arXiv:2601.01520v1 [math.QA] 4 Jan 2026

# 余作用的 Hopf像与量子主丛的有效对称性

Arnab Bhattacharjee *

**摘要**

我们引入 Hopf代数余作用的 Hopf像，并阐明其在量子主丛几何中的作用。假设结构 Hopf 代数具有余半单性，我们证明，每个配备右协变一阶微分演算的量子主丛，都可典范函子性地约化为一个具有内忠实量子对称性的量子主丛。由此，我们得到了关于量子主丛在有效量子对称性下的分类，以及一个刚性结果：该结果确定了作用于约化总空间上的最小有效对称性。文中还讨论了来自量子群的例子。

## 目录

**1 引言 2**

**2 预备知识 4**
2.1 霍普夫代数与余作用.4 2.2 一阶微分演算.4 2.3 量子主丛.5

**3 余作用的霍普夫像 5**
3.1 余作用的分解.5 3.2 余作用的霍普夫像.6 3.3 内忠实余作用.8

*查理大学数学研究所，电子邮件：arnabbhatta7@gmail.com

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：16T20；次要分类：58B32、81R50
*Key words and phrases*。Hopf像、量子主丛、内忠实余作用、量子群、非交换几何。作者感谢 HORIZON-MSCA-2021-SE-01-CaLIGOLA 项目的资助

**4 量子主丛的 Hopf像约化 12 5 在有效对称性下量子主丛的等价性 20 6 内忠实余作用的例子 24**

# 1 引言

对称性是几何学中的基本组织原则。在经典微分几何中，空间的对称性通过李群的光滑作用来编码，而主丛则提供了一个自然框架，使整体对称性与局部几何数据得以相互作用。在这一背景下，一个众所周知的现象是，群作用未必是有效的：某个非平凡正规子群可能在全空间上平凡作用。在这种情况下，可以通过商去作用的核，规范地得到一个具有有效结构群的约化主丛。

在非交换几何中，对称性通常通过霍普夫代数的余作用来编码；而在解析情形下，则通过紧量子群的作用来编码 [2, 4, 11, 16]。量子主丛由 Brzezi´nski 和 Majid [5]以代数方式引入，并沿着多个方向进一步发展 [6, 12, 14], ，为将经典主丛的概念推广到非交换领域提供了一个自然框架。尽管这一理论得到了广泛发展，但人们相对较少关注量子对称性的有效性问题：给定量子主丛上的一个霍普夫代数余作用，我们无法先验确定整个霍普夫代数是否忠实地作用于全空间，或者其中一部分对称性是否是冗余的。

在量子群理论中，一个相关概念以内忠实作用和*Hopf*像之名出现。该概念最初由 Banica 和 Bichon 在 Hopf代数表示的背景下引入 [1]„ Hopf像刻画了使给定表示能够分解通过的最小 Hopf商。此构造的对偶表述更强调霍普夫子代数而非商，此后已在各种背景中出现 [8, 10]。这些思想为直接从给定的余作用中提取量子对称性的有效部分提供了一种自然方法。

本文的首要目标是为霍普夫代数在代数上的余作用 建立一套系统理论。给定一个右余作用

$$\delta : A \longrightarrow A \otimes H$$

霍普夫代数 $H$ 在代数 $A$上的右余作用，我们将 $\delta$ 的霍普夫像 定义为使该余作用能够通过其分解的最小霍普夫子代数 $H_\delta \subseteq H$ 。这个霍普夫像由一条泛性质刻画，并且仅取决于余作用的有效部分。若某个余作用的内忠实 霍普夫像与环境霍普夫代数相同，我们就称该余作用为内忠实 。从这个意义上说，内忠实余作用提供了有效量子对称性的恰当概念，拓展了经典的有效群作用概念。

本文的第二个也是主要目标，是将这一构造应用于配备右协变一阶微分演算的量子主丛。假设结构 Hopf 代数是余半单的，我们证明每个量子主丛都可以典范地约化为一个量子主丛，使其结构 Hopf 代数以内忠实的方式作用。通过将总空间代数商去一个最大的余作用稳定双边理想，可以实现这一约化，并使 Hopf像余作用能够下降。我们将所得对象称为*Hopf* 像约化，它可视为将经典主丛约化为具有有效结构群的主丛这一做法的非交换类比。

除了证明其存在性，我们还证明 Hopf 像约化具有函子性。更确切地说，我们引入一个由具有余半单结构 Hopf 代数的量子主丛组成的范畴，并证明 Hopf 像约化定义了一个函子，将该范畴映至由具有内忠实余作用的主丛构成的全子范畴。这自然导出量子主丛上的一个等价关系，可将其理解为在有效量子对称性意义下的等价，并将分类问题归结为内忠实量子主丛的分类问题。

最后，我们证明一个刚性结果：Hopf 像约化给出了作用于约化后总空间的最小有效量子对称性：任何作用于同一约化丛的其他内忠实量子对称性，都必须将 Hopf 像包含为霍普夫子代数。该结果表明，Hopf 像约化不仅是典范的，而且具有明确意义上的刚性。

我们通过内忠实余作用的实例阐释一般理论，其中包括 Hopf代数的余乘法，以及源自复半单李群量子化坐标代数的余作用。这些实例表明，有效量子对称性在量子群几何中自然涌现，并凸显了 Hopf像在具体几何情境中的重要性。

**论文结构**。在第2节中，我们回顾有关霍普夫代数、余作用、一阶微分演算和量子主

丛的基本概念。第3节介绍余作用的Hopf像，确立其基本性质，并将内忠实余作用这一概念发展为对有效量子对称性的精确表述。第4节构造量子主丛的Hopf 像约化，并证明在余半单性假设下，这种约化会产生一个新的量子主丛，其结构Hopf代数是内忠实的。第5节讨论函子性与分类：我们定义适当的量子主丛范畴，证明Hopf 像约化具有函子性且本质满，并给出有效量子对称性下的分类结果。最后，第6节给出内忠实余作用的示例，包括来自复半单李群的量子化坐标代数以及典范Hopf代数余作用的示例。

# 2 预备知识

## 2.1 Hopf代数与余作用

本文中， $H$ 表示一个Hopf代数，其余乘法为 $\Delta$，余单位为$\varepsilon$，且对极 $S$是双射。代数 $A$总是假设为结合且含幺的。本节遵循教科书中的相关文献 [3, 7, 13]。

**定义 2.1.** Hopf代数 $H$ 在代数 $A$ 上的一个右余作用是一个线性映射

$$\delta : A \longrightarrow A \otimes H$$

满足

$$(\delta \otimes \mathrm{id}_H) \circ \delta = (\mathrm{id}_A \otimes \Delta) \circ \delta, \qquad (\mathrm{id}_A \otimes \varepsilon) \circ \delta = \mathrm{id}_A.$$

我们使用 Sweedler记号 $\delta(a) = a_{(0)} \otimes a_{(1)}$。

## 2.2 一阶微分演算

代数 $A$ 上的一阶微分演算 (fodc) 是一对 $(\Omega^1(A), \mathrm{d})$，其中 $\Omega^1(A)$ 是一个 $A$-双模，且 $\mathrm{d} : A \to \Omega^1(A)$ 是一个导子，并且 $\Omega^1(A)$ 由形如 $\mathrm{d}a$ 的元素作为左 $A$- 模生成，其中 $a \in A$。

### 2.3 量子主丛

设 $H$ 是一个霍普夫代数，且 $(A,\delta)$ 是一个右 $H$-余模代数。若存在一个（定义良好的）态射，则 $A$ 上的一阶微分演算称为右 $H$-协变的

$$\Delta_R : \Omega^1(A) \to \Omega^1(A) \otimes H, \quad \Delta_R(a\mathrm{d}b) = a_{(0)}\mathrm{d}b_{(0)} \otimes a_{(1)}b_{(1)}.$$

**定义 2.2.** A 量子主 $H$-丛 是一个由右 $H$-余模代数 $(A,\delta)$ 和右 $H$-协变微分演算 $\Omega^1(A)$ 组成的对 $(A,\Omega^1(A))$，满足

1. $A$ 是 $B = A^{co(H)} = \{a \in A$ 的霍普夫-伽洛瓦扩张： $\delta(a) = a \otimes 1_H\}$这意味着

$$\mathrm{can} := (\cdot \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta_R) : A \otimes_B A \to A \otimes H$$

   是一个双射。

2. 如果 $N \subset \Omega^1_u(A)$ 是与 $\Omega^1(A)$ 对应的泛微分演算的 $A$-子双模，则有 $\mathrm{ver}(N) = A \otimes I$，其中 $I \subseteq H^+$ 是一个 $\mathrm{Ad}_R$- 子余模右理想，且 $\mathrm{Ad}_R : H \to H \otimes H$，定义为 $\mathrm{Ad}_R(h) = h_{(2)} \otimes S(h_{(1)})h_{(3)}$，并且 $H^+ = \mathrm{Ker}(\varepsilon_H)$。

本文着重将余作用 $\delta$ 视为量子对称性的载体。

## 3 余作用的 Hopf 像

Banica 和 Bichon [1] 为霍普夫代数的表示引入了 Hopf 像的概念，它为分离作用的有效量子对称性提供了一种典范方法。本节将这一概念对代数上的霍普夫代数余作用作对偶表述。我们以霍普夫子代数取代霍普夫商，定义余作用的 Hopf 像为一种泛分解对象，用以编码其有效对称性。这一构造在后续各节所研究的量子主丛的约化与分类中发挥核心作用。

### 3.1 余作用的分解

**定义 3.1**。设 $\delta : A \to A \otimes H$ 是霍普夫代数 $H$ 在代数 $A$ 上的右余作用。$\delta$ 的一种分解是一个三元组 $(L, \iota_L, \delta_L)$，其中 $L \subseteq H$ 是一个霍普夫子代数，包含映射为 $\iota_L : L \hookrightarrow H$，且 $\delta_L : A \to A \otimes L$ 是一个右 $L$-余作用，使得

$$\delta = (\mathrm{id} \otimes \iota_L) \circ \delta_L.$$

## 3.2 余作用的 Hopf像

**定义 3.2**。设 $\delta$：$A \to A \otimes H$ 是霍普夫代数 $H$ 在代数 $A$ 上的右余作用。$\delta$ 的*Hopf* 像记作 $H_\delta$，是 $\delta$ 的分解范畴中的始对象。

**定理 3.3**。设 $H$ 是一个霍普夫代数，$A$ 是一个代数，并且

$$\delta : A \longrightarrow A \otimes H$$

存在右余作用。那么存在一个霍普夫子代数

$$H_\delta \subseteq H$$

以及一个右 $H_\delta$-余作用

$$\delta_{\mathrm{im}} : A \longrightarrow A \otimes H_\delta$$

使得：

1. $\delta = (\mathrm{id}_A \otimes \iota_{H_\delta}) \circ \delta_{\mathrm{im}}$, *where* $\iota_{H_\delta} : H_\delta \hookrightarrow H$ *is the inclusion;*
2. $(H_\delta, \iota_{H_\delta}, \delta_{\mathrm{im}})$ 是 $\delta$ 的分解范畴中的始对象。

等价地，$H_\delta$ 是满足以下条件的最小霍普夫子代数 $L \subseteq H$

$$\delta(A) \subseteq A \otimes L.$$

证明。令 $\mathcal{S}$ 表示满足$\delta(A) \subseteq A \otimes L$的所有霍普夫子代数 $L \subseteq H$ 的集合。定义

$$H_\delta := \bigcap_{L \in \mathcal{S}} L.$$

由于子代数（分别地，子余代数）的交仍是子代数（分别地，子余代数），且对极保持交，因此 $H_\delta$是 $H$的一个霍普夫子代数。

根据构造，对于每个 $L \in \mathcal{S}$，都有 $\delta(A) \subseteq A \otimes L$，因此

$$\delta(A) \subseteq A \otimes \bigcap_{L \in \mathcal{S}} L = A \otimes H_\delta.$$

因此，$\delta$ 可唯一地分解为

$$\delta = (\mathrm{id}_A \otimes \iota_{H_\delta}) \circ \delta_{\mathrm{im}},$$

其中 $\delta_{\mathrm{im}}$ 是 $\delta$ 到 $A \otimes H_\delta$的限制。

现在，设 $(L,\ \iota_L,\ \delta_L)$ 是 $\delta$ 的任意分解。根据定义，$L \in \mathcal{S}$，因此 $H_\delta \subseteq L$。包含 $f : H_\delta \hookrightarrow L$ 是满足下列条件的唯一 Hopf代数态射

$$\delta_L = (\mathrm{id}_A \otimes f) \circ \delta_{\mathrm{im}} \quad \text{and} \quad (\mathrm{id}_A \otimes \iota_L) \circ (\mathrm{id}_A \otimes f) = \mathrm{id}_A \otimes \iota_{H_\delta}$$

因此，$(H_\delta, \iota_{H_\delta}, \delta_{\mathrm{im}})$ 是 $\delta$ 的所有分解中的初始对象。 □

**命题 3.4**。 设 $H$ 是一个霍普夫代数，$A$ 是一个代数，并且

$$\delta : A \longrightarrow A \otimes H$$

存在一个右 $H$-余作用。那么，$\delta$ 的 *Hopf*像 $H_\delta$ 与由集合生成的 $H$ 的霍普夫子代数重合

$$\mathcal{C}_\delta = \{\, (\omega \otimes \mathrm{id})\delta(a) \mid a \in A,\ \omega \in A^* \,\}.$$

证明。 设 $K \subseteq H$ 是由集合 $\mathcal{C}_\delta$ 生成的霍普夫子代数。对于每个 $a \in A$，记 $\delta(a) = \sum a_{(0)} \otimes a_{(1)}$。那么 $a_{(1)} \in \mathcal{C}_\delta \subseteq K$，因此对所有 $a \in A$，均有 $\delta(a) \in A \otimes K$。于是 $\delta$ 经由 $K$ 分解，从而 $H_\delta \subseteq K$。

由于 $\delta(A) \subseteq A \otimes H_\delta$，应用 $(\omega \otimes \mathrm{id})$ 可得 $\mathcal{C}_\delta \subseteq H_\delta$。由于 $H_\delta$ 是一个霍普夫子代数，它包含由 $\mathcal{C}_\delta$ 生成的霍普夫子代数，即 $K$。因此 $K \subseteq H_\delta$。结合这两个包含关系，得到 $H_\delta = K$。 □

**引理 3.5.** 设 $H$ 是一个霍普夫代数，$A$ 是一个代数，并且

$$\delta : A \longrightarrow A \otimes H$$

有一个右 $H$-余作用。设 $(L, \iota_L, \delta_L)$ 是 $\delta$ 的任意一种分解，也就是说，$L \subseteq H$ 是一个霍普夫子代数，其包含映射为 $\iota_L : L \hookrightarrow H$，且 $\delta_L : A \to A \otimes L$ 是一个右 $L$-余作用，使得

$$\delta = (\mathrm{id}_A \otimes \iota_L) \circ \delta_L.$$

那么 $\delta$ 的 *Hopf*像 $H_\delta$ 满足

$$H_\delta \subseteq L.$$

证明。 根据定义，Hopf像 $H_\delta$ 是满足 $\delta(A) \subseteq A \otimes K$ 的最小霍普夫子代数$K \subseteq H$。由于 $(L, \iota_L, \delta_L)$ 是 $\delta$ 的一种分解，因此有 $\delta(A) \subseteq A \otimes L$，故 $L$ 是定义 $H_\delta$ 时所取交集中的霍普夫子代数之一。因此 $H_\delta \subseteq L$，证毕。 □

**注 3.6**。 我们对余作用的 *Hopf* 像的定义采用了最大可能的分解类，即所有余作用可经由其分解的霍普夫子代数 $L \subseteq H$ 。因此，*Hopf* 像仅取决于余作用的有效部分，而与包含该余作用的任意选定环境霍普夫代数无关。

### 3.3 内忠实余作用

**定义 3.7**。设 $H$ 是一个霍普夫代数， $A$ 是一个代数，并且

$$\delta : A \longrightarrow A \otimes H$$

一个右 $H$-余作用。令 $H_\delta \subseteq H$ 表示 $\delta$ 的 Hopf像。若余作用 $\delta$ 内忠实 ，则

$$H_\delta = H.$$

**命题 3.8.** 设 $H$ 是一个霍普夫代数， $A$ 是一个代数，且

$$\delta : A \longrightarrow A \otimes H$$

一个右 $H$-余作用。令 $H_\delta \subseteq H$ 表示 $\delta$ 的 *Hopf*像。以下陈述等价:

1. $\delta$ 是内忠实的，即 $H_\delta = H$;
2. 不存在真霍普夫子代数 $L \subsetneq H$ 使得 $\delta(A) \subseteq A \otimes L$;
3. 对于 $\delta$ 的任意分解 $(L, \iota_L, \delta_L)$ ，包含 $\iota_L : L \hookrightarrow H$ 是一个同构。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2)。若对于某个霍普夫子代数 $L \subseteq H$， $\delta(A) \subseteq A \otimes L$ ，则 $(L, \iota_L, \delta_L)$ 是 $\delta$ 的一个分解。由 Hopf 像的极小性可知， $H_\delta \subseteq L$。若 $L$ 是真子代数，则这将与 $H_\delta = H$ 矛盾。因此不存在这样的真霍普夫子代数。

(2) $\Rightarrow$ (3)。设 $(L, \iota_L, \delta_L)$ 是 $\delta$ 的任意分解。则 $\delta(A) \subseteq A \otimes L$，因此根据假设， $L = H$。所以 $\iota_L$ 是一个同构。

(3) $\Rightarrow$ (1)。根据定义，$(H_\delta, \iota_{H_\delta}, \delta_{\mathrm{im}})$ 是 $\delta$ 的一个分解。将 (3) 应用于该分解可得 $\iota_{H_\delta} : H_\delta \hookrightarrow H$ 是一个同构，因此 $H_\delta = H$。

□

**命题 3.9**。设 $H$ 是一个霍普夫代数， $A$ 是一个代数，并且

$$\delta : A \longrightarrow A \otimes H$$

一个右 $H$-余作用。令$(H_\delta, \iota_{H_\delta}, \delta_{\mathrm{im}})$ 表示 $\delta$的霍普夫像，其中$\iota_{H_\delta}$ : $H_\delta \hookrightarrow H$ 是包含， $\delta_{\mathrm{im}} : A \to A \otimes H_\delta$ 是诱导余作用。那么，余作用 $\delta_{\mathrm{im}}$ 是内忠实的。反过来，若$(L, \iota_L, \delta_L)$ 是 $\delta$ 的一个分解，且余作用 $\delta_L$ : $A \to A \otimes L$ 是内忠实的，那么 $L \cong H_\delta$ 作为霍普夫代数相等。

证明。 根据定义，$(H_\delta, \iota_{H_\delta}, \delta_{\mathrm{im}})$ 是 $\delta$ 的一个分解，而 $H_\delta$ 是 $H$ 中满足 $\delta(A) \subseteq A \otimes H_\delta$ 的最小霍普夫子代数。假设 $\delta_{\mathrm{im}}$ 可经由真霍普夫子代数 $K \subsetneq H_\delta$ 分解，即 $\delta_{\mathrm{im}}(A) \subseteq A \otimes K$。那么 $(K, \iota_K, \delta_K)$ 将是 $\delta$ 的一个分解，这与 $H_\delta$ 的极小性矛盾。因此 $\delta_{\mathrm{im}}$ 是内忠实的。

反过来，设 $(L, \iota_L, \delta_L)$ 是 $\delta$ 的一个分解，且 $\delta_L$ 是内忠实的。根据 Hopf 像的极小性，我们有 $H_\delta \subseteq L$。另一方面，由于 $\delta = (\mathrm{id} \otimes \iota_L) \circ \delta_L$，$\delta_L$ 的像包含于 $A \otimes L$ 中；根据 Hopf 像的定义，对于余作用 $\delta_L$，我们也有 $L_\delta = H_\delta$。$\delta_L$ 的内忠实性意味着 $L = L_\delta = H_\delta$。因此，$L \cong H_\delta$ 作为 Hop

f

夫代数。 □

**注3.10**。 因此，*Hopf* 像给出了具有内忠实结构 *Hopf* 代数的余作用的唯一分解。特别地，每个余作用都可通过取其 *Hopf* 像典范约化为内忠实余作用。

**命题3.11**。 设 $H$ 是一个霍普夫代数，并且

$$\delta_A : A \longrightarrow A \otimes H$$

代数 $A$ 上的右 $H$-余作用。令 $\theta$： $A \to B$ 为代数同构，并在 $B$ 上定义右 $H$-余作用如下

$$\delta_B := (\theta \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_A \circ \theta^{-1} : B \longrightarrow B \otimes H.$$

那么， $\delta_A$ 和 $\delta_B$ 的 *Hopf*像作为 *Hopf*代数是同构的。更准确地说，

$$H_{\delta_A} = H_{\delta_B} \subseteq H.$$

证明。 回忆一下，余作用的 Hopf像是使该余作用能够通过其分解的最小霍普夫子代数 $H$。等价地，它是由该余作用的系数生成的霍普夫子代数。

令 $a \in A$ 并写作

$$\delta_A(a) = a_{(0)} \otimes a_{(1)}.$$

对于 $b = \theta(a) \in B$，我们有

$$\delta_B(b) = (\theta \otimes \mathrm{id})\delta_A(a) = \theta(a_{(0)}) \otimes a_{(1)}.$$

因此，出现在 $\delta_B(b)$ 中的系数恰好与出现在 $\delta_A(a)$ 中的系数是相同的元素，即 $a_{(1)} \in H$。

由于 $\theta$ 是一个代数同构， $B$ 中的每个元素都可表示为某个 $a \in A$ 的 $\theta(a)$，因此 $\delta_B$ 的系数集合与 $\delta_A$ 的系数集合相同。Consequently， $H$ 中由 $\delta_B$ 的系数生成的霍普夫子代数等于由 $\delta_A$ 的系数生成的霍普夫子代数。

根据 Hopf 像的系数描述，可得

$$H_{\delta_B} = H_{\delta_A},$$

这就证明了该断言。 □

**注 3.12.** 因此，余作用的 ***Hopf*** 像在底层代数的代数同构下保持不变。特别地，由 ***Hopf*** 像所编码的有效量子对称性这一概念，仅取决于模代数同构的余作用。

**定义 3.13.** 设 $\delta\colon A \to A \otimes H$ 是霍普夫代数$H$ 在代数 $A$上的右余作用。 $\delta$ 的有效量子对称性 是一个霍普夫代数$L$，并配有一个右 $L$-余作用

$$\delta_L : A \to A \otimes L$$

使得:

(i) $\delta_L$ 是内忠实的;

(ii) 存在一个霍普夫代数态射 $\iota : L \hookrightarrow H$ ，使得

$$\delta = (\mathrm{id} \otimes \iota) \circ \delta_L;$$

(iii) $(L, \delta_L)$ 相对于性质 *(i)* 和 *(ii)*是泛的，其含义是，对于任意霍普夫代数 $L'$ 以及任意内忠实余作用 $\delta_{L'}\colon A \to A \otimes L'$ 经由 $\delta$ 分解，都存在唯一的霍普夫代数态射 $L \to L'$使余作用相互交织。

**命题 3.14.** 设 $\delta\colon A \to A \otimes H$ 为一个右余作用。那么， $\delta$ 的霍普夫像$(H_\delta, \delta_{\mathrm{im}})$ 按照定义 *3.13* 的含义，实现了 $\delta$ 的有效量子对称性。特别地，有效量子对称性在唯一的霍普夫代数同构意义下是唯一的，并且与 $H_\delta$一致。

证明。 根据构造，Hopf像 $H_\delta$ 是 $H$ 的霍普夫子代数，且诱导余作用 $\delta_{\mathrm{im}}\colon A \to A \otimes H_\delta$ 满足 $\delta = (\mathrm{id} \otimes \iota_{H_\delta}) \circ \delta_{\mathrm{im}}$。

根据Hopf像的极小性， $\delta_{\mathrm{im}}$ 不能通过 $H_\delta$的任何真霍普夫子代数分解，因此它是内忠实的。此外，如果 $(L, \delta_L)$ 是 $\delta$ 的任意内忠实分解，那么根据Hopf像的泛性质， $H_\delta \subseteq L$。因此，$(H_\delta, \delta_{\mathrm{im}})$ 是 $\delta$ 的内忠实分解中的泛对象，因而实现了有效量子对称性。 □

**命题3.15.** 设 $H_1$、 $H_2$ 为霍普夫代数， $A$、 $B$ 分别为右 $H_1$ 和$H_2$ 余模代数。设 $\delta_1 : A \to A\otimes H_1$ 和 $\delta_2 : B \to B\otimes H_2$分别为右余作用。那么

1. $\delta_3 := (\mathrm{id}_A \otimes \tau \otimes \mathrm{id}^{H_2}) \circ(\delta_1 \otimes \delta_2)$ 是 $H_1 \otimes H_2$ 在$A \otimes B$上的右余作用，其中 $\tau : H_1 \otimes B \to B \otimes H_1$ 是翻转映射;
2. 存在一个从$(H_1 \otimes H_2)^{\delta_3}$ 到$H_{1,\delta_1} \otimes H_{2,\delta_2}$的单射*Hopf*代数映射。

证明。 1. 为了证明 $\delta_3$ 是 $H_1\otimes H_2$ 在 $A\otimes B$上的右余作用，只需证明下列等式成立:

(a) $(\mathrm{id}_{A\otimes B} \otimes \Delta_{H_1\otimes H_2}) \circ \delta_3 = (\delta_3 \otimes \mathrm{id}^{H_1\otimes H_2}) \circ \delta_3$;
(b) $(\mathrm{id}_{A\otimes B} \otimes \epsilon_{H_1\otimes H_2}) \circ \delta_3 = \mathrm{id}_{A\otimes B}$

其中，$\Delta_{H_1\otimes H_2}$ 和$\epsilon_{H_1\otimes H_2}$ 分别是$H_1\otimes H_2$上的余乘法和对极。此外，$\Delta_{H_1\otimes H_2}$由 $(\mathrm{id}_{H_1} \otimes T \otimes \mathrm{id}^{H_2})\circ(\Delta_{H_1} \otimes \Delta_{H_2})$ 给出，其中 $T$ 是 $H_1 \otimes H_2$ 与 $H_2 \otimes H_1$之间的翻转映射，而$\epsilon_{H_1\otimes H_2}$ 由 $\epsilon_{H_1} \otimes \epsilon_{H_2}$给出。

我们考虑 $a \otimes b \in A \otimes B$，并有如下结果:

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_{A\otimes B} \otimes \Delta_{H_1\otimes H_2}) \circ \delta_3(a \otimes b) &= (\mathrm{id}_{A\otimes B} \otimes \Delta_{H_1\otimes H_2})(\mathrm{id}_A \otimes \tau \otimes \mathrm{id}_{H_2}) \circ (\delta_1 \otimes \delta_2)(a \otimes b)\\ &= (\mathrm{id}_{A\otimes B} \otimes \Delta_{H_1\otimes H_2})(\mathrm{id}_A \otimes \tau \otimes \mathrm{id}_{H_2}) \circ (\delta_1 a \otimes \delta_2 b)\\ &= (\mathrm{id}_{A\otimes B} \otimes \Delta_{H_1\otimes H_2})(\mathrm{id}_A \otimes \tau \otimes \mathrm{id}_{H_2})(a_{(0)} \otimes a_{(1)} \otimes b_{(0)} \otimes b_{(1)})\\ &= (\mathrm{id}_{A\otimes B} \otimes \Delta_{H_1\otimes H_2})(a_{(0)} \otimes b_{(0)} \otimes a_{(1)} \otimes b_{(1)})\\ &= a_{(0)} \otimes b_{(0)} \otimes \Delta_{H_1\otimes H_2}(a_{(1)} \otimes b_{(1)})\\ &= a_{(0)} \otimes b_{(0)} \otimes a_{(1)} \otimes b_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes b_{(2)}\end{aligned}$$

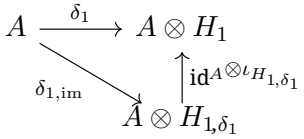
接下来,

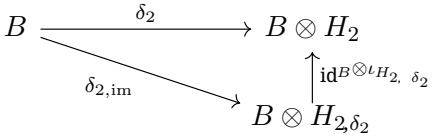
$$\begin{aligned}(\delta_3 \otimes \mathrm{id}_{H_1\otimes H_2}) \circ \delta_3(a \otimes b) &= (\delta_3 \otimes \mathrm{id}_{H_1\otimes H_2})(\mathrm{id}_A \otimes \tau \otimes \mathrm{id}_{H_2}) \circ (\delta_1 \otimes \delta_2)(a \otimes b)\\ &= (\delta_3 \otimes \mathrm{id}_{H_1\otimes H_2})(a_{(0)} \otimes b_{(0)} \otimes a_{(1)} \otimes b_{(1)})\\ &= \delta_3(a_{(0)} \otimes b_{(0)}) \otimes a_{(1)} \otimes b_{(1)}\\ &= a_{(0)} \otimes b_{(0)} \otimes a_{(1)} \otimes b_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes b_{(2)}\end{aligned}$$

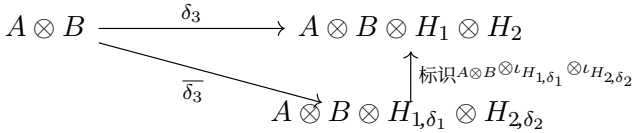
因此，我们有恒等式（$a$），即（$\mathrm{id}_{A\otimes B}\otimes\Delta_{H_1\otimes H_2}$）$\circ\,\delta_3 = (\delta_3\otimes\mathrm{id}_{H_1\otimes H_2})\circ\delta_3$。接下来，为了证明恒等式（$b$），我们有如下

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_{A\otimes B}\otimes\epsilon_{H_1\otimes H_2})\circ\delta_3(a\otimes b) &= (\mathrm{id}_{A\otimes B}\otimes\epsilon_{H_1\otimes H_2})(\mathrm{id}_A\otimes\tau\otimes\mathrm{id}_{H_2})\circ(\delta_1\otimes\delta_2)(a\otimes b)\\ &= \mathrm{id}_{A\otimes B}\otimes\epsilon_{H_1\otimes H_2})(a_{(0)}\otimes b_{(0)}\otimes a_{(1)}\otimes b_{(1)})\\ &= a_{(0)}\otimes b_{(0)}\otimes\epsilon_{H_1\otimes H_2}(a_{(1)}\otimes b_{(1)})\\ &= a_{(0)}\otimes b_{(0)}\otimes\epsilon_{H_1}(a_{(1)})\otimes\epsilon_{H_2}(b_{(1)})\\ &= a_{(0)}\otimes b_{(0)}\\ &= a\otimes b\end{aligned}$$

2. 设 $(H_{1,\delta_1},\iota_{H_{1,\delta_1}},\delta_{1,\mathrm{im}})$ 和 $(H_{2,\delta_2},\iota_{H_{2,\delta_2}},\delta_{2,\mathrm{im}})$ 分别是右余作用 $\delta_1$ 和 $\delta_2$ 的 Hopf像。因此，我们有以下图表




这里，$\overline{\delta_3} := (\mathrm{id}_A\otimes\tau_{\mathrm{im}}\otimes\mathrm{id}_{H_2,\delta_2})\circ(\delta_{1,\mathrm{im}}\otimes\delta_{2,\mathrm{im}})$，且 $\tau_{\mathrm{im}}: H_{1,\delta_1}\otimes B\to B\otimes H_{1,\delta_1}$ 是一个翻转映射。由于根据 (1)，$\delta_3$ 是 $H_1\otimes H_2$的右余作用，因此，$(H_{1,\delta_1}\otimes H_{2,\delta_2},\iota_{H_{1,\delta_1}}\otimes\iota_{H_{2,\delta_2}},\delta_3)$ 是余作用$\delta_3$的一个分解。因此，根据 $H_1\otimes H_2$的霍普夫像的极小性，我们有 $(H_1\otimes H_2)_{\delta_3}\subseteq H_{1,\delta_1}\otimes H_{2,\delta_2}$。于是，存在一个内射的Hopf代数态射，从 $(H_1\otimes H_2)_{\delta_3}$ 到$H_{1,\delta_1}\otimes H_{2,\delta_2}$。

□

# 4 量子主丛的 Hopf像约化

本节介绍量子主丛的*Hopf*像约化 。给定一个量子主丛（$A$，$\Omega^1(A)$ $H$，$\delta$），我们将其余作用 $\delta$ 关联到它的 Hopf 像，并构造一个典范约化的量子

主丛，其结构 Hopf 代数以内忠实的方式作用。假设 $H$ 具有余半单性，我们证明这种约化保留主丛结构，并且相对于态射具有函子性。我们还证明了一个刚性结果，表明 Hopf 像约化在所有具有内忠实余作用的约化中是最小的。

**引理 4.1**。设 $\delta\colon A \to A \otimes H$ 是霍普夫代数 $H$ 对代数 $A$ 的右余作用，且 $(H_\delta, \iota_{H_\delta}, \delta_{\mathrm{im}})$ 是该右余作用$\delta$的 *Hopf*像。设 $\mathcal{C}$ 是满足以下条件的双边理想 $J \subseteq A$ 的集合:

$$\delta_{\mathrm{im}}(J) \subseteq J \otimes H_\delta$$

那么 $\mathcal{C}$ 在任意求和下封闭: 若 $\{J_\alpha\}_\alpha \subseteq \mathcal{C}$ 和 $J := \sum_\alpha J_\alpha$，则

$$\delta_{\mathrm{im}}(J) \subseteq J \otimes H_\delta.$$

特别地， $\mathcal{C}$ 中所有理想的和仍属于 $\mathcal{C}$。

证明。由于每个 $J_\alpha$ 都是双边理想，它们的和 $J$ 也为双边理想。对于每个 $\alpha$，我们有

$$\delta_{\mathrm{im}}(J_\alpha) \subseteq J_\alpha \otimes H_\delta \subseteq J \otimes H_\delta.$$

由 $\delta_{\mathrm{im}}$的线性性，

$$\delta_{\mathrm{im}}(J) = \sum_\alpha \delta_{H_\delta}(J_\alpha) \subseteq \sum_\alpha J_\alpha \otimes H_\delta = J \otimes H_\delta.$$

□

**引理 4.2**。设 $\delta\colon A \to A \otimes H$ 是霍普夫代数 $H$ 对代数 $A$ 的右余作用，且 $(H_\delta, \iota_{H_\delta}, \delta_{\mathrm{im}})$ 是该右余作用$\delta$的 *Hopf*像。那么存在一个最大的双边理想 $I \subseteq A$，使得

$$\delta_{\mathrm{im}}(I) \subseteq I \otimes H_\delta.$$

证明。令 $\mathcal{C}$ 为所有满足 $\delta_{\mathrm{im}}(J) \subseteq J \otimes H_\delta$ 的双边理想 $J \subseteq A$ 所成的集合。定义

$$I := \sum_{J \in \mathcal{C}} J.$$

由引理 4.1， $I$ 是一个双边理想，且 $\delta_{\mathrm{im}}(I) \subseteq I \otimes H_\delta$。根据构造可知，它显然是满足条件的最大理想。

由于 $\delta_{\mathrm{im}}(I) \subseteq I \otimes H_\delta$，且映射

$$\mathrm{id}_I \otimes \iota_{H_\delta} : I \otimes H_\delta \to I \otimes H$$

蕴含，$(\mathrm{id}_I \otimes \iota_{H_\delta})(I \otimes H_\delta) = I \otimes H_\delta$。因此， $\delta(I) = (\mathrm{id}_I \otimes \iota_{H_\delta}) \circ \delta_{\mathrm{im}}(I) \subseteq I \otimes H_\delta$。

□

**引理 4.3.** 设 $A$ 是一个代数，且 $H_\delta$ 是一个霍普夫代数。假设

$$\delta_{\mathrm{im}} : A \longrightarrow A \otimes H_\delta$$

是一个右 $H_\delta$–余作用。令 $I \subseteq A$ 为引理 *4.2* 中定义的最大的双边理想，使得

$$\delta_{\mathrm{im}}(I) \subseteq I \otimes H_\delta.$$

令 $A_0 := A/I$，并记 $\pi : A \to A_0$ 为典范商映射。则存在唯一的代数同态

$$\overline{\delta}_{\mathrm{im}} : A_0 \longrightarrow A_0 \otimes H_\delta$$

使得

$$\overline{\delta}_{\mathrm{im}} \circ \pi = (\pi \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_{\mathrm{im}}.$$

此外，$\overline{\delta_{\mathrm{im}}}$在 $A_0$上定义了一个右 $H_\delta$–余作用。

证明。由于 $\delta_{\mathrm{im}}(I) \subseteq I \otimes H_\delta$，我们有

$$(\pi \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_{\mathrm{im}}(i) = 0 \qquad \text{for all } i \in I.$$

因此，映射 $(\pi \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_{\mathrm{im}}$ 在 $I$ 上为零，从而唯一地通过商 $A_0 = A/I$分解。这给出了唯一的线性映射 $\overline{\delta}_{\mathrm{im}} : A_0 \to A_0 \otimes H_\delta$，满足

$$\overline{\delta}_{\mathrm{im}}([a]) = (\pi \otimes \mathrm{id})\big(\delta_{\mathrm{im}}(a)\big), \qquad a \in A.$$

由于 $\delta_{\mathrm{im}}$ 是代数同态，因此 $\overline{\delta}_{\mathrm{im}}$也是代数同态。由 $\delta_{\mathrm{im}}$的余结合性和余单位性可立即推出 $\overline{\delta}_{\mathrm{im}}$的余结合性和余单位性，因为 $\pi \otimes \mathrm{id}$ 与张量积可交换。因此，$\overline{\delta}_{\mathrm{im}}$ 定义了 $A_0$上的右 $H_\delta$–余作用。 □

**引理 4.4**。设 $A$ 是一个右 $H_\delta$–余模代数，其余作用为 $\delta_{\mathrm{im}} : A \to A \otimes H_\delta$，并设 $B_0 := A^{\mathrm{co}(H_\delta)0}$。设 $I \subseteq A$ 是引理 *4.2* 中定义的最大双边理想，满足

$$\delta_{\mathrm{im}}(I) \subseteq I \otimes H_\delta.$$

定义

$$\mathrm{can}_\delta : A \otimes_{B_0} A \longrightarrow A \otimes H_\delta, \qquad a \otimes_{B_0} a' \longmapsto a\,\delta_{\mathrm{im}}(a')$$

与 $H_\delta$–余作用相关的典范映射，且 $\mathrm{can}_\delta$ 是满射。因此我们有如下

1. $\mathrm{can}_\delta\big(I \otimes_{B_0} A + A \otimes_{B_0} I\big) = I \otimes H_\delta$;

*2.* $\mathrm{can}_\delta^{-1}(I \otimes H_\delta) = I \otimes_{B_0} A + A \otimes_{B_0} I$，其中 $\mathrm{can}_\delta^{-1}$ 定义为 $\mathrm{can}_\delta^{-1} := \{a \otimes_{B_0} a' \in A \otimes_{B_0} A : \mathrm{can}_\delta(a \otimes_{B_0} a') \in I \otimes H_\delta\}$。

证明。1. 设 $i \in I$ 和 $a \in A$。由于 $I$ 是一个双边理想，我们有

$$\mathrm{can}_\delta(i \otimes_{B_0} a) = i\,\delta_{\mathrm{im}}(a) \in I \otimes H_\delta.$$

此外，由于 $I$在 $\delta_{\mathrm{im}}$下保持稳定，

$$\mathrm{can}_\delta(a \otimes_{B_0} i) = a\,\delta_{\mathrm{im}}(i) \in A\,(I \otimes H_\delta) \subseteq I \otimes H_\delta.$$

因此

$$\mathrm{can}_\delta\big(I \otimes_{B_0} A + A \otimes_{B_0} I\big) \subseteq I \otimes H_\delta.$$

反过来，设 $i \otimes h \in I \otimes H_\delta$。根据假设，$\mathsf{can}_\delta$ 是满射，因此存在 $\sum_j a_j \otimes_{B_0} b_j \in A \otimes_{B_0} A$ 使得

$$\mathrm{can}_\delta\Big(\sum_j a_j \otimes_{B_0} b_j\Big) = 1 \otimes h.$$

Then

$$i \otimes h = \mathrm{can}_\delta\Big(\sum_j i a_j \otimes_{B_0} b_j\Big),$$

并且由于 $ia_j \in I$，元素 $\sum_j ia_j \otimes_{B_0} b_j$ 属于 $I \otimes_{B_0} A$。因此，

$$I \otimes H_\delta \subseteq \mathrm{can}_\delta\big(I \otimes_{B_0} A\big),$$

2. 我们看到，包含关系

$$I \otimes_{B_0} A + A \otimes_{B_0} I \subseteq \mathrm{can}_\delta^{-1}(I \otimes H_\delta).$$

可直接由引理 4.4 的第一部分得出。

对于反向包含，设 $x \in A \otimes_{B_0} A$ 满足

$$\mathrm{can}_\delta(x) \in I \otimes H_\delta.$$

定义

$$J := \{\, a \in A \mid \mathrm{can}_\delta(a \otimes_{B_0} 1) \in I \otimes H_\delta\}.$$

由于 $\mathsf{can}_\delta$ 是左 $A$–线性的，因此 $J$ 是 $A$ 的双边理想。此外，利用 $\mathsf{can}_\delta$ 的右 $H_\delta$–余线性，可以验证

$$\delta_{\mathrm{im}}(J) \subseteq J \otimes H_\delta,$$

因此 $J$ 是 $\delta_{\mathrm{im}}$–稳定的。由 $I$ 的极大性可得 $J \subseteq I$。
记 $x = \sum_k a_k \otimes_{B_0} b_k$， $A$–线性映射 $\mathsf{can}_\delta$ 的左线性性意味着，每个 $a_k \otimes_{B_0} b_k$ 都属于 $J \otimes_{B_0} A + A \otimes_{B_0} J$。因此

$$x \in J \otimes_{B_0} A + A \otimes_{B_0} J \subseteq I \otimes_{B_0} A + A \otimes_{B_0} I.$$

结合两个包含关系即可得到所需的等式。

□

**注 4.5.** 尽管 $B_0 = A^{\mathrm{co}(H_\delta)}$ 0 是 $A_0 := A/I$ 的子代数，而非 $A$ 本身的子代数，平衡张量积 $A \otimes_{B_0} A$ 仍然是良定义的。事实上，商映射 $\pi$ : $A \twoheadrightarrow A_0$ 通过标量限制，并借助 $b \cdot a = b\,a$ 以及对任意 $b \in B_0$的提升 $b \in A$ 所定义的 $a \cdot b = a\,\tilde{b}$，赋予 $A$ 自然的 $B_0$–双模结构。此作用与提升的选择无关，因为任意两个提升之差都属于 $I$。因此，引理 *4.4* 中出现的张量积 $A \otimes_{B_0} A$ 是良定义的。

**命题 4.6.** 设$(A,\Omega^1(A)\ H, \delta)$ 是一个量子主 $H$–丛，其右余作用 $\delta$ 定义在量子齐性空间 $B := A^{\mathrm{co}(H)}$ 上。设$(H_\delta, \iota_{H_\delta}, \delta_{\mathrm{im}})$ 是右余作用 $\delta$ 的 ***Hopf*像**，并假设$H_\delta$ 余半单。那么，$(A_0, \Omega^1(A_0)\ H_\delta, \delta_{\mathrm{im}})$ 是一个量子主 $H_\delta$–丛，其右余作用 $\delta_{\mathrm{im}}$ 定义在量子齐性空间 $B_0 := A^{\mathrm{co}(H_\delta)}$ 0 。

证明。 由引理 4.3，映射

$$\overline{\delta}_{\mathrm{im}} : A_0 \longrightarrow A_0 \otimes H_\delta$$

定义为

$$[a] \longmapsto (\pi \otimes \mathrm{id})\delta_{\mathrm{im}}(a)$$

是 Hopf代数 $H_\delta$ 在 $A_0$ 上良定义的右余作用，其中 $\delta_{\mathrm{im}}$ :$A \to A \otimes H_\delta$，且由 $\delta_{\mathrm{im}}(a) = a_{(0)} \otimes a_{(1)}$ 给出。因此，只需证明 $A_0$ 是 $B_0$ 的忠实平坦 Hopf–Galois 扩张，并且 $\Omega^1(A_0)$ 是右 $H_\delta$–协变的。

由于 $(A,\Omega^1(A)\ H, \delta)$ 是一个量子主 $H$–丛，因此该扩张$A \subset B$ 是 Hopf–Galois 的，故典范映射

$$\mathrm{can} : A \otimes_B A \longrightarrow A \otimes H$$

是双射。根据余作用 $\delta$ 的 Hopf像 $H_\delta$ 的定义： $A \to A \otimes H$，结合包含 $A \otimes_B A \subseteq A \otimes_{B_0} A$，可知诱导的典范映射

$$\mathrm{can}_\delta : A \otimes_{B_0} A \longrightarrow A \otimes H_\delta$$

是满射。

根据引理 4.4 的第一部分，我们有

$$\mathrm{can}_\delta\big(I \otimes_{B_0} A + A \otimes_{B_0} I\big) = I \otimes H_\delta.$$

Set

$$N := I \otimes_{B_0} A + A \otimes_{B_0} I.$$

取商后，我们得到一个诱导映射

$$\overline{\mathrm{can}}_\delta : \frac{A \otimes_{B_0} A}{N} \longrightarrow \frac{A \otimes H_\delta}{\mathrm{can}_\delta(N)}, \qquad [a \otimes_{B_0} a']_N \longmapsto [\mathrm{can}_\delta(a \otimes_{B_0} a')]_{\mathrm{can}_\delta(N)}.$$

现在我们使用线性代数中的以下标准事实：若 $f\colon\ X \to Y$ 是一个线性映射，且 $M \subseteq X$ 是一个线性子空间，则 $f$ 诱导出一个定义良好的映射

$$\overline{f} : X/M \longrightarrow Y/f(M), \qquad x + M \longmapsto f(x) + f(M),$$

当且仅当 $f^{-1}(f(M)) = M$ 时，该映射是内射的。此外，若 $f$ 是满射，则 $f$ 是满射。特别地，当且仅当 $f$ 是满射且 $f^{-1}(f(M)) = M$ 时，$f$ 是双射。

利用引理 4.4 的第二部分，即

$$\mathrm{can}_\delta^{-1}\big(\mathrm{can}_\delta(N)\big) = N,$$

结合 $\mathsf{can}_\delta$ 的满射性，我们得出 $\mathsf{can}_\delta$ 是双射。 ——

识别

$$\frac{A \otimes_{B_0} A}{I \otimes_{B_0} A + A \otimes_{B_0} I} \cong A_0 \otimes_{B_0} A_0, \qquad \frac{A \otimes H_\delta}{I \otimes H_\delta} \cong A_0 \otimes H_\delta,$$

我们得到一个双射

$$\overline{\mathrm{can}}_\delta : A_0 \otimes_{B_0} A_0 \longrightarrow A_0 \otimes H_\delta.$$

因此，$A_0$ 是 $B_0$的 Hopf–Galois扩张。

$A_0$ 作为右 $B_0$–模的忠实平坦性，现在可由 $H_\delta$ 的余半单性以及 D$\breve{}$asc$\breve{}$alescu–N$\breve{}$ast$\breve{}$asescu–Raianu [9,定理 3.1.5] 和 Schneider [14, 定理 I], 的结果推出，这些结果断言：

1. $H_\delta$ 是余半单的，当且仅当每个右 $H_\delta$–余模都是内射的；
2. $A_0$ 作为右 $H_\delta$–余模是内射的，并且$_\delta$ $\mathsf{can}_\delta$ 是满射，当且仅当 $A_0$ 作为右 $B_0$–模是忠实平坦的，且$_\delta$ $\mathsf{can}_\delta$ 是同构。 ——

最后，我们证明 $\Omega^1(A_0)$ 是右 $H_\delta$–协变的。根据 [17, 定理 1.5], ，存在一个 $A_0$–子双模 $\mathcal{F} \subseteq \Omega^1_u(A_0)$，使得

$$\Omega^1(A_0) \cong \Omega^1_u(A_0)/\mathcal{F},$$

以及相应的右理想 $\mathcal{K} \subseteq H_\delta^+$ ，满足 $\mathrm{ver}(\mathcal{F}) = A_0 \otimes \mathcal{K}$，其中图表 [5, 17] 交换:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1_u(A_0) & \xrightarrow{\delta_{\mathrm{im},u}} & \Omega^1_u(A_0) \otimes H_\delta \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ver}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ver}\otimes \mathrm{id}_{H_\delta}} \\ A_0 \otimes H_\delta^+ & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes \mathrm{Ad}_R} & A_0 \otimes H_\delta^+ \otimes H_\delta \end{array}$$

因此，只需证明 $\delta_{\mathrm{im},\ u}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F} \otimes H_\delta$，这由 $\mathrm{Ad}_R(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K} \otimes H_\delta$ 得出。事实上，对于 $a \in \mathcal{K}$，我们有

$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon_{H_\delta})\mathrm{Ad}_R(a) = a,$$

因此 $\varepsilon_{H_\delta}(S(a_{(1)})a_{(3)})a_{(2)} = a$，进而得到 $a_{(2)} \in \mathcal{K}$。证明至此完成。

□

**推论 4.7.** 设 $H$ 是一个余半单 *Hopf* 代数，且 $(A,\Omega^1(A)\ H, \delta)$ 是一个量子主 $H$-丛。则 $(A_0, \Omega^1(A_0)\ H_\delta, \delta_{\mathrm{im}})$ 是一个量子主 $H_\delta$-丛。

**定义 4.8.** 设 $H$ 是一个余半单 Hopf 代数，且 $(A,\ \Omega^1(A)\ H,\ \delta)$ 是一个量子主 $H$–丛。此丛的 *Hopf* 像约化是四元组

$$(A_0, \Omega^1(A_0), H_\delta, \overline{\delta}_{\mathrm{im}}),$$

其中 $H_\delta$ 是余作用 $\delta$, $A_0 := A/I$ 的 Hopf像，$I$ 是 $A$ 中满足以下条件的最大双边理想

$$\delta_{\mathrm{im}}(I) \subseteq I \otimes H_\delta,$$

$\pi:\ A \to A_0$ 是典范商映射，而 $\delta_{\mathrm{im}} : A_0 \to A_0 \otimes \overline{H}_\delta$ 是 $H_\delta$ 在 $A_0$ 上的诱导右余作用。

**命题 4.9**。 设 $A$ 是一个带有余作用 $\delta : A \to A \otimes H$ 的右 $H$ 余模代数，并设 ( $H_\delta$、$\iota_{H_\delta}$、$\delta_{\mathrm{im}}$) 是右余作用 $\delta$ 的 *Hopf*像。设 $I \subseteq A$ 是满足以下条件的最大双边理想:

$$\delta_{\mathrm{im}}(I) \subseteq I \otimes H_\delta,$$

并设 $A_0 := A/I$。那么诱导右余作用

$$\overline{\delta}_{\mathrm{im}} : A_0 \longrightarrow A_0 \otimes H_\delta$$

是内忠实的。

证明。 假设 $\delta_{\mathrm{im}}$ 不是内忠实的。那么存在 $\delta_{\mathrm{im}}$ 的一个分解（$K$， $\iota_K$， $\gamma$），使得

$$\overline{\delta}_{\mathrm{im}} = (\mathrm{id} \otimes \iota_K) \circ \overline{\gamma}, \qquad \overline{\gamma} : A_0 \to A_0 \otimes K,$$

其中 $\iota_K$： $K \hookrightarrow H_\delta$ 表示包含。令 $\pi$： $A \to A_0$ 为典范商映射。由于 $\delta_{\mathrm{im}}$ 由 $\delta_{\mathrm{im}}$诱导，我们有

$$(\pi \otimes \mathrm{id}_{H_\delta}) \circ \delta_{\mathrm{im}} = \overline{\delta}_{\mathrm{im}} \circ \pi.$$

将此恒等式与上述分解结合可得

$$(\pi \otimes \mathrm{id}_{H_\delta}) \circ \delta_{\mathrm{im}} = (\mathrm{id} \otimes \iota_K) \circ \overline{\gamma} \circ \pi.$$

这意味着， $\delta_{\mathrm{im}}(A)$的所有系数在取$I$的商后都属于 $K$。由于根据命题 3.4 $H_\delta$ 由 $\delta_{\mathrm{im}}(A)$的系数作为霍普夫代数生成，因此可推出 $H_\delta \subseteq K$，进而 $K = H_\delta$，矛盾。因此，$\delta_{\mathrm{im}}$ 是内忠实的。 □

**推论 4.10**。 设 $H$ 为余半单 *Hopf* 代数，且 （$A$、$\Omega^1(A)$ $H$、 $\delta$）为量子主 $H$–丛。则其 *Hopf* 像约化

$$(A_0, \Omega^1(A_0), H_\delta, \overline{\delta}_{\mathrm{im}})$$

是一个量子主 $H_\delta$丛，其右余作用 $\delta_{\mathrm{im}}$ 是内忠实的。特别地，如果 $H$ 是余半单 *Hopf* 代数，那么每个量子主 $H$丛都允许典范约化为具有有效（内忠实）量子对称性的量子主丛。

**定理 4.11**。 设$(A,\Omega^1(A)\ H, \delta)$ 是一个结构 *Hopf* 代数为 $H$ 的量子主丛，其中结构 *Hopf* 代数余半单；设$(A_0, \Omega^1(A_0)\ H_\delta,\delta_{\mathrm{im}})$ 是其在 $B_0 := A^{\overline{\mathrm{co}(H_\delta)}\,0}$上的 *Hopf* 像约化。假设$(A_0, \Omega^1(A_0)\ K, \delta_K)$是一个结构 *Hopf* 代数为 $K$ 的量子主丛，具有内忠实右余作用 $\delta_K$ ，且满足 $A_0^{\mathrm{co}(K)} = B_0$。那么存在唯一的单射 *Hopf* 代数态射

$$\iota : H_\delta \hookrightarrow K$$

使得

$$\delta_K = (\mathrm{id}_{A_0} \otimes \iota) \circ \overline{\delta}_{\mathrm{im}}.$$

特别地， $H_\delta$ 是作用于 $A_0$的最小有效（内忠实）量子对称性。

证明。 根据构造， $\delta_{\mathrm{im}} : \bar{} A_0 \to A_0 \otimes H_\delta$ 是 $H_\delta$ 在 $A_0$上的内忠实右余作用。由于 $\delta_K$： $A_0 \to A_0 \otimes K$ 是余不变元代数同为 $B_0$的右余作用，这两个余作用定义了以同一底空间为基的量子主丛结构。

考虑右 $K$余作用 $\delta_K$。由于 $\delta_K$ 是内忠实的，其Hopf像与 $K$ 本身一致。另一方面，根据Hopf像 $H_\delta$的泛性质，任何定义在 $A_0$ 上的霍普夫代数右余作用，只要其像包含$\delta_{\mathrm{im}}$ 的像，就会唯一地经由一个从 $H_\delta$出发的Hopf代数态射分解。

应用 $\delta_{\mathrm{im}}$的Hopf像 $H_\delta$ 的泛性质，并注意到 $\delta_K$ 是一个霍普夫代数在 $A_0$上的右余作用，存在唯一的Hopf代数态射

$$\iota : H_\delta \to K$$

使得

$$\delta_K = (\mathrm{id}_{A_0} \otimes \iota) \circ \overline{\delta}_{\mathrm{im}}.$$

由于 $\delta_K$ 是内忠实的，其霍普夫像与 $K$一致。假设霍普夫代数态射

$$\iota : H_\delta \to K$$

不是内射的。那么 $\iota$ 将通过真霍普夫商$H_\delta/\ker(\iota)$分解，因此余作用 $\delta_K$ 将通过 $K$的霍普夫子代数 $\iota(H_\delta) \cong H_\delta/\ker(\iota)$分解。这与$\delta_K$的内忠实性矛盾。因此，$\ker(\iota) = 0$，且 $\iota$ 是内射的。

$\iota$ 的唯一性直接由霍普夫像的泛性质得出。这就证明了该断言。

□

# 5 量子主丛在有效对称性意义下的等价

本节基于量子主丛的有效量子对称性，提出量子主丛的范畴化等价概念。利用

上一节构造的Hopf像约化，我们在量子主丛类上定义一个等价关系：如果两个对象的Hopf像约化在适当范畴中同构，则称它们等价。我们证明，Hopf像约化函子在每个等价类中选取一个规范代表元，从而将对具有余半单结构 Hopf 代数的量子主丛的研究，约化为对具有内忠实余作用的量子主丛的研究。

**定义5.1**。 令 $\mathrm{QPB}_{\mathrm{cosemi}}$ 表示一个范畴，其对象是量子主丛（$A$，$\Omega^1(A)$ $H$，$\delta$），其中 $H$ 是余半单 Hopf 代数。

一个态射

$$(\phi,\psi):(A,\Omega^1(A),H,\delta)\longrightarrow(A',\Omega^1(A'),H',\delta')$$

在 $\mathrm{QPB}_{\mathrm{cosemi}}$ 中由以下部分构成:

1. 一个代数同态 $\phi:A\to A'$,
2. 一个 Hopf代数同态 $\psi:H\to H'$,

满足以下条件:

(i)（等变性）

$$\delta'\circ\phi=(\phi\otimes\psi)\circ\delta;$$

**(ii) (微积分相容性)** 存在一个 $A$–双模映射

$$\phi_*:\Omega^1(A)\longrightarrow\Omega^1(A')$$

使得 $\phi_*\circ\mathrm{d}=\mathrm{d}'\circ\phi$，其中 d 和 d′ 表示相应的微分。

**引理5.2**。设

$$(\phi,\psi):(A,\Omega^1(A),H,\delta)\longrightarrow(A',\Omega^1(A'),H',\delta')$$

是 $\mathrm{QPB}_{\mathrm{cosemi}}$中的一个态射。令 $H_\delta$ 和 $H'_{\delta'}$ 分别为 $\delta$ 和 $\delta'$的*Hopf*像，并令 $I\subseteq A$、$I'\subseteq A'$ 为满足以下条件的最大双边理想

$$\delta_{\mathrm{im}}(I)\subseteq I\otimes H_\delta,\qquad \delta'_{\mathrm{im}}(I')\subseteq I'\otimes H'_{\delta'}.$$

*Then*

$$\phi(I)\subseteq I'.$$

证明。 令 $a \in I$。由于 $\delta_{\mathrm{im}}(I) \subseteq I \otimes H_\delta$，我们有

$$\delta_{\mathrm{im}}(a) \in I \otimes H_\delta.$$

利用 $\phi$ 的等变性以及诱导的 Hopf代数态射 $\psi_\delta : H_\delta \to H'_{\delta'}$，我们计算

$$\delta'_{\mathrm{im}}(\phi(a)) = (\phi \otimes \psi_\delta)\big(\delta_{\mathrm{im}}(a)\big) \subseteq \phi(I) \otimes H'_{\delta'}.$$

因此， $\phi(I)$包含于 $A'$ 的一个双边理想中，该理想在$\delta'_{\mathrm{im}}$作用下稳定。由 $I'$ 的极大性可知， $\phi(I) \subseteq I'$。 □

**命题5.3**。 *Hopf* 像约化定义了一个函子

$$\mathcal{R} : \mathsf{QPB}_{\mathrm{cosemi}} \longrightarrow \mathsf{QPB}_{\mathrm{inner,cosemi}}$$

它从结构 *Hopf* 代数余半单的量子主丛范畴映射到结构 *Hopf* 代数余半单且具有内忠实余作用的量子主丛范畴。

证明。 对于对象， $\mathcal{R}$ 将$(A,\ \Omega^1(A)\ H,\ \delta)$映射为其 Hopf 像约化

$$\mathcal{R}(A, \Omega^1(A), H, \delta) := (A_0, \Omega^1(A_0), H_\delta, \overline{\delta}_{\mathrm{im}}).$$

Let

$$(\phi, \psi) : (A, \Omega^1(A), H, \delta) \longrightarrow (A', \Omega^1(A'), H', \delta')$$

是 $\mathsf{QPB}_{\mathrm{cosemi}}$中的一个态射。由 Hopf 像的泛性质，$\psi$ 可限制为一个 Hopf代数同态

$$\psi_\delta : H_\delta \longrightarrow H'_{\delta'}.$$

根据引理5.2， $\phi(I) \subseteq I'$，因此 $\phi$ 诱导出唯一的代数同态

$$\overline{\phi} : A_0 \longrightarrow A'_0$$

使得 $\phi \circ \pi^{-} = \pi' \circ \phi$。 $\phi$ 的等变性意味着

$$\overline{\delta'}_{\mathrm{im}} \circ \overline{\phi} = (\overline{\phi} \otimes \psi_\delta) \circ \overline{\delta}_{\mathrm{im}},$$

因此（$\phi$， $\psi_\delta$）是量子主丛的态射。与所诱导的微分演算的相容性源于 $\phi$ 与$\Omega^1(A)$和$\Omega^1(A')$的相容性。

最后，由命题 4.9，余作用 $\delta_{\mathrm{im}}$ 是内忠实的。关于恒等态射与复合的函子性可直接由构造得出。

□

**命题 5.4**。 令$\mathsf{QPB}_{\text{inner, cosemi}}$表示$\mathsf{QPB}_{\text{cosemi}}$中由右余作用为内忠实的量子主丛组成的全子范畴。那么，霍普夫像约化函子

$$\mathcal{R} : \mathsf{QPB}_{\text{cosemi}} \longrightarrow \mathsf{QPB}_{\text{inner,cosemi}}$$

本质满射。

证明。 设 $(A, \Omega^1(A)\ H, \delta)$ 是 $\mathsf{QPB}_{\text{inner,cosemi}}$ 的一个对象。由于余作用 $\delta$ 是内忠实的，其 Hopf像与 $H$ 相同，即

$$H_\delta = H.$$

此外，满足 $\delta_{\text{im}}(I) \subseteq I \otimes H_\delta$ 的最大双边理想 $I \subseteq A$ 为零。因此，$(A, \Omega^1(A)\ H, \delta)$ 的 Hopf 像约化与其自身典范同构。因此，$\mathsf{QPB}_{\text{inner,cosemi}}$ 的每个对象都属于 $\mathcal{R}$ 的本质像。

□

**命题 5.5**。 我们在对象类 $o$ 上定义一个关系 $\sim$ $f$ $\mathsf{QPB}_{\text{cosemi}}$ ，定义为

$$(A, \Omega^1(A), H, \delta) \sim (A', \Omega^1(A'), H', \delta')$$

当且仅当它们的 *Hopf* 像约化作为量子主丛同构。则 $\sim$ 是一个等价关系，并且 *Hopf* 像约化函子 $\mathcal{R}$ 诱导一个双射。

$$\mathsf{QPB}_{\text{cosemi}}/\sim \xrightarrow{\cong} \text{Iso}\big(\mathsf{QPB}_{\text{inner,cosemi}}\big),$$

其中 $\text{Iso}(\mathsf{QPB}_{\text{inner,cosemi}})$ 表示具有余半单结构霍普夫代数和内忠实余作用的量子主丛的同构类集合。

证明。 显然， $\sim$ 是一个等价关系。因此，霍普夫像约化函子 $\mathcal{R}$ 诱导出一个良定义的映射

$$\underline{\mathcal{R}}\colon \text{量子主丛}_{\text{cosemi}}/\sim \longrightarrow \text{同构}\big(\text{量子主丛}_{\text{inner, cosemi}}\big), \qquad [(A,\ \Omega^1(A)\ H,\ \delta)] \longmapsto [\mathcal{R}(A,\ \Omega^1(A)\ H,\ \delta)].$$

根据命题 5.4，$\mathsf{QPB}_{\text{inner, cosemi}}$ 中的每个对象都同构于某个 $\mathsf{QPB}_{\text{cosemi}}$ 对象的霍普夫像约化，因此 $\mathcal{R}$ 是满射。单射性直接由 $\sim$的定义可得。因此， $\mathcal{R}$ 是双射，这就证明了该断言。

□

**注 5.6**。 命题 *5.5* 表明，对于余半单结构 *Hopf* 代数的量子主丛分类问题，在模去有效对称性后，可归结为内忠实量子主丛的分类。特别是，霍普夫像约化为每个等价类提供了一个典范代表，刻画了该丛的有效量子对称性。这与经典情形相呼应：结构群非有效的主丛可通过除去作用的核，典范地约化为具有有效群作用的丛。

# 6 内忠实余作用的例子

本节将给出内忠实余作用的例子。其中一个具体例子涉及复半单李群的量子化坐标代数情形。

设 $G$ 是一个复半单李群， $L_S$ 是 $G$ 的一个 Levi 子群。考虑霍普夫代数 $A = \mathcal{O}_q(G)$ 和 $H = \mathcal{O}_q(L_S)$。我们有规范的 Hopf 代数满射 $\pi : \mathcal{O}_q(G) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_q(L_S)$（例如，可参见 [15, 18]），并考虑右余作用

$$\delta := (\mathrm{id} \otimes \pi) \circ \Delta_{\mathcal{O}_q(G)} : \mathcal{O}_q(G) \longrightarrow \mathcal{O}_q(G) \otimes \mathcal{O}_q(L_S).$$

**命题 6.1**。 设 $G$ 是一个复半单李群， $L_S \subset G$ 是一个 *Levi* 子群。则右余作用

$$\delta : \mathcal{O}_q(G) \longrightarrow \mathcal{O}_q(G) \otimes \mathcal{O}_q(L_S).$$

是内忠实的。

证明。 设 $K \subseteq \mathcal{O}_q(L_S)$ 是一个霍普夫子代数，使得余作用 $\delta$ 经由 $K$ 分解，即

$$\delta(\mathcal{O}_q(G)) \subseteq \mathcal{O}_q(G) \otimes K.$$

将 $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})$ 应用于 $\delta$，我们得到

$$\pi(\mathcal{O}_q(G)) \subseteq K.$$

由于 $\pi : \mathcal{O}_q(G) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_q(L_S)$ 是满射，因此可得 $K = \mathcal{O}_q(L_S)$。所以， $\mathcal{O}_q(L_S)$ 的任何真霍普夫子代数都无法分解该余作用，且 $\delta$ 是内忠实的。

□

**命题 6.2.** 设 $H$ 是一个霍普夫代数。那么，由余乘法给出的右余作用

$$\delta := \Delta : H \longrightarrow H \otimes H$$

是内忠实的。

证明。设 $K \subseteq H$ 是一个霍普夫子代数，使余作用 $\Delta$ 可经由 $K$ 分解，即

$$\Delta(H) \subseteq H \otimes K.$$

对 $h \in H$ 中的 $\Delta(h)$ 应用 $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})$。利用余单位公理 $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mathrm{id}$，我们得到

$$h = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(h) \in K.$$

因此 $H \subseteq K$，从而 $K = H$。所以，没有真霍普夫子代数能够分解余作用，并且 $\Delta$ 是内忠实的。 □

## 致谢

作者感谢印度统计研究所的款待。本文即在加尔各答的该研究所撰写。

## 参考文献

[1] Teodor Banica 和 Julien Bichon。Hopf像与内忠实表示。格拉斯哥数学杂志，52(3):677–703，2010。[2]Teodor Banica 和 Debashish Goswami。量子等距与非交换球面。数学物理通讯，298(2):343–356，2010。[3] Edwin J Beggs 和 Shahn Majid。量子黎曼几何，第355卷。施普林格，2020。[4] Jyotishman Bhowmick 和 Debashish Goswami。量子等距群：实例与计算。数学物理通讯，285(2):421–444，2009。[5] Thomasz Brzezi´nski 和 Shahn Majid。量子空间上的量子群规范理论。数学物理通讯，157(3):591–638，1993。

[6]Tomasz Brzezi´nski 和 Piotr M Hajac。伽罗瓦型余代数扩张与代数余扩张。代数通讯，27(3):1347–1367，1999。[7]Tomasz Brzezinski 和 Robert Wisbauer。余环与余模。第 309 号。剑桥大学出版社，2003。[8] Alexandru Chirvasitu、Chelsea Walton 和 Xingting Wang。关于与一对预正规形式相关的量子群。非交换几何杂志，13(1):115–159，2019。[9] Sorin Dascalescu、Constantin Nastasescu 和 Serban Raianu。霍普夫代数：入门。CRC出版社，2000。[10] Pavel Etingof、Debashish Goswami、Arnab Mandal 和 Chelsea Walton。由二次独立余模生成的交换代数上的霍普夫余作用。代数通讯，45(8):3410–3412，2017。[11] Debashish Goswami。经典与非交换几何中的等距变换量子群。数学物理通讯，285(1):141–160，2009。[12] Piotr M Hajac。量子主丛上的强联络。数学物理通讯，182(3):579–617，1996。[13] Anatoli Klimyk 和 Konrad Schm¨udgen。量子群及其表示。施普林格科学与商业媒体，2012。[14] Hans-J¨urgen Schneider。任意霍普夫代数的主齐性空间。以色列数学杂志，72(1):167–195，1990。[15] Jasper V Stokman 和 Mathijs S Dijkhuizen。量子化旗流形与不可约*表示。数学物理通讯，203(2):297–324，1999。[16] Shuzhou Wang。有限空间的量子对称群。数学物理通讯，195(1):195–211，1998。[17]Stanis-law L Woronowicz。紧矩阵伪群（量子群）上的微分演算。数学物理通讯，122(1):125–170，1989。[18] Sebastian Zwicknagl。R矩阵泊松代数及其变形。数学进展，220(1):1–58，2009。