arXiv:2601.01553v1 [math.NA] 4 Jan 2026

参数化 Keldysh 分解

Linus Balicki、Mark Embree、Serkan Gugercin*

2026年1月

摘要： 围道积分算法旨在计算位于复平面某个有界区域内的少数特征值。这些方法既适用于线性矩阵特征值问题，也适用于非线性矩阵特征值问题。对于后者，这些方法的基础是 Keldysh 分解，它将非线性矩阵值函数拆分为两部分：其一是极点与所需特征值相对应的有理函数，其二是在目标区域内解析的余项。在围道积分下，这个解析部分会消失（根据柯西定理），只留下包含所需特征值的部分。我们提出了 Keldysh 分解的一种扩展，适用于在额外参数上解析依赖的矩阵值函数。我们阐明了这种参数化 Keldysh 分解的关键性质，并介绍了一种基于该分解求解参数化非线性特征值问题的算法。

1. 引言

设$\mathbf{T}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ 表示一般的矩阵值函数。非线性特征值问题 (NLEVP)旨在求出一个特征值 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和一个非零特征向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$，使得

$$\mathbf{T}(\lambda)\mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{1}$$

线性特征值问题 $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$，其中 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，可通过令 $T(z) = zI - A$ 写成这种形式。这里，我们要寻找 T 的所有位于某个单连通有界区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$内的特征值，也就是说，$\Omega$ 是一个区域（非空、开且连通），并且有界且单连通。我们假设 T 在 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 上处处解析，且是正则的，即 $\det(T(\cdot)) \not\equiv 0$。所求特征值是位于 Ω 内的 $T(z)^{-1}$ 的极点。解决这一问题有多种算法策略，包括牛顿法、线性化和围道积分；G¨uttel 和 Tisseur [24]对此作了综述。我们聚焦于基于围道积分的非线性特征值问题求解器。这些方法源自用于线性特征值问题的 Sakurai–Sugiura 算法 [36] 。为简单起见，考虑一个厄米矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，其$m$ 特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 位于 Ω 内，其余特征值 $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$ 位于闭包 $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ 外，对应于一组标准正交特征向量 $\mathbf{v}1, \ldots, \mathbf{v}_n$。于是，A 的预解式可分解为

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{z-\lambda_j}\mathbf{v}_j\mathbf{v}_j^*\right) + \left(\sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{z-\lambda_j}\mathbf{v}_j\mathbf{v}_j^*\right), \tag{2}$$

其中 $\cdot^*$ 表示共轭转置。式（2）中的第一项求和包含 Ω 中预解式的所有极点（A的特征值）；因此，第二项求和在 Ω 中解析。沿边界 $\partial\Omega$ 积分并应用柯西定理后，可以利用在 Ω 上解析的函数 f 来获取所需特征值的信息：

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Omega} f(z)(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} f(\lambda_j)\mathbf{v}_j\mathbf{v}_j^*.$$

*由美国国家科学基金会项目 DMS-2411141 资助。弗吉尼亚理工大学数学系，地址：弗吉尼亚州布莱克斯堡 Stanger 街 225 号，邮编 24061（balicki@vt.edu，embree@vt.edu，gugercin@vt.edu）

围道积分方法通常使用 $f(z) = z^k$ 来计算预解式所需部分的矩。文献 [15] 中提出的几种变体使用 $f(z) = 1/(z-\sigma)^k$，由此与系统辨识和有理插值建立了联系。

Asakura 等人将围道积分特征值求解器推广到了非线性特征值问题。[7]Beyn 也进行了这项工作。[11]事实上，Beyn 在阐述其方法时引用了 Keldysh 提出的一个定理[1]，该定理是在研究线性算子时提出的 [27,28],，可视为分解（2）的推广；同时期 Gohberg 和 Sigal 的研究也可供参阅 [22]。对于解析矩阵值函数，Keldysh 定理将$\mathbf{T}(z)^{-1}$ 表示为

$$\mathbf{T}(z)^{-1} = \mathbf{H}(z) + \mathbf{N}(z), \tag{3}$$

其中，$\mathbf{N}$ 在 Ω 中解析，而$\mathbf{H}$ 是一个有理函数，其极点和留数编码了特征值与特征向量的信息。下一节将讨论 Keldysh 定理的细节，以及如何利用该定理求解非线性特征值问题。

在许多实际应用中，我们感兴趣的不仅是求解单个非线性特征值问题，还希望研究当改变影响$\mathbf{T}$的参数时，特征值和特征向量如何变化。例如，参数化非线性特征值问题（pNLEVP）可能取决于时滞微分方程中的时滞、机械设计问题中的材料性质，或周期系统中的弗洛凯参数。为了定义 pNLEVP，我们考虑$\mathbf{T}$：$\mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n\times n}$，并假设给定参数集 $\mathcal{P} \subset \mathbb{C}$ 以及感兴趣的谱域 $\Omega \subset \mathbb{C}$。随后，我们旨在求出特征值 $\lambda(p) \in \Omega$ 和非零特征向量$\mathbf{v}(p) \in \mathbb{C}^n$，使得

$$\mathbf{T}(\lambda(p), p)\mathbf{v}(p) = \mathbf{0} \tag{4}$$

对于每个参数 $p \in \mathcal{P}$。解决这一任务的一种方法是反复使用任意标准的非线性特征值问题求解器求解 $\mathbf{T}(\cdot, p) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n\times n}$，并固定每个所需的 p 值。这种方法计算量很大，尤其是在必须针对许多参数值进行求解时。我们希望避免这种重复过程，因为它也可能掩盖特征值和特征向量随 p 变化的规律。我们提出一种更高效的方法：先投入一些初始工作（离线阶段），计算出参数化非线性特征值问题的紧凑表示，以便随后能够快速提取任意给定 $p \in \mathcal{P}$ 下 $\lambda(p)$ 和 $\mathbf{v}(p)$ 的近似值（在线阶段）。我们的方法基于将矩阵值函数的 Keldysh 定理推广到参数依赖情形。我们推导出如下形式的分解

$$\mathbf{T}(z, p)^{-1} = \mathbf{H}(z, p) + \mathbf{N}(z, p),$$

其中，对于所有 $p \in \mathcal{P}$，$\mathbf{H}(\cdot, p)$ 的极点对应于 Ω 中的特征值 $\lambda(p)$，而 $\mathbf{N}(\cdot, p)$ 在 Ω 中解析。我们的一个关键贡献是运用多复变函数论中的技巧，明确函数$\mathbf{H}$和 $\mathbf{N}$ 关于 z 和 p 的性质。这一新颖结果为分析参数化非线性特征值问题提供了有力的理论工具，并构成了我们所提出数值方案的基础。

文献中已提出许多求解参数化线性与非线性特征值问题的方法。例如，基于延续的方法旨在追踪随参数变化的单个或多个特征值（或不变子空间）[10,12–14]。简化来说，这些算法将 $\lambda(p$视为参数化曲线，并利用过去参数值处的导数信息来近似新参数值 $\lambda(p$处的 p。然后通过迭代算法对近似结果进行校正。如果 $\lambda(p$足够光滑，则预期特征值延续会取得良好效果。然而，特征值曲线的整体光滑性并不总能得到保证；在具有物理意义的参数值处，有时会出现退化。延续算法必须特别谨慎地处理不可微行为。另一种常见的参数化非线性特征值问题求解方法是利用 λ [1, 29, 35]的多项式近似。同样，特征值的光滑性对于保证存在良好的近似至关重要。

受参数化 Keldysh 分解的启发，我们的算法方法与前文提及的大多数方法不同，因为它近似特征值的隐式表示。我们近似的是$\mathbf{H}$ 本身，它编码了所需的特征值和特征向量，而不是计算特征值曲线的显式参数化表示。对于新的参数值，可以据此快速从$\mathbf{H}$中提取感兴趣的特征值。该方法能够有效且自动地处理 λ已知会表现出非光滑行为的情况。

[1]该结果于 1951 [27], 公布，但直到 1971 [28]才得到详细阐述。Gohberg [21] 为这段时间间隔提供了历史背景，解释说，在此期间，Keldysh 忙于在苏联太空计划中担任一项重要的秘密职务。

2. 组织与背景

我们的两项主要贡献是定理 2，该定理引入参数化 Keldysh 分解并确立其关键性质；以及一种基于该分解、用于求解 pNLEVP 的数值框架。本节简要回顾非参数化问题的 Keldysh 定理（第 2.1 节）和围道积分方法（第 2.2 节）。第3 节给出了 Keldysh 定理的参数化版本。在第 4 节和 5 节中，我们基于参数化 Keldysh 分解，为解决 pNLEVP 提出并构建了一种新颖的算法。第6 节中的数值示例展示了所提方法的有效性。第 7 节总结全文，并指出若干可能的未来研究方向。

2.1. Keldysh 分解

我们首先讨论特殊情形下的 Keldysh 定理，其中 $\mathbf{T}$ 是一个仅具有简单特征值的矩阵值函数。例如，参见 [24, 定理 2。8]。

定理1 （Keldysh）。 设 $\mathbf{T}:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}^{n\times n}$ 是区域 $\Omega\subset\mathbb{C}$上的解析矩阵值函数，且 $\det(\mathbf{T}(\cdot))\not\equiv 0$。假设 $\mathbf{T}$ 在 Ω 中具有 m 个简单特征值，记为λ_1、……、λ_m，其对应的左、右特征向量分别构成 $\mathbf{V}=[\mathbf{v}_1$、……、$\mathbf{v}_m]\in\mathbb{C}^{n\times m}$和 $\mathbf{W}=[\mathbf{w}_1$、……、$\mathbf{w}_m]\in\mathbb{C}^{n\times m}$的列。则

$$\mathbf{T}(z)^{-1}=\mathbf{V}(z\mathbf{I}-\mathbf{J})^{-1}\mathbf{W}^{*}+\mathbf{N}(z),$$

其中，$\mathbf{J}=\operatorname{diag}(\lambda_1$、……、$\lambda_m)$，且 $\mathbf{N}$ 在 Ω上解析。特征向量经过归一化，使得 $\mathbf{w}_j^{*}\mathbf{T}'(\lambda_j)\mathbf{v}_j=1$。

Keldysh 定理的一个关键洞见是，$\mathbf{T}(\cdot)^{-1}$ 可以分解为两部分之和：一个有理函数

$$\mathbf{H}(z)=\mathbf{V}(z\mathbf{I}-\mathbf{J})^{-1}\mathbf{W}^{*} \tag{5}$$

该有理函数编码了感兴趣区域内特征值和特征向量的信息，以及一个函数 $\mathbf{N}(z)$，它在 Ω 中解析，并且不包含所需特征值的信息。更确切地说，$\mathbf{H}$ 具有 m 个极点，它们对应于特征值 λ_1、……、λ_m，并且具有矩阵值留数，从而在 $\mathbf{H}$ $\lambda_j)=\mathbf{v}_j\mathbf{w}_j^{*}$ 是一个简单特征值时揭示 Res(λ_j 。在第 2.2节中，我们将回顾 [15], 中介绍的多点 Loewner 框架，该框架重构了构成 $\mathbf{H}$ 的各个矩阵 $\mathbf{J}$、$\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{W}$ （即 Ω 中 $\mathbf{T}$ 的特征值和特征向量），如式（5）所示。

在进入这一计算框架之前，我们指出，定理 1 可以推广以处理缺陷特征值（见附录 3 中的定理 A，以及 [24]中的更多细节）。对角矩阵 $\mathbf{J}$ 被 Jordan 矩阵取代，而 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{W}$ 的列由广义特征向量构成；特征向量的归一化条件也变得更加复杂。这一推广对于参数化非线性特征值问题具有重要意义，因为在大量示例中，缺陷特征值会在某些参数值处出现。即使存在复杂的 Jordan 结构，我们的主要结果和算法仍然适用（示例 2×2 2 中的一个 Jordan 块以及第 6节中的数值处理对此作了部分演示）。定理 1 中的简化表述旨在清晰地传达主要思想。

2.2. 通过围道积分和有理插值求解非线性特征值问题

在此，我们重新探讨如何利用多点 Loewner 框架来近似 $\mathbf{T}$ [15] 的特征值和特征向量。仅给定$\mathbf{T}(z)$ 的情况下，我们可以利用分解(3)计算 $\mathbf{H}(z)$。该框架采用了两个关键思路：

- 我们可以通过计算积分，在 $\theta\notin\Omega$ 处求出$\mathbf{H}$ 的值

$$\mathbf{H}(\theta)\ =\ \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\theta-z}\mathbf{T}(z)^{-1}\,\mathrm{d}z;$$

- 借助系统辨识中的工具，我们可以通过对一组（足够丰富的）样本进行有理插值来构造 $\mathbf{J}$,$\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{W}$ ： $\{\mathbf{H}(\theta_1)\ldots,\mathbf{H}(\theta_r)\}$。

让我们考虑某个 $\theta \notin \Omega$，以此聚焦于第一点：

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\theta - z} \mathbf{T}(z)^{-1} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\theta - z} \mathbf{H}(z) \, \mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\theta - z} \mathbf{N}(z) \, \mathrm{d}z.$$

注意到，$\mathbf{N}(z)$ 和 $1/(\theta - z)$ 在 Ω 中均为解析函数，因此由柯西定理可得

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\theta - z} \mathbf{N}(z) \, \mathrm{d}z = 0.$$

此外，柯西积分公式表明

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\theta - z} \mathbf{H}(z) \, \mathrm{d}z = \mathbf{V} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\theta - z} (z\mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1} \mathrm{d}z \right) \mathbf{W}^* = \mathbf{V}(\theta \mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1} \mathbf{W}^* = \mathbf{H}(\theta).$$

结合这些观察可得

$$\mathbf{H}(\theta) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\theta - z} \mathbf{T}(z)^{-1} \, \mathrm{d}z. \tag{6}$$

可以使用数值求积近似该积分，从而得到近似样本 es
$\mathbf{H}$。对于节点为 $z_1, \ldots, z_N$、权重为 $w_1, \ldots, w_N$ 的求积公式，

$$\mathbf{H}(\theta) \;=\; \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\theta - z} \mathbf{T}(z)^{-1} \, \mathrm{d}z \;\approx\; \sum_{k=1}^{N} \frac{w_k}{\theta - z_k} \mathbf{T}(z_k)^{-1}. \tag{7}$$

第二个关键思路是运用系统理论中的一项重要工具，即 Mayo 和 Antoulas 的 Loe
wner 框架 [6, 30]。方程 (7) 表明我们需要计算显式逆矩阵 $\mathbf{T}(z_k)^{-1}$。实际上，Loewner 框架只需要关于$\mathbf{H}(z$ 的切向样本。假设我们有一组左、右探测方向

$$\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_r \in \mathbb{C}^n \qquad \text{and} \qquad \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_r \in \mathbb{C}^n,$$

以及左侧和右侧采样点

$$\theta_1, \ldots, \theta_r \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega} \qquad \text{and} \qquad \sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}.$$

在温和条件下，Loewner 框架可从数据中精确恢复$\mathbf{H}(z)$

$$\boldsymbol{\ell}_1^\top \mathbf{H}(\theta_1), \ldots, \boldsymbol{\ell}_r^\top \mathbf{H}(\theta_r) \qquad \text{and} \qquad \mathbf{H}(\sigma_1)\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{H}(\sigma_r)\mathbf{r}_r.$$

使用求积公式 (7) 计算这些样本时，只需求解以下形式的线性方程组：$\mathbf{T}(z_k)^\top \mathbf{b} = \boldsymbol{\ell}_j$ 以及 $\mathbf{T}(z_k)\mathbf{c} = \mathbf{r}_j$ （以计算 $\mathbf{b}^\top = \boldsymbol{\ell}_j^\top \mathbf{T}(z_k)^{-1}$ 和 $\mathbf{c} = \mathbf{T}(z_k)^{-1}\mathbf{r}_j$）。为了使计算过程成功，必须满足关于探测方向和采样点数量及选择的一些基本要求 [15]。通常，我们使用从标准高斯分布中随机采样的探测方向，这类似于随机数值线性代数中的草图化。完整过程总结于算法 1 中。

尽管算法 1中的这一点可能并不明显，但有理插值在多点 Loewner 框架中发挥着关键作用。算法的第 2 步构造式 (8) 中定义的 Loewner 矩阵$\mathbb{L}$ 和移位 Loewner 矩阵 $\mathbb{L}_s$，第 5 步则构造式 (10) 中的 数据矩阵 $\mathbf{B}$ 和$\mathbf{C}$ 。为了更清楚地说明有理插值这一方面，假设 Loewner 矩阵 $\mathbb{L}$ 和 $\mathbb{L}_s$ （见式 (8) ）均为满秩。在这种情况下，我们可以跳过式 (9) 中的奇异值分解计算，而有理函数

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(\mathbb{L}_s - z\mathbb{L})^{-1}\mathbf{B}$$

是 关于 $\mathbf{H}(z)$ 的切向插值函数，这意味着它满足

$$\boldsymbol{\ell}_i^\top \mathbf{G}(\theta_i) = \boldsymbol{\ell}_i^\top \mathbf{H}(\theta_i) \quad \text{and} \quad \mathbf{G}(\sigma_j)\mathbf{r}_j = \mathbf{H}(\sigma_j)\mathbf{r}_j,$$

在基本假设 [15]下。要使 $\mathbf{G}$ 精确恢复有理函数 $\mathbf{H}$ 的一个必要条件是， $\mathbb{L}$ 的秩恰好等于 $\mathbf{T}$ 在 Ω 中的特征值个数。在这种情况下（仍假设 $\mathbb{L}$ 和 $\mathbb{L}_s$ 均为满秩，因此 $\mathrm{rank}(\mathbb{L}) = \mathrm{rank}(\mathbb{L}_s) = m$），我们可以写成

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(\mathbb{L}_s - z\mathbb{L})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{V}(z\mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1}\mathbf{W}^* = \mathbf{H}(z).$$

由于我们关注的是特征值的精确恢复，因此取足够大的插值点数量 r，以确保 $r \geq m =$ rank($\mathbb{L}$) =rank($\mathbb{L}_s$)，其中 m 是 Ω 中的特征值数量（计入重数）。

算法 1 NLEVP 多点 Loewner 算法 [15]；参见 [30]

输入： $\mathbf{T}$：$\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{n\times n}$，$\Omega\subset\mathbb{C}$，$(\theta_j,\ \boldsymbol{\ell}_j)$，$(\sigma_j,\ \mathbf{r}j)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ 对于 $j=1,\ldots,\ r$ **输出：** $\mathbf{J},\ \mathbf{V},\ \mathbf{W}$

1: 通过求积近似，对 $j=1,\ \ldots,\ r$，

$$\boldsymbol{\ell}_j^{\top}\mathbf{H}(\theta_j)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\theta_j-z}\boldsymbol{\ell}_j^{\top}\mathbf{T}(z)^{-1}\mathrm{d}z,\quad \mathbf{H}(\sigma_j)\mathbf{r}_j=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\sigma_j-z}\mathbf{T}(z)^{-1}\mathbf{r}_j\,\mathrm{d}z.$$

2: 通过以下元素构造 Loewner 矩阵 $\mathbb{L},\ \mathbb{L}_s\in\mathbb{C}^{r\times r}$

$$(\mathbb{L})_{ij}=\frac{\boldsymbol{\ell}_i^{\top}[\mathbf{H}(\theta_i)-\mathbf{H}(\sigma_j)]\mathbf{r}_j}{\theta_i-\sigma_j}\quad\text{and}\quad(\mathbb{L}_s)_{ij}=\frac{\boldsymbol{\ell}_i^{\top}[\theta_i\mathbf{H}(\theta_i)-\sigma_j\mathbf{H}(\sigma_j)]\mathbf{r}_j}{\theta_i-\sigma_j}.\tag{8}$$

3: 计算约化奇异值分解，其中 $\boldsymbol{\Sigma},\ \boldsymbol{\Sigma}_s\in\mathbb{R}^{m\times m}$：

$$\mathbf{X}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{Y}^{*}=\begin{bmatrix}\mathbb{L} & \mathbb{L}_s\end{bmatrix}\qquad\text{and}\qquad\mathbf{X}_s\boldsymbol{\Sigma}_s\mathbf{Y}_s^{*}=\begin{bmatrix}\mathbb{L}\\ \mathbb{L}_s\end{bmatrix}.\tag{9}$$

4: 对 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{m}$ 和 $\{\mathbf{s}_j\}_{j=1}^{m}$ 求解广义特征值问题：

$$(\mathbf{X}^{*}\mathbb{L}_s\mathbf{Y}_s)\,\mathbf{s}_j=\lambda_j\,(\mathbf{X}^{*}\mathbb{L}\mathbf{Y}_s)\,\mathbf{s}_j\quad\rightarrow\quad\mathbf{J}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m).$$

5: 构造分块矩阵

$$\mathbf{B}^{\top}=\begin{bmatrix}\mathbf{H}(\theta_1)^{\top}\boldsymbol{\ell}_1 & \cdots & \mathbf{H}(\theta_r)^{\top}\boldsymbol{\ell}_r\end{bmatrix}\ \text{and}\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{H}(\sigma_1)\mathbf{r}_1 & \cdots & \mathbf{H}(\sigma_r)\mathbf{r}_r\end{bmatrix}.\tag{10}$$

6: 使用 $\mathbf{S}=[\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_m]\in\mathbb{C}^{m\times m}$ 计算 $\mathbf{T}(z)$ 的特征向量：

$$\mathbf{V}=\mathbf{C}\mathbf{Y}_s\mathbf{S}\quad\text{and}\quad\mathbf{W}^{*}=-\mathbf{S}^{-1}\,(\mathbf{X}^{*}\mathbb{L}\mathbf{Y}_s)^{-1}\,\mathbf{X}^{*}\mathbf{B}.$$

注 1. *Mayo–Antoulas Loewner* 框架能够精确恢复矩阵值有理函数。因此，如果对积分进行精确计算，而不是通过数值求积进行近似，并且采用精确算术，那么定理 $\mathbf{V}$,$\mathbf{W}$和 $\mathbf{J}$ 中的矩阵 *1* 都能被精确恢复。若将算法 *3*第 *4* 步中的特征值问题替换为 *Jordan* 标准形的计算，这一结论甚至对定理 *1*中的一般分解也成立。此外，定理 *3*所述的特征向量归一化也会自动满足。然而，*Jordan* 形的数值求解众所周知极具挑战性（当代方法见 *[34]*），而求积误差和舍入误差意味着在实际应用中几乎不可能精确恢复 $\mathbf{H}$ 的 *Jordan* 结构。

注 2. 自 *Mayo–Antoulas Loewner* 框架问世以来 *[30]*, ，文献中出现了若干种等价表述。算法*1* 采用的是较新的表述 *[4, 6]*, ，而非原始工作 *[30]* 以及文献 *[15]*中针对非线性特征值问题所用的版本。虽然这些方法在理论上等价，但由于底层实现存在差异，它们在实践中的数值结果会有所不同。

Antoulas 和 *Anderson* 于 *1986* 年提出的有理插值方法 *[3]* 也常被称为*“Loewner* 框架”。该方法旨在计算标量值有理插值函数，与 *2007*年引入的 *Mayo–Antoulas Loewner* 框架有根本区别；后者基于切向样本计算矩阵值有理函数。*Antoulas–Anderson* 框架可通过参数化 *Loewner* 框架自然扩展到参数化系统 *[25]*, ，该框架在第*4* 节和第*5*节的算法发展中发挥重要作用。目前尚无 *Mayo–Antoulas* 框架的参数化扩展。

3. 将 Keldysh 定理扩展到参数化情形

为了将上一节提出的思路用于求解参数化非线性特征值问题，我们首先尝试将定理1 推广到参数化情形。为此，我们先回顾一些

与参数化非线性特征值问题相关的先前工作。关于线性情形的理论

$$\mathbf{T}(z,p) = z\mathbf{I} - \mathbf{A}(p),$$

其中，$\mathbf{A}$是一个矩阵值解析函数，这一情形已得到充分理解；经典特征值扰动理论描述了对 p [9, 26]进行渐近微小改变所产生的影响。关于$\mathbf{T}(z,p)^{-1}$ 的极点-留数形式，以及参数 p 与$\mathbf{A}$ 的特征值和特征向量之间的关系，均已得到深入研究。我们将利用这些结果来突出一些特殊情形（例如特征值和特征向量存在分支点或奇点的情况），但主要讨论$\mathbf{T}(z,p)$ 对 z具有任意解析依赖关系的情形。这种更一般的情形受到的关注要少得多，尽管已有一些研究得出了一些结果，但仅限于特征值均为简单或半单的情形，例如 [2]。因此，接下来的讨论将揭示我们所知尚未在其他地方探讨过的 pNLEVP 结构特征。

3.1. 逐点分解

我们首先介绍定理 1 的一个初步参数化版本。本命题中的陈述并未就我们所关注的、关于依赖于 p 的性质，提供更深层次的洞见。不过，我们列出这一初步结果，以便将其与接下来的主要定理进行对比。

命题 *1.* 设 $T: \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{n\times n}$ 是一个矩阵值函数，使得对于每个 $p\in\mathcal{P}\subset\mathbb{C}$，我们都有：*(1) T(·, p)* 在区域 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 中解析，且 $\det(T(\cdot,p))\not\equiv 0$；*(2) T(·, p)* 在 Ω 中具有 m 个简单特征值，记为 $\lambda_1(p),\dots,\lambda_m(p)$，其相应的左、右特征向量分别构成 $V(p)=[v_1(p),\dots,v_m(p)]\in\mathbb{C}^{n\times m}$ 和 $W(p)=[w_1(p),\dots,w_m(p)]\in\mathbb{C}^{n\times m}$ 的列。则

$$\mathbf{T}(z,p)^{-1} = \mathbf{V}(p)(z\mathbf{I}-\mathbf{J}(p))^{-1}\mathbf{W}(p)^{*} + \mathbf{N}(z,p), \tag{11}$$

其中，$J(p)=\mathrm{diag}(\lambda_1(p),\dots,\lambda_m(p))$，且 $N(\cdot,p)$ 在 Ω 中解析。特征向量经过归一化，使得 $w_j(p)^{*}T_j(p)v_j(p)=1$，其中 $T_j(p)=\frac{\partial}{\partial z}T(z,p)\Big|_{z=\lambda_j}(p)$。 —

证明。 这些假设使我们可以将定理 1 应用于 $\mathbf{T}(\cdot,p)$ 对每个 $p\in\mathcal{P}$成立，从而直接得到具有所述性质的分解式（11）。 □

我们强调，该命题是一个逐点结果，也就是说，传统的 Keldysh 分解仅在固定参数值 $p\in\mathcal{P}$ 处应用。通过采用定理 3 中完整形式的 Keldysh 分解，我们可以将该结果扩展到这样的情形：对于某些 $p\in\mathcal{P}$，$\mathbf{T}(\cdot,p)$ 具有多个特征值（前提是 Ω 中特征值的代数重数之和对所有 $p\in\mathcal{P}$ 均保持不变）。关键在于，该命题并未对函数 J、V 和 W 的重要性质（例如连续性和光滑性）作出任何断言。一般而言，对于代数重数大于一的 $\lambda_j(p)$，λ_j、$\mathbf{v}_j$ 和 $\mathbf{w}_j$ 在参数 $p\in\mathcal{P}$ 处可能具有奇点或分支点。 [2] 中讨论了这种情形，并在例1中加以说明。分支点给许多参数化非线性特征值问题求解器带来了挑战（例如参见 [12, 14, 35]），因此必须格外谨慎地准确检测分支点。我们提出了一种算法，无需任何额外的计算步骤或先验知识，即可自然地处理这些关键情形。其核心将是对 Keldysh 分解作真正的参数化扩展。

例1. 考虑如下线性参数化特征值问题：

$$\mathbf{T}(z,p) = z\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0&1&0\\1-p&0&0\\0&1&p\end{bmatrix},$$

其参数集为 $\mathcal{P}=[0.75,1.25]\subset\mathbb{R}$，特征值域为 $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<0.6\}$。对于该问题，我们有

$$\det(\mathbf{T}(z,p)) = (p-z)(1-p-z^2).$$

特征值由上述多项式的零点给出：

$$\lambda_1(p)=p,\quad \lambda_2(p)=+\sqrt{1-p},\quad \textit{and}\quad \lambda_3(p)=-\sqrt{1-p}.$$

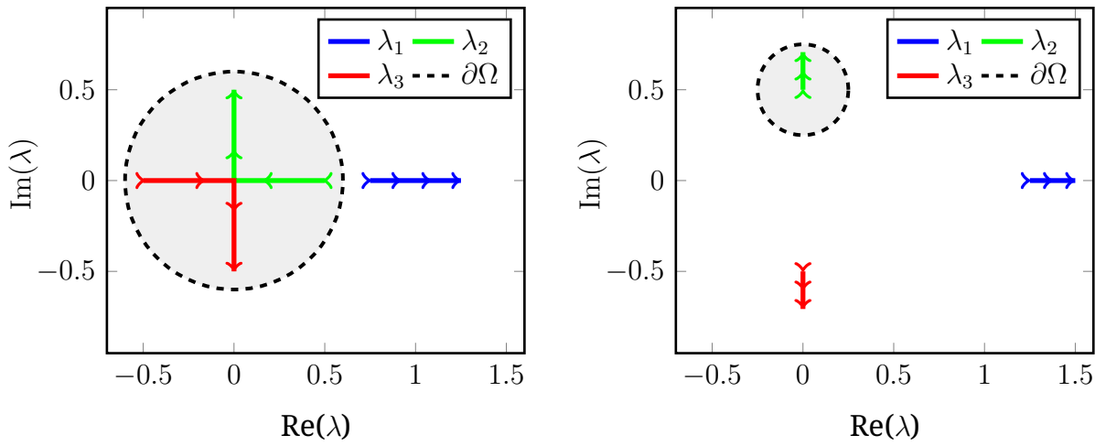

图1：例1和例2的第一种设置中的特征值（ $\mathcal{P} = [0.75, 1.25]$）（左图），以及例2的第二种设置中的特征值（ $\mathcal{P} = [1.25, 1.5]$ ）（右图）。特征值以参数化曲线的形式表示，其中 p 从 $\mathcal{P}$的下界变化至上界。在第一种情况下（左图），当 $p = 1$时，特征值 $\lambda_2(p) = \sqrt{1-p}$ 和$\lambda_3(p) = -\sqrt{1-p}$ 在原点重合： λ_2，且 λ_3 出现分支点，导致 $z = 0$处的行为不光滑。然而，参数化 Keldysh 分解（定理 2）给出了一个有理函数 $\mathbf{H}$。原点处的临界点由 $\mathbf{H}$ 的分母中的多项式 $u(z, p) = 1 - p - z^2$ 捕获；该多项式的零点为特征值 λ_2 和 λ_3。第二种情况下（右图），Ω 中仅包含一个解析分支，因此 $\mathbf{H}$ 必然对 p具有非有理依赖关系。

对于 $p \in \mathcal{P}$，只有特征值 $\lambda_2(p)$ 和 $\lambda_3(p)$ 位于 Ω 内，如图 *1* 左图所示。这些特征值在 $p = 1$处有一个分支点，此时 $\mathbf{T}$具有一个代数重数为 2 的亏损特征值。对于 $p \in \mathcal{P} \setminus \{1\}$，命题 **1** 中给出的 *Keldysh* 分解的函数 H 可写为

$$\mathbf{H}(z,p) = \mathbf{V}(p)\Bigg(z\mathbf{I} - \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & -\sqrt{1-p} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{J}(p)}\Bigg)^{-1} \mathbf{W}(p)^*,$$

其中

$$\mathbf{V}(p) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{p}{\sqrt{1-p}} & \frac{p}{\sqrt{1-p}} + 1 \\ \sqrt{1-p} - p & -p - \sqrt{1-p} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}(p) = \begin{bmatrix} -\frac{(p+\sqrt{1-p})\sqrt{1-p}}{2(p^2+p-1)} & -\frac{p+\sqrt{1-p}}{2(p^2+p-1)} \\ \frac{(p-\sqrt{1-p})\sqrt{1-p}}{2(p^2+p-1)} & -\frac{p-\sqrt{1-p}}{2(p^2+p-1)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

而对于 $p = 1$，我们有

$$\mathbf{H}(z,1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{V}(1)} \Bigg(z\mathbf{I} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{J}(1)}\Bigg)^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^*}_{=\mathbf{W}(1)}.$$

函数 $\mathbf{J}$、$\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{W}$ 在 $p = 1$ 处都有一个分支点。请注意，由于 $\mathbf{J}(1)$ 中出现了 *Jordan* 块，$\mathbf{J}$ 的右上角元素是不连续的；函数 $\mathbf{V}$ 和$\mathbf{W}$ 在 $p = 1$ 处也不连续。

3.2. 参数化 Keldysh 分解

作为我们的主要理论结果，我们希望证明可以将其写为

$$\mathbf{T}(z,p)^{-1} = \mathbf{H}(z,p) + \mathbf{N}(z,p),$$

使得 $\mathbf{H}$ 是两个解析函数之商，其分母的零点恰好与 Ω 中 $\mathbf{T}(\cdot, p)$ 的特征值 $\lambda_1(p) \ldots, \lambda_m(p)$ 重合。由上述讨论可知

在 [2] 中，这种 $\mathbf{T}(z,p)^{-1}$ 的分解在所有特征值均为单重时成立，但当存在重数时，为何这样的 $\mathbf{H}$ 应当存在却远非显而易见。事实上， 中函数 $\mathbf{J}$、$\mathbf{V}$和 $\mathbf{W}$ 存在分支点，这使得下面的结果颇为有趣。该定理针对参数 $p \in \Pi$，其中 $\Pi \subset \mathbb{C}$ 是一个区域，而不是针对先前引入的参数集 $\mathcal{P}$。作此选择的动机在于需要 $\mathbf{T}$在复区域上是解析的；若 $\mathcal{P}$ 例如是一个实区间，这一点可能无法满足。由于可以将 Π 取为一个仅略微包含 $\mathcal{P}$的区域，这一附加假设并不过于严格。

定理 2 （参数化 Keldysh）。假设$\mathbf{T}: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ 在区域$\Omega\times\Pi$内解析。对所有 $p \in \Pi$，假设 $\mathbf{T}(\cdot, p)$ 在区域Ω 内恰有 m 个特征值（按代数重数计），且$\det(\mathbf{T}(\cdot, p)) \not\equiv 0$。那么我们可以写成

$$\mathbf{T}(z,p)^{-1} = \mathbf{H}(z,p) + \mathbf{N}(z,p), \tag{12}$$

其中，对所有 $p \in \Pi$，函数 $\boldsymbol{N(\cdot, p)}$ 在 $\boldsymbol{\Omega}$ 内解析，$\boldsymbol{H(\cdot, p)}$ 是有理函数，并且可以将 $\boldsymbol{H(z,p)}$ 写成 $= \boldsymbol{R(z,p)/u(z,p)}$，其中 $\boldsymbol{R}: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $u: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 在 $\boldsymbol{\Omega} \times \Pi$ 内解析。此外，对所有 $p \in \Pi$，次数为 m 的多项式 $\boldsymbol{u(\cdot, p)}$ 的零点等于 $\boldsymbol{\Omega}$ 内 $\boldsymbol{T(\cdot, p)}$ 的 m 个特征值，并且我们有

$$\mathbf{H}(z,p) = \mathbf{V}(p)\,(z\mathbf{I} - \mathbf{J}(p))^{-1}\,\mathbf{W}(p)^*,$$

其中 $\mathbf{J}(p)$、$\mathbf{V}(p)$ 和 $\mathbf{W}(p)$ 由特征值（*Jordan* 块）和（广义）特征向量构成，如定理 *3*所述。最后，若对所有 $p \in \Pi$，$\mathbf{T}(\cdot, p)$ 在 Ω 内的所有特征值均为单特征值，则 $\mathbf{J}$、$\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{W}$ 在 Π内解析。

我们概述定理 2 的证明的关键步骤。（完整证明及相关背景材料见附录 C。）证明依赖于多复变函数论中的两个基本结果：魏尔斯特拉斯准备定理和 Weierstrass 除法定理 [18, 23]。首先，我们证明可以写成

$$\mathbf{T}(z,p)^{-1} = \frac{\mathbf{P}(z,p)}{u(z,p)},$$

其中，$\mathbf{P}(z,p)$ 在 $\Omega \times \Pi$中是解析函数，而 $u(z,p)$ 是关于 z 的 m 次多项式，并且在 p 中解析，使得 $\mathbf{T}$ 在 $\Omega \times \Pi$ 中的奇点（即特征值）恰好与 u 在 $\Omega \times \Pi$ 中的零点重合。该结果由恒等式推出

$$\mathbf{T}(z,p)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(\mathbf{T}(z,p))}{\det(\mathbf{T}(z,p))},$$

Weierstrass 准备定理以及解析延拓论证。类似地，Weierstrass 除法定理和解析延拓使我们能够写成

$$\mathbf{P}(z,p) = \mathbf{N}(z,p)\,u(z,p) + \mathbf{R}(z,p),$$

其中，$\mathbf{N}$ 和$\mathbf{R}$ 在 $\Omega \times \Pi$ 中是解析函数，而$\mathbf{R}(z,p)$ 是关于 z 的多项式。结合这些结果可得

$$\mathbf{T}(z,p)^{-1} = \frac{\mathbf{N}(z,p)\,u(z,p) + \mathbf{R}(z,p)}{u(z,p)} = \mathbf{N}(z,p) + \underbrace{\frac{\mathbf{R}(z,p)}{u(z,p)}}_{=\mathbf{H}(z,p)} = \mathbf{H}(z,p) + \mathbf{N}(z,p),$$

其中 $\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{H}$ 具有定理 2 中所述的性质。关于 $\mathbf{J}(p)$、$\mathbf{V}(p)$ 和 $\mathbf{W}(p)$ 的关系，可通过证明以下事实得到：对于每个固定的 p，$\mathbf{H}(z,p)$ 关于 z 的 Laurent级数，恰好与命题 1 的逐点参数化Keldysh分解中出现的函数 $\mathbf{V}(p)(z\mathbf{I} - \mathbf{J}(p))^{-1}\mathbf{W}(p)^*$ 的 Laurent级数一致。

定理 2 揭示了 $\mathbf{H}$ 如何依赖于 p，即使在 p 处，$\mathbf{T}(\cdot, p)$ 在 Ω 中各个特征值的代数重数发生变化时，它相较于命题 1 中逐点结果的主要优势仍然存在。我们注意到，对于每个 $p \in \Pi$，假设 $\mathbf{T}$ 在 Ω 中恰好具有 m 个特征值（对所有代数重数求和），对于确保矩阵 $\mathbf{J}(p)$、$\mathbf{V}(p)$ 和$\mathbf{W}(p)$ 的维数一致，以及确保底层函数在 $p \in \Pi$ 上有明确定义，至关重要。

在非参数情形下，算法 1 可以通过 Loewner 框架精确恢复 Ω 中的特征值，因为 $\mathbf{H}$ 是一个有理函数。在参数化情形下，通过参数化 Loewner 框架 [25]，同样可以精确恢复标量值有理函数。然而，一般而言，定理 $\mathbf{H}$ 2中的 H 是关于第一变量 z 的有理函数，但关于参数 p仅是解析函数。于是，如果我们的目标是特征值精确恢复，就会产生一个重要问题：什么时候 $\mathbf{H}$ 同时关于 z 和 p是有理函数? 如果是这样，我们就可以（至少在理论上）精确恢复参数化特征值，正如将在接下来的两节中讨论的那样。下面的引理将回答这一问题。

引理1。 假设 $\mathbf{T}:\ \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足定理 2的假设。对于给定的 Ω 和 Π，令 $\mathbf{H}$ 为参数化 *Keldysh* 分解 (12)中的函数。如果$\mathbf{H}$ 是关于两个变量 z 和 p的有理函数，那么存在一个二元多项式$u:\ \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 以及一个解析函数 $h:\ \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 使得

$$\det(\mathbf{T}(z,p))=u(z,p)h(z,p),$$

并且，对于所有 $p\in\Pi$，$\mathbf{T}(\cdot,p)$ 在Ω 中的 m 特征值等于 $u(\cdot,p)$ 的零点。

上述引理给出了$\mathbf{H}$关于 z 和 p均为有理函数的必要条件。要建立$\mathbf{T}$使 $\mathbf{H}$ 为有理函数的充分条件，还需要对其作出额外假设。沿用附录 C.2中的证明，并将（30）中的魏尔斯特拉斯多项式（其系数是 p中的任意解析函数）替换为引理中引入的二元多项式 u，即可轻松验证该引理的陈述。下面的例 2 展示了同一个 $\mathbf{T}(z,p)$ 可根据 Ω 和 $\mathbf{H}$ 的选择，得到有理或无理的 $\mathbf{H}$。 $\mathcal{P}$。

例2。 这里我们重新讨论例 1中提出的问题，并首先研究其关于 $\mathcal{P}=[0.75,1.25]\subset\mathbb{R}$ 和 Ω $=\{z\in\mathbb{C}$ 的参数化 Keldysh 分解： $|z|<0.6\}$。我们有 $\mathbf{T}(z,p)^{-1}=\mathbf{H}(z,p)+\mathbf{N}(z,p)$，其中

$$\mathbf{H}(z,p)=\frac{1}{z^2+p-1}\begin{bmatrix}z & 1 & 0\\ 1-p & z & 0\\ \dfrac{(p+z)(p-1)}{p^2+p-1} & \dfrac{-pz+p-1}{p^2+p-1} & 0\end{bmatrix},\tag{13}$$

and

$$\mathbf{N}(z,p)=\frac{1}{p-z}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \dfrac{p-1}{p^2+p-1} & \dfrac{-p}{p^2+p-1} & -1\end{bmatrix}.$$

注意，$\mathbf{H}$ 和$\mathbf{N}$ 都是 z 和 p的有理函数，尽管特征值$\pm\sqrt{1-p}$ （关于 p为无理数）包含在Ω中。对于这个 $\mathcal{P}$ 和Ω，这种情况是可能的，因为对于所有 $p\in\mathcal{P}$，Ω 中的特征值都由第二个多项式因子的零点捕获

$$\det(\mathbf{T}(z,p))=(z-p)(1-p-z^2).$$

此外，$\mathbf{N}$ *(*$p=z$,$(-1\pm\sqrt{5})/2$*)* 的奇点不在Ω $\times\,\mathcal{P}$中，并且$\mathbf{N}$ 显然在该集合的某个邻域内解析。$\mathbf{H}$ 和$\mathbf{N}$ 在Ω $\times\,\mathcal{P}$中都没有分支点。

不过，函数$\mathbf{H}$ 和$\mathbf{N}$ 对于此$\mathbf{T}(z,p)$并不总是有理的。假设 t 改为 $\mathcal{P}=[1.25,1.5]$ 和Ω $=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-0.5\mathrm{i}|<0.25\}$。在这种情况下，我们有

$$\mathbf{H}(z,p)=\frac{1}{z-\sqrt{1-p}}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2\sqrt{1-p}} & 0\\ \dfrac{\sqrt{1-p}}{2} & \dfrac{1}{2} & 0\\ \dfrac{-(p+\sqrt{1-p})\sqrt{1-p}}{2(p^2+p-1)} & \dfrac{-(p+\sqrt{1-p})}{2(p^2+p-1)} & 0\end{bmatrix},$$

当 $\mathbf{N}(z,p)$ 等于

$$\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2(z+\sqrt{1-p})} & \dfrac{-1}{2z\sqrt{1-p}-2p+2} & 0\\ \dfrac{-(p+\sqrt{1-p})(p-\sqrt{1-p})\sqrt{1-p}}{2(z+\sqrt{1-p})(p^2+p-1)} & \dfrac{1}{2(z+\sqrt{1-p})} & 0\\ \dfrac{p-1}{(p-z)(p^2+p-1)}+\dfrac{(p-\sqrt{1-p})\sqrt{1-p}}{2(z+\sqrt{1-p})(p^2+p-1)} & \dfrac{-(p+z)(p+\sqrt{1-p})}{2(z+\sqrt{1-p})(p-z)(p^2+p-1)} & \dfrac{1}{z-p}\end{bmatrix}.$$

这些函数不是有理函数，因为 $\Omega \times \Pi$ 仅捕获了作为 $\sqrt{1-p}$ 的正分支的特征值，即 $u(z,p) = 1 - p - z^2$ 的两个根之一。定理 *2* 中确立的解析性质对于 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{N}$ 在 $\Omega \times \mathcal{P}$ 的一个邻域内仍然成立，但这些函数在该邻域之外存在分支点。

图 *1* 展示了这两种情形下的特征值。

4. 动机：在理想情形下求解 pNLEVP

我们的下一个目标是阐明求解参数化非线性特征值问题的计算流程，并将在下一节中详细介绍。我们的算法受到 1中介绍的、用于非参数化非线性特征值问题的多点 Loewner 方法的启发。对于非参数化问题，我们可以将该算法概括为三个主要步骤。

1. 通过对 $\boldsymbol{\ell}^\top \mathbf{H}(z)$ 和 $\mathbf{H}(z)\mathbf{r}$ 进行围道积分，计算形式为 $\mathbf{T}(\cdot)^{-1}$ 的探测样本；使用数量适中的插值点 z 和探测向量 $\boldsymbol{\ell}$ 以及 $\mathbf{r}$。2. 使用 Mayo–Antoulas Loewner 框架 [30] ，基于这些探测样本精确地恢复有理矩阵函数 $\mathbf{H}$ 。3. 从 $\mathbf{H}$ 的实现中提取 Ω 内 $\mathbf{T}(z)$ 的特征值及相应的特征向量，如 [15,节 5]所述。

目前，我们假设轮廓积分可以精确求值，不存在任何求积误差。我们讨论如何将这一过程扩展到参数化情形。显然，对于每个所需的参数实例 $\widehat{p}$，我们可以直接对 $\mathbf{T}(\cdot,\widehat{p})$ 应用多点 Loewner 算法。然而，在需要针对大量参数值求特征值的应用中，这种方法的计算开销可能很大。如果 $\mathbf{T}(z,p)$ 是一个大矩阵，或者需要许多求积节点来近似 $\mathbf{H}(z,p)$ 的轮廓积分，那么步骤 1 中的采样将会昂贵得难以承受。因此，我们提出了一种不同的方法：它只需在“离线阶段”对 $\mathbf{T}$ 进行有限次求值，便能在“在线阶段”快速计算新参数值对应的特征值。理想情况下，参数化多点 Loewner 方法将遵循以下步骤。

1.（离线）通过对 $\mathbf{T}(\cdot,p)^{-1}$ 进行围道积分，计算形如 $\boldsymbol{\ell}^\top \mathbf{H}(z,p)$ 和 $\mathbf{H}(z,p)\mathbf{r}$ 的探测样本，所用插值点 z、参数值 p 和探测向量 $\boldsymbol{\ell}$ 及 $\mathbf{r}$ 的数量适中。2.（离线）使用 Mayo–Antoulas Loewner 框架的参数化版本，根据探测样本精确地恢复有理矩阵函数 $\mathbf{H}$。3.（在线）对于每个参数实例 $\widehat{p}$，计算实现 $\mathbf{H}(\cdot,\widehat{p})$，并从中提取 Ω 中 $\mathbf{T}(z,\widehat{p})$ 的特征值及其对应的特征向量。

这种“理想参数化多点 Loewner 方法”存在两个根本问题。首先，目前尚无已知的 Mayo–Antoulas Loewner 框架（或类似算法）的参数化版本，能够从探测数据中精确恢复一个矩阵值多元有理函数。其次，函数 $\mathbf{H}$ 一开始就未必是有理函数（如例2所示），在这种情况下，用有理函数精确恢复 $\mathbf{H}$ 并非可行目标。暂且假设 $\mathbf{H}$ 是有理函数，并着重解决前述两个问题中的第一个。尽管目前尚无已知算法能够从探测数据中精确恢复多元矩阵值有理函数，Ionita 和 Antoulas 提出的参数化 Loewner 插值框架 [25] 能够精确恢复标量值多元有理函数，并经过一些修改后，也能恢复向量值有理函数 [4, 第 6]章。正如下文所述，我们可以利用这些计算框架精确恢复 $\boldsymbol{\ell}^\top \mathbf{H}(z,\ p)$ 和 $\mathbf{H}(z,\ p)\mathbf{r}$，最终实现特征值精确恢复。为此，我们将“理想参数化多点 Loewner 方法”的第 2 步拆分为两个部分。

2.1.（离线）对于每个左探测方向 $\boldsymbol{\ell}$ 和右探测方向 $\mathbf{r}$，使用参数化 Loewner 框架计算向量值有理函数 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{R}$ ，使其能够精确恢复 $\mathbf{L}(z,\ p) := \boldsymbol{\ell}^\top \mathbf{H}(z,\ p)$ 和 $\mathbf{R}(z,\ p) := \mathbf{H}(z,\ p)\mathbf{r}$ ，其中 $\boldsymbol{\ell}$ 和 $\mathbf{r}$ 固定。

2.2.（在线）对于每个参数实例 $\widehat{p}$，计算实现 $\mathbf{L}(\cdot,\ \widehat{p})$ 和 $\mathbf{R}(\cdot,\ \widehat{p})$，以获得形式为 $\boldsymbol{\ell}^\top \mathbf{H}(z,\ \widehat{p})$ 和 $\mathbf{H}(z,\ \widehat{p})\mathbf{r}$ 的（低成本）样本，插值点为 z。然后对这些数据应用单变量 Mayo–Antoulas Loewner 框架，以精确恢复 $\mathbf{H}(\cdot,\ \widehat{p})$。

正如我们将在下一节讨论的那样，理论上，上述过程能够精确恢复特征值和特征向量，即使 Jordan 结构任意也是如此。当然，这只有在满足我们前面提到的假设时才成立，其中包括 H 关于 z 和 p都是有理函数。虽然根据定理 2 中的假设，后者是隐含成立的，但参数依赖关系未必总是有理的，如例 2 所示。在这种情况下，我们建议采用有理近似来准确捕捉参数依赖关系。具体而言，我们建议使用向量值多元有理逼近函数 $\mathbf{L}(z,p) \approx \boldsymbol{\ell}^\top \mathbf{H}(z,p)$ 和 $\mathbf{R}(z,p) \approx \mathbf{H}(z,p)\mathbf{r}$。一般而言，这种方法无法精确恢复特征值，只能得到它们的近似值。现有许多算法可用于计算多元有理逼近函数，但我们希望采用一种在这些函数为有理函数时能够精确恢复 $\boldsymbol{\ell}^\top\mathbf{H}(z,p)$ 和 $\mathbf{H}(z,p)\mathbf{r}$ 的方法。换言之，我们选用的多元有理近似算法应能够在可以精确恢复的情况下，恢复参数化 Loewner 插值函数，从而恢复特征值。自适应数据驱动 pROM 构造 [5] 和参数化（多元）自适应 Antoulas–Anderson（p-AAA）算法 [16]（受单变量自适应 Antoulas–Anderson 算法 [33]启发）就是这样的两种算法。下文中，我们将使用 p-AAA。关于这些算法的详情以及多元有理插值和近似的背景知识，请参阅 [4, 5, 16, 25] 。

5. 用于参数化非线性特征值问题的参数化多点 Loewner 算法

本节提出一种求解参数化非线性特征值问题的方法，其灵感来自算法 1 中用于非参数化非线性特征值问题的多点 Loewner 算法。我们将逐步介绍该方法的各个步骤，并在算法 2 中对其进行总结。

该算法从离线阶段开始。给定目标特征值域 Ω 和参数域 Π，应用定理 2 得到如下形式的分解（12）：$\mathbf{T}(z,\ p)^{-1} = \mathbf{H}(z,\ p) + \mathbf{N}(z,\ p)$。为近似 $\mathbf{H}$ 的探测样本，对围道积分表达式应用求积公式（节点$\{z_t\}$，权重 $\{w_t\}$）：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\ell}_k^\top \mathbf{H}(s_i,p_j) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{s_i - z} \boldsymbol{\ell}_k^\top \mathbf{T}\left(z,p_j\right)^{-1} \,\mathrm{d}z \approx \sum_{t=1}^{N} \frac{w_t}{s_i - z_t} \boldsymbol{\ell}_k^\top \mathbf{T}(z_t,p_j)^{-1}; \\ \mathbf{H}(s_i,p_j)\mathbf{r}_k &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{s_i - z} \mathbf{T}\left(z,p_j\right)^{-1} \mathbf{r}_k \,\mathrm{d}z \approx \sum_{t=1}^{N} \frac{w_t}{s_i - z_t} \mathbf{T}(z_t,p_j)^{-1} \mathbf{r}_k. \end{aligned} \tag{14}$$

针对探测方向 $\boldsymbol{\ell}_k \in \{\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_r\}$ 和 $\mathbf{r}_k \in \{\mathbf{r}1, \ldots, \mathbf{r}_r\}$、采样值 $s_i \in \{s_1, \ldots, s_{2r}\}$ 以及参数采样点 $p_j \in \{p_1, \ldots, p_q\}$ 的所有组合，计算这些求积近似，从而得到如下形式的近似探测样本集合：$\boldsymbol{\ell}_k^\top \mathbf{H}(s_i,p_j)$ 和 $\mathbf{H}(s_i,p_j)\mathbf{r}_k$。（本节末尾将评估此步骤及后续步骤的计算成本。）在上一节所述的理想情形下，我们将利用这些探测样本，通过参数化 Loewner 框架 [4, chap. 6] 的向量值版本，计算有理函数 $\mathbf{L}_k(z,p)$ 和 $\mathbf{R}_k(z,p)$，以精确恢复 $\boldsymbol{\ell}_k^\top \mathbf{H}(z,p)$ 和 $\mathbf{H}(z,p)\mathbf{r}_k$。在无法保证精确恢复的实际情形下，我们应用 p-AAA 算法 [16]，为 $k = 1$、. . .、r 计算有理近似 $\mathbf{L}_k(z,p) \approx \boldsymbol{\ell}_k^\top \mathbf{H}(z,p)$ 和 $\mathbf{R}_k(z,p) \approx \mathbf{H}(z,p)\mathbf{r}_k$。附录 B（算法 3）概述了一种高效构造此类近似的方法。（选择 p-AAA 算法并非关键，但为完整起见，此处予以说明。）我们回顾定理 2 中的关键假设：对于每个参数 $p \in \Pi$，$\mathbf{T}(\cdot,p)$ 在 Ω 中恰有 m 个特征值（按代数重数计）。在算法 3 中，可以通过检查式 (19) 中 Loewner 矩阵的秩来显式验证这一假设。

算法 2 的在线阶段针对任意 $\mathbf{V}(\widehat{p})$、$\mathbf{W}(\widehat{p})$ 和 $\mathbf{J}(\widehat{p})$，根据定理 2 构造这些量的近似 $\widehat{p} \in \mathcal{P}$。我们通过遵循与算法第 2–6 行相似的步骤来得到这些量1。为了说明算法 1 与在线阶段之间的关系

算法 2 用于参数化非线性特征值问题的参数化多点 Loewner 算法

输入： $\mathbf{T}$：$\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{n\times n}$，区域 $\Omega\subset\mathbb{C}$，探测方向 $\{\boldsymbol{\ell}_k\}_{k=1}^{r}$，$\{\mathbf{r}_k\}_{k=1}^{r}$，离线采样值 $\{s_i\}_{i=1}^{2r}=\{\theta_i\}_{i=1}^{r}\cup\{\sigma_i\}_{i=1}^{r}\subset\mathbb{C}\setminus\Omega$，$\{p_j\}_{j=1}^{q}\subset\mathcal{P}$，在线求值参数 $\widehat{p}\in\mathcal{P}$

输出： 特征值矩阵 $\mathbf{J}(\widehat{p})\in\mathbb{C}^{m\times m}$ 和特征向量矩阵 $\mathbf{V}(\widehat{p})$，$\mathbf{W}(\widehat{p})\in\mathbb{C}^{n\times m}$

离线阶段

1: 使用求积近似所有采样值与探测方向组合对应的轮廓积分（$i=1,\ldots\ldots,2r$、$j=1,\ldots\ldots,q$以及 $k=1,\ldots\ldots,r$）：

$$\boldsymbol{\ell}_k^{\top}\mathbf{H}\left(s_i,p_j\right)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{s_i-z}\boldsymbol{\ell}_k^{\top}\mathbf{T}\left(z,p_j\right)^{-1}\,\mathrm{d}z$$
$$\mathbf{H}\left(s_i,p_j\right)\mathbf{r}_k=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{s_i-z}\mathbf{T}\left(z,p_j\right)^{-1}\mathbf{r}_k\,\mathrm{d}z.$$

2: 如算法 3 或 [4,5,25] 中所示，使用有理逼近精确恢复或近似

$$\mathbf{L}_k(z,p)\approx\boldsymbol{\ell}_k^{\top}\mathbf{H}(z,p)\quad\text{and}\quad\mathbf{R}_k(z,p)\approx\mathbf{H}(z,p)\mathbf{r}_k. \tag{15}$$

在线阶段（针对每个 $\widehat{p}$）

3: 通过以下元素构造 Loewner 矩阵 $\mathbb{L}$，$\mathbb{L}_s\in\mathbb{C}^{r\times r}$

$$(\mathbb{L})_{ij}=\frac{\mathbf{L}_i(\theta_i,\widehat{p})^{\top}\mathbf{r}_j-\boldsymbol{\ell}_i^{\top}\mathbf{R}_j(\sigma_j,\widehat{p})}{\theta_i-\sigma_j},\qquad(\mathbb{L}_s)_{ij}=\frac{\theta_i\mathbf{L}_i(\theta_i,\widehat{p})^{\top}\mathbf{r}_j-\sigma_j\boldsymbol{\ell}_i^{\top}\mathbf{R}_j(\sigma_j,\widehat{p})}{\theta_i-\sigma_j}.$$

4: 利用 $\boldsymbol{\Sigma}$，$\boldsymbol{\Sigma}_s\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 计算约化奇异值分解：

$$\mathbf{X}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{Y}^{*}=\begin{bmatrix}\mathbb{L} & \mathbb{L}_s\end{bmatrix}\qquad\text{and}\qquad\mathbf{X}_s\boldsymbol{\Sigma}_s\mathbf{Y}_s^{*}=\begin{bmatrix}\mathbb{L}\\ \mathbb{L}_s\end{bmatrix}.$$

5: 求解广义特征值问题

$$\left(\mathbf{X}^{*}\mathbb{L}_s\mathbf{Y}_s\right)\mathbf{s}_j=\lambda_j\left(\mathbf{X}^{*}\mathbb{L}\mathbf{Y}_s\right)\mathbf{s}_j\quad\rightarrow\quad\mathbf{J}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m). \tag{16}$$

6: 构造分块矩阵

$$\mathbf{B}^{\top}=\begin{bmatrix}\mathbf{L}_1(\theta_1,\widehat{p}) & \cdots & \mathbf{L}_r(\theta_r,\widehat{p})\end{bmatrix}\quad\text{and}\quad\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{R}_1(\sigma_1,\widehat{p}) & \cdots & \mathbf{R}_r(\sigma_r,\widehat{p})\end{bmatrix}.$$

7: 利用 $\mathbf{S}=[\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_m]$，构造$\mathbf{T}(\cdot,\ \widehat{p})$的特征向量：

$$\mathbf{V}=\mathbf{C}\mathbf{Y}_s\mathbf{S}\quad\text{and}\quad\mathbf{W}^{*}=-\mathbf{S}^{-1}\left(\mathbf{X}^{*}\mathbb{L}\mathbf{Y}_s\right)^{-1}\mathbf{X}^{*}\mathbf{B}.$$

要理解算法 2 的清晰之处，请比较前者的第 2–6 行与后者的第 3–7 行。这些行完全相同，只是将 $\boldsymbol{\ell}_i^{\top}\mathbf{H}(\theta_i)$ 替换为 $\mathbf{L}_i(\theta_i,\widehat{p})$，并将 $\mathbf{H}(\sigma_j)\mathbf{r}_j$ 替换为 $\mathbf{R}_j(\sigma_j,\widehat{p})$。因此，如果 (15) 中 $\mathbf{L}_k(z,p)=\boldsymbol{\ell}_k^{\top}\mathbf{H}(z,p)$ 且 $\mathbf{R}_k(z,p)=\mathbf{H}(z,p)\mathbf{r}_k$，那么多点 Loewner 算法 [15] 的所有理论保证在此同样适用。下一个命题是一个自然推论：算法 1 的第 2–6 行与算法 2 的第 3–7 行实质上相同；该命题将这一说法具体化。

命题 2. 在算法 2中，假设对于所有 $z\in\Omega$ 和 $p\in\Pi$，

$$\mathbf{L}_k(z,p)=\boldsymbol{\ell}_k^{\top}\mathbf{H}(z,p)\quad and\quad\mathbf{R}_k(z,p)=\mathbf{H}(z,p)\mathbf{r}_k;$$

参见公式 *(15)*。那么，算法 *2* 的输出等价于将算法 *1* 应用于 $T(\cdot,\widehat{p})$ 所得到的输出（假设使用精确算术并进行精确的围道积分计算）。如果满足算法 *1* 的特征值精确恢复假设 *[15]*，且将 *(16)* 替换为 *Jordan* 标准形的计算，那么算法 *2* 将从定理 *2* 中恢复矩阵 $J(\widehat{p})$、$V(\widehat{p})$ 和 $W(\widehat{p})$。

我们强调，算法2 的离线阶段和在线阶段仅需执行一次，在线阶段便可针对任意 $\widehat{p}\in\mathcal{P}$多次执行。这一点至关重要，因为离线阶段可能会因需要求解线性

涉及 $\mathbf{T}(z_k, p_j)$ 的系统以进行求积。在线阶段通常快得多，无需进行涉及$\mathbf{T}$的计算。

注 3。算法 2 若我们只寻求特征值（而非特征向量），且所有这些特征值都是单重的，则可大幅简化。此时，选取随机向量$\boldsymbol{\ell}$，$\mathbf{r}$，并使用求积来近似

$$\boldsymbol{\ell}^\top \mathbf{H}(s_i, p_j)\,\mathbf{r} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{s_i - z} \boldsymbol{\ell}^\top \mathbf{T}\,(z, p_j)^{-1}\,\mathbf{r}\,\mathrm{d}z,$$

然后通过多变量有理插值方法恢复（或近似）标量值函数 $f(z, p) = \boldsymbol{\ell}^\top \mathbf{H}(z, p)\,\mathbf{r}$。在这种情况下，$f$ 的奇点可用于近似$\mathbf{H}$的奇点，即$\mathbf{T}$的特征值。

一般而言，算法 $\boldsymbol{\ell}^\top \mathbf{H}(z,\ p)\mathbf{r}$、$\mathbf{L}_k(z,\ p)$ 或 $\mathbf{R}_k(z,\ p)$ 中的奇点未必能提供关于2矩阵 $\mathbf{T}$的特征值的完整信息。考虑

$$\mathbf{H}(z, p) = \frac{1}{z - p}\mathbf{I} : \quad \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n \times n}$$

其中 $\lambda = p$ 的代数重数为 n。对于任意 $\boldsymbol{\ell}_k$，我们都有 $\boldsymbol{\ell}_k^\top \mathbf{H}(z, p)$ 可由一个读取 $\mathbf{L}_k(z, p) = (z - p)^{-1}\boldsymbol{\ell}_k^\top$ 的函数精确恢复。这一情形清楚地表明，若我们只观察函数 $\mathbf{L}_k$ 或 $\mathbf{R}_k$的奇点，就会丢失有关特征值重数的信息。虽然可以通过计算 $T(\lambda_j(p)\ p)$ 的零空间（的维数）来获得代数重数和特征向量，但无法由此恢复如式 *(18)* 所示的精确 *Jordan* 结构和特征向量归一化。相比之下，只要满足所需假设，算法 *2* 理论上可以恢复这些结构。

注 4。 实际上，算法的输入2 比此处所述的更加灵活。探测方向的数量可以独立于采样值的数量进行选择，而 $\{\theta_j\}_{j=1}^r$ 和 $\{\sigma_j\}_{j=1}^r$ 在线阶段使用的内容可以独立于离线阶段使用的采样值进行选择 $\{s_j\}_{j=1}^{2r}$。这种灵活性使我们能够在在线阶段尝试不同的采样点选择，以改善（16）中特征值问题的数值性质。关于多点 *Loewner* 方法的这些方面， *[15]*中提供了更详尽的讨论。此外，算法2 的在线阶段不一定局限于 $\widehat{p} \in \Pi$。特别是，我们可以选择任意$\widehat{p} \in \mathbb{C}$，并计算$\mathbf{T}(\cdot,\ \widehat{p})$的特征值近似。在某些情况下，这能得到良好的近似（如第6.2节的数值示例所示），但也可能给出不可靠的预测（例如，第6.1 节中关于 $\widehat{p} = 1$的第二种设置）。

我们来考察算法 2 的计算复杂度。算法第 1 行需要针对采样点和探测方向的所有组合，计算 $\boldsymbol{\ell}^\top \mathbf{H}(z, p)$ 和 $\mathbf{H}(z, p)\mathbf{r}$ 的基于求积的近似。我们用需要求解的、涉及矩阵 $\mathbf{T}(z, p)$ 的线性方程组来表述这一步的计算复杂度。假设我们沿用式 (14) 的方法，使用 N 个求积节点进行围道积分近似，使用 r 个左、右探测方向，使用 q 个参数采样值 $\{p_j\}_{j=1}^q$，并使用 $d = 2r$ 个采样值 $\{s_j\}_{j=1}^d$。那么，算法 2 的第 1 行可通过求解 $2Nq$ 个线性方程组（每个方程组有 r 个右端项）来执行，方程组形式为 $\mathbf{T}(z, p)^\top\,[\mathbf{b}1, \ldots, \mathbf{b}_r] = [\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_r]$和 $\mathbf{T}(z,\ p)\ [\mathbf{c}1, \ldots, \mathbf{c}_r] = [\mathbf{r}1, \ldots, \mathbf{r}_r]$（以计算 $\mathbf{b}_k^\top = \boldsymbol{\ell}_k^\top \mathbf{T}(z, p)^{-1}$ 和 $\mathbf{c}_k = \mathbf{T}(z, p)^{-1}\mathbf{r}_k$，其中 $k = 1, \ldots, r$）。此计算需要在 Nq 个值处计算 $\mathbf{T}$。第 2 行的有理插值过程（基于算法 3）需要 $\mathcal{O}(qd^3 + dqc^2m^2)$ 次浮点运算，其中 $m + 1$ 和 $c + 1$ 分别是有理插值函数在 z 和 p 中的插值采样点数。对于单个参数值 $\widehat{p}$，执行算法的在线阶段需要 $\mathcal{O}(d^3)$ 次浮点运算。值得注意的是，在线阶段的成本与求积节点 N 和函数 $\mathbf{T}$ 无关，因此只涉及构造特征向量矩阵所需的维数 n（如果需要）。

相比之下，算法 1只需求解 $2N$ 线性方程组，每个方程组有 r 个右端项。算法 2 计算成本增加，是因为需要在每个 q 参数采样点处进行采样。然而，两种算法之间还有一个值得注意的差异。算法 1 基于 Mayo–Antoulas Loewner 框架，其中每个探测方向恰好对应一个采样点。在参数化 Loewner 框架中，探测方向与采样

点彼此独立，并且需要对它们的所有组合进行采样。这一差异使得有理插值步骤中出现的参数化算法与非参数化算法，在数值设置和计算成本方面也存在额外差异。

6. 数值示例

本节通过若干数值实验展示我们前面的理论讨论和算法开发成果。算法 2 和算法 3 包含许多我们可以详细研究其对近似质量影响的输入，例如求积公式、求积节点数量、采样点数量、有理逼近收敛判据等。本节的主要目标并非详细探讨这些输入的良好选择，而是强调第 3 节理论结果对计算设置的影响。关于非参数情形下多点 Loewner 方法的算法细节（求积节点数量和采样点位置如何影响精度与数值稳定性），请参见 [15]。多元有理插值方法的实践和理论方面将在[4,5,16,25]中讨论。本节中的结果主要在一台配备 Intel(R) Core(TM) i3-10110U CPU 和 16 GB 内存的 HP Laptop 15-dw1xxx 笔记本电脑上，使用 MATLAB R2024b Update 5 (24.2.0.2863752) 获得。代码根据开源许可证提供[8]。

6.1. 线性参数化特征值问题

我们首先重新讨论例1中引入的线性参数化特征值问题，以分析例2中介绍并在图2中展示的两种设置的数值特性。对于两种情形，我们均使用 40 个均匀间隔的采样值运行算法 2，分别对应 $\{s_i\}_{i=1}^{40}$ 和 $\{p_j\}_{j=1}^{40}$。此外，从 $\{s_i\}_{i=1}^{40}$ 中选取 $\{\theta_i\}_{i=1}^{20}$ 和 $\{\sigma_i\}_{i=1}^{20}$ 作为交错点，以提高 Loewner 矩阵 [20] 的数值稳定性。另外，我们使用 $N = 512$ 个节点的梯形求积公式，按照式 (14) 对轮廓积分进行近似。图2展示了所计算特征值的相对残差。对于采用 $\mathcal{P} = [0.75, 1.25]$ 的第一种设置，由于 $\mathbf{H}(z,p)$ 关于 z 和 p 是有理函数，因此我们预计可以精确恢复特征值和特征向量。在这种情况下，附录 B 中的有理逼近过程计算得到的 $\mathbf{L}_k$ 和 $\mathbf{R}_k$ 的分子与分母多项式次数，分别与 $\boldsymbol{\ell}_k^\top \mathbf{H}(z,p)$ 和 $\mathbf{H}(z,p)\mathbf{r}_k$ 的次数相匹配。因此，从理论上讲，洛文纳插值函数可以精确恢复这些函数。当然，数值误差会导致实践中的恢复结果接近精确值。

在第二种设置中，其中 $\mathcal{P} = [1.25, 1.5]$，我们捕获了一个对应于多值解析函数单个分支的特征值。在这种情况下，$\mathbf{H}(z,p)$ 关于 p 不是有理函数，因此我们仅通过有理函数来近似 $\boldsymbol{\ell}_k^\top \mathbf{H}(z,p)$ 和 $\mathbf{H}(z,p)\mathbf{r}_k$。特别地，算法 3 计算得到 $\mathbf{L}_k(z,p)$ 和 $\mathbf{R}_k(z,p)$，其分母关于

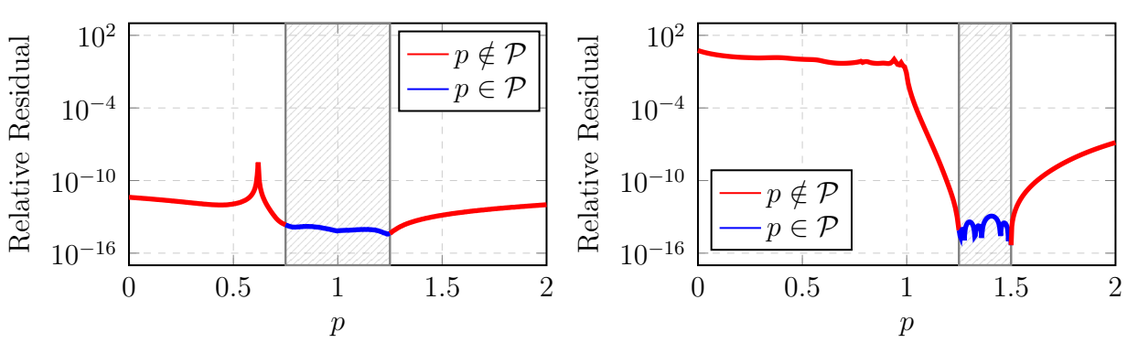

图 2：最大相对残差 $\|\mathbf{T}(\lambda(p)\ p)\mathbf{v}(p)\|_2/\|\mathbf{v}(p)\|_2$ 对应于第 6.1 节中讨论的两种设置。左图中，除数值误差外，我们精确地恢复了特征值和特征向量。（$p \approx 0.62 \notin \mathcal{P}$ 处的峰值是因为 $\mathbf{H}$ 在该值附近存在奇点。）右图中，我们尝试近似单个特征值。当 p 向分支点 $p = 1 \notin \mathcal{P}$移动时，近似质量会迅速降低。对于 $p > 1.5$，不会出现分支点，因此能够很好地近似特征值和特征向量。

z 的次数为 1，关于 p 的次数为 7。对于 $p \in \mathcal{P}$，这种近似足以在 $p \in \mathcal{P}$ 下以接近机器精度的误差估计 Ω 中的特征值。对于 $p \notin \mathcal{P}$，近似质量仍然可以接受，但当 p 向分支点 $p = 1$ 移动并越过该分支点时除外。

在这两种情况下，特征对的精度远远超出了 $\mathcal{P}$ 的限制，实际上还涵盖了特征值落在 Ω 之外的参数值。进一步深入研究这种过收敛现象将会很有意思。

6.2. 时滞微分方程的稳定性分析

接下来，我们考虑一个源于时滞微分方程研究的 pNLEVP

$$\mathbf{x}'(t) = -\mathbf{E}\mathbf{x}(t) - 0.01\mathbf{x}(t-p).$$

参数 $p > 0$ 指定时滞。为了评估解的渐近稳定性，需要寻找该 pNLEVP 的最右特征值

$$\mathbf{T}(z,p) = \left(z + 0.01\mathrm{e}^{-pz}\right)\mathbf{I} + \mathbf{E}. \tag{17}$$

如果所有特征值都位于复平面的开左半平面内，那么所有解都将是渐近稳定的。（有关稳定性分析的详细信息，请参见 [32] 。）我们取 $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ 为对角矩阵，其对角元素在 $[10^{-4}, 10^{10}]$ 中按对数间隔排列。尽管 $\mathbf{T}$ 是有限维的，但它有无穷多个特征值；我们对$\mathbf{T}$ 的选取使得可以通过计算 Lambert-W 函数的各个分支 [32, p。 148]来求出这些特征值。图3展示了时滞为 $p = 30$ 时的部分谱（在 Mathematica 中计算）。

我们旨在分析解的渐近稳定性如何依赖于时滞参数 p。我们选取感兴趣的参数集 $\mathcal{P} = [30, 35]$ 和区域 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 0.075\}$。作为算法 1 的输入，我们分别选择 $\{s_i\}_{i=1}^{40}$ 和 $\{p_j\}_{j=1}^{40}$，它们是在 $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 0.1\}$ 和 $\mathcal{P}$中均匀采样的 40 个点。此外，$\{\theta_i\}_{i=1}^{20}$ 和 $\{\sigma_i\}_{i=1}^{20}$选作来自 $\{s_i\}_{i=1}^{40}$ 的交错点，并使用 $N = 128$ 个求积节点进行围道积分近似。算法 3 中的有理逼近过程计算 $\mathrm{L}_k(z,p) \approx \ell_k^\top \mathrm{H}(z,p)$ 和 $\mathrm{R}_k(z,p) \approx \mathrm{H}(z,p)\mathrm{r}_k$，其分子和分母分别是关于 z 的 4 次多项式和关于 p 的 5 次多项式。具体而言，这意味着通过我们的计算过程，区域 $\Omega \times \mathcal{P}$ 中的恰好四个特征值会得到近似。

我们接下来计算参数值 $p = 30$、$35 \in \mathcal{P}$和 $p = 20$、$50 \notin \mathcal{P}$对应的特征值和特征向量近似。图 4 展示了这些参数值下近似得到的特征值以及轮廓 $\partial\Omega$。注意，对于 $p \in \mathcal{P}$，Ω 内恰有 4 个特征值，这一点在 $p = 30$、35 的图中有所体现。对于 $p = 20$，计算得到的两个特征值落在区域 Ω 之外，但仍被准确捕捉。我们强调，Ω 内特征值数量保持不变这一要求，仅适用于算法 2 的离线阶段，其中 $p \in \mathcal{P}$。在线阶段，尤其是对于 $p \notin \Pi$，并未明确要求满足这一条件。不过，正如我们在前一个示例中所展示的，对于 $\mathcal{P}$之外的参数值，近似质量可能会迅速下降，尤其是在分支点附近。对于 $p = 50$，情况类似。在这种情况下，另外两个特征值移入区域

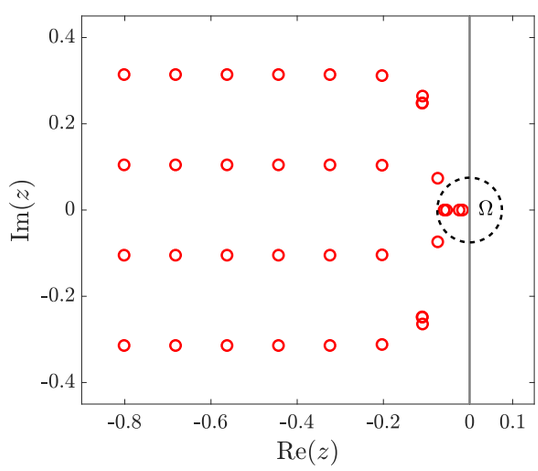

图3：pNLEVP（17）在参数值 $p = 30$下的部分谱。最右特征值决定了系统的渐近稳定性。

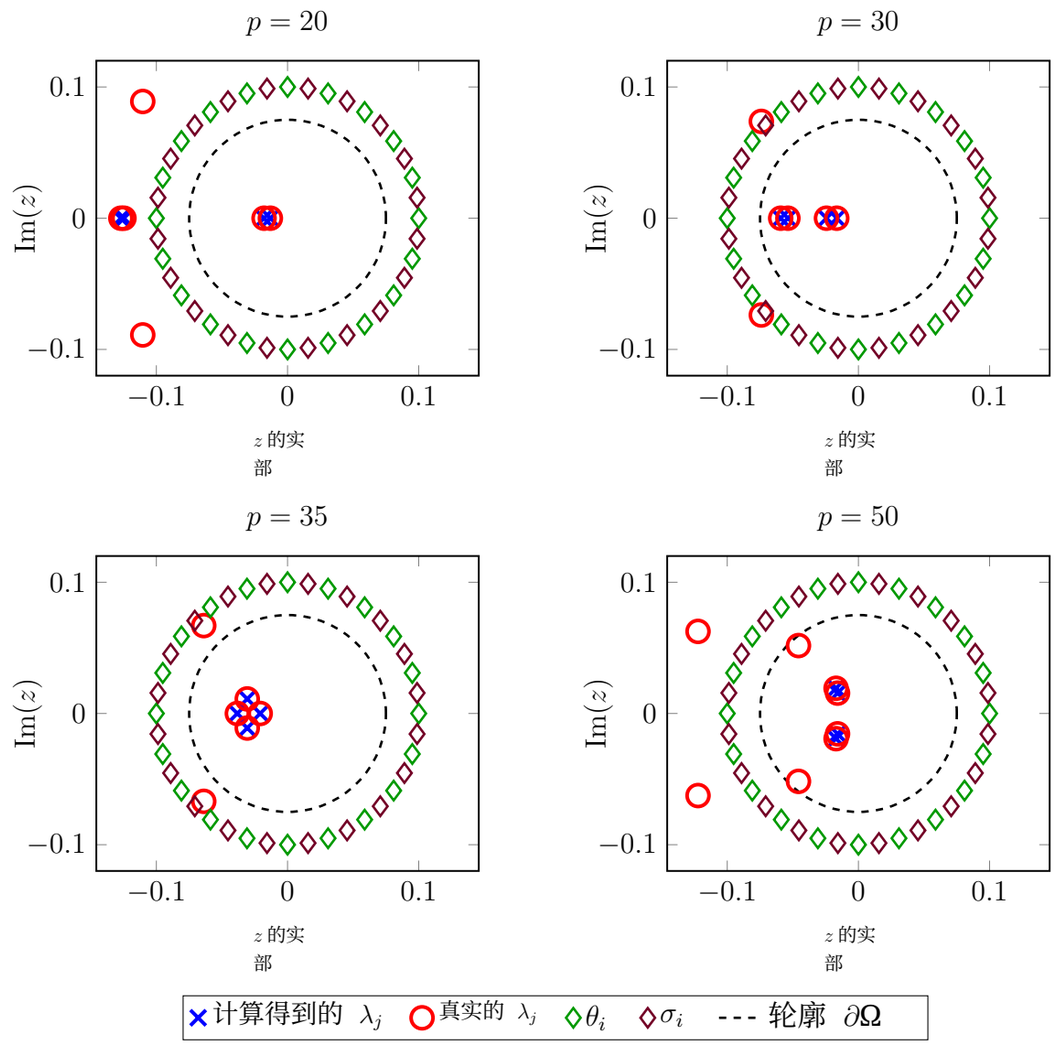

图 4：时滞 pNLEVP 示例的特征值。对于此问题设置，已知真实特征值，因此可以进行比较。尽管在参数化多点 Loewner 方法的离线阶段仅使用了 $\mathcal{P} = [30, 35]$ 中的采样点，但 $p = 20$ 和 $p = 50$ 的特征值也得到了准确近似。在使用 $p \notin \Pi$的在线阶段，计算出的特征值不一定落在离线阶段使用的区域 Ω 内：左上图中，两个预测特征值落在 Ω 外；而右下图中，Ω 包含两个未被近似的额外特征值。

Ω。然而，由于我们在算法2的离线阶段只捕捉到了四个特征值，因此在本例的在线阶段，无论如何选择 p，我们都只能计算出四个特征值的近似。

6.3. 阻尼弦示例

接下来，我们考虑一个弦在物理区域 $[0, 1]$ 上振动的模型，该弦具有齐次狄利克雷边界条件，并受到强度为 $p \geq 0$的恒定黏性阻尼，且阻尼仅作用于区域的中间一半，$[0.25, 0.75]$ [19]。为方便起见，记 $\widehat{z} = \sqrt{z^2 + 2pz}$，则有

$$\mathbf{T}(z,p) = \begin{bmatrix} -\sinh(z/4) & \sinh(\widehat{z}/4) & \cosh(\widehat{z}/4) & 0 \\ -z\cosh(z/4) & \widehat{z}\cosh(\widehat{z}/4) & \widehat{z}\sinh(\widehat{z}/4) & 0 \\ 0 & -\sinh(3\widehat{z}/4) & -\cosh(3\widehat{z}/4) & \sinh(z/4) \\ 0 & -\widehat{z}\cosh(3\widehat{z}/4) & -\widehat{z}\sinh(3\widehat{z}/4) & -z\cosh(z/4) \end{bmatrix}.$$

对于 $p = 0$（无阻尼），所有特征值都是单根，以共轭复数对的形式出现在虚轴上。随着 p 增大，特征值移入复左半平面，并逐渐趋近实轴。我们寻求使弦中能量的渐近衰减率最大的参数，即使谱

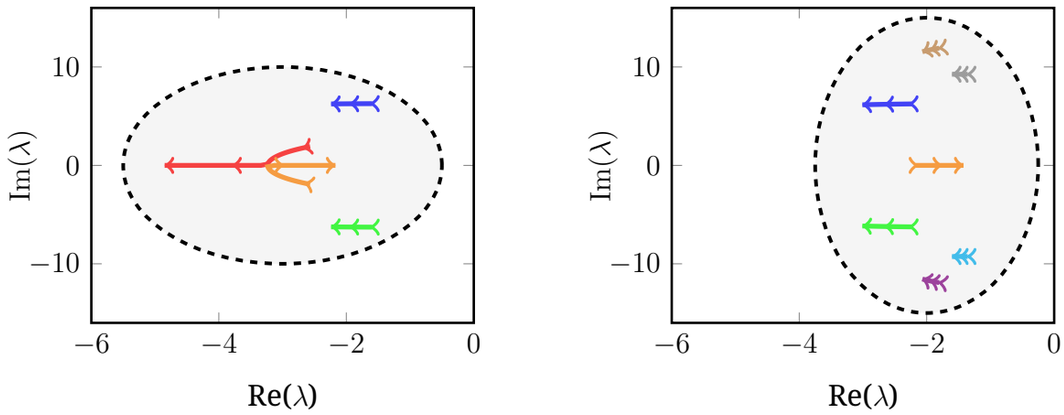

图5：阻尼弦示例两种情况下的特征值和区域。在第一种情况下（左图），对于 $\mathcal{P} = [3, 4]$，在 $p \approx 3.71$ 处出现了一个亏损特征值。参数化多点 Loewner 方法能够自然地处理这种情况，无需额外输入。在第二种情况下（右图），对于 $\mathcal{P} = [4, 5]$，谱 abscissa 似乎在 $p \approx 4.71$ 处达到最小值。

横坐标（最右特征值的实部） [17] 最小的值。对于 $\mathbf{T}(\cdot, p)$，有无穷多个特征值。在我们的研究中，只需考虑有限个靠近实轴的特征值。

该问题出现了一个重要困难：$\mathbf{T}(\cdot,\ p)$ 在 $\mathbb{C}$ 中不是解析的，这是由于在 $z = 0$ 和 $z = -2p$ 处存在分支点，即根号内表达式的零点 $\widehat{z} = \sqrt{z^2 + 2pz}$。因此，我们可以通过一条连接 $z = 0$ 和 $z = -2p$ 的曲线指定一条支割线，从而定义与该支割线相关的多值函数 $\mathbf{T}(\cdot,\ p)$ 的两个分支。最简单的两种选择分别是：沿实轴经过 $-p$、连接 0 和 $-2p$ 的直线；以及沿实轴经过 ∞、连接 0 和 $-2p$ 的直线。第一种选择似乎更简单，但会干扰所需的特征值；因此，我们在计算中采用第二种选择。（注意，随着我们改变 p，支割线也会移动，这是该问题的另一个复杂之处。）

我们考虑两种情况，均令区域 Ω 为以 $c \in \mathbb{C}$ 为中心、实半轴为 s_r、虚半轴为 s_i 的复椭圆内部：

$$\mathcal{E}(c, s_r, s_i) := \left\{ z \in \mathbb{C} : \left(\frac{\mathrm{Re}(z - c)}{s_r} \right)^2 + \left(\frac{\mathrm{Im}(z - c)}{s_i} \right)^2 < 1 \right\}.$$

将边界记为 $\partial\mathcal{E}$。对于第一种情况，取 $\mathcal{P} = [3, 4]$，并令 $\Omega = \mathcal{E}(-3, 2.5, 10)$；对于第二种情况，取 $\mathcal{P} = [4, 5]$，并令 $\Omega = \mathcal{E}(-2, 1.75, 15)$。对于第一种情况，我们沿 $\partial\mathcal{E}(-3, 3, 11)$ 均匀采样 500 个点作为集合 $\{s_i\}_{i=1}^{500}$，并在 $\mathcal{P}$ 中取 25 个均匀间隔的点 $\{p_j\}_{j=1}^{25}$。对于第二种情况，我们沿 $\partial\mathcal{E}(-2, 2, 16)$ 均匀采样 500 个点作为集合 $\{s_i\}_{i=1}^{500}$，并在 $\mathcal{P}$ 中取 25 个均匀间隔的点 $\{p_j\}_{j=1}^{25}$。与最后两个示例一样，我们使用来自 $\{s_i\}_{i=1}^{500}$ 的交错点作为 $\{\theta_i\}_{i=1}^{250}$ 和 $\{\sigma_i\}_{i=1}^{250}$。图 5展示了两种情况下的 Ω 和特征值近似。

第一种情况下的图显示，我们准确捕捉到了一对呈现非平凡行为的特征值：当 $p = 3$ 时，它最初是一对共轭复数对；当 $p \approx 3.71$ 时，转变为代数重数为二的实特征值；最后在 $p = 4$ 处由两个实特征值给出。对于第二种情况，计算得到的特征值曲线均未发生合并：在 Ω 中，特征值始终是单重的。对于这种情况，我们希望找到使谱 abscissa 最小的 p 值，该值显然接近 $p \approx 4.71$。为验证计算结果的准确性，我们针对不同的参数值计算特征值残差。具体而言，对于两种情况，我们都在 $\mathcal{P}$ 中取 200 个均匀间隔的测试参数，并计算特征值残差的最大值 $\|\mathbf{T}(\lambda(p)\ p)\mathbf{v}(p)\|_2/\|\mathbf{v}(p)\|_2$。第一种情况下，残差始终低于 3×10^{-10}；第二种情况下，残差则始终低于 3×10^{-8}。

7. 结论

参数化非线性特征值问题带来了计算上的挑战。作为算法开发的平台，我们提出了 Keldysh 定理的参数化扩展，该扩展将一个 pNLEVP 函数分解为以下形式：$\mathbf{T}(z, p)\ = \mathbf{R}(z, p)/u(z, p)\ + \mathbf{N}(z, p)$。

感兴趣的特征值由函数 $\mathbf{R}(z,p)$ 和 $u(z,p)$ 描述，它们在感兴趣区域 $\Omega \times \Pi$ 内解析。与对每个 $p \in \Pi$逐点应用标准 Keldysh 分解不同，我们的扩展能够自然地刻画特征值对 p的依赖，从而适用于 Jordan 结构随 p变化的情形。基于有理逼近的围道积分方法可在此基础上顺利构建。利用多点 Loewner 框架，我们提出了一种算法，用于逼近 $\Omega \times \Pi$ 内的特征值。当 $\mathbf{R}(z,p)$ 和 $u(z,p)$ 为有理函数时，该方法原则上可以精确求得特征值（假设围道积分及其他计算均精确）；若这些函数不是有理函数，则可用有理逼近函数将其高精度逼近。我们的实验表明，这类近似仍能得到非常准确的特征值近似。

进一步研究的机会很多。可以将我们的主要结果扩展到允许区域 $\Omega(p)$ 随参数 p变化的情形。在算法方面，可以考虑选择参数采样点 $p_j \in \Pi$的最优方法，或放宽对所有插值点 s_i、参数采样点 p_j和方向 $\boldsymbol{\ell}_k$ 以及$\mathbf{r}_k$的组合都进行采样的要求。还可以考虑各种变体，以扩展基于马尔可夫参数的围道积分算法，如 [7,11,15], 中所述，以及实现超出目标参数域的收敛的可能性 Π。

A. Keldysh 定理

这里陈述 G¨uttel 和 Tisseur 在 [24, 定理 2.8], 中给出的 Keldysh 定理，包括特征向量归一化。在同一篇综述中，作者精确定义了代数重数、几何重数和部分重数，以及广义特征向量及其与 Jordan 链和不变对的联系。此处省略这些定义，重点介绍与我们贡献最相关的方面。有关该定理中各项陈述的详细证明，请参见 [31], ，其中 $\mathbf{V}(z\mathbf{I}-\mathbf{J})^{-1}\mathbf{W}^*$ 以等价的展开形式给出。

定理 3 （Keldysh，见 [24]）。 设 $\mathbf{T}:\Omega \to \mathbb{C}^{n\times n}$ 在非空区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$内解析，并假设 $\det(\mathbf{T}(\cdot)) \not\equiv 0$。设 λ_1、.....、 λ_s 为 $\mathbf{T}$ 在Ω内的不同特征值。对于 $i=1$、.....、 s，令 $m_{i1} \geq \cdots \geq m_{id_i}$ 表示 λ_i 的部分重数，其几何重数为 d_i，并将特征值总数（按重数计）记为

$$m = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{d_i} m_{ij}.$$

那么，存在矩阵

$$\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1,\ldots,\mathbf{V}_s] \in \mathbb{C}^{n\times m}, \quad \mathbf{V}_i = \left[\mathbf{V}_1^{(i)},\ldots,\mathbf{V}_{d_i}^{(i)}\right], \quad \mathbf{V}_j^{(i)} = \left[\mathbf{v}_1^{(i,j)},\ldots,\mathbf{v}_{m_{ij}}^{(i,j)}\right],$$
$$\mathbf{W} = [\mathbf{W}_1,\ldots,\mathbf{W}_s] \in \mathbb{C}^{n\times m}, \mathbf{W}_i = \left[\mathbf{W}_1^{(i)},\ldots,\mathbf{W}_{d_i}^{(i)}\right], \mathbf{W}_j^{(i)} = \left[\mathbf{w}_{m_{ij}}^{(i,j)},\ldots,\mathbf{w}_1^{(i,j)}\right],$$

其列为广义右特征向量和左特征向量 $\mathbf{v}_k^{(i,j)}$ 与 $\mathbf{w}_k^{(i,j)}$ ，并且

$$\mathbf{J} = \operatorname{diag}(\mathbf{J}_1,\ldots,\mathbf{J}_s) \in \mathbb{C}^{m\times m}, \qquad \mathbf{J}_i = \operatorname{diag}(\mathbf{J}_i^{(1)},\ldots,\mathbf{J}_i^{(d_i)}),$$

其中

$$\mathbf{J}_i^{(j)} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m_{ij}\times m_{ij}},$$

使得

$$\mathbf{T}(z)^{-1} = \mathbf{V}(z\mathbf{I}-\mathbf{J})^{-1}\mathbf{W}^* + \mathbf{N}(z)$$

对于某个在 Ω内解析的 $\mathbf{N}:\Omega \to \mathbb{C}^{n\times n}$ ，特征向量满足以下归一化条件：

$$\sum_{\alpha=0}^{t}\sum_{\beta=1}^{m_{ij}} \left(\mathbf{w}_{t-\alpha+1}^{(i,k)}\right)^* \frac{\mathbf{T}^{(\alpha+\beta)}(\lambda_i)}{(\alpha+\beta)!}\mathbf{v}_{m_{ij}-\beta+1}^{(i,j)} = \delta_{jk}\delta_{0t} \tag{18}$$

对于 $t=0$、 $m_{ik}-1$ 和 j， $k=1$、 d_i，以及 $i=1$、 s，其中

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{if } j=k; \\ 0, & \text{if } j\neq k. \end{cases}$$

B. 算法 2 第 2 行中的有理逼近2

下面概述我们提出的有理逼近方法，用于处理构成算法 2 第 2 行的函数 $\boldsymbol{\ell}_k^\top \mathrm{H}(z,p)$ 和 $\mathrm{H}(z,p)\mathbf{r}_k$ 。我们主要采用参数化自适应 AAA 方法，对来自 [16] 的向量值数据进行近似。对于标量值数据，参数化自适应 AAA 使用一组样本 $\{\mathcal{D}(s_i,p_j)\}$ 和采样值 $\{s_i\}_{i=1}^{2r}$、$\{p_j\}_{j=1}^{q} \subset \mathbb{C}$ ，以重心形式（21）计算有理函数 f，使得 $f(z,p) \approx \mathcal{D}(z,p)$。该算法通过在选定节点 $\{\xi_i\} \subset \{s_i\}_{i=1}^{2r}$ 和 $\{\pi_j\} \subset \{p_j\}_{j=1}^{q}$ 处对数据进行插值，然后求解线性最小二乘问题，寻找系数 α_{ij} ，从而使未插值数据在最小二乘意义下得到近似。详细信息请参见 [16] 。参数化自适应 AAA 的一个重要性质是，在某些条件下，该算法能够从数据中精确恢复有理函数；在这种情况下，它等价于参数化 Loewner 框架 [25]。

这里，我们重点介绍文献 [16]中的 p-AAA 表述，用于矩阵值多变量有理逼近。假设我们希望利用样本 $\{\mathrm{H}(s_i,p_j)\}$ 对矩阵值函数 H 进行近似。文献 [16] 中的方法首先生成随机向量 $\boldsymbol{\ell}$ 和 r，然后按照式 (21)，通过一个标量值多元有理函数对样本 $\{\mathcal{D}(s_i,p_j) = \boldsymbol{\ell}^\top \mathrm{H}(s_i,p_j)\mathbf{r}\}$ 进行近似。随后，将式 (21) 中的插值结果 $\mathcal{D}(\xi_i,\pi_j)$ 替换为对应的矩阵值 $\mathrm{H}(\xi_i,\pi_j)$，从而得到矩阵值插值函数。在一定条件下，利用这一方法可以精确恢复矩阵值有理函数 H。

在算法 3 中，我们提出了一种对 $\boldsymbol{\ell}_k^\top \mathrm{H}(z,p)$ 和 $\mathrm{H}(z,p)\mathbf{r}_k$进行有理逼近的方法。该方法采用类似思路，但将 $\mathcal{D}(\xi_i,\pi_j)$ 替换为探测数据 $\boldsymbol{\ell}_k\mathrm{H}(\xi_i,\pi_j)$ 和 $\mathrm{H}(\xi_i,\pi_j)\mathbf{r}_k$。由于我们一开始就只预期能够访问探测数据，因此在式 (20) 中，我们建议使用给定的探测向量的线性组合 $\boldsymbol{\ell}$ 和 r 构造标量数据 $\mathcal{D}(s_i,p_j)$。我们建议使用均值 $\boldsymbol{\ell} = (\boldsymbol{\ell}_1 + \cdots + \boldsymbol{\ell}_r)/r$ 和 $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \cdots + \mathbf{r}_r)/r$，因为这种选择在实践中表现良好（尽管也可以选择其他线性组合）。需要强调的是，这种构造不需要任何形如 $\mathrm{H}(s_i,p_j)$ 的矩阵值样本。请回想我们的重要假设：对于每个 $p \in \mathcal{P}$，Ω 中的特征值数量保持不变。我们通过计算若干个 Loewner 矩阵 (19) 的秩来验证这一假设，并检查这些秩是否一致（从而得到 Ω 中的特征值数量 m）。随后，还可以将这一信息纳入 p-AAA 算法，以确保计算得到的函数 f 在式 (21) 中具有正确数量的极点，且这些极点位于 z 中。

C. 参数化 Keldysh 分解的证明

本节给出定理 2的证明。

C.1. 二变量情形的预备知识

首先回顾一些标准结果，并建立证明所需的关键预备知识。注意，单变量解析函数 f 在 $z_0 \in \mathbb{C}$ 处具有重数为 m 的零点时，可写为

$$f(z) = (z - z_0)^m h(z), \tag{23}$$

其中 h 是 z_0附近的非零解析函数。这个简单事实在二变量情形中会复杂得多；魏尔斯特拉斯准备定理对此作了描述（例如，参见 [18, 23]中的表述）。在接下来的定理和证明中，魏尔斯特拉斯多项式 将发挥重要作用。

定义 1 (魏尔斯特拉斯多项式)。 对于 $j = 0, \ldots, k-1$，设 $\alpha_j \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 在0附近解析，且 $\alpha_j(0) = 0$。我们称形如以下形式的函数 $u \colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$u(z,p) = z^k + \alpha_{k-1}(p)z^{k-1} + \cdots + \alpha_1(p)z + \alpha_0(p) \tag{24}$$

次数为 k 的魏尔斯特拉斯多项式。此外，如果 $v \colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个函数，使得 $v(z + z_0, p + p_0)$ 对某个 $(z_0,p_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 是一个魏尔斯特拉斯多项式，我们就称 v 为平移魏尔斯特拉斯多项式，并称 v 在 (z_0,p_0) 处是一个魏尔斯特拉斯多项式。

魏尔斯特拉斯多项式是关于 z 变量的多项式，因此对于任意选取的 p， $u(\cdot, p)$ 在$\mathbb{C}$ 中是解析的。它们在 p 变量的 0 的某个邻域内也解析。可以

算法 3 算法 2 的有理逼近

输入： 采样值 $\{s_i\}_{i=1}^{2r} \subset \mathbb{C}$，$\{p_j\}_{j=1}^{q} \subset \mathcal{P}$，探测向量 $\{\boldsymbol{\ell}_k\}_{k=1}^{r}$，$\{\mathbf{r}_k\}_{k=1}^{r} \subset \mathbb{C}^n$，近似探测样本 $\boldsymbol{\ell}_k^\top \mathbf{H}(s_i,\ p_j)$，$\mathbf{H}(s_i,\ p_j)\mathbf{r}_k$ 来自算法 2 的第 1 步

输出： $\mathbf{L}_1$，……，$\mathbf{L}_r$：$\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{1\times n}$ 以及 $\mathbf{R}_1$，……，$\mathbf{R}_r$：$\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{n\times 1}$

1: 划分 $\{s_i\}_{i=1}^{2r} = \{\theta_i\}_{i=1}^{r} \cup \{\sigma_i\}_{i=1}^{r}$，并对每个 $p \in \{p_i\}_{i=1}^{q}$，确定 Ω 中特征值 m 的数量，即 Loewner 矩阵的共同秩

$$\mathbb{L}_{ij}(p) = \frac{\boldsymbol{\ell}_i^\top[\mathbf{H}(\theta_i,p) - \mathbf{H}(\sigma_j,p)]\mathbf{r}_j}{\theta_i - \sigma_j}. \tag{19}$$

2: 对于 $\boldsymbol{\ell}$，$\mathbf{r}$ 取为 $\boldsymbol{\ell}_1$，……，$\boldsymbol{\ell}_r$ 的线性组合，并且 $\boldsymbol{\ell}_1$，……，$\boldsymbol{\ell}_r$ 和 $\mathbf{r}_1$，……，$\mathbf{r}_r$，使用探测样本$\boldsymbol{\ell}_k^\top \mathbf{H}(s_i,\ p_j)$ 和 $\mathbf{H}(s_i,\ p_j)\mathbf{r}_k$ 构造数据

$$\mathcal{D}(s_i,p_j) = \boldsymbol{\ell}^\top \mathbf{H}(s_i,p_j)\mathbf{r}. \tag{20}$$

3: 使用 [16] 中的 p-AAA 算法计算有理函数的节点 $\{\xi_i\} \in \{s_i\}_{i=1}^{2r}$，$\{\pi_j\} \in \{p_j\}_{j=1}^{q}$以及系数 $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$。

$$f(z,p) = \sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{c+1} \frac{\alpha_{ij}\mathcal{D}(\xi_i,\pi_j)}{(z-\xi_i)(p-\pi_j)} \Bigg/ \sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{c+1} \frac{\alpha_{ij}}{(z-\xi_i)(p-\pi_j)} \tag{21}$$

该有理函数逼近样本 $\mathcal{D}(s_i,\ p_j)$。

4: 使用计算得到的节点和系数，构造向量值函数

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_k(z,p) &= \sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{c+1} \frac{\alpha_{ij}\boldsymbol{\ell}_k^\top \mathbf{H}(\xi_i,\pi_j)}{(z-\xi_i)(p-\pi_j)} \Bigg/ \sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{c+1} \frac{\alpha_{ij}}{(z-\xi_i)(p-\pi_j)} \approx \boldsymbol{\ell}_k^\top \mathbf{H}(z,p) \\
\mathbf{R}_k(z,p) &= \sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{c+1} \frac{\alpha_{ij}\mathbf{H}(\xi_i,\pi_j)\mathbf{r}_k}{(z-\xi_i)(p-\pi_j)} \Bigg/ \sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{c+1} \frac{\alpha_{ij}}{(z-\xi_i)(p-\pi_j)} \approx \mathbf{H}(z,p)\mathbf{r}_k.
\end{aligned} \tag{22}$$

将魏尔斯特拉斯多项式视为关于 z 的多项式，其系数随 p解析变化。多项式的零点随其系数连续变化（例如参见 [37]），这一事实可用于证明以下命题。

命题 3. 设 u 是一个次数为 k、在 $\Omega \times \Pi$ 邻域内关于 $(0,0)$解析的魏尔斯特拉斯多项式。对于任意给定的 $\Omega' \subset \Omega$ 关于 0 的邻域，存在一个邻域Π' 关于 0，使得 u 在 $\Omega' \times \Pi'$ 内解析，并且对于所有 $p \in \Pi'$，$u(\cdot,p)$ 的 k 个零点均位于 Ω'内。

一般而言，$u(\cdot,p)$ 的零点可能位于 $\mathbb{C}$ 中的任意位置，因为 $u(\cdot,p)$ 是一个多项式。然而，由于多项式的零点连续依赖于其系数，我们可以将参数域 Π' 取得足够小，使得对于所有 $p \in \Pi'$，$u(\cdot,p)$ 的所有 k 零点都任意接近 0。此论证也可应用于魏尔斯特拉斯多项式，因为 $u(z,0) = z^k$，因此当 p 接近 0 时，$u(\cdot,p)$ 的 k 零点会移动到 0 的某个邻域内。由此可得命题 3。下文将在若干情形中说明（平移后的）魏尔斯特拉斯多项式的解析域。基于上述讨论，我们将假设（不失一般性）$u(\cdot,p)$ 的所有零点都包含在指定的解析域内。如有必要，始终可以缩小区域 Π'，以确保这一性质成立。

定理 4（魏尔斯特拉斯准备定理）。设 $f:\ \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 在邻域 $\Omega \times \Pi$ 内解析，且 $f(0,0) = 0$，并且 $f(\cdot,0) \not\equiv 0$ 在 Ω 内。则存在一个 $(0,0)$ 的邻域 $\Omega' \times \Pi'$、一个在 $\Omega' \times \Pi'$ 内解析的唯一魏尔斯特拉斯多项式 u，以及一个在 $\Omega' \times \Pi'$ 内解析的函数 h，满足 $h(0,0) \neq 0$，使得对于所有 $(z,p) \in \Omega' \times \Pi'$，

$$f(z,p) = u(z,p)h(z,p). \tag{25}$$

魏尔斯特拉斯准备定理将单变量分解（23）扩展到多变量解析函数，用魏尔斯特拉斯多项式 z^k $u(z,p)$ 替代（24）中引入的对象。以下引理阐明了这一联系，指出 $f(\cdot,0)$ 的零点阶数必须与 $u(\cdot,0)$ 的多项式次数相同。

引理 2. 在定理 4的情形下，若 $f(\cdot,0)$ 在 k 处的零点阶数为 0，则式（25）中唯一的魏尔斯特拉斯多项式 u 的多项式次数为 k。

证明。首先注意，$f(\cdot,0)$ 在 0 的邻域 Ω' 中是解析的。由于 $f(\cdot,0)$ 在 0 处有一个 k 阶零点，因此存在函数 $h\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$，它在 Ω' 中解析且非零，使得 $f(z,0)=z^k\widehat{h}(z)$。现在应用魏尔斯特拉斯准备定理，得到 $f(z,p)=u(z,p)h(z,p)$，如定理 4 所示，其中 u 是次数为 k 的魏尔斯特拉斯多项式。注意，$u(z,0)=z^k$（见定义 1）。特别地，当 z 接近 0 时，

$$f(z,0)=z^k\widehat{h}(z)=z^{\widehat{k}}h(z,0),$$

将其重新整理可得

$$h(z,0)=z^{k-\widehat{k}}\widehat{h}(z).$$

必有 $k-k\le 0$；否则就会有 $h(0,0)=0$（这对于 h（由魏尔斯特拉斯准备定理得出）并不成立）。同理，必有 $k-k\ge 0$；否则 $h(\cdot,0)$ 在 0 处会有一个奇点（但事实并非如此，因为定理 4 指出在 $(0,0)$ 附近是解析的）。因此，必有 $k=k$。□

定理 4 可改写为位于任意 $(z_0,p_0)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}$。

推论 *1.* 假设 $f\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 在 (z_0,p_0) 的某个邻域 $\Omega\times\Pi$ 内解析，且 $z_0\mapsto f(z_0,p_0)=0$ 和 $f(\cdot,p_0)\not\equiv 0$ 在 Ω 内。则存在 (z_0,p_0) 的某个邻域 $\Omega'\times\Pi'$、在 (z_0,p_0) 处唯一的魏尔斯特拉斯多项式 u（在 $\Omega'\times\Pi'$ 内解析），以及在 $\Omega'\times\Pi'$ 内解析的函数 h，满足 $h(z_0,p_0)\neq 0$；因此，对于所有 $(z,p)\in\Omega'\times\Pi'$，

$$f(z,p)=u(z,p)h(z,p).$$

魏尔斯特拉斯准备定理是关于 (z_0,p_0) 的局部结果。我们将其推广到 f 在 $\Omega\times\Pi$ 中可能有有限个不同零点的情形。

引理 3. 假设 $f\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 在区域 $\Omega\times\Pi$ 内解析，且对于所有 $p\in\Pi$，$f(\cdot,p)$ 恰有 m 个零点（按阶数计数）。存在唯一的多项式

$$u(z,p)=z^m+\alpha_{m-1}(p)z^{m-1}+\cdots+\alpha_1(p)z+\alpha_0(p)$$

其系数 $\alpha_j\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 在 Π 内解析，并且存在一个在 $\Omega\times\Pi$ 内解析且非零的函数 h，使得对于所有 $(z,p)\in\Omega\times\Pi$，

$$f(z,p)=u(z,p)h(z,p).$$

证明。固定任意一个 $\pi\in\Pi$。将 Ω 内 $f(\cdot,\pi)$ 的不同零点记为 $z_1,\dots,z_k$，相应的阶数记为 $m_1,\dots,m_k$，使得 $m_1+\cdots+m_k=m$。推论 1 表明，对每个 $j=1,\dots,k$，都存在 (z_j,π) 的一个邻域 $\Omega_j\times\Pi_j\subset\Omega\times\Pi$、一个在 (z_j,π) 处次数为 m_j 且在 $\Omega_j\times\Pi_j$ 内解析的魏尔斯特拉斯多项式 u_j，以及一个在 $\Omega_j\times\Pi_j$ 内解析的函数 h_j，满足 $h_j(z_j,\pi)\neq 0$，使得

$$f(z,p)=u_j(z,p)h_j(z,p)\quad\text{for}\quad(z,p)\in\Omega_j\times\Pi_j.$$

对于函数 u_j 和 h_j，不失一般性，我们可以作出两个假设。首先，假设对于所有 $p\in\Pi_j$，$u_j(\cdot,p)$ 的所有 m_j 零点都位于 Ω_j 中。（命题 3 及其后紧接的讨论证明了这一假设的合理性。）此外，假设 h_j 不仅在 (z_j,π) 处非零，而且在整个集合 $\Omega_j\times\Pi_j$ 上都非零。（由于 h_j 是解析的，它必定在 (z_j,π) 的某个邻域内非零。）为确保这两个性质与此前对 u_j 和 h_j 施加的所有性质同时成立，必要时可通过取有限个可取邻域的交集来缩小 (z_j,π) 的邻域 $\Omega_j\times\Pi_j$。基于这些假设，f 和 u_j 在 $\Omega_j\times\Pi_j$ 上的零点集重合，也就是说

$$\{(z,p)\in\Omega_j\times\Pi_j : f(z,p)=0\}=\{(z,p)\in\Omega_j\times\Pi_j : u_j(z,p)=0\}.$$

考虑集合 $\Pi_\pi = \bigcap_{j=1}^{k} \Pi_j$。由于每个 Π_j 都是 π 的一个邻域，Π_π 是 π 的一个非空邻域。此外，对于 $j = 1, \ldots, k$，$\Pi_\pi \subseteq \Pi_j$，因此所有 u_j 在 $\Omega \times \Pi_\pi$ 上都是解析的，因为所有 u_j 都是关于第一变量的多项式。它们的乘积

$$u(z,p) = u_1(z,p) \cdots u_k(z,p) \tag{26}$$

在 $\Omega \times \Pi_\pi$ 中解析，且 $u(\cdot,p)$ 恰有 $m_1 + \cdots + m_k = m$ 个零点（即 $u_1, \ldots, u_k$ 的次数之和），这些零点必定与 Ω 中 $f(\cdot,p)$ 的 m 个零点重合，对所有 $p \in \Pi_\pi$ 均如此。总之，我们看到

$$h(z,p) = \frac{f(z,p)}{u(z,p)}$$

在 $\Omega \times \Pi_\pi$ 中定义良好、解析且非零。注意，$u(\cdot,p)$ 是一个首一多项式，因为它是首一多项式 $u_j(\cdot,p)$ 的乘积。到目前为止，我们已证明，给定$\pi \in \Pi$，存在 π 的一个邻域 Π_π，以及在 $\Omega \times \Pi_\pi$ 中解析的函数 h_π 和 u_π，其中h_π 在 $\Omega \times \Pi_\pi$ 中非零，$u_\pi(\cdot,p)$ 对所有 $p \in \Pi_\pi$ 都是一个次数为 m 的首一多项式，并且 $f = u_\pi h_\pi$在 $\Omega \times \Pi_\pi$ 中。我们通过解析延拓论证完成证明。任取$\pi, \pi' \in \Pi$，使得 $\Pi_\pi \cap \Pi_{\pi'} = \Pi' \neq \emptyset$。表示 $f(z,p) = u_\pi(z,p)h_\pi(z,p)$ 和$f(z,p) = u_{\pi'}(z,p)h_{\pi'}(z,p)$ 在 $\Omega \times \Pi'$ 中重合。此外，对所有 $p \in \Pi'$，$u_\pi(\cdot,p)$、$u_{\pi'}(\cdot,p)$ 和 $f(\cdot,p)$ 在 Ω 中的零点及其阶数均重合。由于 $u_\pi(\cdot,p)$ 和 $u_{\pi'}(\cdot,p)$ 是首一多项式，因此二者恒等。由于这对所有 $p \in \Pi'$ 均成立，我们得到 $u_\pi = u_{\pi'}$在 $\Omega \times \Pi'$ 中。由解析延拓可知，$u_\pi = u_{\pi'}$ 在 $\Omega \times (\Pi_\pi \cup \Pi_{\pi'})$ 中；我们还可以得出，$h_\pi = h_{\pi'}$ 在 $\Omega \times (\Pi_\pi \cup \Pi_{\pi'})$ 中非零且解析。现在，对任意$\pi'' \in \Pi$，我们可以选取一条有限长度的路径连接 π 和 π''（因为 Π 是一个区域，因而连通），并沿该路径在相交邻域中重复类似论证（用重叠的区域覆盖该路径，并取有限子覆盖），从而证明 $u_\pi = u_{\pi''}$ 和 $h_\pi = h_{\pi''}$。由于 π'' 是 Π 中的任意点，我们最终得到 $f = u_\pi h_\pi$ 在 $\Omega \times \Pi$ 上处处成立。该论证还表明 u_π 和 h_π 的唯一性，因为解析延拓是唯一的。 □

我们还将用到 Weierstrass 除法定理 [18, 23]。

定理 5（Weierstrass 除法定理）。设 $f\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 在（0，0）的某个邻域内解析，且 u 是次数为 m的魏尔斯特拉斯多项式。存在唯一的函数 g、r，它们在（0，0）的某个邻域内解析，其中 r（·，p）是次数小于 m的多项式，使得

$$f(z,p) = g(z,p)u(z,p) + r(z,p).$$

Weierstrass 除法定理可推广到任意（z_0，p_0）处的零点 $\in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$。

推论 2。设 $f\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 在（z_0，p_0）的某个邻域内解析，且 u 是在（z_0，p_0）处次数为 m 的魏尔斯特拉斯多项式。存在唯一的函数 g、r，它们在（z_0，p_0）的某个邻域内解析，其中 r（·，p）是次数小于 m 的多项式，使得

$$f(z,p) = g(z,p)u(z,p) + r(z,p).$$

接下来，我们将针对多个不同零点推广 Weierstrass 除法定理。

引理 4。设 f、u：$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 在区域 $\Omega \times \Pi$内解析，并且对于每个$p \in \Pi$，u（·、p）都是次数为 m的多项式。此外，设对于每个固定的 $\pi \in \Pi$，存在点 z_1、…、$z_k \in \Omega$ 以及解析函数 u_1、…、u_k：$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，它们分别是在（$z_1$、$\pi$）、…、（$z_k$、$\pi$）处的魏尔斯特拉斯多项式，使得

$$u(\cdot,p) = u_1(\cdot,p) \cdots u_k(\cdot,p)$$

对于某个 π的邻域内的所有 p。注意，k 可能取决于 π。那么存在唯一的解析函数 g、r：$\Omega \times \Pi \to \mathbb{C}$，使得对于每个 $p \in \Pi$，函数 r（·、p）是次数小于 m的多项式，并且

$$f(z,p) = g(z,p)u(z,p) + r(z,p).$$

证明。令 $\pi \in \Pi$，并假设 u_1，……，u_k是在（z_1，π）处的魏尔斯特拉斯多项式，……，（z_k，π）。于是，我们将推论 2应用于函数 f 和 u_1，得到

$$f(z,p) = g_1(z,p)u_1(z,p) + r_1(z,p), \tag{27}$$

其中 g_1 和 r_1 在邻域 $\Omega_1 \times \Pi_1$ （z_1， π）内解析。注意， r_1（$\cdot$， p）是一个多项式，因此 r_1 在 $\Omega \times \Pi_1$ 内解析。通过重新整理（ 27 ），可见函数 g_1 在 Ω 上解析 $_1 \times \Pi_1$，可以写成

$$g_1(z,p) = \frac{f(z,p) - r_1(z,p)}{u_1(z,p)}.$$

因此，对于所有 $p \in \Pi_1$ ，多项式 $u_1(\cdot, p)$ 的零点必须与解析函数 $f(\cdot, p) - r_1(\cdot, p)$ 在 Ω_1 中的零点相消。此外，我们假设（根据命题 3，不失一般性）对于所有 $p \in \Pi_1$， $u_1(\cdot, p)$ 的所有零点都位于 Ω_1 中。因此，$(f(z,p) - r_1(z,p))/u_1(z,p)$ 不仅在 $\Omega_1 \times \Pi_1$ 中解析，而且在更大的域 $\Omega \times \Pi_1$ 中也解析。因此， $g_1(z,p)$ 在 $\Omega \times \Pi_1$ 中解析。我们转到下一个零点 (z_2, π)，并对 g_1 和 u_2 应用推论 2，得到

$$g_1(z,p) = g_2(z,p)u_2(z,p) + r_2(z,p), \tag{28}$$

其中 g_1、 g_2、 r_2 在 $\Omega \times \Pi_2$ 上均为解析函数，这里 Π_2 是 π 的某个邻域。重复此过程，得到 $g_{j-1}(z, p) = g_j(z,p)u_j(z,p) + r_j(z,p)$，其中 $j = 2, \ldots, k$，且 $g_1, \ldots, g_k$、 $r_1, \ldots, r_k$ 在 $\Omega \times \Pi_\pi$ 上均为解析函数，这里 $\Pi_\pi = \bigcap_{j=1}^{k} \Pi_k \subset \Pi$ 是 π 的一个邻域。将 (28) 中 g_1 的分解代入 (27) 中的 g_1，得到

$$f(z,p) = \big(g_2(z,p)u_2(z,p) + r_2(z,p)\big)u_1(z,p) + r_1(z,p).$$

递归地将上述方程中的 g_{j-1} 替换为 $g_{j-1}(z, p) = g_j(z, p)u_j(z, p) + r_j(z, p)$，其中 $j = 3, \ldots, k+1$，可得

$$\begin{aligned} f(z,p) = {} & \underbrace{g_k(z,p)}_{=:\, g(z,p)} \underbrace{u_k(z,p)\cdots u_1(z,p)}_{=:\, u(z,p)} \\ & + \underbrace{r_k(z,p)u_{k-1}(z,p)\cdots u_1(z,p) + \cdots + r_2(z,p)u_1(z,p) + r_1(z,p)}_{=:\, r(z,p)}. \end{aligned}$$

此表达式即为

$$f(z,p) = g(z,p)u(z,p) + r(z,p),$$

其中， g， r 在 $\Omega \times \Pi_\pi$ 中是解析的，并且对于所有 $p \in \Pi_\pi$， $r(\cdot, p)$ 是次数小于 m 的多项式。因此，到目前为止，我们已经证明，所寻求的分解 $f = g_\pi u + r_\pi$ 在 π 附近局部存在。我们通过解析延拓论证完成证明。考虑 π， $\pi' \in \Pi$，使得 $\Pi_\pi \cap \Pi_{\pi'} = \Pi' \neq \emptyset$。在 $\Omega \times \Pi'$ 上，两个表示 $f = g_\pi u + r_\pi$ 和 $f = g_{\pi'}u + r_{\pi'}$ 一致。因此，我们有

$$(g_\pi - g_{\pi'})u = r_{\pi'} - r_\pi$$

在 $\Omega \times \Pi'$ 上。特别地，对于所有 $p \in \Pi'$，我们有

$$g_\pi(\cdot,p) - g_{\pi'}(\cdot,p) = \frac{r_{\pi'}(\cdot,p) - r_\pi(\cdot,p)}{u(\cdot,p)}$$

在 Ω 中是解析的。因此， $r_{\pi'}(\cdot, p) - r_\pi(\cdot, p)$ 和 $u(\cdot, p)$ 的零点要么必须相互抵消（由于 u 的次数更高，且其所有零点都位于 Ω 中，这是不可能的），要么等式两边都为零，而这里正是后一种情况。这意味着，对于所有 $p \in \Pi'$， $g_\pi(\cdot, p) = g_{\pi'}(\cdot, p)$，且 $r_\pi(\cdot, p) = r_{\pi'}(\cdot, p)$。通过解析延拓，我们进而得到在 $\Pi_\pi \cup \Pi_{\pi'}$ 上 $g_\pi = g_{\pi'}$ 和 $r_\pi = r_{\pi'}$。由于解析延拓具有唯一性，这一相等关系也表明所得到的分解是唯一的。对于任意 $\pi'' \in \Pi$，我们都可以选择一条连接 π 和 π'' 的路径（因为 Π 是一个区域，因而是连通的），并沿该路径取相交的邻域，重复类似的论证，从而证明 $g_\pi = g_{\pi''}$ 和 $r_\pi = r_{\pi''}$。由于对任意 $\pi'' \in \Pi$ 都可以这样做，我们最终得到 $f = g_\pi u + r_\pi$ 在整个集合 $\Omega \times \Pi$ 中成立。

□

C.2. 定理2的证明

证明。 首先，我们注意到可以写成

$$\mathbf{T}(z,p)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(\mathbf{T}(z,p))}{\det(\mathbf{T}(z,p))}, \tag{29}$$

其中，伴随矩阵 adj(**T**(z, p)) 是 Ω 中的矩阵值解析函数 $\times\,\Pi$。类似地，det(**T**(z, p)) 是 Ω 中的标量值解析函数 $\times\,\Pi$，对于所有 m，它在 Ω 中恰有 个零点（按阶数计），$p\in\Pi$ 这是由于假设 **T** 对于所有 m，在 Ω 中恰有 个特征值（按代数重数计） $p\in\Pi$。因此，我们可以对其应用引理 3，得到分解

$$\det\left(\mathbf{T}(z,p)\right)=u(z,p)h(z,p), \tag{30}$$

其中，u(·, p) 是多项式，h 是解析的，并且 h(z, p) $\neq 0$ 在 Ω $\times\,\Pi$ 中。因此，函数

$$\mathbf{P}(z,p)=\frac{\operatorname{adj}\left(\mathbf{T}(z,p)\right)}{h(z,p)}$$

是在Ω中解析的矩阵值函数$\times\,\Pi$。将 u 表示为平移魏尔斯特拉斯多项式的乘积，如（26）中所述，我们可以对 4 中的每个元素应用引理 **P**，从而得到如下形式的分解

$$\mathbf{P}(z,p)=\mathbf{N}(z,p)u(z,p)+\mathbf{R}(z,p),$$

其中 **N** 和 **R** 是在 Ω 中唯一的解析函数 $\times\,\Pi$，并且 **R**(·, p) 对所有 $p\in\Pi$都是矩阵值多项式。因此，我们可以将（29）改写为

$$\mathbf{T}(z,p)^{-1}=\frac{\mathbf{P}(z,p)}{u(z,p)}=\frac{\mathbf{N}(z,p)u(z,p)+\mathbf{R}(z,p)}{u(z,p)}=\mathbf{N}(z,p)+\frac{\mathbf{R}(z,p)}{u(z,p)}.$$

对于每个 $p\in\Pi$，u(·, p) 是多项式，R(·, p) 的各个元素也都是多项式，因此 R(·, p)/u(·, p) 是矩阵值有理函数，而 N(·, p) 在 Ω 中解析。引理 4 确保 R(·, p) 的次数严格小于 u(·, p) 的次数，因此

$$\mathbf{H}(z,p)=\frac{\mathbf{R}(z,p)}{u(z,p)} \tag{31}$$

是一个真有理函数。为了将 **H**(·, p) 这一新形式与特征向量矩阵 **V**(p) 和 **W**(p) 以及 Jordan 矩阵 **J**(p) 联系起来，我们试图使（31）与逐点 Keldysh 分解相一致。对每个固定的 $p\in\Pi$，将逐点 Keldysh 分解（沿用命题 1 的思路，并根据定理 3 作推广）写作

$$\mathbf{T}(z,p)^{-1}=\widetilde{\mathbf{H}}(z,p)+\widetilde{\mathbf{N}}(z,p),$$

其中

$$\widetilde{\mathbf{H}}(z,p)=\mathbf{V}(p)(z\mathbf{I}-\mathbf{J}(p))^{-1}\mathbf{W}(p)^{*}. \tag{32}$$

对每个固定的 $p\in\Pi$，令 $z_1,\ldots,z_k\in\Omega$ 表示 T(·, p) 的特征值。对每个 z_j，选取一个以 z_j 为中心且足够小的开圆盘 C_j，使得 z_j 是 T(·, p) 在 C_j, $C_j\subset\Omega$ 中唯一的特征值，并且函数 N(·, p) 和 N(·, p) 在 C_j 上解析。注意~，H(·, p) 和 H(·, p) 都是真有理函数。我们将通过比较它们的 Laurent 级数系数来证明这两个函数相同。首先，对于 $j=1,\ldots,k$ 和 $i=0,\ldots,m-1$，考虑以下等价表达式

$$\begin{aligned}(z-z_j)^i\mathbf{T}(z,p)^{-1}&=(z-z_j)^i\mathbf{H}(z,p)+(z-z_j)^i\mathbf{N}(z,p)\\&=(z-z_j)^i\widetilde{\mathbf{H}}(z,p)+(z-z_j)^i\widetilde{\mathbf{N}}(z,p).\end{aligned}$$

沿着 ∂C_j积分右侧的等价表达式，在后一种情况下代入（32），得到

$$\int_{\partial C_j}(z-z_j)^i\mathbf{H}(z,p)\,\mathrm{d}z=\int_{\partial C_j}(z-z_j)^i\mathbf{V}(p)(z\mathbf{I}-\mathbf{J}(p))^{-1}\mathbf{W}(p)^{*}\,\mathrm{d}z. \tag{33}$$

~特别地，项（$z-z_j$）^{i}**N**（z,p）和（$z-z_j$）^{i}**N**（z,p）由于柯西定理而消失，因为它们是解析的。（33）中的积分恰好是以 z_j为中心的 **H**（·,p）和 **H**（·,p）的~主部的Laurent级数系数，因此有理函数 **H**（·,p）和 **H**（·,p）的~主部相同。我们注意到，**H**（·,p）和 **H**（·,p）的~Laurent级数的多项式部分必为零，因为它们是严格真有理~函数。综上，我们因此可以得出，**H**（·,p）和 **H**（·,p）在 Ω 中必定相同，因此特别有

$$\mathbf{H}(z,p)=\mathbf{V}(p)(z\mathbf{I}-\mathbf{J}(p))^{-1}\mathbf{W}(p)^{*}$$

对所有 $p\in\Pi$。关于 **V**、**W** 和 **J**（当所有特征值均为单根时）的解析性这一陈述，依据隐函数定理即可得出，正如 [2] 中所讨论的。 □

参考文献

[1] R. Andreev 和 C. Schwab。参数特征值问题的稀疏张量逼近。载于 I. G. Graham、T. Y. Hou、O. Lakkis 和 R. Scheichl 编，《多尺度问题的数值分析》，第 203–241 页。施普林格，柏林，2012年。 doi:10.1007/978-3-642-22061-6_7。A. L. Andrew、K.-W. E. Chu 和 P. Lancaster。矩阵函数的特征值和特征向量的导数。SIAM 矩阵分析与应用杂志，14：903–926，1993年。doi:10.1137/0614061。[3] A. C. Antoulas 和 B. D. Q. Anderson。论标量有理插值问题。IMA 数学、控制与信息学杂志，3：61–88，1986 年。 doi:10.1093/imamci/3.2-3.61。[4] A. C. Antoulas、C. A. Beattie 和 S. G¨u˘gercin。《模型降阶的插值方法》。工业与应用数学学会，费城，2020年。 doi:10.1137/1.9781611976083。[5] A. C. Antoulas、I. V. Gosea 和 C. Poussot-Vassal。论 Loewner 框架、Kolmogorov 超叠加定理与维数灾难。SIAM 评论，67：737–770，2025年。 doi:10.1137/24M1656657。[6] A. C. Antoulas、S. Lefteriu 和 A. C. Ionita。Loewner 框架在模型降阶中的教程式介绍。载于《模型降阶与逼近》，第 335–376 页。工业与应用数学学会，费城，2017年。 doi:10.1137/1.9781611974829.ch8。[7] J. Asakura、T. Sakurai、H. Tadano、T. Ikegami 和 K. Kimura。使用轮廓积分求解非线性特征值问题的一种数值方法。JSIAM 通讯，1：52–55，2009年。doi:10.14495/jsiaml.1.52。[8] L. Balicki。《参数化 Keldysh 分解：数值示例的代码》，2025年。 doi:10.5281/zenodo.18099472。[9] H. Baumg¨artel。《矩阵与算子的解析扰动理论》。Birkh¨auser 出版社，巴塞尔，1985 年。 doi:10.1515/9783112721810。[10] T. Betcke 和 D. Kressner。矩阵多项式不变对的扰动、提取与精化。《线性代数及其应用》，435：514–536，2011年。 doi:10.1016/j.laa.2010.06.029。[11] W.-J. Beyn。求解非线性特征值问题的一种积分方法。《线性代数及其应用》，436：3839–3863，2012年。 doi:10.1016/j.laa.2011.03.030。[12] W.-J. Beyn、C. Effenberger 和 D. Kressner。参数化非线性特征值问题的特征值与不变对延拓。数值数学，119：489–516，2011年。 doi:10.1007/s00211-011-0392-1。[13] W. J. Beyn 和 V. Th¨ummler。参数化二次特征值问题的不变子空间延拓。SIAM 矩阵分析与应用杂志，31：1361–1381，2010年。 doi:10.1137/080723107。[14] D. Bindel、J. Demmel 和 M. Friedman。大型分岔问题中的不变子空间延拓。SIAM 科学计算杂志，30：637–656，2008年。 doi:10.1137/060654219。[15] M. C. Brennan、M. Embree 和 S. Gugercin。非线性特征值问题的轮廓积分方法：一种系统理论方法。SIAM 评论，65：439–470，2023年。 doi:10.1137/20M1389303。[16] A. Carracedo Rodriguez、L. Balicki 和 S. Gugercin。用于参数化动力系统数据驱动建模的 p-AAA 算法。SIAM 科学计算杂志，45：A1332–A1358，2023年。 doi:10.1137/20M1322698。[17] Steven Cox 和 Enrique Zuazua。阻尼弦的能量衰减速率。偏微分方程通讯，19：213–243，1994年。[18] W. Ebeling。《多复变函数及其奇点》。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2007年。

[19] Mark Embree 等人，《部分阻尼弦的非线性特征值问题》。准备中。

[20] Mark Embree 和 A. Cosmin Ionit˘a. Loewner 铅笔的伪谱。载于 C. Beat- tie、P. Benner、M. Embree、S. Gugergin 和 S. Lefteriu 编，《动力系统的实现与模型降阶：献给 *Thanos Antoulas 70* 岁生日的纪念文集》，第 59–78 页。施普林格，瑞士 Cham，2022年。doi:10.1007/978-3-030-95157-3_4。[21]I. Gohberg。《数学故事》。载于 H. Dym、S. Goldberg、M. A. Kaashoek 和 P. Lancaster 编，《*Gobhberg* 纪念文集》第 *1* 卷：卡尔加里会议与矩阵理论论文，第 17–56 页。Birkh¨auser 出版社，巴塞尔，1989年。doi:10.1007/978-3-0348-9276-6_2。

[22] I. C. Gohberg 和 E. I. Sigal。《对数留数定理》和 Rouch´e 定理的算子推广。《苏联数学文集》，13：603–625，1971年。 doi:10.1070/SM1971v013n04ABEH003702。

[23] R. C. Gunning 和 H. Rossi。《多复变解析函数》。AMS Chelsea，罗得岛州普罗维登斯，2015年。[24] S. G¨uttel 和 F. Tisseur。《非线性特征值问题》。《数值学报》，26:1–94，2017年。 doi:10.1017/S0962492917000034。[25] A. C. Ionita 和 A. C. Antoulas。在 Loewner 框架中的数据驱动参数化模型降阶。《SIAM 科学计算杂志》，36:A984–A1007，2014年。doi:10.1137/130914619。[26] Tosio Kato。《线性算子扰动理论》。施普林格出版社，柏林，修订第二版，1980年。 doi:10.1007/978-3-642-66282-9。[27] M. V. Keldysh。关于某些类别非自伴方程的特征值和特征函数。《苏联科学院院报》（NS），77(1):11–14，1951年。[28] M. V. Keldysh。关于某些类别非自伴线性算子的特征函数完备性。《俄罗斯数学综述》，26:15–44，1971年。 doi:10.1070/RM1971v026n04ABEH003985。[29] T. Mach 和 M. A. Freitag。利用泰勒级数和切比雪夫展开求解参数特征值问题。《SIAM 矩阵分析与应用杂志》，46:957–983，2025年。 doi:10.1137/23M1551961。[30] A. J. Mayo 和 A. C. Antoulas。广义实数实现问题求解框架。《线性代数及其应用》，425:634–662，2007年。 doi:10.1016/j.laa.2007.03.008。[31] R. Mennicken 和 M. M¨oller。《非自伴边界特征值问题》。Elsevier，阿姆斯特丹，2003年。[32] Wim Michiels 和 Silviu-Iulian Niculescu。《时滞系统的稳定性与镇定：基于特征值的方法》。SIAM，费城，第二版，2014年。doi:10.1137/1.9780898718645。[33] Yuji Nakatsukasa、Olivier S`ete 和 Lloyd N. Trefethen。用于有理近似的 AAA 算法。《SIAM 科学计算杂志》，40:A1494–A1522，2018年。 doi:10.1137/16M1106122。[34] Petko Petkov。《数值约当标准形》。世界科学出版社，哈肯萨克，新泽西州，2024年。 doi:10.1142/13682。[35] D. Pradovera 和 A. Borghi。一般参数化特征值问题的基于匹配的求解。《计算物理学杂志》，519:113384，2024年。 doi:10.1016/j.jcp.2024.113384。

[36] 樱井哲也和杉浦宏。利用数值积分求解广义特征值问题的投影法。 计算与应用数学杂志，159:119–128，2003年。doi:10.1016/S0377-0427(03)00565-X。

[37] M.Zedek. 多项式线性组合的连续性及零点位置。美国数学会会刊，16:78–84，1965。doi:10.2307/2034005。