arXiv:2601.01524v1 [quant-ph] 4 Jan 2026

具有点隙的非厄米二阶拓扑绝缘体

Xue-Min Yang，[1,2,3,4] Hao Lin，[5] Jian Li，[1,2,3,4] Jia-Ji Zhu，[1,2,3,4] Jun-Li Zhu，[6] 以及 Hong Wu [1,3,4,*]

[1] *School of Electronic Science and Engineering, Chongqing Universityof Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China* [2] *Chongqing Key Laboratory of Dedicated Quantum Computing and Quantum Artificial Intelligence, Chongqing 400065, China* [3] *Key Laboratory of Quantum Artificial Intelligence and New Materials, Chongqing* [4] *Institute for Advanced Sciences, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China*

[5] *School Of Cyber Security and Information Law, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China* [6] *School of Mathematics and Statistics, Chongqing University of Posts and Telecommunications.*

二维非厄米 Su-Schrieffer-Heeger 模型能隙中的零模角态，对于保持手征对称性的无穷小扰动具有鲁棒性。然而，我们证明，在大尺寸系统中，这一普遍认识不再成立。为揭示非厄米系统的高阶拓扑，我们在热力学极限下建立了稳定零模奇异态与能谱中拓扑保护角态之间的对应关系。在这一框架下，零模奇异值的数量与隙中角态的数量直接相关。可以定义实空间中的绕数，以计算稳定零模奇异态的数量。我们的研究为静态和 Floquet 非厄米系统建立了体边对应，其中拓扑源于非厄米性本身，即使不存在对称性也依然如此。

引言。 拓扑相因其在功能器件中的潜在应用而受到广泛关注，并得到了迅速发展[1–4]。此类拓扑相的核心特征是在能隙中存在受保护的边缘态 [1]。这一性质可由系统的对称性和能隙在拓扑上加以保护。根据体边对应原理，可以定义拓扑不变量来计算边界态的数量 [5]。

近年来，拓扑绝缘体的研究已拓展至高阶情形 [6–11]。第 d阶的n 维高阶拓扑绝缘体具有 $d-n$ 维边界态，例如角态或铰链态 [12–16]。这类相受晶体对称性保护，并已在光子晶体薄板 [17], 、波导阵列 [18]、电路 [19], 、声子晶体 [20], 和超冷原子 [21]中实现。另一方面，非厄米拓扑相也引起了广泛关注 [22–34]。这类系统的一个典型特征是趋肤效应，大量体态局域在边缘 [35–37]。因此，边缘态不再能由体能带的拓扑性质刻画，这表明体边对应失效[38]。通过以广义布里渊区取代布里渊区，可以构造基于非布洛赫哈密顿量的拓扑不变量，从而准确描述边缘态的数量 [39–41]。

高阶拓扑与非厄米系统的结合催生了非厄米高阶拓扑绝缘体 [42–44]。这些相中的体边对应也得到了研究。然而，在开放边界条件下，能谱对扰动极为敏感，即使扰动保持对称性也不例外 [45–47]。因此，揭示非厄米高阶拓扑仍然是一个难题。

在本研究中，我们系统地研究了静态和周期驱动的二阶拓扑绝缘体。鉴于有限尺寸系统中能谱的不稳定性，我们建立了稳定零模奇异态的数量与热力学极限能量处受保护的拓扑角态数量之间的对应关系。热力学极限下角态的数量由新的拓扑数决定，而非由非布洛赫拓扑数决定。我们的研究为探索新颖的非厄米拓扑相提供了一条有望的新途径。

体-边对应关系模型与失效。我们考虑一个二维（2D）非厄米 Su-Schrieffer-Heeger（SSH）模型，如图所1示，其中 x 和 y 方向均由一维非厄米 SSH 链构成 [48]。非厄米性源于两个方向上的非对称胞内跃迁。该模型形成一个具有 4 个格点晶胞的超晶格，其结构基于张量积；其中每个晶胞都可以视为沿 x 和 y 方向的一维二聚体的张量积，自然支持高阶拓扑角态。布洛赫哈密顿量为

$$H_{2D}(k_x,k_y)=H_x(k_x)\otimes\mathbb{I}_2+\mathbb{I}_2\otimes H_y(k_y), \tag{1}$$

其中每个一维块由下式给出

$$\begin{aligned} H_\alpha(k_\alpha) &= \mathbf{h}_\alpha(k_\alpha)\cdot\boldsymbol{\sigma} \\ &= (w_\alpha+v_\alpha\cos k_\alpha)\sigma_x+(v_\alpha\sin k_\alpha+i\gamma_\alpha/2)\sigma_y, \end{aligned} \tag{2}$$

对于 $\alpha=x,y$，其中 v_α (w_α) 表示胞间（胞内）跃迁振幅，而 γ_α 量化了

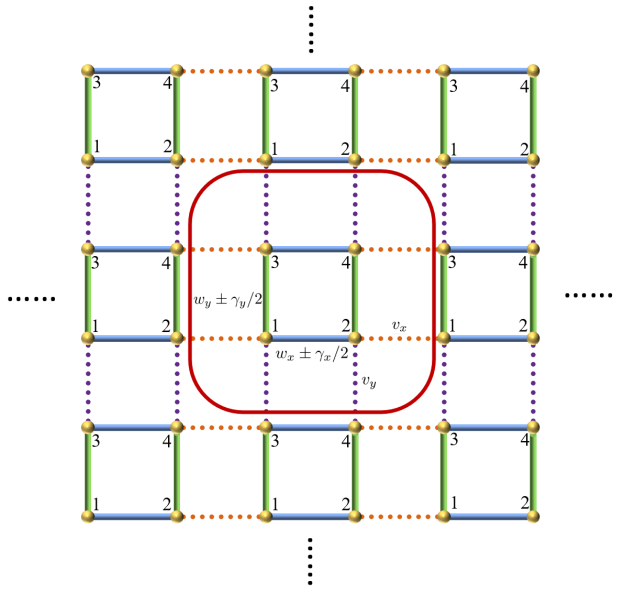


图 1. 正方晶格上的二维非厄米 Su-Schrieffer-Heeger 模型示意图。方框表示晶胞。

非厄米不对称性的程度。$\sigma_{x,y}$ 是泡利矩阵，$\mathbb{I}_2$ 是 2×2 单位矩阵。

该模型的本征值可精确确定为 $E = \varepsilon_x(k_x) + \varepsilon_y(k_y)$，其中 $\varepsilon_\alpha(k_\alpha) = \pm\sqrt{(w_\alpha + v_\alpha\cos k_\alpha)^2 + (v_\alpha \sin k_\alpha + i\gamma_\alpha/2)^2}$。二维本征态 $|\psi\rangle_{2D} = |\psi_{k_x}\rangle \otimes |\psi_{k_y}\rangle$ 是二维本征态的张量积，其中 $H_\alpha(k_\alpha)|\psi_{k_\alpha}\rangle = \varepsilon_\alpha(k_\alpha)|\psi_{k_\alpha}\rangle$。二维拓扑不变量 $\mathcal{V}_{2D} = \mathcal{V}_x\mathcal{V}_y$ 完全由两个相互独立的一维绕数决定:

$$\mathcal{V}_\alpha = \frac{1}{2\pi}\frac{[\arg h_\alpha^+ - \arg h_\alpha^-]_{C_{\tilde{k}}}}{2} \in \{0,1\}, \tag{3}$$

其中 $h_\alpha^\pm = h_\alpha^x \pm i h_\alpha^y$ 和 $[\arg\, h_\alpha^\pm]_{C_{\tilde{k}}}$ 分别是 $h_\alpha^\pm$ 沿广义布里渊区（GBZ）$C_{\tilde{k}}$逆时针绕行时 $\tilde{k}$ 的相位变化。将k_x，k_y替换为 $k_x - i\ln\sqrt{\left|\frac{w_x-\gamma_x/2}{w_x+\gamma_x/2}\right|}$，$k_y - i\ln\sqrt{\left|\frac{w_y-\gamma_y/2}{w_y+\gamma_y/2}\right|}$，即可得到 GBZ。当$\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_y = 1$时，恰好出现具有四个受保护角态的高阶拓扑相。该模型是研究非厄米高阶拓扑的标准模型之一。

如图2(a) 所示，当 $|v_x| > 0.75$时，开放边界下最小 $|E|$ (Min$[|E|]$) 等于 0，这是拓扑保护角态的直接标志。与此同时，体绕数 $\mathcal{V}_{2D}$在相同的临界点跃变为 1，证实体拓扑不变量能够准确预测边界现象。这体现了高阶非厄米系统中的体边对应。然而，这种非厄米系统中的体边对应对微扰极为敏感。如图2(b) 所示，即使

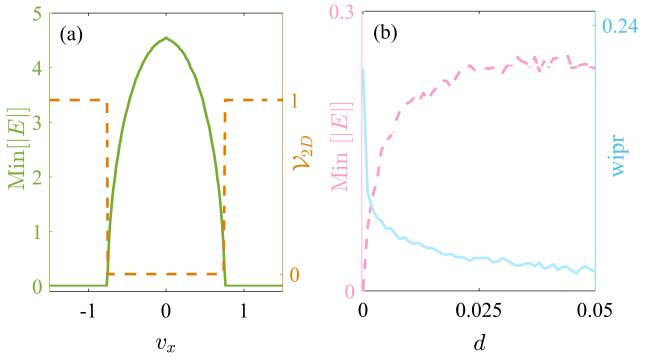


图 2. (a) 开放边界条件下能量本征值的最小模值 Min$[|E|]$ 随水平胞间跃迁振幅 v_x 的变化（绿色实线）。橙色虚线表示对应的绕数 $\mathcal{V}_{2D}$。系统尺寸为 1000×1000 个晶格点，参数为 $w_x = 1$、$\gamma_x = 1.5$、$w_y = 0$、$\gamma_y = 9$ 和 $v_y = 6v_x$。当 $|v_x| > 0.75$ 时，系统进入高阶拓扑相，其特征是 Min $[|E|] \to 0$，表明拓扑保护角态的出现。(b) 最小能量模值（粉色虚线）和加权逆参与比（wipr，天蓝色实线）随无序强度 d 的变化。系统尺寸为 60×60，固定参数为 $v_x = -1.5$、$w_x = 1$、$\gamma_x = 1.5$、$w_y = 0$ $\gamma_y = 9$ $v_y = -9$ 和。

在保持手征对称性的弱微扰下，这种对应关系仍可能失效。我们加入微扰项

$$\Delta H = \Delta H_x \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \Delta H_y, \tag{4}$$

其中 $\Delta H_\alpha = d\left(\kappa_{ij}a_i^\dagger b_j + \kappa_{ji}b_j^\dagger a_i\right)$，其中 $a_i\,(b_j)$ 分别是 i（j）号晶胞中 x- 或 y- 方向上子晶格 A（B）上的湮灭算符，而 κ_{ij}，$\kappa_{ji} \in [-0.5, 0.5]$ 是模拟强度为 d 的无序的随机变量。这里，$\Gamma\Delta H\Gamma^{-1} = -\Delta H$，其中 Γ表示实空间中的手征算符。即使无序强度很小，Min$[|E|]$也可能显著偏离零（图 2（b）中的粉色虚线）。为进一步观察这一现象，我们引入加权逆参与比（wipr），而非非厄米系统中的逆参与比，来描述趋肤效应。这里，wipr 定义为

$$\text{wipr} = \sum_{n,x,y}\frac{|\psi_{n,x,y}|^4}{4L_xL_y}\sqrt{\left(x-\frac{L_x}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{L_y}{2}\right)^2}, \tag{5}$$

其中 x，y 是 x- 和 y- 方向上的晶格格点索引，而 L_x (L_y) 是 x (y)- 方向上的链长。它表征波函数局域于边界的程度。如图2(b) 所示，wipr（天蓝色实线）随无序强度 d急剧下降，表明趋肤效应对微扰高度敏感。因此，大尺寸系统中的能谱不稳定。为了

解释这一点，我们引入条件数

$$\kappa = ||\Sigma||_2||\Sigma^{-1}||_2, \tag{6}$$

其中 $||\Sigma||_2$ 是 Σ 的 2-范数，且 Σ 是哈密顿量 [47]的本征矢量矩阵。对于图2(b) 中的参数，$\kappa = 2.93\times10^9 \gg 1$ 表明哈密顿量在某种意义上远离正规矩阵。因此，该非厄米系统的本征值对微扰 [47]高度敏感。以上结果表明，即便手征对称性得到保持，足够弱的微扰也能摧毁零模，这证明这些角态缺乏拓扑保护。在此参数区间内，非布洛赫体不变量无法可靠地预测边界态的存在与性质，表明体边对应已失效。

通过奇异值谱恢复体边对应。 鉴于基于广义布里渊区的传统拓扑不变量无法准确预测边界现象，我们提出一种利用哈密顿量奇异值谱的方法，以恢复体边对应。我们建立了非厄米系统$H_{2D} = USV^\dagger$ [49] 的奇异值分解（SVD）与热力学极限下能谱中零模角态出现之间的严格联系。将 V (U) 的列向量记为 v_n (u_n)，并将 S 对角线上的奇异值记为 s_n，可得

$$H_{2D}^\dagger H_{2D} v_n = s_n^2 v_n. \tag{7}$$

and

$$H_{2D} v_n = s_n u_n. \tag{8}$$

当 $s_n \to 0$在热力学极限下，系统支持波函数为 v_n的零模态。如图3(a) 所示，在干净（$d = 0$）和弱无序（$d = 0.05$）条件下，二维非厄米 SSH 模型的最小奇异值（Min$[s]$）在某些区域内非常小。图3(b) 展示了这种 Min$[s]$ 会随着系统尺寸 L_x 或 L_y的增加而呈指数衰减，从而证实了热力学极限下的零模奇异值。此外，这些态都是角态（图3(b) 的插图显示了其中一个零模态的概率分布）。这表明，H_{2D} 的相应本征态也局域在系统的角落。由于 H_{2D} 的奇异值是厄米算符 $H_{2D}^\dagger H_{2D}$本征值的平方根，因此它们始终为实数、非负，并且在弱微扰下非常稳定[50]。因此，Min$[s]$对无序强度和系统尺寸不敏感，这是将其用作稳定指标以识别角态的关键特性。

如果非厄米系统 H_{2D} 在$E = 0$处具有点隙，我们可以通过手征对称厄米矩阵 [51]定义一个拓扑不变量

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & H_{2D} \\ H_{2D}^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

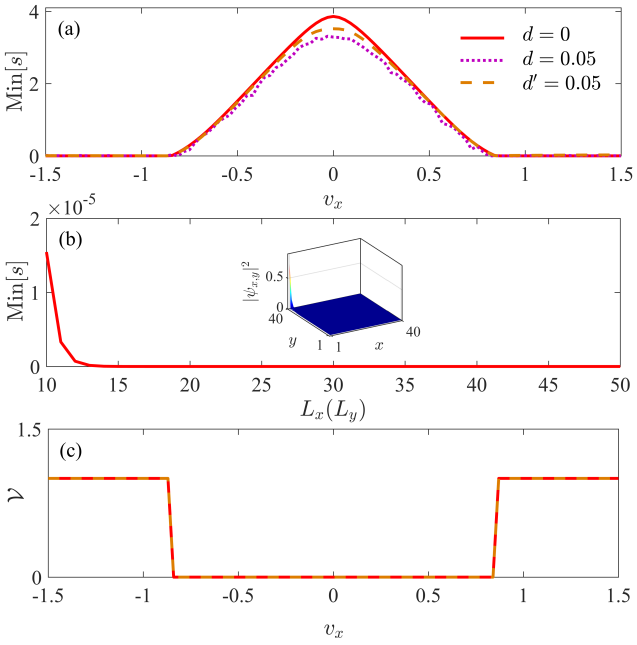


图 3. (a) 二维非厄米 SSH 模型的最小奇异值（Min$[s]$）随水平胞间跃迁振幅 v_x 的变化。红色实线对应洁净系统（$d = 0$），洋红色虚线表示存在强度为 $d = 0.05$且保持亚晶格对称性的弱无序时的结果；橙色虚线表示 H_x 和 H_y 均受到强度为 $d' = 0.05$ 的完全随机且破坏对称性的无序扰动时的情况。值得注意的是，Min$[s]$ 的零模依然存在，表明体边对应仍然成立。(b) 随着系统尺寸增大，最小奇异值呈指数衰减，无论沿 x 方向还是 y 方向（L_x 或 L_y）均如此，这证实了它与零模的对应关系。插图展示了相关角态的空间概率分布 $|\psi_{x,\ y}|^2$，该角态局域于系统的角点。(c) 体哈密顿量的绕数 $\mathcal{V}$ 随 v_x 的变化。在 (a) 和 (c) 图中，系统尺寸为 $L_x = L_y = 40$；所有图的参数相同：$w_x = 1$、$w_y = 0$、$\gamma_x = 1.5$、$\gamma_y = 9$ $v_y = 6v_x$ ，以及 。

其本征值为 $\pm s_n$，其中 s_n 表示 H_{2D}的奇-˜异值。绕数 $\mathcal{V}$ of H，计算为

$$\mathcal{V} = \frac{1}{4\pi i}\mathrm{Tr}\ln(P^A P^{B\dagger}), \tag{10}$$

其中 $P^A = U^\dagger P U$、$P^B = V^\dagger P V$ 和

$$P = \mathrm{Diag}[e^{\frac{-i2\pi\times1\times1}{L_xL_y}}, e^{\frac{-i2\pi\times1\times2}{L_xL_y}}, ...e^{\frac{-i2\pi\times L_xL_y}{L_xL_y}}]\otimes\mathbb{I}_2. \tag{11}$$

如图3(c) 所示，$\mathcal{V}$ 从 0 跳变到 1 的位置恰好与 Min$[s]$变为零的位置重合。零模奇异值的总数等于 $2\mathcal{V}$，这直接对应于

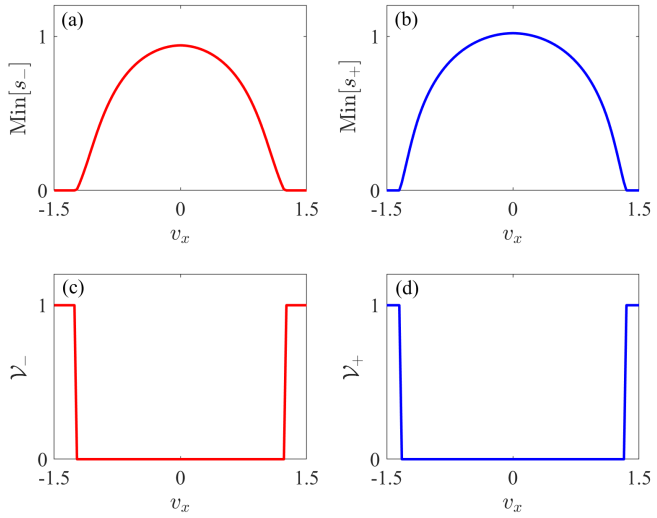


图 4. (a-b) 最小奇异值 Min$[s_\mp]$ ： (a) $U(T)-\mathbb{I}$和 (b) $U(T)+\mathbb{I}$随水平向胞间跃迁振幅 v_x变化的函数关系。(a) 和 (b) 中的零模奇异值分别表明存在拓扑 0 模态和 π 模态态。(c-d) 相应的拓扑不变量 $\mathcal{V}_-$ 和 $\mathcal{V}_+$ 随 v_x变化的函数关系，它们刻画了 0 准能和 π 准能拓扑相。参数：系统尺寸 $L_x = L_y = 40$； $w_x = 1$、 $w_y = 0$、 $\gamma_x = 1.5$、 $\gamma_y = 10.5$、 $v_y = 7v_x$ ； 完整驱动周期 $T = 0.6$、每个周期内第一阶段的持续时间 $T_1 = 0.3$, 以及第二阶段与第一阶段之间的强度比因子 $q_x = q_y = 0.2$。

热力学极限下能谱中拓扑保护角态的数量。

为进一步检验我们体边对应的鲁棒性，我们向哈密顿量中引入完全随机且破坏对称性的弱无序 $\triangle H' = \Delta H'_x \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \Delta H'_y$。矩阵$\triangle H'_\alpha$ 中的每个元素均从区间 $[-d', d']$中独立且均匀地抽取。值得注意的是，尽管引入了完全随机且破坏对称性的无序，体边对应仍然保持不变。如图3(a) 所示，最小奇异值 Min$[s]$ ia 在拓扑非平庸区中也等于零，且零模奇异值的数量与体绕数完全一致 $2\mathcal{V}$。这表明，基于奇异值的拓扑表征能够抵御微扰；这些微扰原本会破坏传统的体边对应。因此，即使不存在手征对称性，我们的框架仍为识别非厄米系统中的拓扑边界态提供了一种稳定可靠的方法。

扩展至 *Floquet* 非厄米系统。用于建立静态系统中体边对应的方法，可以推广至周期驱动非厄米系统。我们考虑一个跃迁振幅随时间周期变化的 Floquet 二维非厄米 SSH 模型：

：

$$v_\alpha(t) = \begin{cases} f_\alpha, & t \in [mT, mT + T_1) \\ q_\alpha f_\alpha, & t \in [mT + T_1, (m+1)T) \end{cases}, \tag{12}$$

其中 T 为驱动周期， $m \in \mathbb{Z}$、 T_1 为第一段的持续时间，而 q_α 控制不同时间段之间的振幅比。该系统没有定义良好的能谱。根据Floquet定理，单周期演化算符 $U(T) = \mathbb{T}e^{-i\int_0^T H_{(t)}dt}$ 可用于定义有效哈密顿量

$$H_{\text{eff}} = \frac{i}{T}\ln[U(T)] = H_{\text{eff},x} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes H_{\text{eff},y}, \tag{13}$$

其中

$$H_{\text{eff},\alpha} = \frac{i}{T}\ln[e^{-iH_2(k_\alpha)T_2}e^{-iH_1(k_\alpha)T_1}] \ (\alpha = x, y), \tag{14}$$

以及 $T_2 = T - T_1$。有效哈密顿量 H_{eff}的本征值位于 $\varepsilon_j \in [-\pi/T, \pi/T]$ 上，构成系统的准能谱[52]。周期驱动系统的拓扑相由此类准能谱定义 [52–58]。

为刻画这一情形下的拓扑，我们引入两个辅助算符: $U(T)-\mathbb{I}$ 和 $U(T)+\mathbb{I}$，它们的奇异值可直接探测 0 模和 π 模态的存在。如图 4(a,b) 所示，这些算符的最小奇异值 Min$[s_\mp]U(T) \mp \mathbb{I}$等于零，表明在开放边界条件下出现了受拓扑保护的 0 模和 π 模态。至关重要的是，与复准能谱不同，这些奇异值对无序具有鲁棒性，且不受边界条件影响，这是其在实际表征中的一项关键优势。

我们进一步基于以下对象的绕数定义两个拓扑不变量, $\mathcal{V}_+$ 和$\mathcal{V}_-$:

$$\tilde{H}'_\pm = \begin{pmatrix} 0 & U(T) \pm \mathbb{I} \\ U(T)^\dagger \pm \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

其计算方式为

$$\mathcal{V}_\pm = \frac{1}{4\pi i}\text{Tr}\ln(P^A_\pm P^{B\dagger}_\pm), \tag{16}$$

其中 $U(T) \pm \mathbb{I} = U_\pm S'_\pm V^\dagger_\pm$， $P^A_\pm = U^\dagger_\pm P U_\pm$, $P^B_\pm = V^\dagger_\pm P V_\pm$，且 P定义见式（11）。如图 4(c,d) 所示，零模奇异值可以由拓扑不变量很好地表征。零模奇异值的数量等于 $2\mathcal{V}_-$ （对于 0 模）和 $2\mathcal{V}_+$ （对于 π 模），从而直接计数拓扑保护的角态。通过分析由 ˜导出的简单厄米算符的奇异值谱 $H'_\pm$ $U(T)$，我们获得了一种分类 Floquet 拓扑相的新方法。

讨论与结论。总之，我们研究了静态和 Floquet

非厄米 SSH 模型的高阶拓扑。借助奇异值谱，我们证明，即使不存在手征对称性，在热力学极限下，零模奇异值也能可靠地表明能谱中受拓扑保护的角态的出现。实空间中的绕数可用于计数稳定零模奇异态的数目。我们建立了一个统一框架，用以在静态和 Floquet 系统中恢复非厄米高阶拓扑相的体边对应。

近年来，非厄米哈密顿量已在光子量子行走中实现 [59]，光子准晶 [60]，冷里德堡量子气体 [61]，和波导 [62]。弗洛凯高阶拓扑相已在声学晶格中观察到 [63] 以及里德堡原子中 [64]。基于这些进展，我们认为我们的方法在实验上是可行的。

致谢。本工作得到国家自然科学基金（项目编号：12405007 和 NO. 12305011）、重庆市教育委员会青年科学家基金（项目编号：KJQN202400603 和 N0. KJQN202500619）、重庆市自然科学基金（项目编号：CSTB2025NSCQ-GPX1265、No. CSTB2022NSCQ-MSX0316、CSTB2024NSCQ-MSX0736 和 CSTB2025NSCQ-GPX1315）以及重庆市自然科学基金项目（项目编号：CSTB2025NSCQ-LZX0142）的资助。

* 通讯作者：wuh@cqupt.edu.cn

[1] M. Z. Hasan 和 C. L. Kane，《综述：拓扑绝缘体》，《现代物理学评论》82，3045（2010）。[2] T. Ozawa、H. M. Price、A. Amo、N. Goldman、M. Hafezi、L. Lu、M. C. Rechtsman、D. Schuster、J. Simon、O. Zil- berberg 和 I. Carusotto，《拓扑光子学》，《现代物理学评论》91，015006（2019）。[3] N. R. Cooper、J. Dalibard 和 I. B. Spielman，《超冷原子的拓扑能带》，《现代物理学评论》91，015005 2019（）。[4] B. Q. Lv 、 T. Qian 和 H. Ding，《三维拓扑半金属的实验视角》，《现代物理学评论》93，025002（2021）。[5] C.-K. Chiu、J. C. Y. Teo、A. P. Schnyder 和 S. Ryu，《具有对称性的拓扑量子物质分类》，《现代物理学评论》88，035005（2016）。[6] W. A. Benalcazar、B. A. Bernevig 和 T. L. Hughes，《量子化电多极绝缘体》，《科学》357，61 66 2017年–（）。[7] F. Liu 和 K. Wakabayashi，《具有零贝里曲率的新型拓扑相》，《Physical Review Letters》118，076803（2017）。[8] M. Ezawa，《二阶拓扑绝缘体与拓扑晶体绝缘体之间的拓扑转换》，《Physical Review Letters》121，116801（2018）。[9] J.-H. Wang、Y.-B. Yang、N. Dai 和 Y. Xu，《结构—无序诱导的三维二阶拓扑绝缘体》，《Physical Review Letters》126，206404（2021）。[10] L. Trifunovic 和 P. W. Brouwer，《拓扑晶体相的高阶体—边界对应》，《Physical Review X》9，011012（2019）。[11] R. Chen、C.-Z. Chen、J.-H. Gao、B. Zhou 和 D.-H. Xu，《准晶中的高阶拓扑绝缘体》，《Physical Review Letters》124，036803（2020）。[12] F. Schindler、A. M. Cook、M. G. Vergniory、Z. Wang、S. S. P. Parkin、B. A. Bernevig 和 T. Neupert，《高阶拓扑绝缘体》，Science Advances 4，eaat0346（2018）。[13] C. Chen、L. Qi、Y. Xing、W.-X. Cui、S. Zhang 和 H.-F. Wang，《具有平带的二维非对角 Aubry–Andr´e–Harper 模型中的一般有界角态》，New Journal of Physics 23，123008（2021）。[14] Z. Xiong、Y. Liu、Z.-K. Lin、Z.-L. Kong 和 J.-H. Jiang，《三带高阶拓扑绝缘体》，Physical Review Applied 24，024049（2025年）。[15] J. Xiao、Q. Hu、Z. Yu、W. Chen 和 X. Luo，《磁通量诱导的高阶拓扑超导》，Physical Review B 112，195404（2025年）。[16] W. Jia、Y. Tian、H. Yang、X. Kong、Z.-H. Huang、W.-J. Gong 和 J.-H. An，《非常规混合阶拓扑绝缘体》，Physical Review B 112，L241103（2025年）。[17] X.-D. Chen、W.-M. Deng、F.-L. Shi、F.-L. Zhao、M. Chen 和 J.-W. Dong，《直接观测二阶拓扑光子晶体薄板中的角态》，《Physical Review Letters》122，233902（2019）。[18] A. Cerjan、M. J¨urgensen、W. A. Benalcazar、S. Mukher- jee 和 M. C. Rechtsman，《观测连续谱中的高阶拓扑束缚态》，《Physical Review Letters》125，213901（2020）。[19] W. Zhang、D. Zou、Q. Pei、W. He、J. Bao、H. Sun 和 X. Zhang，《实验观测高阶拓扑安德森绝缘体》，《Physical Review Letters》126，146802 2021（）。[20] D. Wang、Y. Deng、J. Ji、M. Oudich、W. A. Benal- cazar、G. Ma 和 Y. Jing，《在耦合反转声学晶体中实现 $\mathbb{Z}$分类的手征对称高阶拓扑绝缘体》，《Physical Review Letters》131，157201 2023（）。[21] Z. Dong、H. Li、H. Wang、Y. Pan、W. Yi 和 B. Yan，《使用超冷原子观测连续谱中的高阶拓扑束缚态》（2025年），arXiv:2501.13499 [凝聚态物理·量子气体]。[22] K. Kawabata、K. Shiozaki、M. Ueda 和 M. Sato，《非厄米物理中的对称性与拓扑》，《Physical Review X》9，041015（2019）。[23] K. Bai、J.-Z. Li、T.-R. Liu、L. Fang、D. Wan 和 M. Xiao，《动力学中具有完备基的非线性例外点》，《Physical Review Letters》130，266901（2023）。[24] M. Jangjan、L. Li、L. E. F. Foa Torres 和 M. V. Hosseini，《整比或非整比非厄米 Su-Schrieffer-Heeger 晶格的拓扑相》，《Physical Review B》109，205142（2024年）。[25] J. Y. Lee、J. Ahn、H. Zhou 和 A. Vishwanath，《厄米与非厄米系统之间的拓扑对应：反常动力学》，《Physical Review Letters》123，206404（2019）。[26] C.-X. Guo、S. Chen、K. Ding 和 H. Hu，《多能带非厄米系统中的例外非阿贝尔拓扑》，《Physical Review Letters》130，157201（2023）。[27] L. Jezequel 和 P. Delplace ，非厄米谱

流与贝里-陈单极子，Physical Review Letters 130, 066601 2023( ). [28] M.-W. Li, J.-W. Liu, X. Wang, W.-J. Chen, G. Ma, and J.-W. Dong, 《非厄米空间晶体中的拓扑时间边界态》, Physical Review Letters 135, 187101 2025( ). [29] K.-X. Hu, C. Luo, J. Zhang, S. Liu, W.-X. Cui, J. Cao, S. Zhang, and H.-F. Wang, 《非厄米 class-d† 拓扑系统中的体边对应》, Phys. Rev. A 112, 052209 (2025). [30] M. Zhang, Y. Zhang, S. Li, Y.-a. Li, Y. Wei, R. Tian, T. Wu, H. Shi, H. Gao, F. Li, and B. Liu, 《单光子非手性非幺正量子动力学中非厄米体边对应的观测》, Physical Review Letters 135, 213601 (2025). [31] E. Ma, K. Zhang, and Z. Song, 《具有平衡扰动的扩展 Su-Schrieffer-Heeger 梯子中的动力学稳定拓扑边缘态》, Physical Review B 112, 195134 2025( ). [32] H. Wu and L. Jin, 《对称性与反对称性的相互作用所产生的拓扑零模》, Physical Review B 112, 125146 (2025). [33] C. Yuce and H. Ramezani, 《非厄米二维 Su-Schrieffer-Heeger 模型中的拓扑态》, Phys. Rev. A 100, 032102 (2019). [34] S. A. A. Ghorashi and M. Sato, 《拓扑实性转换：迈向体边选择性激射》(2025), arXiv:2507.02038 [quant-ph]. [35] S. Longhi, 《非规则非厄米趋肤局域》, Physical Review Letters 134, 196302 (2025). [36] K. Zhang, Z. Yang, and K. Sun, 《高维非厄米趋肤模的边缘理论》, Physical Review B 109, 165127 (2024). [37] J. Shi and A. N. Poddubny, 《非厄米趋肤效应下束缚光子对的手性解离》, Physical Review Letters 134, 233602 (2025). [38] T. E. Lee, 《非厄米晶格中的反常边缘态》, Physical Review Letters 116, 133903 (2016). [39] S. Yao and Z. Wang, 《非厄米系统的边缘态与拓扑不变量》, Physical Review Letters 121, 086803 2018( ). [40] K. Yokomizo and S. Murakami, 《非厄米系统的非布洛赫能带理论》, Physical Review Letters 123, 066404 (2019). [41] H. Wu and J.-H. An, 《非厄米系统的 Floquet 拓扑相》, Physical Review B 102, 041119 (2020). [42] T. Liu, Y.-R. Zhang, Q. Ai, Z. Gong, K. Kawabata, M. Ueda, and F. Nori, 《非厄米系统中的二阶拓扑相》, Physical Review Letters 122, 076801 (2019). [43] Z. Zhang, M. Rosendo L´opez, Y. Cheng, X. Liu, and J. Christensen, 《非厄米声学二阶拓扑绝缘体》, Physical Review Letters 122, 195501 (2019). [44] J. Pan and L. Zhou, 《周期性淬火晶格中的非厄米 Floquet 二阶拓扑绝缘体》, Physical Review B 102, 094305 (2020). [45] K. Monkman and J. Sirker, 《多带非厄米系统中的隐藏零模与拓扑》, Physical Review Letters 134, 056601 (2025). [46] H. Wu, X.-M. Yang, and H. Liu, 《非布洛赫体边对应的失效与涌现拓扑，在 Floquet 非厄米系统 (2025 2510 09193), [ ] arXiv: . quant-ph . [47] L. N. Trefethen 和 M. Embree, *Spectra and Pseudospec-tra* （普林斯顿大学出版社，2005年）。[48] Y. Jing、J.-J. Dong、Y.-Y. Zhang 和 Z.-X. Hu, 《非厄米系统中的双正交动力学量子相变》, Physical Review Letters 132, 220402（2024年）。[49] L. Herviou、J. H. Bardarson 和 N. Regnault, 《通过奇异值分解定义非厄米哈密顿量的体边对应》, Phys. Rev. A 99，052118 2019( )。[50] Y. Ashida、Z. Gong 和 M. Ueda, 《非厄米物理》, 《物理学进展》69，249–435（2020年）。[51] W. A. Benalcazar 和 A. Cerjan, 《物质的手征对称高阶拓扑相》, Physical Review Letters 128，127601（2022年）。[52] A. Kundu、H. A. Fertig 和 B. Seradjeh, 《弗洛凯拓扑相变的有效理论》, Physical Review Letters 113, 236803 2014( )。[53] P. M. Perez-Piskunow、G. Usaj、C. A. Balseiro 和 L. E. F. F. Torres, 《石墨烯中的弗洛凯手征边缘态》, Physical Review B 89，121401（2014年）。[54] R. Roy 和 F. Harper, 《弗洛凯拓扑绝缘体周期表》, Physical Review B 96, 155118（2017年）。[55] Y. T. Katan 和 D. Podolsky, 《调制的弗洛凯拓扑绝缘体》, Physical Review Letters 110，016802（2013年）。[56] S.-Y. Bai、C. Chen、H. Wu 和 J.-H. An, 《开放及周期驱动系统中的量子控制》, 《物理学进展：X》6, 1870559（2021年）。[57] M. Ghuneim 和 R. W. Bomantara, 《周期驱动三聚体晶格中的反常拓扑边缘模》, Physical Review B 111，195424（2025年）。[58] G. K. Dash、S. Bid 和 M. Thakurathi, 《弗洛凯例外拓扑绝缘体》, Physical Review B 109，035418（2024年）。[59] L. Xiao、W.-T. Xue、F. Song、Y.-M. Hu、W. Yi、Z. Wang 和 P. Xue, 《量子动力学中非厄米边缘爆发的观测》, Physical Review Letters 133, 070801（2024年）。[60] Z. Zhang、S. Liang、I. Septembre、J. Yu、Y. Huang、M. Liu、Y. Zhang、M. Xiao、G. Malpuech 和 D. Solnyshkov, 《二维光子准晶体中的非厄米离域》, Physical Review Letters 132，263801 2024( )。[61] J. Zhang、Y.-J. Wang、S.-Y. Shao、B. Liu、L.-H. Zhang、Z.-Y. Zhang、X. Liu、C. Yu、Q. Li、H.-C. Chen、Y. Ma、T.-Y. Han、Q.-F. Wang、J.-D. Nan、Y.-M. Yin、D.-Y. Zhu、Q.-Q. Fang、D.-S. Ding 和 B.-S. Shi, 《冷里德堡量子气体中非厄米拓扑的观测》（2025年）, arXiv:2509.26256 [凝聚态物理·量子气体]。[62] Z. Lin、J. Li、W. Song、S. Su、J. Sun、S. Wu、C. Huang、S. Zhu 和 T. Li, 《光波导中的耗散拓扑动力学：灵敏度与鲁棒性》, Physical Review Letters 134，223802（2025年）。[63] W. Zhu、H. Xue、J. Gong、Y. Chong 和 B. Zhang, 《弗洛凯高阶拓扑产生的时间周期角态》, 《自然·通讯》13，11（2022年）。[64] S.-Y. Shao、Q. Li、H.-C. Chen、B.-S. Shi 和 D.-S. Ding, 《弗洛凯驱动里德堡原子中的高阶与分数离散时间晶体》, 《自然·通讯》17，9730（2024年）。