{u+\hbar}\left(u\,b_i\otimes b_j+\hbar\,b_j\otimes b_i\right),\ \text{ for }\ (i,j)=(0,2)\text{ or }(2,0)\,.$$

令 $X=\mathcal{M}((2,1),2\text{维})$，并令 X_{iso} 为 X 上 A 是同构的开子集。于是 $X^{\mathsf{A}}\subset X_{\mathrm{iso}}$，且有 $X_{\mathrm{iso}}\cong\mathrm{Tot}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}(-1)^{\oplus 2})\times\mathrm{End}(\mathbb{C}^2)_{\hbar}\times\mathrm{End}(\mathbb{C}^2)_{-\hbar}$，其中 $\mathbb{C}^2$ 表示的向量空间均与框架向量空间等变同构，下标 $\hbar$ 和 $-\hbar$ 表示权（在整个端同态空间上）。记 $\mathrm{Attr}_{\pm}(\Delta_{X^{\mathsf{A}}})_Y$ 为 Y 中 $\Delta_{X^{\mathsf{A}}}$ 在 $Y=X_{\mathrm{iso}}\times X^{\mathsf{A}}$ 或 $X\times X^{\mathsf{A}}$ 下的吸引集之闭包。注意，

$$\overline{\mathrm{Attr}}_{\pm}(\Delta_{X^{\mathsf{A}}})_{X_{\mathrm{iso}}\times X^{\mathsf{A}}}=\overline{\mathrm{Attr}}_{\pm}(\Delta_{X^{\mathsf{A}}})_{X\times X^{\mathsf{A}}}\bigcap(X_{\mathrm{iso}}\times X^{\mathsf{A}}).$$

因此，复合映射 $H^{\mathsf{T}_0}(X^{\mathsf{A}})\xrightarrow{\text{稳定包络}}{}^{\pm}H^{\mathsf{T}_0}(X)\xrightarrow{\text{限制}}H^{\mathsf{T}_0}(X_{\mathrm{iso}})$ 等于 X_{iso} 的稳定包络。于是，X 的 $R^{\mathrm{sup}}(u)$ 等于 $\mathrm{Tot}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}(-1)^{\oplus 2})$、$\mathrm{End}(\mathbb{C}^2)_{\hbar}$ 和 $\mathrm{End}(\mathbb{C}^2)_{-\hbar}$ 对应的 $R^{\mathrm{sup}}(u)$ 的乘积:

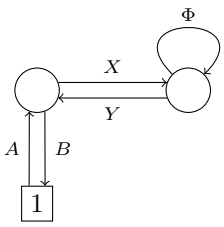
$$R^{\mathrm{sup}}(u)=\frac{1}{u+\hbar}\begin{pmatrix}u&\hbar\\ \hbar&u\end{pmatrix}\times\frac{u-\hbar}{u+\hbar}\times\frac{u+\hbar}{u-\hbar}=\frac{1}{u+\hbar}\begin{pmatrix}u&\hbar\\ \hbar&u\end{pmatrix},$$

由此得到

$$R^{\mathrm{sup}}(u)(b_i\otimes b_j)=\frac{1}{u+\hbar}\left(u\,b_i\otimes b_j+\hbar\,b_j\otimes b_i\right),\ \text{ for }\ (i,j)=(1,2)\text{ or }(2,1)\,.$$ □

注 B.2. </style}也可以使用 [COZZ1, Cor. 4.25] 中的显式公式来计算稳定包络和$R^{\mathrm{sup}}(u)$。

B.2. **奇偶情形**。 考虑以下带势框架箭图：



$$\mathsf{W}^{\mathrm{fr}} = Y\Phi X + ABYX,$$

以及 T_0等变临界上同调

$$\mathcal{H}^{\mathrm{oe}}_{\mathbf{d}} = \bigoplus_{\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^2_{\geqslant 0}} \mathcal{H}^{\mathrm{oe}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v}), \quad \mathcal{H}^{\mathrm{oe}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v}) = H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}), \operatorname{tr}\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}).$$

这里令 $\mathsf{T}_0 = \mathbb{C}^*_\hbar$ 作用于 A 和 B，其权分别为 0 和 -1。

在循环稳定性条件下求解方程 $d\operatorname{tr}\mathsf{W}^{\mathrm{fr}} = 0$，得到

$$\mathrm{Crit}_{\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})}(\operatorname{tr}\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}) \neq \emptyset \iff \mathbf{v} = (0,0),\ (1,0),\ \text{or } (1,1).$$

When $\mathsf{Crit}^{\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})}(\operatorname{tr}\mathsf{W}^{\mathrm{fr}})$ 非空，沿 Φ 和 B 进行维数约化，得到同构：

$$\mathcal{H}^{\mathrm{oe}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v}) \cong H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}'(\mathbf{v},\mathbf{d})), \quad \text{where } \mathcal{M}'(\mathbf{v},\mathbf{d}) = \{B=0, \Phi=0, Y=0\}/\!\!/_\theta \mathrm{GL}(\mathbf{v}). \tag{B.2}$$

令 $b_{\mathbf{v}}$ 为基本类 $[\mathcal{M}'(\mathbf{v},\mathbf{d})]$ 在 $\mathcal{H}^{\mathrm{oe}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v})$ 中经同构 (B.2) 得到的像。我们也使用简写记号 b_0、b_1 和 b_2 分别表示 $b_{(0,0)}$、$b_{(1,0)}$ 和 $b_{(1,1)}$。则 $\mathcal{H}^{\mathrm{oe}}_{\mathbf{d}}$是一个自由 $\mathbb{C}[\hbar]$ 模，其基为 $\{b_0, b_1, b_2\}$。

类似地，我们有一个特化映射

$$\mathrm{sp}\colon H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}), \operatorname{tr}\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}) \to H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})),$$

它满足

$$\mathrm{sp}(b_0) = [\mathcal{M}((0,0),\mathbf{d})], \quad \mathrm{sp}(b_1) = [\mathcal{M}((1,0),\mathbf{d})], \quad \mathrm{sp}(b_2) = \hbar\,[\mathcal{M}((1,1),\mathbf{d})].$$

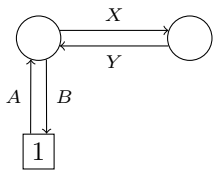
特别地，sp 是单射。如命题 B.1 所示，我们有：

命题 B.3. 在基 $\{b_i \otimes b_j\}_{0\leqslant i,j\leqslant 2}$ 下，$R^{\mathrm{sup}}(u)$ 矩阵 $\mathcal{H}^{\mathrm{oe}}_{\mathbf{d}} \otimes \mathcal{H}^{\mathrm{oe}}_{\mathbf{d}}$为

$$R^{\mathrm{sup}}(u) = \frac{u - \hbar P^{\mathrm{oe}}}{u - \hbar}.$$

这里 P^{oe} 是超置换矩 阵作用于 $\mathbb{C}^{1|2}\otimes\mathbb{C}^{1|2}$，其中 $\mathbb{C}^{1|2} = \mathsf{Span}_{\mathbb{C}}\{b_0, b_1, b_2\}$， b_0 为偶， $b_1\, b_2$ 为奇 d.

B.3. **奇-奇情形**。 考虑如下带势框架箭图：



$$\mathsf{W}^{\mathrm{fr}} = ABYX,$$

以及 T_0-等变临界上同调：

$$\mathcal{H}^{\mathrm{oo}}_{\mathbf{d}} = \bigoplus_{\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^2_{\geqslant 0}} \mathcal{H}^{\mathrm{oo}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v}), \quad \mathcal{H}^{\mathrm{oo}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v}) = H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d}), \operatorname{tr}\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}).$$

这里令 $\mathsf{T}_0 = \mathbb{C}^*_\hbar$ 以权 0 和 -1 分别作用于 A 和 B。

在循环稳定性条件下，求解方程 $d\operatorname{tr}\mathsf{W}^{\mathrm{fr}} = 0$，得到

$$\mathrm{Crit}_{\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})}(\operatorname{tr}\mathsf{W}^{\mathrm{fr}}) \neq \emptyset \iff \mathbf{v} = (0,0),\ (1,0),\ \text{or } (1,1).$$

当 $\mathsf{Crit}^{\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{d})}(\operatorname{tr}\mathsf{W}^{\mathrm{fr}})$ 非空时，沿 B 进行维数约化可得同构：

$$\mathcal{H}^{\mathrm{oo}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v}) \cong H^{\mathsf{T}_0}(\mathcal{M}'(\mathbf{v},\mathbf{d})), \quad \text{where } \mathcal{M}'(\mathbf{v},\mathbf{d}) = \{B=0, Y=0\}/\!\!/_\theta \mathrm{GL}(\mathbf{v}). \tag{B.3}$$

令 $b_{\mathbf{v}}$ 为基本类 $[\mathcal{M}'(\mathbf{v},\mathbf{d})]$ 在 $\mathcal{H}^{\mathrm{oo}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v})$ 中经同构 (B.3) 得到的像。我们还使用简写记号 b_0、b_1 和 b_2 分别表示 $b_{(0,0)}$、$b_{(1,0)}$ 和 $b_{(1,1)}$。于是 $\mathcal{H}^{\mathrm{oo}}_{\mathbf{d}}$是一个自由 $\mathbb{C}[\hbar]$ 模，其基为 $\{b_0, b_1, b_2\}$。

与之前一样，我们有一个满足以下条件的特化映射：

$$\mathrm{sp}(b_0)=[\mathcal{M}((0,0),\mathbf{d})],\quad \mathrm{sp}(b_1)=[\mathcal{M}((1,0),\mathbf{d})],\quad \mathrm{sp}(b_2)=\hbar\,[\mathcal{M}((1,1),\mathbf{d})].$$

特别地，sp 是单射。与命题 B.1 中一样，我们有：

命题 B.4。 在基 $\{b_i\otimes b_j\}_{0\leqslant i,\ j\leqslant 2}$ 下， $R^{\mathrm{sup}}(u)$ 矩阵 $\mathcal{H}^{\mathrm{oo}}_{\mathbf{d}}\otimes\mathcal{H}^{\mathrm{oo}}_{\mathbf{d}}$为

$$R^{\mathrm{sup}}(u)=\frac{u-\hbar P^{\mathrm{oo}}}{u-\hbar}.$$

这里， P_{oo}是作用在 $\mathbb{C}^{2|1}\otimes\mathbb{C}^{2|1}$ 上的超置换矩阵，其中 $\mathbb{C}^{2|1}=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{b_0,b_1,b_2\}$， b_0、 b_2 为偶， b_1 为奇。

References

[AS] N. Arbesfeld 和 O. Schiffmann， *A Presentation of the Deformed $W_{1+\infty}$ Algebra*，《对称性、可积系统与表示》，2013年，第1–13页，Springer Proc. Math. Stat.，第40卷，Springer，海德堡，2013年。[Bao] J. Bao， *More on Affine Dynkin Quiver Yangians*，《高能物理杂志》，第2023卷，第7期，2023年7月。[BD] T. M. Botta 和 B. Davison， *Okounkov's conjecture via BPS Lie algebras*，arXiv:2312.14008v3。[COZZ1] Y. Cao、A. Okounkov、Y. Zhou 和 Z. Zhou， *Stable envelopes for critical loci*，arXiv:2512.23929。[COZZ2] Y. Cao、A. Okounkov、Y. Zhou 和 Z. Zhou， *Symmetric quiver varieties and critical stable envelopes*，预印本。[COZZ3] Y. Cao、A. Okounkov、Y. Zhou 和 Z. Zhou， *in preparation*。[CTZ] Y. Cao、Y. Toda 和 G. Zhao， *K-theoretic pullbacks for Lagrangians on derived critical loci*，arXiv:2503.06025。[CZ] Y. Cao 和 G. Zhao， *Quasimaps to quivers with potentials*，arXiv:2306.01302。[CD] S. Cecotti 和 M. Del Zotto， *4d $N=2$ gauge theories and quivers: the non-simply laced case*，《高能物理杂志》2012年，第10期，第190篇，共34页。[CG] N. Chriss 和 V. Ginzburg， *Representation theory and complex geometry*，Modern Birkh¨auser Classics（2010）。[Dav1] B. Davison， *The critical CoHA of a quiver with potential*。《季刊数学杂志》68（2017），第2期，635–703。[Dav2] B. Davison， *Affine BPS algebras W algebras and the cohomological Hall algebra of $\mathbb{A}^2$*，arXiv:2209.05971。[Dav3] B. Davison， *The integrality conjecture and the cohomology of preprojective stacks*，《纯粹与应用数学杂志》804（2023），105–154。[DM] B. Davison 和 S. Meinhardt， *Cohomological Donaldson–Thomas theory of a quiver with potential and quantum enveloping algebras* 221，2020 777 871 《数学发明》卷（）–。[Dri] V. G. Drinfeld， *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*，《苏联科学院院刊》283（1985），第5期，1060–1064。[FRT] L. D. Faddeev、N. Yu. Reshetikhin 和 L. A. Takhtajan， *Quantization of Lie groups and Lie algebras*，LOMI预印本 E-14-87，列宁格勒，1987年。[FJMM] B. Feigin、M. Jimbo、T. Miwa 和 E. Mukhin， *Quantum toroidal $\mathfrak{gl}_1$-algebra: plane partitions*，《京都数学杂志》52（2012），第3期，621–659。[FPT] R. Frassek、V. Pestun 和 A. Tsymbaliuk， *Lax matrices from antidominantly shifted Yangians and quantum affine algebras: A-type* 401 2022 108283 ，《数学进展》，（）：。[GR] D. Gaiotto 和 M. Rap˘c´ak， *Vertex Algebras at the Corner*，《高能物理杂志》2019年，第1期（2019）：1–88。[GLY] D. Galakhov、W. Li 和 M. Yamazaki， *Shifted Quiver Yangians and Representations from BPS Crystals*，《高能物理杂志》2021年，第8期，第146篇，共73页。[GTL] S. Gautam 和 V. Toledano Laredo， *Yangians and quantum loop algebras*，《Selecta Mathematica》（新系列）19（2013），第2期，271–336。[GLS] C. Geiss、B. Leclerc 和 J. Schr¨oer， *Quivers with relations for symmetrizable Cartan matrices I : Foundations*，《数学发明》209（2017），61–158。[G] L. Gow， *Gauss decomposition of the Yangian $Y(\mathfrak{gl}_{m|n})$*，《数学物理通讯》276.3（2007）：799–825。[GP] T. Graber 和 R. Pandharipande， *Localization of virtual classes*，《数学发明》135（1999），487–518。[GNW] N. Guay、H. Nakajima 和 C. Wendlandt， *Coproduct for the Yangian of an affine Kac-Moody algebra*，《数学进展》338（2018），865–911。[HZ] D. Hernandez 和 H. Zhang， *Shifted Yangians and Polynomial R-Matrices*，《数学科学研究所刊物》60（2024），第1期，1–69。[IMZ] N. Ishtiaque、S. F. Moosavian 和 Y. Zhou， *Elliptic Stable Envelopes for Certain Non-Symplectic Varieties and Dynamical R-Matrices for Superspin Chains from The Bethe/Gauge Correspondence* ，《SIGMA 对称性、可积性、几何方法及其应用》20（2024），第099篇，共95页。[Jin] S. Jindal， *CoHA of Cyclic Quivers and an Integral Form of Affine Yangians*，arXiv:2408.02618。[Joy] D. Joyce， *Shifted symplectic derived algebraic geometry and generalizations of Donaldson-Thomas theory* ，2018年在KIAS的演讲。可见[https://people.maths.ox.ac.uk/joyce/SeoulHandout3.pdf] *Infinite-dimensional Lie algebras* Kac V. G. Kac， ，第3版，剑桥大学出版社，剑桥，1990年。[KS] M. Kontsevich 和 Y. Soibelman， *Cohomological Hall algebra exponential Hodge structures and motivic Donaldson-Thomas invariants* ，，《数论物理通讯》（），第2期，231–。[KRS] P. Kulish、N. Reshetikhin 和 E. Sklyanin， *Yang-Baxter equation and representation theory: I*，《数学物理通讯》5（1981），第5期，393–403。[Leh] M. Lehn， *Chern classes of tautological sheaves on Hilbert schemes of points on surfaces*，《数学发明》136（1999），157–207。[L] W. Li， *Quiver algebras and their representations for arbitrary quivers*，《高能物理杂志》2024年，第12期，第089篇：共118页。[LY] W. Li 和 M. Yamazaki， *Quiver Yangian from Crystal Melting*，《高能物理杂志》2020年，第11期，第035篇，共124页。[LZ] H. Lin 和 H. Zhang。 *Drinfeld super Yangian of the exceptional Lie superalgebra $D(2,1;\lambda)$*，arXiv:2504.21255。[MO] D. Maulik 和 A. Okounkov， *Quantum groups and quantum cohomology*，Ast´erisque 408（2019），ix+209。[McB] M. McBreen， *Quantum cohomology of hypertoric varieties and geometric representations of Yangians* 博士论文，普林斯顿大学，2013年。[Nak1] H. Nakajima。 *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*，《杜克数学杂志》76（2）：365–416，1994年。[Nak2] H. Nakajima。 *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*，《杜克数学杂志》91（3）：515–560，1998年。

[Nak3] H. Nakajima, *Quiver varieties and finite dimensional representations of quantum affine algebras*, 《美国数学学会杂志》14, 第1期（2001）：145–238。[N] A. Negut., *Quantum loop groups and K-theoretic stable envelopes*, 《伦敦数学学会会刊》130, 第5期（2025）：e70048。[OP] A. Okounkov 和 R. Pandharipande, *Quantum cohomology of the Hilbert scheme of points in the plane*, 《数学发明》179（2010）523–557。[P] T. Pˇadurariu, *Categorical and K-theoretic Hall algebras for quivers with potential*, 《Jussieu数学研究所杂志》22卷（第6期）（2023），2717–2747。[PR] T. Proch
´ ´ *W-algebra modules free fields and Gukov-Witten defects* 2019, 5, azka 和 159, 70
M. Rapˇcak。，，，《高能物理杂志》第期，第页。[RSYZ1] M. Rapˇc´ak、Y. Soibelman、Y. Yang 和 G. Zhao, *Cohomological Hall algebras, vertex algebras and instantons*, 《数学物理通讯》376.3（2020）：1803–1873。[RSYZ2] M. Rapcak、Y. Soibelman、Y. Yang 和 G. Zhao, *Cohomological Hall algebras and perverse coherent sheaves on toric Calabi-Yau 3-folds* 17 2023 4, 847 939 ，《数论物理通讯》（）第期 – 。[R] N. Yu. Reshetikhin, *Quasitriangular Hopf algebras and invariants of links*, 《代数与分析》1:2（1989），169–188；《列宁格勒数学杂志》1:2（1990），491–513。[SV1] O. Schiffmann 和 E. Vasserot, *The elliptic Hall algebra and the equivariant K-theory of the Hilbert scheme of* $\mathbb{A}^2$, 《杜克数学杂志》162, 第2期（2013），279–366。[SV2] O. Schiffmann 和 E. Vasserot, *Cherednik Algebras W-Algebras and the Equivariant Cohomology of the Moduli Space of Instantons on* $\mathbb{A}^2$, 《高等科学研究所数学出版物》118卷，第1期，2013年5月，第213–342页。[SV3] O. Schiffmann 和 E. Vasserot, *Cohomological Hall algebras of quivers and Yangians*, arXiv:2312.15803。[Ta] S. Tamagni, *Stable Envelopes Vortex Moduli Spaces and Verma Modules*, arXiv:2311.03462。[U] M. Ueda, *Construction of the Affine Super Yangian*, 《数学科学研究所刊物》59（2023），423–486。[V] M. Varagnolo, *Quiver varieties and Yangians*, 《数学物理通讯》53（2000），第4期，273–283。[VV1] M. Varagnolo 和 E. Vasserot, *K-theoretic Hall algebras quantum groups and super quantum groups*, 《Selecta Mathematica》（新系列）28（2022），第1期，第7篇，共56页。[VV2] M. Varagnolo 和 E. Vasserot, *Quantum loop groups and critical convolution algebras*, arXiv:2302.01418。[VV3] M. Varagnolo 和 E. Vasserot, *Non symmetric quantum loop groups and K-theory*, arXiv:2308.01809v3。[YZ1] Y. Yang 和 G. Zhao, *Cohomological Hall algebras and affine quantum groups*, 《Selecta Mathematica》24（2018）第2期：1093–1119。[YZ2] Y. Yang 和 G. Zhao, *The cohomological Hall algebras of a preprojective algebra with symmetrizer*, 《代数与表示理论》26（2023），第4期，1067–1085。[YZJ] Y. Yang 和 P. Zinn-Justin, *Higher spin representations of the Yangian of* $\mathfrak{sl}_2$ *and R-matrices*, arXiv:2403.17433。[Zhu] X. Zhu, *An introduction to affine Grassmannians and the geometric Satake equivalence*, arXiv:1603.05593。

Morningside Center of Mathematics, Institute of Mathematics & State Key Laboratory of Mathematical Sciences, Academy of Mathematics and Systems Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing, China

Email address: yalongcao@amss.ac.cn

Department of Mathematics, Columbia University, New York, U.S.A.

Email address: okounkov@math.columbia.edu

Center for Mathematics and Interdisciplinary Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China
Shanghai Institute for Mathematics and Interdisciplinary Sciences (SIMIS), Shanghai 200433, China

Email address: yehao.zhou@simis.cn

School of Mathematical Sciences, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China

Email address: zijun.zhou@sjtu.edu.cn