arXiv:2601.01542v1 [math.CO] 4 Jan 2026

根积图游走行列式的一个通用公式及其在 DGS 图构造中的应用

Wei Wang[a*] Jie Shen[a] Lihuan Mao[b]

[a]安徽工程大学数学、物理与金融学院，芜湖 241000，中国[b]陕西科技大学数学与数据科学学院，西安 710021，中国

摘要

对于一个 n 阶图 G，以及一个以 v 为根的根图 $H^{(v)}$，根积图 $G \circ H^{(v)}$ 由 G 和 n 个 H 的副本构成：对于每个 i，将 i 个 H 副本的根与 G 的 i 个顶点重合。作为 Shan 和 Liu（2025）近期获得的 $G \circ H^{(v)}$ 可控性判据的改进，我们得到了 $G \circ H^{(v)}$ 的游走矩阵行列式的显式公式。此外，对于一类重要的由其广义谱决定的图 $\mathcal{F}$（DGS），我们引入了 $\mathcal{F}$-保持图的概念，并为根图成为 $\mathcal{F}$-保持图提供了一个充分条件。我们列出了若干个小阶的 $\mathcal{F}$-保持图，并利用根积构造得到了许多新的 DGS 图无限族。

关键词： 游走矩阵；根积图；广义谱

数学主题分类： 05C50

1 引言

设 G 是一个具有 n 个顶点的简单图，并设 $M(G)$ 是与 G 相关联的实对称矩阵。在本文中，$M(G)$ 可以指邻接矩阵 $A(G)$、无符号拉普拉斯矩阵 $Q(G)$，以及 A_α 矩阵 $A_\alpha(G)$。$M(G)$ 的特征多项式定义为 $\det(xI - M(G))$，称为 G 的 M-特征多项式，记作 $\phi(M(G); x)$。G 的 M- 游走矩阵记作 $W_M(G)$ 或 $W(M(G))$，定义为矩阵

$$[e, M(G)e, \ldots, (M(G))^{n-1}e],$$

其中 e 是全 1 向量。这类特殊矩阵在谱图论中日益受到关注，因为它与图的许多重要性质密切相关。例如，Wang [15] 的一条定理指出，若 $2^{-\lfloor n/2 \rfloor}\det(W_A(G))$为奇数且无平方因子，则 G 由其广义谱决定（DGS）。特别地，所有满足 G的图

*通讯作者。电子邮箱：wangwei.math@gmail.com

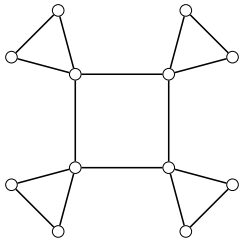


图1：根积图 $C_4 \circ C_3$

$\det W_A(G) = \pm 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ 均为 DGS。关于图的游走矩阵的更多研究，请参阅[2, 4, 8, 9, 14, 16]。

设 $H^{(v)}$ 是一个根顶点为 v 的根图。G 和 $H^{(v)}$ 的根积图，记作 $G \circ H^{(v)}$（或在不会引起混淆时简记为 $G \circ H$），定义如下：取 n 个 $H^{(v)}$ 的副本，并对每个 i，将 $H^{(v)}$ 的第 i 个副本的根 v 与 G 的第 i 个顶点合并。图1给出了示意图。我们研究根积图 $G \circ H$ 的游走矩阵的行列式。由于 $G \circ K_1 = G$，我们可以假设 H 不是平凡图 K_1。关于 $\det W(G \circ H)$ 的第一个非平凡结果由 Mao、Liu 和 Wang [6]，得到，现将其表述为以下定理。

定理1 ([6])。对于任意图 G，

$$\det W_A(G \circ P_2) = \pm(\det A(G))(\det W_A(G))^2.$$

后来，Mao 和 Wang [7]，得到了 $\det W_A(G \circ P_3)$ 和 $\det W_A(G \circ P_4)$ 的类似公式，其中 P_3（或 P_4）的端点被取作根。$\det W_A(G \circ P_m)$ 的一般公式由 Mao 和 Wang [7] 提出猜想，并由 Wang、Yan 和 Mao [13] 证明。最近，Yan 和 Wang [17] 将这些结果进一步推广到任意 $P_m^{(\ell)}$，其中 P_m 的顶点按自然顺序标记为 $\{1, 2, \ldots, m\}$，且根 ℓ 可以是任意顶点。

定理2 ([17])。对于任意图 G 和整数 $m \geq 2$，

$$\det W_A(G \circ P_m^{(\ell)}) = \begin{cases} \pm(\det A(G))^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}(\det W_A(G))^m, & \text{if } \gcd(\ell, m+1) = 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在 [12], 中，Tian 等人考虑了该问题的 Q-类比，并证明了

$$\det W_Q(G \circ P_m) = \pm(\det Q(G))^{m-1}(\det W_Q(G))^2 \text{ for } m = 2, 3. \tag{1}$$

Yan、Wang 和 Mao [18] 将式 (1) 推广到了任意 $m \geq 2$。

请注意，目前关于 $\det W(G \circ H^{(v)})$ 的所有结果都局限于H 为路径图的情形。考虑一般情形似乎很自然，即 H 为任意图。本文的主要结果是以下定理，它给出了 $\det W_M(G \circ H^{(v)})$ 的一般公式。

定理 3. 设 G 是一个 n阶图，$H^{(v)}$ 是一个 m阶根图。令$B(\lambda) = M(H) + \lambda D_v$，其中 D_v是对角矩阵$\mathrm{diag}(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$，且仅有

一个非零元素（其值为 *1*），该元素对应于根 v。令 $M^{(v)}(H)$ 为从 $M(H)$ 中删除对应于 v 的行和列后得到的矩阵。于是有

$$\det W_M(G\circ H^{(v)}) = \pm\left(\mathrm{Res}(\phi(M(H);x),\phi(M^{(v)}(H);x))\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\det h(M(G))\cdot(\det W_M(G))^m,$$

其中 $h(\lambda) = \det W(B(\lambda)) = \det[e, B(\lambda)e, \ldots\ldots, (B(\lambda))^{m-1}e]$。

若图 G 是 M-可控的，则 $\det W(M(G)) \neq 0$。类似地，若 $n\times n$ 矩阵 B 是可控的，则 $\det W(B) \neq 0$。注意，对于两个多项式 f 和 g，结式 $\mathrm{Res}(f, g)$ 非零，当且仅当 $\gcd(f, g) = 1$。还要注意，对于任意矩阵 M 和任意多项式 $h(x)$，都有 $\det h(M) = \prod h(\lambda)$，其中 λ 遍历 M 的所有特征值。定理 3 立即推出了图 $G\circ H^{(v)}$ 可控性的以下充要条件，该条件由 Shan 和 Liu [10]获得。

推论 1。 图 $G\circ H^{(v)}$ 是 M-可控的，当且仅当以下三个条件同时成立：

(i) G 是 M-可控的；(ii) 最大公因式 $(\phi(M(H);x)\ \phi(M_{(v)}(H);x)) = 1$；
并且(iii) 对于 $M(G)$ 的任意特征值 λ，矩阵 $B(\lambda)$ 是可控的。

我们最关注定理 3 在 $M(G)$ 表示邻接矩阵 $A(G)$ 时的情形，因为根据 Wang [15]的上述定理，在这种情况下可以从较小的 DGS 图构造出更大的 DGS 图。值得一提的是，这一构造在广义 Q 谱的情形下会失效；见 [12]。

为方便起见，我们引入一个重要的 DGS 图族。

定义 1。 对于一个整数 n，我们将 $\mathcal{F}_n$ 定义为所有满足 行列式 $A(G) = \pm 1$ 且 行列式 $W_A(G) = \pm 2^{\lfloor n/2\rfloor}$ 的 n 个顶点图 G 的集合。定义 $\mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F}_n$。

我们注意到，当 n 为奇数时，$\mathcal{F}_n$ 为空，因为此时 $\det A(G) \equiv 0$（模 2），这与 $\det A(G) = \pm 1$ 的要求相矛盾。另一方面，对于所有偶数 $n \geq 6$，族 $\mathcal{F}_n$ 均非空；见图 [5, Fig. 1]。

如果对于任意 $G \in \mathcal{F}$ 都有 $G\circ H^{(v)} \in \mathcal{F}$，我们称根图 $H^{(v)}$ 为 $\mathcal{F}$-保持图 。由于根据 Wang 的定理，$\mathcal{F}$ 中的任意图都是 DGS 图，因此使用 $\mathcal{F}$-保持图来构造一个 DGS 图的无限族是直接可行的。事实上，令 G 为 $\mathcal{F}$ 中的任意图，并令 $\{H^{(v_i)}{}_i\}$ 为一列 $\mathcal{F}$-保持图，其中各图不必互异。则该族中的所有图

$$G, G\circ H_1^{(v_1)}, (G\circ H_1^{(v_1)})\circ H_2^{(v_2)}, \ldots$$

都属于族 $\mathcal{F}$，因而是 DGS 图。本文的第二个主要结果是关于根图成为 $\mathcal{F}$-保持图的一个充分条件，我们使用定理 3 的记号将其表述如下。

定理 4。 若以下三个条件同时成立，则根图 $H^{(v)}$ 是一个 $\mathcal{F}$-保持图：

(i) $\mathrm{Res}(\phi(A(H);x)\ \phi(A^{(v)}(H);x)) = \pm 1$; *(ii)* $\det[e, B(\lambda)e, \ldots, (B(\lambda))^{m-1}e] = \pm\lambda^k$，其中 k 为某个非负整数；以及 *(iii)* 要么 $\det A(H) = \pm 1$ 且 $\det A^{(v)}(H) = 0$，要么 $\det A(H) = 0$ 且 $\det A^{(v)}(H) = \pm 1$。

2 定理 3 和 4 的证明

设 G 是一个 n 阶图， $H^{(v)}$ 是一个以 v 为根的 m 阶根图。我们定义 $B(\lambda) = M(H) + \lambda D_v$，其中 D_v 是对角矩阵 diag(0，…，0，1，0，…，0)，其中数值 1 对应于根顶点 v。令 $M_{(v)}(H)$ 为从 $M(H)$ 中删除对应于根顶点 v 的行和列后得到的矩阵。我们指出，对于邻接矩阵 $A(G)$，矩阵 $A^{(v)}(H)$ 等于 $A(H - v)$，其中 $H - v$ 是从 H 中删除该顶点后得到的子图。然而，对于 $Q(H)$，相应的等式一般并不成立。

已知 $M(G \circ H^{(v)}) = M(H) \otimes I_n + D_v \otimes M(G)$ [10],，其中 $\otimes$表示矩阵的克罗内克积。以下引理刻画了 M-特征值和 M-特征向量，推广了关于 A-特征值的著名结果；参见 [1, 3, 11]。

引理 1 ([10])。 设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是 $M(G)$ 的特征值，对应的特征向量为$\xi_1, \ldots, \xi_n$。设 $\mu_i^{(j)}$ ($j \in \{1, \ldots, m\}$) 是 $B(\lambda_i) = M(H) + \lambda_i D_v$ 的特征值，对应的特征向量为 $\zeta_i^{(j)}$ 。记 $\tilde{M} = M(G \circ H^{(v)})$ 和 $\eta_i^{(j)} = \zeta_i^{(j)} \otimes \xi_i$。则$\tilde{M}\eta_i^{(j)} = \mu_i^{(j)}\eta_i^{(j)}$ 对于 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 和 $j \in \{1, \ldots, m\}$成立。

命题 1. $\det M(G \circ H^{(v)}) = \det((\det M(H)) \cdot I_n + (\det M_{(v)}(H)) \cdot M(G))$.

证明. 使用引理 1 中的记号，我们有

$$\det B(\lambda_i) = \det(M(H) + \lambda_i D_v) = \det M(H) + \lambda_i \det M^{(v)}(H)$$

根据行列式的多重线性性。由于矩阵的行列式等于其所有特征值的乘积，我们得到

$$\det M(G \circ H^{(v)}) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} \mu_i^{(j)} = \prod_{i=1}^{n} \det B(\lambda_i) = \prod_{i=1}^{n} (\det M(H) + \lambda_i \det M^{(v)}(H)).$$

令 $M' = (\det M(H)) \cdot I_n + (\det M_{(v)}(H)) \cdot M(G)$。由于 $M(G)$ 的特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$，我们看到 M' 的特征值恰好是 $\det M(H) + \lambda_i \det M^{(v)}(H)$。因此

$$\prod_{i=1}^{n} (\det M(H) + \lambda_i \det M^{(v)}(H)) = \det M'.$$

于是，$\det M(G \circ H^{(v)}) = \det M'$，证毕。 □

以下推论可由命题 1 直接得出。

推论 *2.* 如果根图 $H^{(v)}$ 满足 ***(i) det*** $A(H) = \pm 1$ 且 ***det*** $A^{(v)}(H) = 0$；或 ***(ii) det*** $A(H) = 0$ 且 ***det*** $A^{(v)}(H) = \pm 1$，那么对于任意满足 ***det*** $A(G) = \pm 1$ 的图 G，都有 ***det*** $A(G \circ H^{(v)}) = \pm 1$。

定义 2. 令 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 和 $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$。 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的结式记为 Res($f(x)$ $g(x)$)，定义为

$$a_n^m b_m^n \prod_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} (\alpha_i - \beta_j), \tag{2}$$

其中 α_i 的 而 β_j 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的根（位于复数域 $\mathbb{C}$ 中）。

注意，式 (2) 可改写为

$$a_n^m \prod_{1\le i\le n} g(\alpha_i),\ \text{or}\ (-1)^{mn} b_m^n \prod_{1\le j\le m} f(\beta_j). \tag{3}$$

我们将使用结式的以下基本性质；由式（3）的第二个表达式可知，该性质显而易见。

引理 *2.* 设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 = a_n \prod_{i=1}^n (x-\alpha_i)$ 和 $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_0 = b_m \prod_{j=1}^m (x-\beta_j)$。若 $m < n$，则对任意 $t \in \mathbb{C}$，有 $Res(f(x) + tg(x)\ g(x)) = Res(f(x)\ g(x))$。

现在我们来计算 det $W(G \circ H^{(v)})$。其基本工具是下面的公式，它利用 M 的特征值和特征向量给出游走矩阵 $W(M)$ 的行列式。

引理 3 ([6])。 设 M 是一个 $n \times n$ 实对称矩阵。设 λ_i 是 M 的特征值，其对应的特征向量为 ξ_i，对应于 $i = 1$、2、.....、n。那么

$$\det W(M) = \frac{\prod_{1\le i_1<i_2\le n}(\lambda_{i_2}-\lambda_{i_1}) \prod_{1\le i\le n}(e_n^{\mathrm{T}}\xi_i)}{\det[\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n]}.$$

令 $\Omega = \{(i,\ j)\colon\ 1 \le i \le n$ 和 $1 \le j \le m\}$ 按逆字典序排列：若 $j_1 < j_2$，或 $j_1 = j_2$ 且 $i_1 < i_2$，则 $(i_1,\ j_1) < (i_2,\ j_2)$。以下关于 det $W(G \circ H^{(v)})$ 的公式是引理 1 和引理 3 的直接推论。

推论 3。

$$\det W(G \circ H^{(v)}) = \frac{\prod_{(i_1,j_1)<(i_2,j_2)}(\mu_{i_2}^{(j_2)} - \mu_{i_1}^{(j_1)}) \prod_{(i,j)\in\Omega}(e_{mn}^{\mathrm{T}}\eta_i^{(j)})}{\det[\eta_1^{(1)},\ldots,\eta_n^{(1)};\ldots;\eta_1^{(m)},\ldots,\eta_n^{(m)}]}.$$

引理 4 ([17])。

$$\prod_{(i_1,j_1)<(i_2,j_2)} (\mu_{i_2}^{(j_2)} - \mu_{i_1}^{(j_1)}) = \pm \left(\prod_{i=1}^n \prod_{1\le j_1<j_2\le m} \left(\mu_i^{(j_2)} - \mu_i^{(j_1)}\right) \right) \left(\prod_{1\le i_1<i_2\le n} \prod_{j_2=1}^m \prod_{j_1=1}^m \left(\mu_{i_2}^{(j_2)} - \mu_{i_1}^{(j_1)}\right) \right).$$

引理 5。

$$\prod_{j_2=1}^m \prod_{j_1=1}^m \left(\mu_{i_2}^{(j_2)} - \mu_{i_1}^{(j_1)}\right) = (\lambda_{i_2} - \lambda_{i_1})^m \mathrm{Res}(\phi(M(H);x), \phi(M^{(v)}(H);x)).$$

证明。 注意， $\phi(B(\lambda_i);\ x) = \det(xI - (M(H) + \lambda_i D_v)) = \phi(M(H);\ x) - \lambda_i \phi(M_{(v)}(H);\ x)$, 这是一个根为 $\mu_i^{(j)}$、 $j = 1$、.....、 m的首一多项式。我们发现

$$\phi(M(H);x) - \lambda_i \phi(M^{(v)}(H);x) = \prod_{j_1=1}^m (x - \mu_i^{(j_1)}),$$

因此

$$\phi(M(H);\mu_{i_2}^{(j_2)}) - \lambda_{i_1} \phi(M^{(v)}(H);\mu_{i_2}^{(j_2)}) = \prod_{j_1=1}^m (\mu_{i_2}^{(j_2)} - \mu_{i_1}^{(j_1)}). \tag{4}$$

由于 $\phi(M(H);\ \mu^{(j_2)i_2}) - \lambda_{i_2}\phi(M_{(v)}(H);\ \mu^{(j_2)i_2}) = 0$，我们可以看出，等式（4）的左边等于

$$(\lambda_{i_2} - \lambda_{i_1})\phi(M^{(v)}(H); \mu_{i_2}^{(j_2)}),$$

由此可知

$$\prod_{j_2=1}^{m}\prod_{j_1=1}^{m}\left(\mu_{i_2}^{(j_2)} - \mu_{i_1}^{(j_1)}\right) = \prod_{j_2=1}^{m}(\lambda_{i_2}-\lambda_{i_1})\phi(M^{(v)}(H); \mu_{i_2}^{(j_2)}) = (\lambda_{i_2}-\lambda_{i_1})^m \prod_{j_2=1}^{m}\phi(M^{(v)}(H); \mu_{i_2}^{(j_2)}). \tag{5}$$

最后，根据结式的定义，我们有

$$\begin{aligned}\prod_{j_2=1}^{m}\phi(M^{(v)}(H); \mu_{i_2}^{(j_2)}) &= \mathrm{Res}(\phi(M(H);x) - \lambda_{i_2}\phi(M^{(v)}(H);x), \phi(M^{(v)}(H);x)) \\ &= \mathrm{Res}(\phi(M(H);x), \phi(M^{(v)}(H);x)),\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由引理 2 以及 $\deg\ \phi(M^{(v)}(H);\ x) < \deg\ \phi(M(H);\ x)$ 这一事实可得。结合式 (5)，引理 5 得证。 □

引理 6。

$$\det[\eta_1^{(1)},\ldots,\eta_n^{(1)};\ldots;\eta_1^{(m)},\ldots,\eta_n^{(m)}] = (\det[\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n])^m \prod_{i=1}^{n}\det[\zeta_i^{(1)},\zeta_i^{(2)},\ldots,\zeta_i^{(m)}].$$

证明。令 $E^{(j)} = [\eta_1^{(j)},\eta_2^{(j)},\ldots,\eta_n^{(j)}]$ for $j \in \{1,\ldots,m\}$。记 $\zeta_i^{(j)} = (z_{i\,1}^{(j)},\ z_{i\,2}^{(j)},\ \ldots\ldots,\ z_{i\,m}^{(j)})^{\mathrm{T}}$。那么，我们有

$$\begin{aligned}E^{(j)} &= \left[\zeta_1^{(j)}\otimes\xi_1, \zeta_2^{(j)}\otimes\xi_2, \ldots, \zeta_n^{(j)}\otimes\xi_n\right] \\ &= \left[\begin{bmatrix} z_{1,1}^{(j)}\cdot\xi_1 \\ z_{1,2}^{(j)}\cdot\xi_1 \\ \vdots \\ z_{1,m}^{(j)}\cdot\xi_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_{2,1}^{(j)}\cdot\xi_2 \\ z_{2,2}^{(j)}\cdot\xi_2 \\ \vdots \\ z_{2,m}^{(j)}\cdot\xi_2 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} z_{n,1}^{(j)}\cdot\xi_n \\ z_{n,2}^{(j)}\cdot\xi_n \\ \vdots \\ z_{n,m}^{(j)}\cdot\xi_n \end{bmatrix}\right] \\ &= \begin{bmatrix} [\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n]\cdot\mathrm{diag}[z_{1,1}^{(j)}, z_{2,1}^{(j)},\ldots,z_{n,1}^{(j)}] \\ [\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n]\cdot\mathrm{diag}[z_{1,2}^{(j)}, z_{2,2}^{(j)},\ldots,z_{n,2}^{(j)}] \\ \vdots \\ [\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n]\cdot\mathrm{diag}[z_{1,m}^{(j)}, z_{2,m}^{(j)},\ldots,z_{n,m}^{(j)}] \end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{6}$$

令 $U = [\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n]$ 和 $T_{k,\ j} = \mathrm{diag}[z_{1,k}^{(j)}, z_{2,k}^{(j)},\ldots,z_{n,k}^{(j)}]$ 对于 $k,\ j \in \{1,2,\ldots,m\}$。于是我们可以将式（6）改写为

$$E^{(j)} = \begin{bmatrix} U\cdot T_{1,j} \\ U\cdot T_{2,j} \\ \vdots \\ U\cdot T_{m,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & & & \\ & U & & \\ & & \ddots & \\ & & & U \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_{1,j} \\ T_{2,j} \\ \vdots \\ T_{m,j} \end{bmatrix}.$$

这意味着以下恒等式:

$$[E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(m)}] = \begin{bmatrix} U & & & \\ & U & & \\ & & \ddots & \\ & & & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & \cdots & T_{1,m} \\ T_{2,1} & T_{2,2} & \cdots & T_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{m,1} & T_{m,2} & \cdots & T_{m,m} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

由于每个 $T_{k,j}$ 都是对角矩阵，因此容易看出，块矩阵 $(T_{k,j})$ 经过置换相似变换后为以下块对角矩阵

$$\operatorname{diag}[[\zeta_1^{(1)}, \zeta_1^{(2)}, \dots, \zeta_1^{(m)}], [\zeta_2^{(1)}, \zeta_2^{(2)}, \dots, \zeta_2^{(m)}], \dots, [\zeta_n^{(1)}, \zeta_n^{(2)}, \dots, \zeta_n^{(m)}]].$$

因此，对公式（7）两边取行列式可得

$$\det[E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(m)}] = (\det U)^m \prod_{1 \le i \le n} \det[\zeta_i^{(1)}, \zeta_i^{(2)}, \dots, \zeta_i^{(m)}].$$

证明至此完成。 □

现在我们可以给出定理 3 和定理 4 的证明。

定理 3 的证明 注意到 $e_{mn}^{\mathrm{T}} = e_m^{\mathrm{T}} \otimes e_n^{\mathrm{T}}$ 和 $\eta_i^j = \zeta_i^{(j)} \otimes \xi_i$。根据克罗内克积的混合乘积性质，可得

$$e_{mn}^{\mathrm{T}} \eta_i^{(j)} = (e_m^{\mathrm{T}} \otimes e_n^{\mathrm{T}})(\zeta_i^{(j)} \otimes \xi_i) = (e_m^{\mathrm{T}} \zeta_i^{(j)})(e_n^{\mathrm{T}} \xi_i).$$

令 $\Delta_1 = \mathrm{Res}(\phi(M(H);\, x)\ \phi(M^{(v)}(H);\, x))$。由推论 3、引理 4、引理 5 和引理 6 可得

$$\begin{aligned}
&\det W_M(G \circ H^{(v)}) \\
=&\frac{\prod\limits_{(i_1,j_1)<(i_2,j_2)} (\mu_{i_2}^{(j_2)} - \mu_{i_1}^{(j_1)}) \prod\limits_{(i,j)\in\Omega} (e_{mn}^{\mathrm{T}} \eta_i^{(j)})}{\det[\eta_1^{(1)}, \dots, \eta_n^{(1)}; \dots; \eta_1^{(m)}, \dots, \eta_n^{(m)}]} \\
=&\pm \frac{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{1 \le j_1 < j_2 \le m} \left(\mu_i^{(j_2)} - \mu_i^{(j_1)}\right)\right) \left(\prod\limits_{1 \le i_1 < i_2 \le n} (\lambda_{i_2} - \lambda_{i_1})^m \Delta_1\right) \prod\limits_{(i,j)\in\Omega} ((e_m^{\mathrm{T}} \zeta_i^{(j)})(e_n^{\mathrm{T}} \xi_i))}{(\det[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n])^m \prod\limits_{i=1}^{n} \det[\zeta_i^{(1)}, \zeta_i^{(2)}, \dots, \zeta_i^{(m)}]} \\
=&\pm \Delta_1^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\prod\limits_{1 \le j_1 < j_2 \le m} \left(\mu_i^{(j_2)} - \mu_i^{(j_1)}\right) \prod\limits_{j=1}^{m} (e_m^{\mathrm{T}} \zeta_i^{(j)})}{\det[\zeta_i^{(1)}, \zeta_i^{(2)}, \dots, \zeta_i^{(m)}]} \right) \\
&\times \left(\frac{\prod\limits_{1 \le i_1 < i_2 \le n} (\lambda_{i_2} - \lambda_{i_1}) \prod\limits_{1 \le i \le n} (e_n^{\mathrm{T}} \xi_i)}{\det[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]} \right)^m .
\end{aligned} \tag{8}$$

分别令 Δ_2 和 Δ_3 表示公式（8）的最后两个因子。对 $W(B(\lambda_i))$ 和 $W(M(G))$ 均使用引理 3，可得

$$\Delta_2 = \prod_{i=1}^{n} \det W(B(\lambda_i)) \text{ and } \Delta_3 = (\det W(M(G)))^m.$$

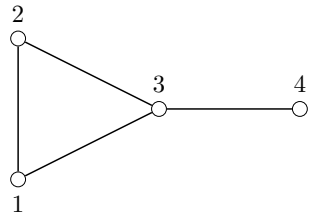


图 2：一个 4顶点图 H

令 $h(\lambda) = \det W(B(\lambda))$。注意到 $h(M(G))$ 的特征值恰为 $h(\lambda_1)\ldots, h(\lambda_n)$，因此可得

$$\Delta_2 = \prod_{i=1}^{n} h(\lambda_i) = \det h(M(G)).$$

定理 3 的证明至此完成。 □

定理 4 的证明 设 n 为偶数，且 G 是 $\mathcal{F}_n$ 中的任意图。根据 $\mathcal{F}_n$ 的定义，我们知道 $\det A(G) = \pm 1$ 且 $\det W_A(G) = \pm 2^{n/2}$。假设 $H^{(v)}$ 满足定理 4 的三个条件。显然，由推论 2 可得 $\det A(G \circ H^{(v)}) = \pm 1$。此外，利用定理 3，我们得到

$$\det W_A(G \circ H^{(v)}) = \pm\,(\pm 1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \det(\pm(A(G))^k)(\pm 2^{n/2})^m = \pm 2^{mn/2}.$$

因此， $G \circ H^{(v)} \in \mathcal{F}$，即， $H^{(v)}$ 是一个 $\mathcal{F}$-保持子。这就完成了定理 4.

3 一些例子和一个猜想

作为主要结果（定理 3 和定理 4）的示例，我们考虑图 H （如图 2 所示），并取顶点 1 为根。直接计算可得$\phi(A(H); x) = x^4 - 4x^2 - 2x + 1$ 和 $\phi(A^{(1)}(H);\, x) = x^3 - 2x$。这两个多项式的结式等于其西尔维斯特矩阵的行列式：

$$\mathrm{Res}(\phi(A(H); x), \phi(A^{(1)}(H); x)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

As

$$B(\lambda) = A(H) + \lambda D_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

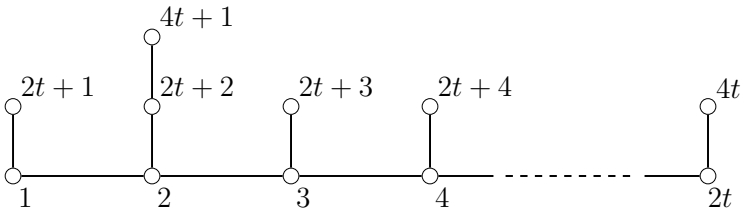


图 3：图 H_{4t+1}

我们得到

$$W(B(\lambda)) = [e, B(\lambda)e, (B(\lambda))^2e, (B(\lambda))^3e] = \begin{pmatrix} 1 & \lambda+2 & \lambda^2+2\lambda+5 & \lambda^3+2\lambda^2+7\lambda+10 \\ 1 & 2 & \lambda+5 & \lambda^2+3\lambda+10 \\ 1 & 3 & \lambda+5 & \lambda^2+3\lambda+13 \\ 1 & 1 & 3 & \lambda+5 \end{pmatrix}$$

因此 $\det W(B(\lambda)) = -\lambda^2$。由定理 3 可知，对于这个特定的根图 $H^{(1)}$，我们有

$$\det W_A(G \circ H^{(1)}) = \pm(\det A(G))^2(\det W_A(G))^4.$$

此外，由于 $\det A(H) = 1$ 且 $\det A^{(1)}(H) = 0$，我们发现定理 4 的所有条件都得到满足。这意味着图 $H^{(1)}$ 是一个 $\mathcal{F}$-保持图。因此，如果 G 是$\mathcal{F}$中的一个图，那么图族中的所有图

$$G, G \circ H^{(1)}, (G \circ H^{(1)}) \circ H^{(1)}, \ldots$$

都属于 $\mathcal{F}$，因此根据 Wang [15]的定理，它们都是 DGS。

在 [17], 中，Yan 和 Wang 考虑了一个由图 H_{4t+1} 组成的、阶为 $4t+1$的图族，如图 3 所示。他们猜想，对于 $\ell = 2t+1$ 或 $4t+1$，有

$$\det W_A(G \circ H_{4t+1}^{(\ell)}) = \pm(\det A(G))^{2t}(\det W_A(G))^{4t+1}.$$

（两种情形 $\ell = 2t+1$ 和 $\ell = 4t+1$ 本质上相同，因为相应的两个根图是同构的。）尽管目前尚无该猜想的完整证明，但可以基于定理 3，通过类似于上述过程的方法，对任意固定的整数 t进行计算验证。

在附录中，我们列出了通过基于定理 4 的穷举搜索找到的所有阶不超过 10 的 $\mathcal{F}$-保行列式图。该搜索的 SageMath 代码可在 https://github.com/wangweiAHPU/walk_det 获取。值得注意的是，对于所有列出的 $\mathcal{F}$-保行列式图$H^{(v)}$， $W_A(G \circ H^{(v)})$ 的行列式都呈现出一种统一形式，且仅取决于 H 的阶。我们提出以下猜想，以供后续研究。

猜想 1. 如果 $H^{(v)}$ 是一个阶为 m 的 $\mathcal{F}$-保行列式图，那么对于任意图 G,

$$\det W_A(G \circ H^{(v)}) = \pm(\det A(G))^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}(\det W_A(G))^m.$$

利益冲突声明

不存在利益冲突。

致谢

本研究部分得到国家自然科学基金（项目编号：12001006和12101379）及中国芜湖市科技项目（项目编号：2024kj015）的资助。

参考文献

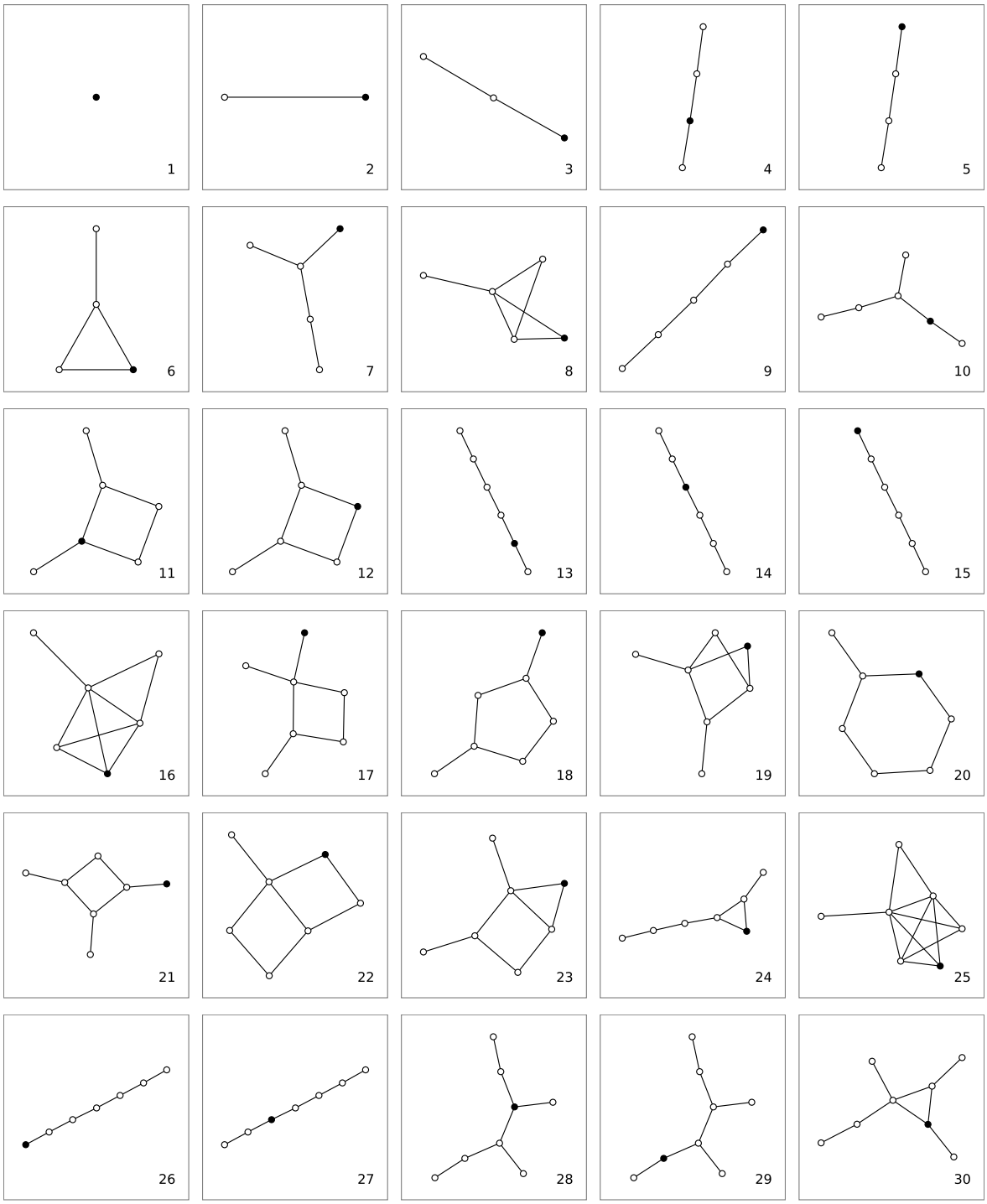
[1] C. D. Godsil, B. D. McKay, 一种新的图乘积及其谱。Bull. Austral. Math. Soc. 18 (1978) 21–28。[2] C. D. Godsil, 图中的可控子集, Ann. Combin. 16 (2012) 733–744。[3] I. Gutman, 若干由二部图导出的图的谱性质。MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 8 (1980) 291–314。[4] F. Liu, J. Siemons, 解锁图的游走矩阵, J. Algebra Combin. 55(2022) 663–690。[5] F. Liu, J. Siemons, W. Wang, 由其广义谱确定的新图族, Discrete Math. 342 (2019) 1108–1112。[6] L. Mao, F. Liu, W. Wang, 构造由其广义谱确定的图的一种新方法, Linear Algebra Appl. 477 (2015) 112–127。[7] L. Mao, W. Wang, 根积图的广义谱刻画, Linear Multilinear Algebra 71 (14) (2023) 2310–2324。[8] L. Qiu, Y. Ji, W. Wang, 图由其广义 Q谱确定的一种新算术判据, Discrete Math. 342 (2019) 2770–2782。[9] S. O'Rourke, B. Touri, 关于 Godsil 关于可控随机图的猜想, SIAM J. Control Optim. 54 (2016) 3347-3378。[10] H. Shan, X. Liu, 探索具有不同 M特征值的图：乘积运算、朗斯基顶点与可控性, Discrete Appl. Math. 373 (2025) 125–136。[11] A. J. Schwenk, 计算图的特征多项式, 载于《图与组合学》（R. Bari 和 F. Harary 编）, Springer, Berlin, (1974), 第 153–172 页。[12] G. Tian, J. Wu, S. Cui, H. Sun, 关于一类特殊 Q游走矩阵行列式的注记, J. Math. Study 58 (3) (2025) 275–285。[13] W. Wang, Z. Yan, L. Mao, 关于根积与路径的游走矩阵行列式的一个猜想的证明, Linear Multilinear Algebra 72 (5) (2024) 828–840。[14] W. Wang, 游走矩阵的史密斯标准形, Linear Algebra Appl. 612 (2021) 30–41。[15] W. Wang, 图由其广义谱确定的一种简单算术判据, J. Combin. Theory, Ser. B 122 (2017) 438–451。

[16] W. Wang, W. Wang, F. Zhu，图由其广义谱确定的一种改进条件，European J. Combin. 108 (2023) 103638。[17] Z. Yan, W. Wang，关于根积图游走矩阵的行列式，Comput. Appl. Math.（即将刊出）doi: 10.1007/s40314-025-03584-2。[18] Z. Yan, L. Mao, W. Wang，关于根积与路径的 Q游走矩阵行列式，Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2024) 47: 174。

附录

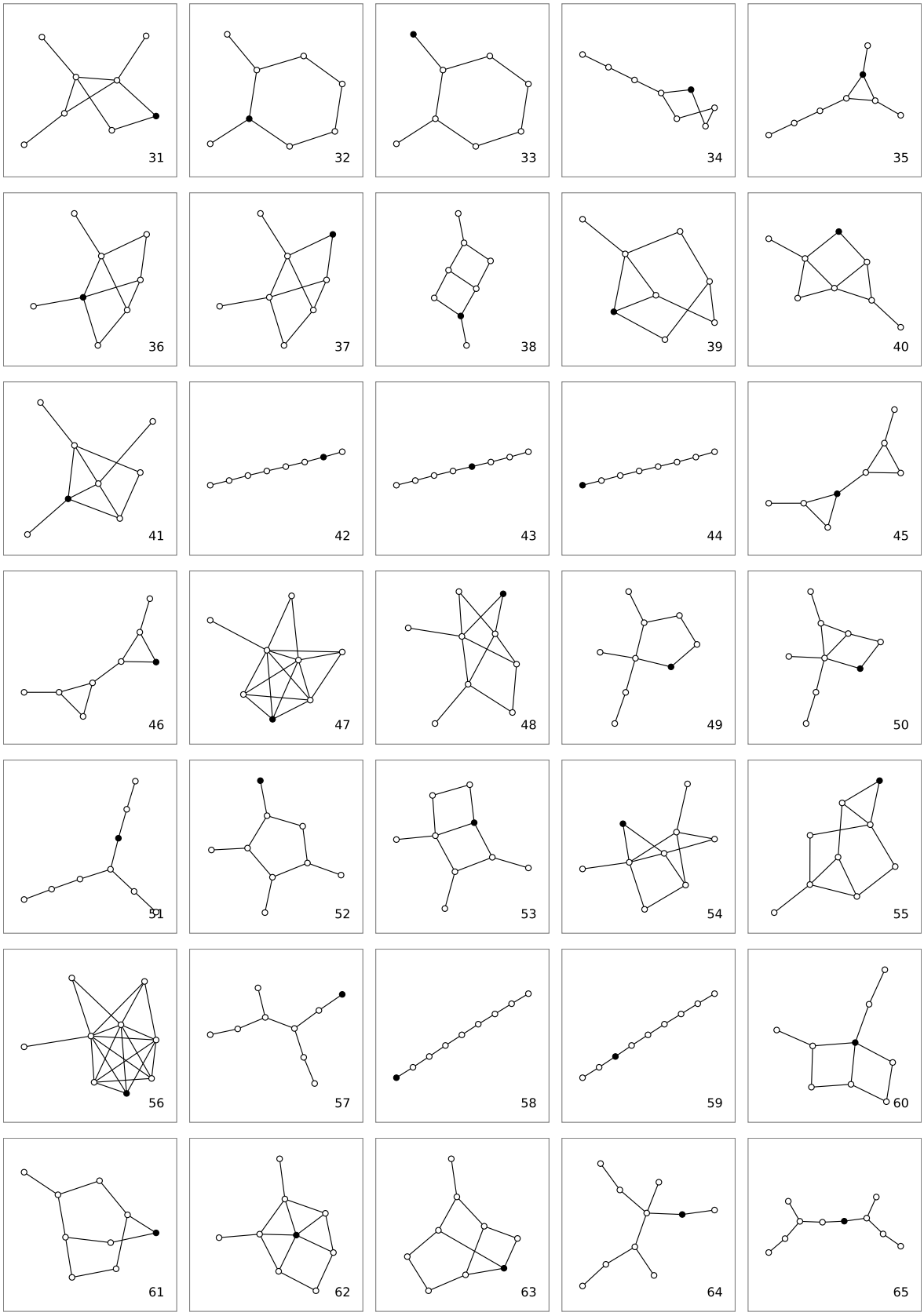
表1：阶为 ≤ 10 的 $\mathcal{F}$ 保持图列表

（实心圆表示根顶点）



（下页续）

表1：≤ 10 阶的 $\mathcal{F}$-保持图列表（续）



（续见下页）

表1：阶为 ≤ 10 的 $\mathcal{F}$保持映射列表（续）

