克服相位控制里德堡双量子比特门中的斯塔克频移约束

Ignacio R. Sola,[1] Sebastian C.Carrasco,[2]Vladimir S. Malinovsky,[2] Seokmin Shin,[3] 和 Bo Y. Chang[3]，*[1]马德里康普顿斯大学物理化学系，*28040* 马德里，西班牙[2]*DEVCOM* 陆军研究实验室，美国马里兰州阿德尔菲 *Powder Mill Road 2800*号，邮编*20783*[3]首尔国立大学化学学院，大韩民国首尔 *08826*

arXiv:2601.01521v1 [quant-ph] 4 Jan 2026

摘要

斯塔克频移会引入额外相位，从而限制在强里德堡阻塞极限下通过双光子跃迁可制备的纠缠门集合。对于非独立寻址的量子比特，我们表明，通过控制每个量子比特处脉冲的绝对相位和局部振幅，可以利用三脉冲序列以高保真度制备任意双量子比特相位门。基于这些发现，我们提出了两种针对不同相位门设计的鲁棒控制方案，采用偶数或奇数长度的脉冲序列时均能取得更好的效果。

引言

可扩展量子计算的探索，已从学术实验室中的基础研究发展到商业原型的研发，多个物理平台——超导电路 [1], 囚禁离子 [2], 光子系统 [3], 半导体器件 [4],和中性原子 [5]——如今正展开激烈竞争。尽管取得了这些进展，在研究层面仍有相当大的空间，可以探索非常规方法，而这些方法最终或许能在可扩展性、保真度或架构简洁性方面带来优势。被囚禁于光学晶格或光镊中的中性原子 [6–10] 是一种用途广泛的资源，可用于实现多粒子纠缠 [11–21], 简单量子电路 [16, 22–35] ，甚至实现跨不同量子计算平台的量子门 [36–41]。自 Jaksch 等人提出早期设想以来 [22, 42–44],，中性原子一直被视为一种有望通过强偶极阻塞机制制备纠缠门的平台。

历史上，相对较慢的双量子比特门时间和一般的保真度限制了里德堡介导的纠缠操作 [14, 45], 的竞争力，但近期的技术突破改变了这一局面：更强且更易控制的里德堡-里德堡相互作用 [46],、改进的囚禁与重排技术（可实现近确定性装载） [7, 47, 48],以及大幅延长的相干时间 [49] ，共同重新激发了人们对中性原子量子计算的兴趣。这些进展推动了新一轮研究，致力于开发更简单、更稳健、更可靠的纠缠门协议 [25, 50–52], ，并采用优化技术 [32, 53–55]。我们的工作通过探索非标准控制策略，为这一研究作出了贡献；这些策略依赖于对驱动量子比特的光脉冲空间和时间特性的精确操控 [56–59]。

在基于典范的 Jaksch 协议（JP）实现受控-Z（CZ）门的基础上

该协议基于一系列 $\pi - 2\pi - \pi$ 脉冲 [22], 。我们最近提出了一种最小化改动方案，旨在让相距较近的量子比特也能有效运行：这些量子比特既非完全可区分——脉冲无法分别作用于每个量子比特；也非完全不可区分——脉冲不一定以相同方式作用于两个量子比特。我们将这一方案称为对称正交协议（SOP）。因此，可以通过安排量子比特和脉冲，控制每个脉冲在每个量子比特上的局部振幅。驱动场的空间构型经过选择，使得系统在第一个脉冲之后——当系统初始化于 $|11\rangle$态时——占据 $|1r\rangle$ 态和 $|r1\rangle$ 态的叠加态，该叠加态对第二个脉冲而言是暗态。因此，第二个脉冲不会改变波函数，而第三个脉冲则反转激发，使系统恢复到 $|11\rangle$ ，并获得所需的相位移。这些条件称为空间正交条件。与其他文献中的分析一样， [22, 56] 对该量子门的分析考虑了里德堡态的单光子激发。

然而，在大多数实验装置中，高能级里德堡态的激发是通过非共振双光子吸收实现的 [5, 60]。在本工作中，我们利用绝热消除近似表明，有效双光子哈密顿量会引入额外的动力学相位，这些相位源于与中间失谐能级相关的斯塔克位移 [61, 62],，从而阻碍某些双量子比特相位门的制备。例如，我们明确证明，对于双光子跃迁，无法使用 JP 和 SOP 制备这样一种双量子比特相位：在最终时刻，除 $|00\rangle$ 外，计算基态中所有振幅的符号都发生翻转 [22, 32, 56]。然而，通过控制驱动脉冲的绝对光学相位，我们表明可以实现任意纠缠门。此外，这种相位控制还能显著拓宽获得高保真度性能的脉冲面积取值范围。

最后，受这些发现的启发，我们提出了 SOP 协议的扩展版本，可采用脉冲数不同的脉冲序列，并施加如下限制：序列中所有奇数编号脉冲具有相同的面积和空间参数，所有偶数编号脉冲也具有相同的面积和空间参数。通过取消空间正交条件，我们提出了更高效的 SOP 扩展版本，专为量子比特无法独立寻址的系统设计；具体而言，这些版本适用于包含偶数个而非奇数个脉冲的脉冲序列，从而补充了原始 SOP，并实现了新型鲁棒纠缠操作。

量子比特设置

我们考虑一种常见的系统配置：中性原子被囚禁在光镊中，量子比特态$|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 编码在基态的超精细能级中。双量子比特相位门（例如 CZ 门）要求布居数始终保持在初始量子比特态，同时在演化过程中积累一定相位，使最终态能够实现纠缠。这些量子门可通过驱动布居数经过里德堡态来制备，从而利用偶极阻塞机制：当原子彼此足够接近、处于所谓的偶极阻塞半径 $R_{\mathcal{B}}$以内时，该机制会禁止多个原子同时激发至里德堡态。激光频率的选择使得其中一个量子比特（通常为 $|00\rangle$）严重失谐，因此不受该协议影响。对于由包络为 $E(t)$的共振脉冲驱动、发生在两个态 $|1\rangle$ 和里德堡态 $|r\rangle$之间的单光子跃迁，含时薛定谔方程（TDSE）可解析求解，结果为

$$|\Psi(t)\rangle = \cos(\theta(t))\,|1\rangle + i\sin(\theta(t))\,|r\rangle \tag{1}$$

其中混合角

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \Omega(t')dt' \tag{2}$$

其拉比频率为 $\Omega(t) = \mu E(t)$，其中 μ 是跃迁偶极矩。共振跃迁会导致从 $|1\rangle$ 到 $|r\rangle$的完全布居转移，或回到 $|1\rangle$的完全布居回归，具体取决于脉冲面积 S。脉冲面积定义为脉冲结束时拉比频率的积分，即 $\Omega(t)$ ($S = 2\theta(\infty)$)。因此，面积为 π的脉冲，即所谓的 π脉冲，将制备态$|r\rangle$，更准确地说是 $U_\pi\,|1\rangle = i\,|r\rangle \equiv e^{i\pi/2}\,|r\rangle$；此时跃迁会获得 $\pi/2$ 相位。我们使用时间演化算符 U 来形式化表示含时薛定谔方程的解，并以下标标示脉冲面积。相比之下， 2π脉冲将制备 $U_{2\pi}\,|1\rangle = -\,|1\rangle = e^{i\pi}\,|1\rangle$。另一方面，如果 $|0\rangle$ 远离共振，那么无论脉冲面积为何，我们都能保证 $U\,|0\rangle = |0\rangle$。

接下来，我们考虑两个相距足够远的囚禁原子，因此可以分别用不同的场驱动每个原子，而不会影响另一个原子。系统可能的量子比特态（计算基态）为 $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$，其中我们假设左侧的是量子比特 1，右侧的是量子比特 2。为简化记法，我们在时间演化算符后加上括号，标明脉冲作用于哪个量子比特。在 Jaksch 等人最初提出的协议中，一个作用于第一个量子比特的 π 脉冲之后，是一个作用于第二个量子比特的 2π 脉冲，随后重复第一步。只要这些脉冲在时间上不重叠，

就可以通过依次作用时间演化算符，解析地预测动力学的结果，得到

$$U_\pi(1)U_{2\pi}(2)U_\pi(1) = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1) \equiv \mathcal{C}^- \tag{3}$$

其中，diag(1，-1，-1，-1) 是一个对角矩阵，其对角元素如括号中所示。下文将这一版本的 CZ 量子门称为 $\mathcal{C}^-$ 门。该协议的关键步骤是通过偶极阻塞抑制第二个里德堡态，这一点在过程$U_\pi(1)U_{2\pi}(2)U_\pi(1)|11\rangle = iU_\pi(1)U_{2\pi}(2)|r1\rangle = iU_\pi(1)|r1\rangle$中尤为明显：第二个脉冲显然不起作用，进而得到 $-|11\rangle$。在 JP 范式下，要实现快速量子门，里德堡阻塞必须足够强，这可以通过满足两个条件来实现：激发到高能里德堡态，并将原子排列在较小的核间距处。第一个条件通过使用两个激光脉冲实现，它们驱动布居数经由一个中间步骤非共振跃迁。我们不能假设从 $|1\rangle$ 到 $|r\rangle$ 的跃迁可以通过单光子完成。因此，三步协议中的每个脉冲都必须替换为一对所谓的泵浦脉冲和斯托克斯脉冲。第二个条件受限于我们独立操控各量子比特的能力，就像在 Jaksch 协议中一样。在 SOP 中，这一限制得以克服。图1展示了量子比特装置中的能级示意图，其中包括计算基、里德堡态和中间态 $|i\rangle$ （通常为 nP 原子态）。

尽管可以驱动共振双光子跃迁而避免中间态中的布居数 [63], ，但如同大多数实验室实现一样，本文假设双光子跃迁是非共振的。为获得解析公式，我们将在远失谐极限下进行研究。这样，在对 $|i\rangle$ 中的振幅进行绝热消除后，我们便可以使用有效的二能级哈密顿量，研究从态 $|1\rangle$ 到态 $|r\rangle$ 的双光子共振跃迁。在旋波近似下，

$$H(t) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\Omega_P^2(t)}{2\Delta} & \frac{\Omega_P(t)\Omega_S(t)}{2\Delta}e^{i\phi} \\ \frac{\Omega_P(t)\Omega_S(t)}{2\Delta}e^{-i\phi} & \frac{\Omega_S^2(t)}{2\Delta} \end{pmatrix} \tag{4}$$

其中 $\phi = \phi_S - \phi_P$ 是相位锁定的泵浦脉冲和斯托克斯脉冲之间的相位差，且 $\Omega_P = \mu_{0r}E_P(t)/\hbar$、$\Omega_S = \mu_{0r}E_S(t)/\hbar$，其中 $E_P(t)$ 和 $E_S(t)$ 分别是泵浦脉冲和斯托克斯脉冲的包络。对于重合脉冲，$\Omega_P(t) = \Omega_S(t) = \Omega_0(t)$，含时薛定谔方程可以解析求解

其时间演化算符为

$$U(t) = e^{i\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & ie^{i\phi}\sin\theta(t) \\ ie^{-i\phi}\sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{pmatrix} \tag{5}$$

其中混合角现在为

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\Omega_0^2(t')}{4\Delta} dt' = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} \tilde{\Omega}(t')dt' \tag{6}$$

并且我们将拉比频率定义为 $\tilde{\Omega}(t) = \Omega_0^2(t)/2\Delta$，波浪号提醒我们这是一个有效的双光子拉比频率。它在脉冲持续时间内的积分即为脉冲面积 S。哈密顿量 [Eq.(4)] 中的斯塔克频移会在时间演化算符 [Eq.(5)], 中产生全局相位偏移，因此，对于典型的（单光子）二能级哈密顿量，一个2π脉冲会将状态从 $|1\rangle$ 变为 $\cos\pi|1\rangle = -|1\rangle$ （而一个 π 脉冲则会将布居数从$|1\rangle$ 转移到 $i|r\rangle$）；而在存在斯塔克频移时，同一个脉冲的作用为 $e^{iA/2}\cos(A/2)$ $|1\rangle = e^{i\pi}\cos(\pi)|1\rangle = |1\rangle$，因此在过程结束时不会改变状态的相位。因此，在绝热消除条件下使用 JP 进行双光子跃迁，可以制备量子门

$$U_\pi(1)U_{2\pi}(2)U_\pi(1) = \mathrm{diag}(1,1,1,-1) \equiv \mathcal{C}^+ \tag{7}$$

该量子门和 $\mathcal{C}^-$ 一样，可用于产生纠缠。通过添加分别作用于每个量子比特的局域操作（单量子比特门），可以在两种量子门之间切换。不过，理解为何某些双量子比特相位门比其他门更容易实现，并提出通过简单脉冲序列（例如 JP）实现各个量子门的协议，是很有意义的。另一种做法是寻找能够产生纠缠的相位门协议，而不论其具体特征如何。可以通过计算纠缠能力来评估这些协议。

双光子对称正交协议

如前所述，为增强偶极阻塞并加快 JP 中的双量子比特量子门，可以将量子比特之间的距离从典型值（在大多数平台上）约 5μm 缩短至尽可能小（$\sim 1\mu$m）。此时，量子比特无法独立寻址。因此，我们现在将扩展哈密顿量和运动方程，以描述这种情况。根据设计，计算基态之间的能量差足够大，使得哈密顿量呈分块对角形式。因此，可以分别分析演化

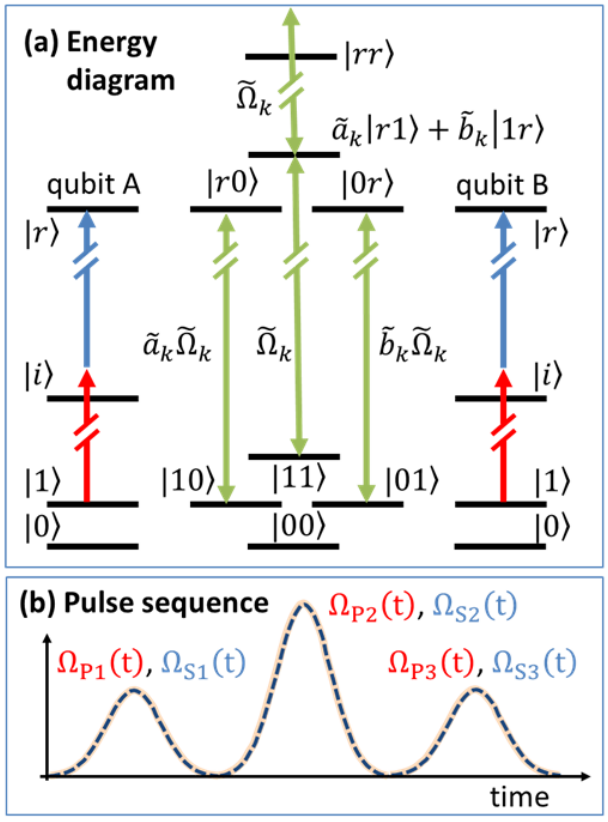


图1. (a) 量子比特彼此靠近时的能级图；我们在绝热近似下描述双光子相互作用，脉冲以不同的因子 a_k 和 b_k 同时作用于两个量子比特。(b) 对称的 3-(双)脉冲序列，其中泵浦和斯托克斯拉比频率始终相同，且序列中第一个和第三个脉冲的脉冲面积相同，均为第二个脉冲面积的一半。

对每个态 $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ 进行分析。当动力学从 $|11\rangle$ 开始时，相关子系统构成一个 V 构型的三能级系统（尽管可以定义一个合适的基，将系统进一步化简为二能级系统；该基针对每种量子比特和场的排列方式而定，如图 1[a]所示）。对于 $|01\rangle$和 $|10\rangle$，演化可简化为二能级动力学，而态 $|00\rangle$ 保持解耦。图1展示了对中间态 $|i\rangle$ 进行绝热消除前后相关态的示意图。

在 SOP方案中，我们使用结构光或高斯光束的叠加，从而控制各量子比特位置处场的局部振幅 [56, 59]。因此，我们定义空间或几何因子 a_P 和 a_S，它们分别乘以作用于量子比特 a 的各场（Ω_P 或 Ω_S）的局部 拉比频率。类似地， b_P 和 b_S 是量子比特 b 对应的系数。与之前一样，为了

简化记号，我们称

$$\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}(t) = \Omega_i(t)\Omega_j(t)/2\Delta \quad \text{(with } \alpha, \beta = P, S\text{)} \tag{8}$$

有效双光子拉比频率。这对量子门序列中的每一步都成立。之后，我们需要为这些有效双光子拉比频率添加一个额外标签，以标明脉冲序列中的具体步骤。

对中间态进行绝热消去并假设存在强偶极阻塞后，对于从 $|11\rangle$ 态开始的系统，其有效哈密顿量可在有序基底$\{|11\rangle, |r1\rangle, |1r\rangle\}$下写为

$$H^V(t) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a_P^2 + b_P^2)\,\tilde{\Omega}_{PP}(t) & a_P a_S \tilde{\Omega}_{PS}(t)e^{i\phi} & b_P b_S \tilde{\Omega}_{PS}(t)e^{i\phi} \\ a_P a_S \tilde{\Omega}_{PS}(t)e^{-i\phi} & b_P^2 \tilde{\Omega}_{PP}(t) + a_S^2 \tilde{\Omega}_{SS}(t) & 0 \\ b_P b_S \tilde{\Omega}_{PS}(t)e^{-i\phi} & 0 & a_P^2 \tilde{\Omega}_{PP}(t) + b_S^2 \tilde{\Omega}_{SS}(t) \end{pmatrix} \tag{9}$$

请注意，由于每个场都会同时作用于两个量子比特，交流斯塔克频移包含两个分量。具体而言，要计算状态 $|r1\rangle$上的斯塔克位移，除了考虑将该状态与中间态 $|i1\rangle$非共振耦合的虚光子所产生的影响$a_S^2\,\tilde{\Omega}_{SS}(t)$外，还必须考虑与另一个量子比特上的中间态 $|ri\rangle$的耦合，其贡献为 $b_P^2\,\tilde{\Omega}_{PP}(t)$。类似地，状态 $|1r\rangle$ 和$|11\rangle$的交流斯塔克频移也各有两个贡献。

二能级系统的有效哈密顿量如方程（4）所示，但我们需要将系数 $a_P a_S$添加到量子比特 A的拉比频率中，并将系数 $b_P b_S$添加到量子比特 B的拉比频率中，具体如下

$$H^A(t) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_P^2 \tilde{\Omega}_{PP}(t) & a_P a_S \tilde{\Omega}_{PS}(t)e^{i\phi} \\ a_P a_S \tilde{\Omega}_{PS}(t)e^{-i\phi} & a_S^2 \tilde{\Omega}_{SS}(t) \end{pmatrix} \tag{10}$$

作用于按 $\{|10\rangle, |r0\rangle\}$顺序排列的态上，并且

$$H^B(t) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_P^2 \tilde{\Omega}_{PP}(t) & b_P b_S \tilde{\Omega}_{PS}(t)e^{i\phi} \\ b_P b_S \tilde{\Omega}_{PS}(t)e^{-i\phi} & b_S^2 \tilde{\Omega}_{SS}(t) \end{pmatrix} \tag{11}$$

作用于按 $\{|01\rangle, |0r\rangle\}$顺序排列的态上。最后，通过哈密顿量 $H^D = 0\,|00\rangle\langle 00|$补全希尔伯特空间中的完整 8 能级系统。因此，总哈密顿量由$H^D \oplus H^A \oplus H^B \oplus H^V$组成。

SOP 尽可能遵循 JP 策略，重点关注使用三重（双）脉冲序列的量子门协议，并在每一步中使泵浦脉冲和斯托克斯脉冲完全重叠

˜ ˜ ˜序列，如图1(b)所示。于是 Ω$_P$(t) =Ω$_S$(t)，使得 Ω$_{PP}$(t) =Ω$_{SS}$(t) =Ω$_{PS}$(t)。现在，我们添加一个标签来标识序列中脉冲的次序，因此在前面的方程中，我们˜ ˜将任意 Ω$_{\alpha\beta}$(t) ($\alpha, \beta = P, S$) 替换为 Ω$_{\alpha\beta,k}$(t)，其中 $k = 1$、2、.....、M，并且由于它们全部˜相等，我们去掉 $\alpha\beta$ 下标，将其记为 Ω$_k$(t)，以简化记号。最后，我们选择泵浦脉冲和斯托克斯脉冲的几何因子，使得 $a_P = a_S$ 和 $b_P = b_S$，从而使哈密顿量（9）中的所有对角项都相等。如果两个脉冲在每个量子比特中的光束或结构特征相同，而在不同量子比特之间可以不同，则很容易实现这一点（例如，第一个激光器在量子比特 A 中的聚焦程度可以高于量子比特 B，使得 $a_P = a_S$ 大于$b_P = b_S$）。再次添加标签以标识序列中的步骤，$a_P a_S \to a_P$、$_k a_S$、$_k = a_P^2$、$_k \equiv \tilde{a}_k$˜以及 $b_P b_S \to b_P$、$_k b_S$、$_k = b_P^2$、$_k \equiv b_k$；由于两个几何因子取值相同，我们省略了指示量子比特的不必要下标，并添加波浪号以提醒我们，该因子是两个因子的乘积。尽管该哈密顿量可用于任意排列方式，但我们通常假设，对于第一个激光器（以及第三个激光器，其与第一个相同，如˜图1[b]所示），$|\tilde{a}_1| \gg |b_1|$，而对于第二个激光器则相反。通过放宽这些约束所得到的更一般结果将在其他地方进行分析。此外，在不失一般性的情况下，我们还假设 $\tilde{a}_k^2 + \tilde{b}_k^2 = 1$ 对于每个脉冲，并根据需要对拉比频率进行缩放。于是，H^V 哈密顿量的对角项就是 ˜Ω$_k$(t)，并且序列中每一步的哈密顿量可以写成

$$\mathsf{H}_k^V(t) = -\frac{1}{2}\tilde{\Omega}_k(t)\begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_k e^{i\phi_k} & \tilde{b}_k e^{i\phi_k} \\ \tilde{a}_k e^{-i\phi_k} & 1 & 0 \\ \tilde{b}_k e^{-i\phi_k} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\mathsf{H}_k^T(t) = -\frac{1}{2}\tilde{\Omega}_k(t)\begin{pmatrix} |\alpha_k| & \alpha_k e^{i\phi_k} \\ \alpha_k e^{-i\phi_k} & |\alpha_k| \end{pmatrix} \quad (\alpha = \tilde{a}, \tilde{b}; T = A, B), \tag{13}$$

在这些哈密顿量下，可以得到时间演化算符的简单近似解析形式。在脉冲结束时，传播子将为

$$U_k^V = e^{iS_k/2}\begin{pmatrix} \cos(S_k/2) & ie^{i\phi_k}\tilde{a}_k \sin(S_k/2) & ie^{i\phi_k}\tilde{b}_k \sin(S_k/2) \\ ie^{-i\phi_k}\tilde{a}_k \sin(S_k/2) & \tilde{a}_k^2 \cos(S_k/2) + \tilde{b}_k^2 & \tilde{a}_k\tilde{b}_k\left[\cos(S_k/2) - 1\right] \\ ie^{-i\phi_k}\tilde{b}_k \sin(S_k/2) & \tilde{a}_k\tilde{b}_k\left[\cos(S_k/2) - 1\right] & \tilde{b}_k^2 \cos(S_k/2) + \tilde{a}_k^2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

其中，S_k 是 k脉冲的面积。

对于二能级哈密顿量，我们得到

$$U_k^T = e^{i\alpha_k S_k/2}\begin{pmatrix} \cos(\alpha_k S_k/2) & ie^{i\phi_k}\sin(\alpha_k S_k/2) \\ ie^{-i\phi_k}\sin(\alpha_k S_k/2) & \cos(\alpha_k S_k/2) \end{pmatrix} \tag{15}$$

其中，对于 (T = A, B)， $\alpha = \tilde{a}$ 或 b 。式 (14) 和式 (15) 的时间演化算符中包含一个由斯塔克位移引起的额外相位，其数值与脉冲面积引起的动力学相位相同。

假设所有脉冲的绝对相位均为零（$\phi_k = 0$），从 $|11\rangle$ 出发施加一个π脉冲进行激发，可制备纠缠态 $|\Psi_1\rangle = -\left(\tilde{a}_1|r1\rangle + \tilde{b}_1|1r\rangle\right)$，随后可由第二个 π 脉冲使其退激发。SOP方案的核心是确定第二个脉冲的空间脉冲参数 $\tilde{a}_2, \tilde{b}_2$ ，使得第一个脉冲 $|\Psi_1\rangle$ 之后制备的态成为 H_2^V的暗态。下面我们将通过应用式 (19) 和式 (20) 中的时间演化算符，更详细地分析这些参数的影响。当系统初始处于 $|11\rangle$ 态时，3 个脉冲序列所对应的哈密顿量为 $H_1^V(t)h_1(t)+H_2^V(t)h_2(t)+H_3^V(t)h_3(t)$，其中 $h_k(t)$ 是阶跃函数，定义在相应脉冲作用的时间区间内。总传播子是各脉冲对应传播子的有序乘积（假设脉冲依次作用），$U^V = \left(U_3^V U_2^V U_1^V\right)$（总传播子的下标略去）。由于我们要制备 CZ 门（或一般情况下的受控相位门），传播子 U^V的相关矩阵元是矩阵的第一个元素，它给出了脉冲序列作用后波函数在 $|11\rangle$ 态上的投影。该投影必须为 -1，也就是说，经过时间演化后，态必须获得一个 π 相位。重新整理后，

$$\begin{aligned} U_{11}^V \equiv \left\langle 11\left|U^V\right|11\right\rangle = e^{i(S_1+S_2+S_3)/2}\Big\{ & c_3c_2c_1 - e^{i(\phi_2-\phi_1)}(\vec{e}_2\vec{e}_1)c_3s_2s_1 - e^{i(\phi_3-\phi_2)}(\vec{e}_3\vec{e}_2)s_3s_2c_1 \\ & -e^{i(\phi_3-\phi_1)}(\vec{e}_3\vec{e}_2)(\vec{e}_2\vec{e}_1)s_1c_2s_3 - e^{i(\phi_3-\phi_1)}\left[\vec{e}_3\vec{e}_1 - (\vec{e}_3\vec{e}_2)(\vec{e}_2\vec{e}_1)\right]s_1s_3\Big\} \end{aligned} \tag{16}$$

wher为简洁起见，我们使用简化记号 $c_k = \cos(S_k/2)$、 $s_k = \sin(S_k/2$ $)$

显然， $|\Psi_1\rangle = |\Phi_2^0\rangle$ （H_2^V的暗态）的条件是 $\vec{e}_2$ 与 $\vec{e}_1$ 和$\vec{e}_3$正交。对于双量子比特，该条件迫使 $\vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_3$平行。于是，式（16）变为

$$U_{11}^V = e^{i(S_1+S_2+S_3)/2}\Big\{\cos\theta_3\cos\theta_2\cos\theta_1 \mp e^{i(\phi_3-\phi_1)}\sin\theta_3\sin\theta_1\Big\} \tag{17}$$

其中，当 $\vec{e}_3 = \vec{e}_1$ 时（因此， $\tilde{a}_3 = \tilde{a}_1$、 $b_3 = b_1$），取负号；当 $\vec{e}_3 = -\vec{e}_1$ 时（因此， $\tilde{a}_3 = -\tilde{a}_1$、 $b_3 = -b_1$），取正号。

如前文示意图所示，在这些条件下，JP 能够完美工作。令 $S_1 = S_3 = \pi$，可得 $U_{11}^V = \mp e^{i(\pi+S_2/2+\phi_3-\phi_1)} = -1$，当 $S_2 = 2\pi$ 且 $\phi_3 - \phi_1 = 0$时成立；若 $\vec{e}_3 = \vec{e}_1$，则

$\phi_3 - \phi_1 = \pi$ 当 $\vec{e}_3 = -\vec{e}_1$时。事实上，可以将原始协议视为几何因子正交性的一个特例，其中 $\vec{e}_1 = \vec{e}_3 = (1,0)$，而 $\vec{e}_2 = (0,1)$。因此，对于典型的脉冲面积 $S_1 + S_2 + S_3 = 4\pi$，无需调整脉冲的相位来克服斯塔克位移产生的动力学相位。不过，在更一般的设置中，仍可对 ϕ_k~进行调整。该结果对 $\tilde{a}$ 和 b的任意取值均成立。此外，通过调整相位差 $\phi_3 - \phi_1 = S_2/2 + \pi$，对于第二个脉冲的任意脉冲面积，该结果也成立。

当双量子比特系统初始处于 $|t\rangle$ （$|01\rangle$ 或 $|10\rangle$）时，应用式（15），可得

$$U_{11}^T \equiv \langle t | U^T | t \rangle = e^{i(\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3)/2} \left\{ c_3 c_2 c_1 - e^{i(\phi_3 - \phi_2)} s_3 s_2 c_1 - e^{i(\phi_3 - \phi_1)} s_3 c_2 s_1 - e^{i(\phi_2 - \phi_1)} c_3 s_2 s_1 \right\} \tag{18}$$

~其中 $c_k = \cos(\alpha_k S_k/2)$， $s_k = \sin(\alpha_k S_k/2)$， $\alpha_k = \tilde{a}_k$ 适用于 $T = A$，而 $\alpha_k = b_k$ 适用于 $T = B$。第三个脉冲是第一个脉冲的复制，因此 $S_3 = S_1$ 和 $\vec{e}_3 = \vec{e}_1$。当 $\phi_3 = \phi_2 = \phi_1$时，

$$U_{11}^T = e^{i(\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2/2)} \cos\left(\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2/2\right) \tag{19}$$

取决于 ϕ_k （$\phi_k = \phi_l \pm \pi$）的值，所有可能的角度组合都可能出现。在通常条件下，（$S_1 = \pi$， $S_2 = 2\pi$）

$$U_{11}^T = e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)\pi} \cos\left([\alpha_1 + \alpha_2]\pi\right) \tag{20}$$

对于正交几何因子， $\tilde{a}_2 = \mp\tilde{b}_1 \equiv \mp\tilde{b}$、 $\tilde{b}_2 = \pm\tilde{a}_1 \equiv \tilde{a}$、 $U_{11}^A = e^{i(\tilde{a}-\tilde{b})\pi} \cos\left([\tilde{a} - \tilde{b}]\pi\right)$、$U_{11}^B = e^{i(\tilde{a}+\tilde{b})\pi} \cos\left([\tilde{a} + \tilde{b}]\pi\right)$，反之亦然。

对于独立量子比特， $\tilde{a} = 1, \tilde{b} = 0$。那么 $U_{11}^A = U_{11}^B$，该量子门的保真度为 0。（然而，另一种纠缠门 $\mathcal{C}^+$ 的制备保真度为 1。）否则， U_{11}^A和 U_{11}^B的实部，即 $\cos^2\left([\tilde{a} - \tilde{b}]\pi\right)$和 $\cos^2\left([\tilde{a} + \tilde{b}]\pi\right)$，始终为正。因此，~无论 $\tilde{a}$ 和 b取何值，若不同时控制几何因子 $\vec{e}_k$ 和光学相位 ϕ_k，就无法制备出具有高保真度的 $\mathcal{C}^-$ 量子门，数值结果将对此予以证明。

数值结果

如解析所示，当有效双光子脉冲的脉冲面积为 $S_1 = S_3 = \pi$ 且第二个脉冲的脉冲面积为 $S_2 = 2\pi$时，JP 可以以完美保真度制备 $\mathcal{C}^+$ 量子门。在这种情况下，最小总脉冲面积为 4π，但这些解在脉冲面积上具有周期性，即$S_1 + S_3 = (4m+2)\pi (m = 0, 1, \ldots \in \mathbb{Z})$ 和 $S_2 = (4m+2)\pi (m \in \mathbb{Z})$。这如图2(a)所示，

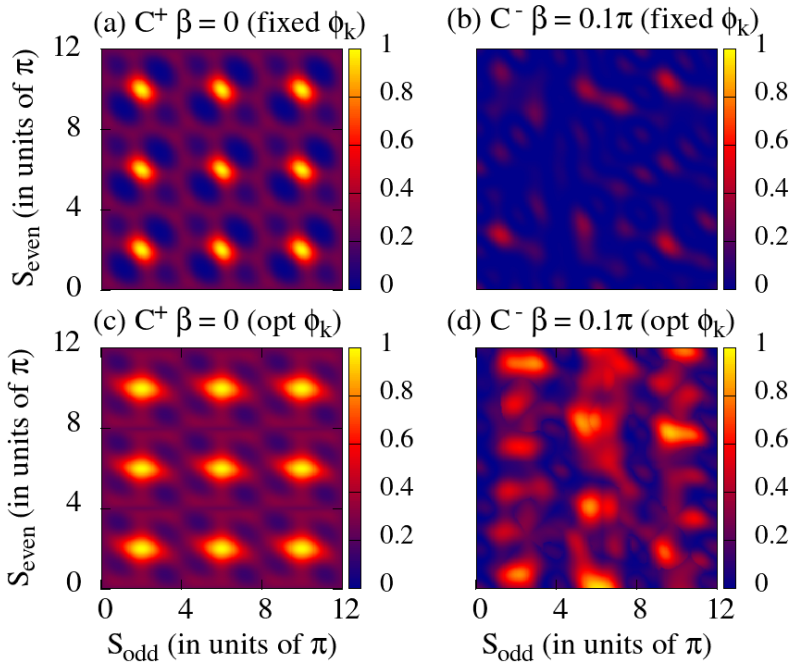


图 2。（a）对于采用双光子过程的独立量子比特，JP 对 $\mathcal{C}^+$ 量子门的保真度随以 π为单位的脉冲面积变化的关系。（b）当 $\beta = 0.10\pi$时，$\mathcal{C}^-$ 量子门的保真度。（c）和（d）展示了在针对每个脉冲面积值优化脉冲 ϕ_k 的相位后，如何提高上述情况下的保真度。

其中我们绘制了量子门保真度随脉冲面积变化的关系图。结果表明，以高保真度实现该量子门的协议集合构成一个晶格 [56]。为了更清楚地揭示最优协议集合的对称性，我们将保真度表示为奇数编号脉冲的脉冲面积之和 $S_{\text{odd}} = S_1 + S_3$ 与偶数编号脉冲的脉冲面积之和$S_{\text{even}} = S_2$的函数；在本例中，后者仅包含一个脉冲。这种保真度图表示方式在我们研究包含不同数量脉冲的脉冲序列时将更加重要。

对于由脉冲面积 $S_1 = S_3$ 和 S_2 以及重叠角$\beta = \arctan(b/\tilde{a})$定义的给定脉冲序列，可以找到使保真度最大化的相位 $\phi_k (k = 1,2,3)$，例如使用 Nelder-Mead 单纯形优化方案 [57, 58, 64, 65]。将该优化应用于 $\beta = 0$ 情况，我们在图 2(c) 中展示了所得的保真度图。尽管在 JP 中，相位优化并非获得高保真度量子门所必需，但它将解扩展到了更大的脉冲面积范围。

另一方面，我们证明了 JP 无法通过双光子跃迁制备 $\mathcal{C}^-$ 量子门。事实上，能够达到的最高保真度为 0.25，通过优化脉冲相位可提升至 0.4。

即使允许采用寻址不独立且相位固定的量子比特（我们给出了 $\phi_k = 0$ 的结果，但其他所有选择所得的保真度同样很低），SOP方案也无法实现 $\mathcal{C}^-$ 量子门，不过最高保真度略有提升。例如，采用几乎独立的量子比特时，可以获得 0.5 的保真度，这对应于 $\beta = 0.045\pi$ ($\tilde{b}^2 = 0.02$) 极小但非零的重叠。若对相位进行优化，最高保真度可达 0.994。图2(b)和(d)分别展示了 $\beta = 0.10\pi$ ($\tilde{b}^2 = 0.1$) 在相位固定和优化情况下的结果。

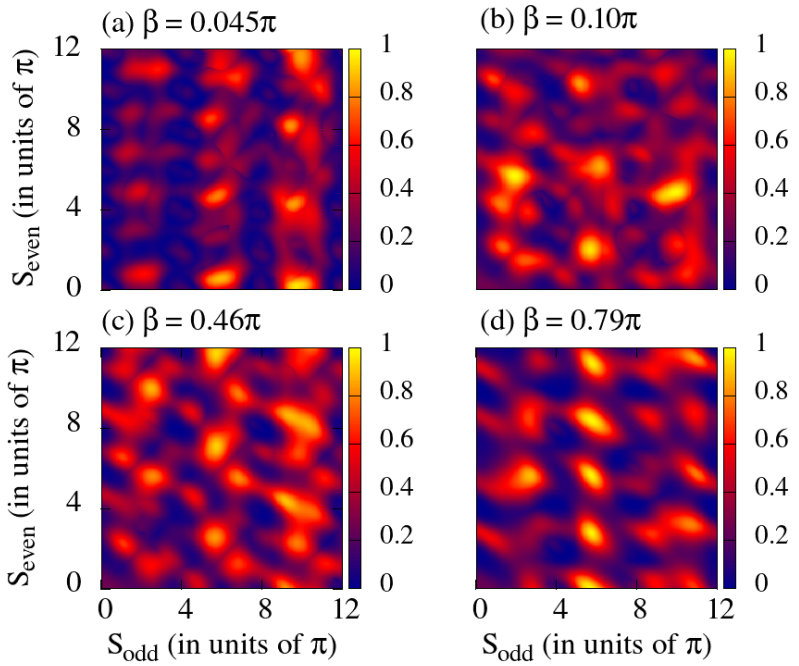


图3. 对于具有 (a) $\beta = 0.045\pi(\tilde{b}^2 = 0.02)$、(b) $\beta = 0.10\pi$ ($\tilde{b}^2 = 0.1$)、(c) $\beta = 0.46\pi$ ($\tilde{b}^2 = 0.2$) 和 (d) $\beta = 0.79\pi$ ($\tilde{b}^2 = 0.5$) 的三脉冲序列，$\mathcal{C}^+$ 量子门的保真度随脉冲面积的变化。针对每个脉冲面积值，均已优化脉冲相位 ϕ_k。

在制备 $\mathcal{C}^+$ 量子门时，SOP 的表现优于 JP。尽管最高保真度仅略有提升（对于所有测试的角度，其数值均超过 0.995），但还可以观察到，在由脉冲面积定义的参数空间中，存在更大的区域能够找到高保真度解，如不同 β 值下的图3保真度图所示。对于任意重叠角，结果都相似，这表明 SOP 适用于不同距离或不同排列方式的量子比特；这些信息编码在 β 的数值中。一旦允许改变相位，优化后，正、负 $\vec{e}_1 \pm \vec{e}_3$ 条件都会得到相同的结果。事实上，通过数值计算可以发现，对于脉冲的每个数值，都会有不同的相位组使保真度达到最大

面积或 β。如果放宽 SOP 条件（正交性和对称性），并允许优化更多参数，那么最优协议的集合将显著增加 [57, 58]。然而，与单光子 SOP 情况不同，后者的最高保真度大多低于 0.97；通过优化相位，双光子 SOP 版本的保真度通常可以超过 0.99。

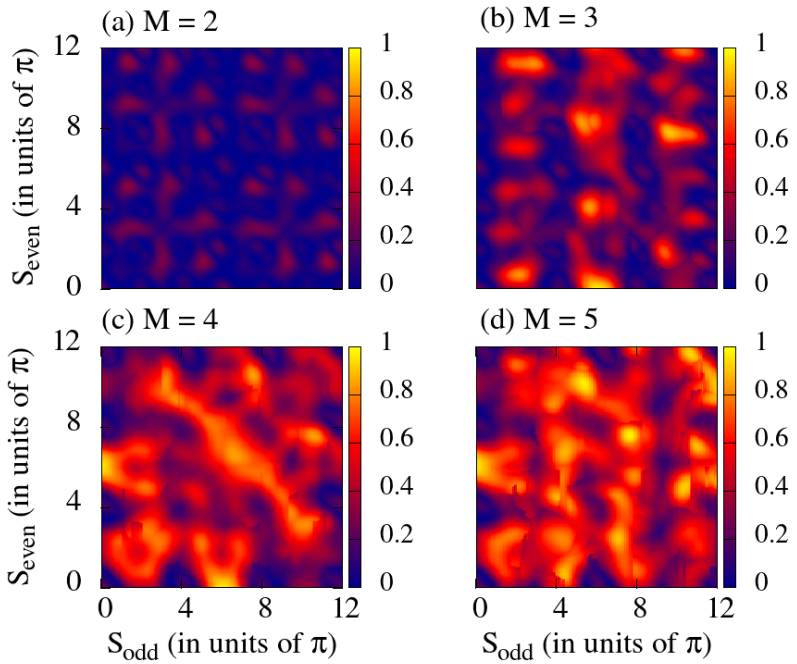


图4. $\mathcal{C}^-$ 量子门的保真度随脉冲面积的变化，所用脉冲序列包含 $\tilde{b}^2 = 0.1$ 以及(a) $M = 2$、(b) 3、(c) 4和(d) 5个脉冲。针对每个脉冲面积取值，均已优化脉冲相位 ϕ_k。

与单光子情形一样，SOP方案可以推广到任意长度的脉冲序列。这里，我们将注意力限制在高度对称的序列上。具体而言，所有奇数编号的脉冲（$k = 1$、3、.....）共享相同的参数（相位除外），所有偶数编号的脉冲（$k = 2$、4、.....）也同样共享一组参数。此外，奇数脉冲和偶数脉冲彼此正交，其含义是 $\vec{e}_k \cdot \vec{e}_{k+1} = 0$。

具体而言，对于较简单的双脉冲序列，动力学给出

$$U_{11}^V = e^{i(S_1+S_2)/2} \cos(S_1/2) \cos(S_2/2) \tag{21}$$

and

$$U_{11}^T = e^{i(\alpha_1 S_1+\alpha_2 S_2)/2} \cos\left(\alpha_1 S_1/2 + \alpha_2 S_2/2\right) . \tag{22}$$

这些条件对参数搜索的限制过于严苛。由式（21）可知，要在发生符号翻转的情况下最大化布居回归，余弦项中脉冲的面积应为 π 的偶数倍，且两者的面积相差 2π。然而，前因子 $\exp[i(S_1+S_2)/2]$ 会再次翻转相位的符号。因此，斯塔克位移与相位移相互抵消，仅通过控制两个脉冲的相位无法实现 $U_{11}^{T}\approx -1$。这对于 $\mathcal{C}^{+}$ 和 $\mathcal{C}^{-}$ 量子门以及任何纠缠门都是如此。对于不同的 β，最高可达到 0.6 的保真度。相比之下，采用 SOP 的单光子版本 [56]，双脉冲序列的保真度可接近 0.9。

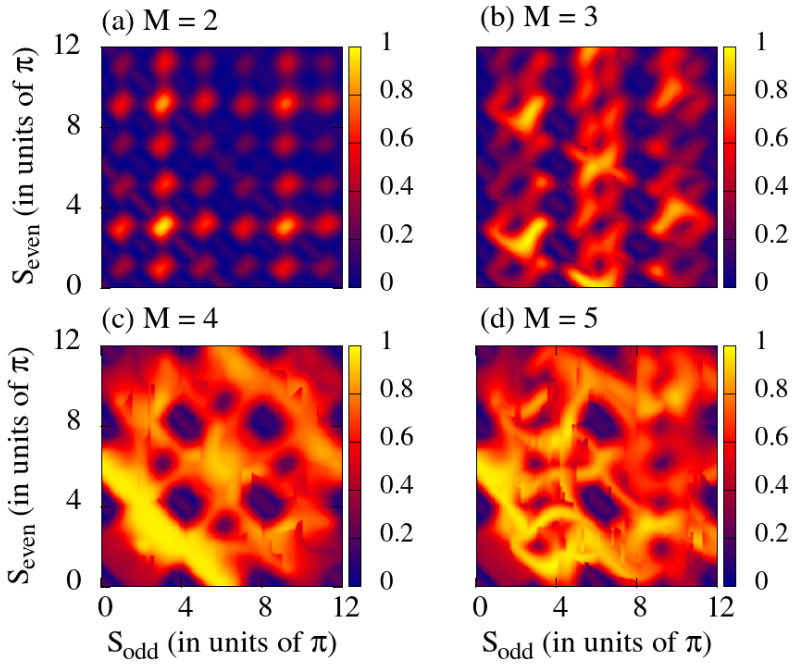


图5. 对于含 $\tilde{b}^2=0.1$ 和（a） $M=2$、（b）3、（c）4及（d）5个脉冲的脉冲序列，实施SPP方案的 $\mathcal{C}^{-}$ 量子门保真度随脉冲面积的变化。针对每个脉冲面积取值，均对脉冲相位 ϕ_k 进行了优化。

图4展示了使用 SOP 时，不同 M 脉冲序列（$M=2$ 至 5）下 $\mathcal{C}^{-}$ 量子门的保真度图，并固定 $\beta=0.10\pi$ （$\tilde{b}^2=0.1$）。对于 $\mathcal{C}^{+\tilde{}}$量子门，也能得到类似结果；不过在 $M\geq 3$ 情况下，高保真度协议的密度更高，保真度也略高。对于 $M=2$，脉冲面积为 S_{odd}, $S_{\mathrm{even}}\leq 10\pi$ （以及 $b^2=0.1$）时，观察到的最高保真度分别为：$\mathcal{C}^{+}$ 对应 0.538，$\mathcal{C}^{-}$ 对应 0.322。对于 $M=3$，我们发现 $\mathcal{C}^{+}$ 的最高保真度为 0.995，$\mathcal{C}^{-}$ 的最高保真度为 0.970。对于 $M=4$，这些数值分别提升至 $\mathcal{C}^{+}$ 的 0.999 和 $\mathcal{C}^{-}$ 的 0.982；对于 $M=5$，则分别达到 $\mathcal{C}^{+}$ 的 0.999 和 $\mathcal{C}^{-}$ 的 0.994。

若要公平比较不同方案的性能，就需要展示积分脉冲面积（所有脉冲面积之和）相同时的保真度；保真度图将其表示为 S_{odd} 和 S_{even} 的函数。总体而言，最优协议的密度随脉冲数量增加而增大，这与变分参数数量的增加相关；这些参数（脉冲的绝对相位，ϕ_k）均经过了优化。然而，图4显示，与三脉冲序列相比，四脉冲序列的亮点（即保真度极高的协议）数量相近，且显著少于五脉冲序列。正交条件限制过于苛刻，尤其是对于双脉冲序列。另一种选择是采用更简单的对称并行协议 （SPP），其中所有结构向量都相同，即 $\vec{e}_1 = \vec{e}_2 = \ldots$（相位优化后，对齐或反向对齐的构型会得到相同结果）。因此，对于双脉冲序列，

$$U_{11}^{V} = e^{i(S_1+S_2)/2}\Big(\cos(S_2/2)\cos(S_1/2) \mp e^{i(\phi_2-\phi_1)}\sin(S_2/2)\sin(S_1/2)\Big) \tag{23}$$

对于 $\phi_1 = \phi_2$，这会得到 $U_{11}^{V} = \exp[i(S_1 + S_2)/2]\cos\,[(S_2 \pm S_1)/2]$，而对于 SPP 情形，方程 [22] 仍然成立。这些条件下的最优参数必须是丢番图方程的近似解。对于任意 β 值都可以找到这些解，但通常需要更大的脉冲面积。

使用不同脉冲序列实现 $\mathcal{C}^-$ 量子门的保真度图如图5所示，其中采用了 $\tilde{b}_1^2 = 0.1$ 。我们发现，当 M =分别为 2、3、4、5 时，最大保真度分别为 0。970、0。989、0。980 和 0。996。值得注意的是，即使采用双脉冲序列，也能实现高保真度量子门。

有趣的是，当搜索范围限制为小于 10π 的脉冲面积（S_{odd} 和 S_{even}），并针对最大化 SPP方案中 $\mathcal{C}^+$ 量子门的保真度来优化参数时，所得结果明显较差。在图6中，我们展示了将面积范围扩展至 20π 后的保真度图。此时，对于偶数脉冲序列，我们发现了近乎完美的量子门（门误差小于 10^{-5}）；而对于三脉冲序列，最高保真度为 0。901。正如在 [59] 中对双脉冲序列的分析，最优协议通常沿条带排列。

尽管最高保真度的具体数值取决于 β 的选择，但显然，只有在脉冲面积较大时，SPP 在 $\mathcal{C}^+$ 量子门中的表现才更好。相反，对于较小的脉冲面积，SOP 的表现可能更好，尤其是在采用奇数脉冲序列时。无论如何，对于脉冲数较多的序列，支配动力学的参数数量足够多，因此无论采用 SOP 还是 SPP 方案，都能在高于某一阈值的几乎任意脉冲面积下实现高保真度量子门。

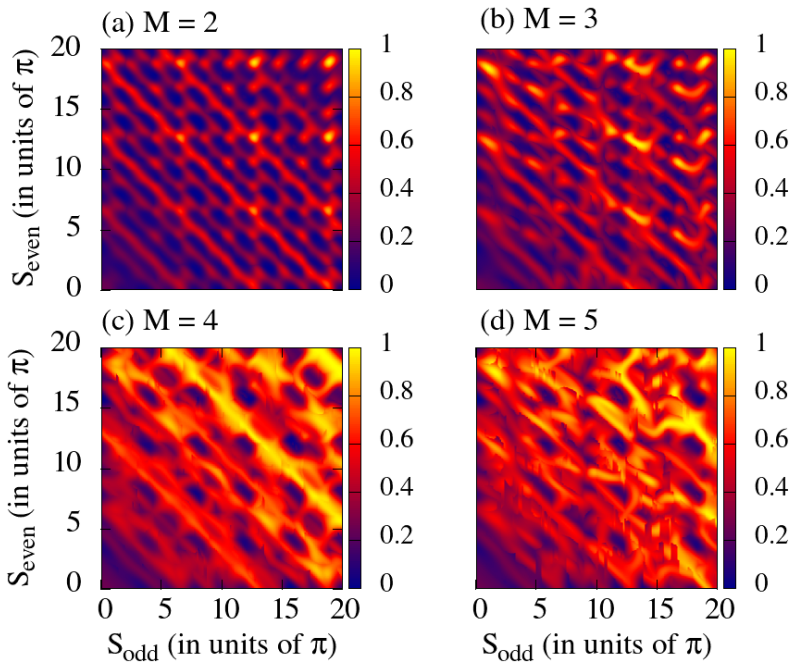


图 6. 对于包含 $\tilde{b}^2 = 0.1$ 个脉冲以及 (a) $M = 2$个、(b) 3 个、(c) 4 个和 (d) 5 个脉冲的脉冲序列，采用 SPP方案实现的 $\mathcal{C}^+$ 量子门的保真度随脉冲面积的变化关系。针对每个脉冲面积取值，均对脉冲相位 ϕ_k 进行了优化。

结论

在本研究中，我们发现，利用强里德堡阻塞机制创建高保真度双量子比特相位门时，存在一个此前被忽视的挑战。非共振双光子激发中斯塔克频移产生的动力学相位会降低门保真度。我们表明，有效双光子哈密顿量会改变系统的演化，使 Jaksch 协议 [22] 和对称正交协议 [56] 无法产生所需的 $\mathcal{C}^-$ 量子门。相反，若不进行校正，这些协议自然会产生另一种纠缠操作，即 $\mathcal{C}^+$ 量子门。

我们发现，通过控制泵浦脉冲和斯托克斯脉冲的光学相位，可以解决这一问题。调节这些相位有助于减轻有害的斯塔克位移效应，并在广泛的条件下实现高保真度纠缠相位门。由此，我们为相互作用量子比特开发了两种新协议，分别称为 SOP 和 SPP。它们的效果取决于脉冲序列的长度，这拓展了中性原子量子计算的可能性。SOP 在序列长度为奇数且优化 $\mathcal{C}^+$ 量子门时效果最佳。对于

$\mathcal{C}^-$ 量子门，SPP 在脉冲面积较小时效果更佳。使用 SPP 制备 $\mathcal{C}^+$ 量子门时，在脉冲面积较大的情况下可以实现完美保真度，尤其是在脉冲序列长度为偶数时。

尽管本工作的结果基于绝热消除的有效性，但控制光学相位可用于调整数值精确计算中的精确相位。此外，双光子里德堡激发也可以在共振条件下进行，从而限制中间态的布居数 [63]。

致谢

本研究得到资助编号 PID2021-122796NB-I00 的资助，该资助由 MI-CIU/AEI/10.13039/501100011033 和 ERDF/EU 提供资金；同时得到 MATRIX-CM 项目 TEC-2024/TEC-85、DEVCOM 陆军研究实验室合作协议编号 W911NF-24-2-0044 的资助，以及由韩国政府（MSIT）资助的电子转移中心所支持的资助编号 NRF-2021R1A5A1030054 的资助。B.Y.C. 感谢由欧盟—下一代欧盟资助的玛丽亚·萨姆布拉诺项目提供的支持。

* 通讯作者：boyoung@snu.ac.kr

[1] M. Kjaergaard, M. E. Schwartz, J. Braumüller, P. Krantz, J. I.-J. Wang, S. Gustavsson, and W. D. Oliver, 《超导量子电路：现状综述》，凝聚态物理年度评论**11**, 369 (2020).[2] R. Blatt and D. Wineland, 《囚禁原子离子的纠缠态》，《自然》（伦敦版）**453**, 1008 (2008).[3] J. L. O'Brien, 《光量子计算》，《科学》**318**, 1567 (2007).[4] F. A. Zwanenburg 等, 《硅量子电子学》，现代物理评论**85**, 961 (2013).[5] M. Saffman, T. G. Walker, and K. Mølmer, 《里德堡原子量子信息》，现代物理评论**82**, 2313 (2010).[6] F. Nogrette, H. Labuhn, S. Ravets, D. Barredo, L. Béguin, A. Vernier, T. Lahaye, and A. Browaeys, 《在具有任意几何形状的全息二维微阱阵列中囚禁单个原子》，Physical Review X**4**, 021034 (2014).[7] D. Barredo, S. de Léséleuc, V. Lienhard, T. Lahaye, and A. Browaeys, 《用于组装无缺陷任意二维原子阵列的逐原子组装器》，《科学》**354**, 1021 (2016)。

[8] J. Wilson, S. Saskin, Y. Meng, S. Ma, R. Dilip, A. Burgers, and J. Thompson, 《在光镊阵列中囚禁碱土里德堡原子》, 《物理评论快报》**128**, 033201 (2022).[9] A. P. Burgers, S. Ma, S. Saskin, J. Wilson, M.A. Alarcón, C. H. Greene, and J. D. Thompson, 《利用碱土原子光镊阵列中的离子实跃迁控制里德堡激发》, PRX Quantum**3**, 020326 (2022).[10] W. Lee, H. Kim, and J. Ahn, 《利用主动控制的光学微阱实现单个原子的三维重排》, Optics Express**24**, 9816 (2016).[11] H. Levine, A. Keesling, A. Omran, H. Bernien, S. Schwartz, A. S. Zibrov, M. Endres, M. Greiner, V. Vuleti´c, and M. D. Lukin, 《里德伯原子量子比特的高保真控制与纠缠》, 《物理评论快报》**121**, 123603 (2018).[12] Y. Zeng, P. Xu, X. He, Y. Liu, M. Liu, J. Wang, D. J. Papoular, G. V. Shlyapnikov, and M. Zhan, 《通过里德堡阻塞纠缠不同同位素的两个单个原子》, 《物理评论快报》**119**, 160502 (2017).[13] H. Jo, Y. Song, M. Kim, and J. Ahn, 《弱耦合区间中的里德堡原子纠缠》, 《物理评论快报》**124**, 033603 (2020).[14] T. Wilk, A. Gaëtan, C. Evellin, J. Wolters, Y. Miroshnychenko, P. Grangier, and A. Browaeys, 《利用里德堡阻塞实现两个单个中性原子的纠缠》, 《物理评论快报》**104**, 010502 (2010).[15] T. M. Graham, Y. Song, J. Scott, C. Poole, L. Phuttitarn, K. Jooya, P. Eichler, X. Jiang, A. Marra, B. Grinkemeyer, M. Kwon, M. Ebert, J. Cherek, M. T. Lichtman, M. Gillette, J. Gilbert, D. Bow-man, T. Ballance, C. Campbell, E. D. Dahl, O. Crawford, N. S. Blunt, B. Rogers, T. Noel, and M. Saffman, 《中性原子量子计算机上的多量子比特纠缠与算法》, 《自然》**604**, 457 (2022).[16] K. M. Maller, M. T. Lichtman, T. Xia, Y. Sun, M. J. Piotrowicz, A. W. Carr, L. Isenhower, and M. Saffman, 《中性原子量子比特二维阵列中的里德伯阻塞受控非门与纠缠》, Physical Review A**92**, 022336 (2015).[17] X. L. Zhang, L. Isenhower, A. T. Gill, T. G. Walker, and M. Saffman, 《通过里德堡阻塞确定性纠缠两个中性原子》, Physical Review A**82**, 030306 (2010).[18] C. J. Picken, R. Legaie, K. McDonnell, and J. D. Pritchard, 《利用长基态-里德伯态相干时间实现中性原子量子比特纠缠》, 《量子科学与技术》**4**, 015011 (2018)。

[19] V. S. Malinovsky 和 I. R. Sola，通过操控延迟脉冲序列的相位实现纠缠的量子控制。i, Physical Review A **70**，042304（2004年）。[20] V. S. Malinovsky 和 I. R. Sola，纠缠的量子相位控制，物理评论快报**93**，190502（2004年）。[21] V. S. Malinovsky 和 I. R. Sola，相互作用量子比特纠缠的相位控制坍缩与复苏，物理评论快报**96**，050502（2006年）。[22] D. Jaksch、J. I. Cirac、P. Zoller、S. L. Rolston、R. Côté 和 M. D. Lukin，中性原子的快速量子门，物理评论快报**85**，2208（2000）。[23] L. Isenhower、M. Saffman 和 K. Mølmer，通过里德堡阻塞实现多比特量子门，量子信息处理**10**，755（2011年）。[24] M. D. Lukin、M. Fleischhauer、R. Cote、L. M. Duan、D. Jaksch、J. I. Cirac 和 P. Zoller，介观原子系综中的偶极阻塞与量子信息处理，物理评论快报**87**，037901（2001年）。[25] H. Levine、A. Keesling、G. Semeghini、A. Omran、T. T. Wang、S. Ebadi、H. Bernien、M. Greiner、V. Vuleti´c、H. Pichler 和 M. D. Lukin，中性原子高保真多量子比特门的并行实现，物理评论快报**123**，170503（2019年）。[26] S. R. Cohen 和 J. D. Thompson，利用圆轨道里德堡原子进行量子计算，PRX Quantum**2**，030322（2021）。[27] X.-F. Shi，中性里德堡原子的量子逻辑与纠缠：方法与保真度，《量子科学与技术》**7**，023002（2022年）。[28] X.-F. Shi，通过中性原子的里德堡阻塞实现 Deutsch、Toffoli 和受控非门，物理评论应用**9**，051001（2018年）。[29] D. Paredes-Barato 和 C. S. Adams，利用里德堡门进行全光量子信息处理，物理评论快报**112**，040501（2014年）。[30] C. S. Adams、J. D. Pritchard 和 J. P.Shaffer，里德堡原子量子技术，《物理学杂志B：原子、分子与光学物理》**53**，012002（2019年）。[31] V. S. Malinovsky、I. R. Sola 和 J. Vala，相位控制的双量子比特量子门，Physical Review A**89**，032301（2014年）。[32] M. H. Goerz、T. Calarco 和 C. P. Koch，囚禁中性原子最优受控相位门的量子速度极限，《物理学杂志B：原子、分子与光学物理》**44**，154011（2011年）。

[33] M. Morgado 和 S. Whitlock，利用里德堡相互作用量子比特进行量子模拟与计算，AVS Quantum Science**3**，023501（2021）。[34] J. T. Young、P. Bienias、R. Belyansky、A. M. Kaufman 和 A. V. Gorshkov，通过偶极-偶极相互作用实现非对称阻塞与多量子比特门，物理评论快报**127**，120501（2021）。[35] M. Saffman、I. I. Beterov、A. Dalal、E. J. Páez 和 B. C. Sanders，利用绝热脉冲实现对称里德堡受控-z门，Physical Review A**101**，062309（2020）。[36] C. Zhang、F. Pokorny、W. Li、G. Higgins、A. Pöschl、I.Lesanovsky 和 M. Hennrich，通过里德堡相互作用实现囚禁离子之间的亚微秒纠缠门，《自然》**580**，345（2020）。[37] M. Khazali 和 K. Mølmer，通过里德堡原子与超导电路的相互作用激发态流形中的绝热演化实现快速多量子比特门，Physical Review X**10**，021054（2020）。[38] M. Khazali，通过单步里德堡阻塞门实现全光量子信息处理，Optics Express**31**，13970（2023）。[39] L. Zhang、V. Walther、K. Mølmer 和 T. Pohl，里德堡原子阵列中的光子-光子相互作用，Quantum**6**，674（2022年）。[40] S. E. Anderson、K. C. Younge 和 G. Raithel，在光学晶格中囚禁里德堡原子，物理评论快报**107**，263001（2011年）。[41] E. Crane、A. Schuckert、N. H. Le 和 A. J. Fisher，硅中的里德堡纠缠门，Physical Review Research**3**，033086（2021）。[42] I. H. Deutsch、G. K. Brennen 和 P. S. Jessen，在光学晶格中的中性原子上进行量子计算，Fortschritte der Physik**48**，925（2000）。[43] J. Mompart、K. Eckert、W. Ertmer、G. Birkl 和 M. Lewenstein，利用空间离域量子比特进行量子计算，物理评论快报**90**，147901（2003）。[44] M. Saffman 和 T. G. Walker，基于光学囚禁里德堡原子的偶极-偶极相互作用的量子逻辑器件分析，Physical Review A**72**，022347（2005）。[45] L. Isenhower、E. Urban、X. L. Zhang、A. T. Gill、T. Henage、T. A. Johnson、T. G. Walker 和 M. Saffman，中性原子受控非量子门的演示，物理评论快报**104**，010503（2010）。[46] A. Browaeys 和 T. Lahaye，利用单独控制的里德堡原子研究多体物理，《自然·物理》**16**，132（2020）。[47] M. Endres 等，逐原子组装无缺陷一维冷原子阵列，《科学》**354**，1024（2016）。

[48] H. Kim、W. Lee、H.-g. Lee、H. Jo、Y. Song 和 J. Anh，利用动态全息光镊进行原位单原子阵列合成，《自然·通讯》**7**，13317（2016）。[49] I. S. Madjarov 等，碱土里德堡原子的高保真纠缠与探测，《自然·物理》**16**，857（2020）。[50] T. M. Graham等，二维中性原子量子比特阵列中的里德堡介导纠缠，物理评论快报**123**，230501（2019）。[51] S. C. Carrasco、J. Chathanathil、S. A. Malinovskaya、I. Sola 和 V. S. Malinovsky，通过动态布居抑制实现单操作里德堡相位门（2025），arXiv:2512.07656 [quant-ph].[52] D. C. Cole、V. Buchemmavari 和 M. Saffman，用于长程纠缠的非对称快速里德堡门协议（ 2025 ），arXiv:2512.22767 [quant-ph].[53] M. H. Goerz、D. M. Reich 和 C. P. Koch，耗散演化下幺正操作的最优控制理论，《新物理学杂志》**16**，055012（2014）。[54] M. H. Goerz、E. J. Halperin、J. M. Aytac、C. P. Koch 和 K. B. Whaley，具备单点寻址能力的高保真里德堡门的鲁棒性，Physical Review A **90**，032329（2014）。[55] S. Jandura 和 G. Pupillo，里德堡原子的时间最优双量子比特门和三量子比特门，Quantum **6**，712（2022）。[56] I. R. Sola、V. S. Malinovsky、J. Ahn、S. Shin 和 B. Y. Chang，双量子比特原子门：里德堡相互作用的时空控制，《纳米尺度》**15**，4325（2023）。[57] I. R. Sola、S. Shin 和 B. Y. Chang，寻找、映射和分类双量子比特纠缠门的最优协议，Physical Review A **108**，032620（2023）。[58] I. R. Sola、S. Shin 和 B. Y. Chang，N量子比特原子系统中纠缠门的最优协议，《AIP进展》**13**，115102（2023）。[59] I. R. Sola、S. Shin 和 B. Y. Chang，采用最短脉冲序列的双量子比特量子门，Physical Review A**109**，052603（2024）。[60] A. Gaëtan、Y. Miroshnychenko、T. Wilk、A. Chotia、M. Viteau、D. Comparat、P. Pillet、A. Browaeys 和 P. Grangier，里德堡阻塞区内两个单个原子的集体激发观测，《自然·物理》**5**，115（2009）。[61] K. Mø lmer 和 A. S. Sø rensen，中性原子的门操作：时变交流斯塔克频移，Physical Review A **77**，062301（2008）。[62] D. Petrosyan、F. Motzoi、M. Saffman 和 K. Mø lmer，里德堡原子中的电磁诱导透明与非线性光学，Physical Review A **96**，042306（2017）。

[63] S. C. Carrasco、S. Lourette、I. Sola 和 V. S. Malinovsky，动态增强双光子光谱学，物理评论快报**134**，163601（2025）。[64] J. A. Nelder 和 R. Mead，函数最小化的单纯形法，《计算机杂志》**7**，308（1965）。[65] M. J. D. Powell，用于优化计算的直接搜索算法，《数值分析年鉴》**7**，287（1998）。