arXiv:2601.01555v1 [math.FA] 4 Jan 2026

更多内积界及其应用

MOHAMMAD SABABHEH 和 HAMID REZA MORADI

摘要。本文的主要目标是给出希尔伯特空间中某些内积的新界，并将其应用于数值半径和算子范数。所得结果显著改进了这一方向上的先前结果。

1. 引言

设 $\mathbb{H}$ 是一个复希尔伯特空间，其内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，诱导范数为 $\|\cdot\|$。从一个希尔伯特空间 $\mathbb{H}_1$ 到另一个希尔伯特空间 $\mathbb{H}_2$ 的所有有界线性算子组成的集合记为$\mathbb{B}(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2)$. 当 $\mathbb{H}_1=\mathbb{H}_2=\mathbb{H}$时，我们简写为 $\mathbb{B}(\mathbb{H})$，而不写作 $\mathbb{B}(\mathbb{H},\mathbb{H})$。

在希尔伯特空间乃至一般内积空间中，最基本的不等式之一是柯西-施瓦茨不等式，它断言

$$|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\,\|y\|;x,y\in\mathbb{H}. \tag{1.1}$$

这一不等式是希尔伯特空间理论的基础，涉及它或其变体的应用不胜枚举。

其中 （1.1）最实用、用途最广的变体是布扎诺不等式 [6], ，其表述为 s

$$|\langle x,z\rangle||\langle y,z\rangle|\leq\frac{\|z\|^2}{2}\left(|\langle x,y\rangle|+\|x\|\,\|y\|\right), \tag{1.2}$$

对于任意x，y，$z\in\mathbb{H}$。

（1.1）的一个更完善的推广版本是混合柯西-施瓦茨不等式，其表述为：若$T\in\mathbb{B}(\mathbb{H})$，且$x$，$y\in\mathbb{H}$，则 [13]

$$|\langle Tx,y\rangle|^2\leq\left\langle|T|^{2(1-t)}x,x\right\rangle\left\langle|T^*|^{2t}y,y\right\rangle;0\leq t\leq 1. \tag{1.3}$$

取$T=I$即可看出（1.3）是（1.1）的推广；其中，I 是恒等算子。在此背景下，$|T|$表示绝对值算子，其定义为 $|T|=(T^*T)^{\frac{1}{2}}$，，其中T^*表示T的伴随算子。

通常会将 $\mathbb{B}(\mathbb{H}_1,\ \mathbb{H}_2)$ 的元素与某些标量联系起来，称为范数，以便比较算子，因为有界线性算子空间上不存在自然的全序。给定 $T\in\mathbb{B}(\mathbb{H}_1,\ \mathbb{H}_2)$，算子 T 的算子范数定义为$\|T\|=\sup\{\|Tx\|:\ x\in\mathbb{H}_1,\ \|x\|=1\}$. 另一种有趣的范数是所谓的数值半径，它定义在 $\mathbb{B}(\mathbb{H})$ 上，定义为

$$\omega(T)=\sup\{|\langle Tx,x\rangle|:x\in\mathbb{H},\|x\|=1\};T\in\mathbb{B}(\mathbb{H}).$$

2010数学主题分类。主要分类 47A12；次要分类 47A30、47A63、15A60。关键词和短语。
数值半径、通常的算子范数、柯西-施瓦茨不等式。

众所周知，若 $T \in \mathbb{B}(\mathbb{H})$，则有如下等价关系 [8, 定理 1.3-1]

$$\frac{1}{2}\|T\| \le \omega(T) \le \|T\|. \tag{1.4}$$

这一关系的一个重要意义在于，它以 $\|T\|$ 为界给出了一个包含 $\omega(T)$ 的区间；与 $\|T\|$. 相比，这是一个通常不易求得的量

许多研究人员投入了大量精力来改进（1.1）中的界，从而得到各种不同的形式。柯西-施瓦茨不等式及其变体，如上所述，是这项研究中不可或缺的工具。

特别值得关注的是，矩阵作为有限维希尔伯特空间上的算子，受到了相当多的重视。更具体地说，具有非负元素的矩阵因如下观察而找到了简便的处理途径：[7], 证明了，如果 $T = [t_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ 是一个 $n \times n$ 矩阵，且其元素非负，那么 $\omega(T) = \|\Re(T)\|$, 其中 $\Re(T) = \frac{T+T^*}{2}$ 是 T 的实部。

作为这一非负性问题的一个重要应用，我们提及算子矩阵的一个应用。设 $\mathbb{H}_i$ 为希尔伯特空间，其中 $i = 1,\ldots,n$，并设 $T_{ij} \in \mathbb{B}(\mathbb{H}_j, \mathbb{H}_i)$。于是，算子矩阵 $[T_{ij}]$ 是 $\mathbb{B}(\mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{H}_n)$. 中的一个算子。这确实是一个不易处理的算子。然而，在 [11], 中给出了以下界

$$\|[T_{ij}]\| \le \|[\|T_{ij}\|]\|. \tag{1.5}$$

这个不等式左右两边的区别在于，左边是算子矩阵的范数，而右边是一个由非负元素组成的$n \times n$矩阵的范数。如何以类似于（1.5）的方式讨论 $\omega\left([T_{ij}]\right)$ 的可能上界，一直是一个有趣的话题。若能得到 $\omega\left([T_{ij}]\right) \le \omega\left([\omega(T_{ij})]\right)$.，那就太理想了。但这是不可能的；如下面的例子所示

$$T = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

作为由方阵组成的算子矩阵。这一挑战促使研究人员寻找能够简化 $\omega\left([T_{ij}]\right)$ 计算的上界。关于算子矩阵数值半径最有趣的上界之一，是 [1], 中针对$n \times n$算子矩阵 $T = [T_{ij}] \in \mathbb{B}(\oplus_{k=1}^{n}\mathbb{H})$ 给出的以下结果：

$$\omega(T) \le \omega\left([t_{ij}]\right), \text{ where } t_{ij} = \begin{cases} \omega(T_{ij}), & i = j \\ \|T_{ij}\|, & i \ne j \end{cases}. \tag{1.6}$$

关于算子矩阵数值半径的其他一些界可见 [3, 5, 9, 10,12, 16]。作为我们结果的一项应用，我们将能够得到（1.6）的一个改进形式。

本文的主要目标是给出算子矩阵数值半径的一些界，并将其应用于谱半径$r(\cdot)$，该谱半径对$T \in \mathbb{B}(\mathbb{H})$定义为

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \textit{ is in the spectrum of } T\}.$$

为支持我们的结果，我们需要证明近期涉及算子范数和数值半径的内积不等式的改进版本。

后续各节的安排如下。下一节中，我们将证明两个关于如下形式内积的界：$|\langle Ax, y\rangle| + |\langle By, x\rangle|$。然后我们将利用这些界

证明数值半径界和谱半径界，并将它们与已有结果进行比较。我们还将把本文的结果与 [1, 4, 10, 11, 14, 17] 中的结果进行比较。

2. 两个内积上界

本节证明 $|\langle Ax,\ y\rangle|+|\langle By,\ x\rangle|$.的两个上界。为说明这两个界都非平凡，我们将与结果 resul 进行具体比较，并展示一般情况下这两个界不可比较。

引理 2.1。 设 $A\in\mathbb{B}(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2)$ 和 $B\in\mathbb{B}(\mathbb{H}_2,\mathbb{H}_1)$。对于任意 $x\in\mathbb{H}_1$、$y\in\mathbb{H}_2$,

$$|\langle Ax,y\rangle|+|\langle By,x\rangle|\leq\sqrt{\omega\left(|A|+i|B^*|\right)\omega\left(|A^*|+i|B|\right)+\|A\|\|B\|+\omega(BA)}\,\|x\|\,\|y\|.$$

证明。 事实上，由 Buzano 不等式 (1.2)、混合 Cauchy-Schwarz 不等式 (1.3) 以及 Cauchy-Schwarz 不等式可知

$$\begin{aligned}
&(|\langle Ax,y\rangle|+|\langle By,x\rangle|)^2\\
&=|\langle Ax,y\rangle|^2+|\langle By,x\rangle|^2+2|\langle Ax,y\rangle||\langle By,x\rangle|\\
&=|\langle Ax,y\rangle|^2+|\langle By,x\rangle|^2+2|\langle Ax,y\rangle||\langle y,B^*x\rangle|\\
&=|\langle Ax,y\rangle|^2+|\langle By,x\rangle|^2+2|\langle Ax,y\rangle\langle y,B^*x\rangle|\\
&\leq|\langle Ax,y\rangle|^2+|\langle By,x\rangle|^2+(\|Ax\|\|B^*x\|+|\langle Ax,B^*x\rangle|)\|y\|^2\\
&=|\langle Ax,y\rangle|^2+|\langle By,x\rangle|^2+(\|Ax\|\|B^*x\|+|\langle BAx,x\rangle|)\|y\|^2\\
&\leq\langle|A|x,x\rangle\langle|A^*|y,y\rangle+\langle|B|y,y\rangle\langle|B^*|x,x\rangle+(\|Ax\|\|B^*x\|+|\langle BAx,x\rangle|)\|y\|^2\\
&\leq\sqrt{\langle|A|x,x\rangle^2+\langle|B^*|x,x\rangle^2}\sqrt{\langle|A^*|y,y\rangle^2+\langle|B|y,y\rangle^2}+(\|Ax\|\|B^*x\|+|\langle BAx,x\rangle|)\|y\|^2\\
&=|\langle|A|x,x\rangle+i\langle|B^*|x,x\rangle||\langle|A^*|y,y\rangle+i\langle|B|y,y\rangle|+(\|Ax\|\|B^*x\|+|\langle BAx,x\rangle|)\|y\|^2\\
&=|\langle(|A|+i|B^*|)x,x\rangle||\langle(|A^*|+i|B|)y,y\rangle|+(\|Ax\|\|B^*x\|+|\langle BAx,x\rangle|)\|y\|^2 \qquad (2.1)\\
&\leq\omega\left(|A|+i|B^*|\right)\omega\left(|A^*|+i|B|\right)\|x\|^2\|y\|^2+(\|A\|\|B^*\|+\omega(BA))\|x\|^2\|y\|^2\\
&=(\omega\left(|A|+i|B^*|\right)\omega\left(|A^*|+i|B|\right)+\|A\|\|B\|+\omega(BA))\|x\|^2\|y\|^2,
\end{aligned}$$

如所要求。 □

注 2.1. 已有结果表明， [15, 命题 1。4] 若 A、$B\in\mathbb{B}(\mathbb{H})$ 均为自伴算子，则

$$\omega(A+iB)\leq\left\|A^2+B^2\right\|^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.2)$$

由引理 *2.1* 可推知

$$
\begin{aligned}
&|\langle Ax,y\rangle|+|\langle By,x\rangle| \\
&\leq \sqrt{\omega\left(|A|+i|B^*|\right)\omega\left(|A^*|+i|B|\right)+\|A\|\|B\|+\omega(BA)}\,\|x\|\,\|y\| \\
&\leq \sqrt{\sqrt{\left\||A|^2+|B^*|^2\right\|\left\||A^*|^2+|B|^2\right\|}+\|A\|\|B\|+\omega(BA)}\,\|x\|\,\|y\| \\
&\leq \sqrt{\sqrt{\left(\left\||A|^2\right\|+\left\||B^*|^2\right\|\right)\left(\left\||A^*|^2\right\|+\left\||B|^2\right\|\right)}+\|A\|\|B\|+\omega(BA)}\,\|x\|\,\|y\| \\
&= \sqrt{\sqrt{\left(\|\,|A|\,\|^2+\|\,|B^*|\,\|^2\right)\left(\|\,|A^*|\,\|^2+\|\,|B|\,\|^2\right)}+\|A\|\|B\|+\omega(BA)}\,\|x\|\,\|y\| \\
&= \sqrt{\|A\|^2+\|B\|^2+\|A\|\|B\|+\omega(BA)}\,\|x\|\,\|y\| \\
&= \sqrt{(\|A\|+\|B\|)^2-(\|A\|\|B\|-\omega(BA))}\,\|x\|\,\|y\|\,.
\end{aligned}
$$

事实上，我们的结果很好地改进了

$$
|\langle Ax,y\rangle|+|\langle By,x\rangle| \leq \sqrt{(\|A\|+\|B\|)^2-(\|A\|\|B\|-\omega(BA))}\,\|x\|\,\|y\|\,,
$$

这在 [4, 引理 2.2] 中得到了证明。

我们的第二个内积界可以表述如下。

引理 2.2. 设 $A\in\mathbb{B}(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2)$ 和 $B\in\mathbb{B}(\mathbb{H}_2,\mathbb{H}_1)$。对于任意 $x\in\mathbb{H}_1$、$y\in\mathbb{H}_2$,

$$
|\langle Ax,y\rangle|+|\langle By,x\rangle| \leq \sqrt{\omega\left(|A|+i|B^*|\right)\omega\left(|A^*|+i|B|\right)+\frac{1}{2}\left\||A|^2+|B^*|^2\right\|+\omega(BA)}\,\|x\|\,\|y\|\,.
$$

证明。 由 (2.1) 可得

$$
\begin{aligned}
&\left(|\langle Ax,y\rangle|+|\langle By,x\rangle|\right)^2 \\
&\leq |\langle(|A|+i|B^*|)x,x\rangle|\,|\langle(|A^*|+i|B|)y,y\rangle|+\left(\|Ax\|\,\|B^*x\|+|\langle BAx,x\rangle|\right)\|y\|^2 \\
&= |\langle(|A|+i|B^*|)x,x\rangle|\,|\langle(|A^*|+i|B|)y,y\rangle|+\left(\sqrt{\langle Ax,Ax\rangle\langle B^*x,B^*x\rangle}+|\langle BAx,x\rangle|\right)\|y\|^2 \\
&= |\langle(|A|+i|B^*|)x,x\rangle|\,|\langle(|A^*|+i|B|)y,y\rangle|+\left(\sqrt{\left\langle|A|^2x,x\right\rangle\left\langle|B^*|^2x,x\right\rangle}+|\langle BAx,x\rangle|\right)\|y\|^2 \\
&\leq |\langle(|A|+i|B^*|)x,x\rangle|\,|\langle(|A^*|+i|B|)y,y\rangle|+\left(\frac{1}{2}\left(\left\langle|A|^2x,x\right\rangle+\left\langle|B^*|^2x,x\right\rangle\right)+|\langle BAx,x\rangle|\right)\|y\|^2 \\
&= |\langle(|A|+i|B^*|)x,x\rangle|\,|\langle(|A^*|+i|B|)y,y\rangle|+\left(\frac{1}{2}\left\langle\left(|A|^2+|B^*|^2\right)x,x\right\rangle+|\langle BAx,x\rangle|\right)\|y\|^2 \\
&\leq \omega\left(|A|+i|B^*|\right)\omega\left(|A^*|+i|B|\right)\|x\|^2\|y\|^2+\left(\frac{1}{2}\left\||A|^2+|B^*|^2\right\|+\omega(BA)\right)\|x\|^2\|y\|^2 \\
&= \left(\omega\left(|A|+i|B^*|\right)\omega\left(|A^*|+i|B|\right)+\frac{1}{2}\left\||A|^2+|B^*|^2\right\|+\omega(BA)\right)\|x\|^2\|y\|^2,
\end{aligned}
$$

如所需。 □

注 2.2。 在引理 *2.1* 和 *4* 中，我们为 $|\langle Ax,y\rangle|+|\langle By,x\rangle|$ 找到了上界。本注中，我们给出两个例子，说明这两个界并非总有一个优于另一个。首先，令

$$A=\begin{bmatrix}4&1\\3&3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}4&1\\-3&-1\end{bmatrix},x=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},y=\begin{bmatrix}-\frac{4}{\sqrt{17}}\\-\frac{1}{\sqrt{17}}\end{bmatrix}.$$

可以看出

$$\sqrt{\omega\left(|A|+i|B^*|\right)\omega\left(|A^*|+i|B|\right)+\|A\|\,\|B\|}+\omega(BA)\,\|x\|\,\|y\|\approx 9.567,$$

而

$$\sqrt{\omega\left(|A|+i|B^*|\right)\omega\left(|A^*|+i|B|\right)+\frac{1}{2}\left\||A|^2+|B^*|^2\right\|}+\omega(BA)\,\|x\|\,\|y\|\approx 9.10612,$$

这表明在这种情况下，引理 *2.2* 更优。
另一方面，令

$$A=\begin{bmatrix}2&2\\-1&2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}3&4\\4&1\end{bmatrix},x=\begin{bmatrix}-\frac{3}{\sqrt{10}}\\-\frac{1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix},y=\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{13}}\\-\frac{2}{\sqrt{13}}\end{bmatrix},$$

我们得到

$$\sqrt{\omega\left(|A|+i|B^*|\right)\omega\left(|A^*|+i|B|\right)+\|A\|\,\|B\|}+\omega(BA)\,\|x\|\,\|y\|\approx 9.02776,$$

而

$$\sqrt{\omega\left(|A|+i|B^*|\right)\omega\left(|A^*|+i|B|\right)+\frac{1}{2}\left\||A|^2+|B^*|^2\right\|}+\omega(BA)\,\|x\|\,\|y\|\approx 9.27186,$$

这表明在这种情况下，引理 *2.1* 更优。

当然，这种比较是基于对两个量 $\|A\|\,\|B\|$和 $\frac{1}{2}\left\||A|^2+|B^*|^2\right\|$的比较。一般而言，这两个量无法比较，使用上述选择即可验证这一点。

3. 数值半径和谱半径的应用

本节给出我们的主要结果，其中包括一些算子矩阵的界，并将其与先前已知的界进行比较。有趣的是，应用引理 2.1 可得以下界，而应用引理 2.2 则可得另一个界，详见下文。为便于阐述，较简单的情形将在单独的引理中讨论。

定理 3.1. 设 $\left[T_ij\right]$ 是一个 $n\times n$ 算子矩阵，且 $T_ij\in\mathbb{B}\left(\mathbb{H}j\ \mathbb{H}_i\right)$。则

$$\omega\left(\left[T_{ij}\right]\right)\leq\omega\left(\left[\alpha_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}\right),$$

其中

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}\omega(T_{ii}) & if\ i=j\\ \sqrt{\omega\left(|T_{ij}|+i\left|T_{ji}^*\right|\right)\omega\left(\left|T_{ij}^*\right|+i|T_{ji}|\right)+\left\|T_{ij}\right\|\left\|T_{ji}\right\|}+\omega\left(T_{ji}T_{ij}\right) & if\ i<j\\ 0 & if\ i>j\end{cases}.$$

证明。 设 $x = \oplus_{i=1}^{n} x_i \in \oplus_{i=1}^{n} \mathbb{H}_i$ 是一个单位向量，使得 $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 = 1$. 由引理 2.1 可得

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{i,j=1}^{n} \langle T_{ij} x_j, x_i \rangle \right| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} \left| \langle T_{ij} x_j, x_i \rangle \right| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left| \langle T_{jj} x_j, x_j \rangle \right| + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left| \langle T_{ij} x_j, x_i \rangle \right| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left| \langle T_{jj} x_j, x_j \rangle \right| + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \left(\left| \langle T_{ij} x_j, x_i \rangle \right| + \left| \langle T_{ji} x_i, x_j \rangle \right| \right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \omega\left(T_{jj}\right) \left\| x_j \right\|^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \alpha_{ij} \left\| x_i \right\| \left\| x_j \right\| \\
&= \left\langle \left[\alpha_{ij}\right]_{i,j=1}^{n} |x|, |x| \right\rangle,
\end{aligned}$$

其中 $|x| = (\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_n\|)^T \in \mathbb{C}^n$ 是一个单位向量，而 α_{ij} 如定理陈述中所示。由此可得

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} \langle T_{ij} x_j, x_i \rangle \right| \leq \omega\left(\left[\alpha_{ij}\right]_{i,j=1}^{n} \right).$$

因此

$$\omega\left(\left[T_{ij}\right]\right) \leq \omega\left(\left[\alpha_{ij}\right]_{i,j=1}^{n} \right),$$

如所需。 □

注记 3.1。 根据(2.2) 以及注 *2.1* 中的计算，我们看到

$$\omega\left(\begin{matrix} \left|T_{ij}\right| + i\left|T_{ji}^{*}\right| & \\ & \left|T_{ij}^{*}\right| + i\left|T_{ji}\right| \end{matrix}\right) \omega\left(\begin{matrix} \left|T_{ij}\right| + i\left|T_{ji}^{*}\right| & \\ & \left|T_{ij}^{*}\right| + i\left|T_{ji}\right| \end{matrix}\right) + \left\|T_{ij}\right\| \left\|T_{ji}\right\| + \omega\left(T_{ji} T_{ij}\right) \leq \|T_{ij}\| + \|T_{ji}\|.$$

设 $\gamma_{ij} = \begin{cases} \|_{i} \ (T_{ii}), i = j \, T j\| + \|T_{ji}\|, i < j \, 0, i > j \end{cases}$。那么 $\alpha_{ij} \leq \gamma_{ij}$，其中 α_{ij} 如定理 *3.1* 中所述。由于二者

$\alpha_{i}j \ \gamma_{i}j \geq 0$ 和 $\alpha_{i}j \leq \gamma_{i}j$，因此可得 $\omega([\alpha_{i}j]) \leq \omega([\gamma_{i}j])$； 见 [7] 和 [2, 推论 2。1]。另一方面，由于 $\gamma_{ij} \geq 0$，可得（见见 [7, 2]）

$$\omega([\gamma_{ij}]) = \left\| \Re[\gamma_{ij}] \right\| = \left\| \Re[t_{ij}] \right\| = \omega([t_{ij}]),$$

其中

$$t_{ij} = \begin{cases} \omega(T_{ij}), & i = j \\ \|T_{ij}\|, & i \neq j \end{cases}.$$

因此，我们证明了在定理 *3.1* 中得到的界比 (1.6) 中的界更精确。

此外， [11] 中证明了 $\omega([T_{ij}]) \leq \omega([\|T_{ij}\|])$。很容易看出，(1.6)是对这一著名界的改进。因此，定理 *3.1* 中的界也是对后一个界的改进。

现在，引理 2.2 推出以下另一个界，其证明与定理 3.1 的证明相同，只是采用引理 2.2 而非引理 2.1。

定理 3.2. 设 $[T_ij]$ 是一个 $n \times n$ 算子矩阵，且 $T_ij \in \mathbb{B}(\mathbb{H}j\ \mathbb{H}_i)$。那么

$$\omega\left(\left[T_{ij}\right]\right) \leq \omega\left(\left[\beta_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}\right),$$

其中

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \omega(T_{ii}) & if\ i = j \\ \sqrt{\omega\left(\left|T_{ij}\right| + i\left|T_{ji}^{*}\right|\right)\omega\left(\left|T_{ij}^{*}\right| + i\left|T_{ji}\right|\right) + \frac{1}{2}\left\|\left|T_{ij}\right|^{2} + \left|T_{ji}^{*}\right|^{2}\right\| + \omega\left(T_{ji}T_{ij}\right)} & if\ i < j \\ 0 & if\ i > j \end{cases}.$$

由定理 3.1 可得算子矩阵 2×2 的数值半径的如下简洁形式。

推论 3.1. 设 $A \in \mathbb{B}(\mathbb{H}_1)$，$B \in \mathbb{B}(\mathbb{H}_2, \mathbb{H}_1)$，$C \in \mathbb{B}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$，且 $D \in \mathbb{B}(\mathbb{H}_2)$。那么

$$\omega\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\omega(A) + \omega(D)\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\omega(A) - \omega(D)\right)^{2} + \omega\left(|B| + i|C^{*}|\right)\omega\left(|B^{*}| + i|C|\right) + \|B\|\,\|C\| + \omega(CB)}.$$

注 3.2. 文献 [10]，中已证明

$$\omega\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) \leq \max\{\omega(A), \omega(D)\} + \frac{\omega(B+C) + \omega(B-C)}{2}. \tag{3.1}$$

若令

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix},$$

我们发现

$$\max\{\omega(A), \omega(D)\} + \frac{\omega(B+C) + \omega(B-C)}{2} \approx 9.03276,$$

而

$$\frac{1}{2}\left(\omega(A) + \omega(D)\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\omega(A) - \omega(D)\right)^{2} + \omega\left(|B| + i|C^{*}|\right)\omega\left(|B^{*}| + i|C|\right) + \|B\|\,\|C\| + \omega(CB)} \approx 6.50583,$$

这表明推论 *3.1* 中的界可能显著优于(3.1)中的界。我们指出，我们尝试过的所有数值例子都表明，我们的界优于(3.1)中的界；然而，我们仍无法严格证明这一结论。

Rem注 3.3. 若在推论 *3.1* 中令 $B = C = O$（零算子），则可推得 t

$$\omega\left(\begin{bmatrix} A & O \\ O & D \end{bmatrix}\right) \leq \max\{\omega(A), \omega(D)\}.$$

另一方面，如果令 $A = D = O$，我们可以推断出

$$\omega\left(\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}\right) \leq \frac{1}{2}\sqrt{\omega\left(|B| + i|C^{*}|\right)\omega\left(|B^{*}| + i|C|\right) + \|B\|\,\|C\| + \omega(CB)}. \tag{3.2}$$

沿用注 *2.1* 中的相同思路，我们可以证明

$$\begin{aligned}&\sqrt{\omega\left(|B|+i|C^*|\right)\omega\left(|B^*|+i|C|\right)+\|B\|\,\|C\|+\omega\left(CB\right)}\\&\leq\|B\|+\|C\|.\end{aligned}$$

这意味着我们已经证明了

$$\begin{aligned}\omega\left(\begin{bmatrix}O & B\\ C & O\end{bmatrix}\right)&\leq\frac{1}{2}\sqrt{\omega\left(|B|+i|C^*|\right)\omega\left(|B^*|+i|C|\right)+\|B\|\,\|C\|+\omega\left(CB\right)}\\&\leq\frac{\|B\|+\|C\|}{2}.\end{aligned}$$

这确实改进了著名界

$$\omega\left(\begin{bmatrix}O & B\\ C & O\end{bmatrix}\right)\leq\frac{\|B\|+\|C\|}{2},$$

该界已被证明是 $\omega\left(\begin{bmatrix}O & B\\ C & O\end{bmatrix}\right)$ 在 [10] 中最精确的界之一。

注记 3.4. 若在推论 *3.1* 中令 $C=D=O$，我们便得到

$$\omega\left(\begin{bmatrix}A & B\\ O & O\end{bmatrix}\right)\leq\frac{1}{2}\left(\omega(A)+\sqrt{\omega(A)^2+\|B\|^2}\right). \tag{3.3}$$

另一方面，文献 [17] 已证明

$$\omega\left(\begin{bmatrix}A & B\\ O & O\end{bmatrix}\right)\leq\frac{1}{2}\left(\|A\|+\|AA^*+BB^*\|^{\frac{1}{2}}\right). \tag{3.4}$$

If we let $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}$ *and* $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$, *we find that*

$$\frac{1}{2}\left(\omega(A)+\sqrt{\omega(A)^2+\|B\|^2}\right)\approx 3.19774,\frac{1}{2}\left(\|A\|+\|AA^*+BB^*\|^{\frac{1}{2}}\right)\approx 4.64893,$$

这表明(3.3) 能给出比(3.4)更好的估计。我们强调，这种情况并非总是如此，其他例子也表明了这一点。

此外，可以看出，对于上述 A 和 B，不等式 (3.3) 确实取等号，这表明这是一个锐不等式。

注记 3.5。 在 [17], 中，已有结果表明

$$\omega\left(\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\right)\leq\frac{1}{2}\omega(A)+\frac{1}{2}\omega(D)+\frac{1}{4}\left\|I+AA^*+BB^*\right\|+\frac{1}{4}\left\|I+CC^*+DD^*\right\|. \tag{3.5}$$

如果令

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ -3 & 3\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & -3\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & -2\end{bmatrix},$$

我们可以看出

$$\frac{1}{2}\omega(A)+\frac{1}{2}\omega(D)+\frac{1}{4}\left\|I+AA^*+BB^*\right\|+\frac{1}{4}\left\|I+CC^*+DD^*\right\|\approx 18.454,$$

而

$$\frac{1}{2}(\omega(A)+\omega(D))$$
$$+\frac{1}{2}\sqrt{(\omega(A)-\omega(D))^2+\omega(|B|+i|C^*|)\,\omega(|B^*|+i|C|)+\|B\|\,\|C\|+\omega(CB)}\approx 7.41238.$$

因此，在这个例子中，推论 *3.1* 给出了比 (3.5) 更好的估计 .

由 (3.2) 可立即得到 $\omega(B)$ 的以下上界。令$C=B$，即可由 (3.2) 得到该结论。虽然这给出了 $\omega(B)$ 的一个上界，但也给出了 $\omega(B^2)\le\omega(B)^2$. 的幂不等式的一个反向形式

推论 3.2。设 $B\in\mathbb{B}(\mathbb{H})$。则

$$\omega(B)\le\frac{1}{2}\sqrt{\omega^2(|B|+i|B^*|)+\|B\|^2+\omega(B^2)}.$$

证明。 在 (3.2) 中令$C=B$，得到

$$\begin{aligned}
\omega(B)&=\omega\left(\begin{bmatrix}O & B\\ B & O\end{bmatrix}\right)\\
&\le\frac{1}{2}\sqrt{\omega(|B|+i|B^*|)\,\omega(|B^*|+i|B|)+\|B\|^2+\omega(B^2)}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\omega(|B|+i|B^*|)\,\omega(i(|B^*|+i|B|))+\|B\|^2+\omega(B^2)}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\omega(|B|+i|B^*|)\,\omega(i|B^*|-|B|)+\|B\|^2+\omega(B^2)}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\omega(|B|+i|B^*|)\,\omega(-(i|B^*|-|B|))+\|B\|^2+\omega(B^2)}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\omega(|B|+i|B^*|)\,\omega(-i|B^*|+|B|)+\|B\|^2+\omega(B^2)}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\omega(|B|+i|B^*|)\,\omega\left((-i|B^*|+|B|)^*\right)+\|B\|^2+\omega(B^2)}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\omega(|B|+i|B^*|)\,\omega(i|B^*|+|B|)+\|B\|^2+\omega(B^2)}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\omega^2(|B|+i|B^*|)+\|B\|^2+\omega(B^2)},
\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

注记 3.6。 利用 (2.2)，并沿用注 *2.1* 中的计算，可得

$$\begin{aligned}
\sqrt{\omega^2(|B|+i|B^*|)+\|B\|^2+\omega(B^2)}&\le\sqrt{\|\,|B|^2\|+\|\,|B^*|^2\|+\|B\|^2+\omega(B^2)}\\
&\le\sqrt{\|B\|^2+\|B^*\|^2+\|B\|^2+\|B^2\|}\\
&\le 2\|B\|.
\end{aligned}$$

因此，我们由推论 *3.2* 得出

$$\begin{aligned}
\omega(B)&\le\frac{1}{2}\sqrt{\omega^2(|B|+i|B^*|)+\|B\|^2+\omega(B^2)}\\
&\le\|B\|,
\end{aligned}$$

这是对(1.4)中第二个不等式的改进。

ω（B）的一个著名尖锐上界由 [14] 给出

$$\omega(B) \leq \frac{1}{2}\| |B|+|B^*| \|. \tag{3.6}$$

若令 $B = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$，则可得

$$\omega(B) \approx 8.69626, \frac{1}{2}\sqrt{\omega^2(|B|+i|B^*|)+\|B\|^2+\omega(B^2)} \approx 9.74488,$$

并且- $\frac{1}{2}\| |B|+|B^*| \| \approx 9.9823$，这表明推论 *3.2* 中的界所给出的估计可能优于（3.6）。然而，情况并非总是如此，其他例子则显示了相反的结论。

由定理 3.2，我们可以给出以下 2×2 版本。

推论 3.3。设 $A \in \mathbb{B}$（$\mathbb{H}_1$），$B \in \mathbb{B}$（$\mathbb{H}_2,\mathbb{H}_1$），$C \in \mathbb{B}$（$\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2$），且 $D \in \mathbb{B}$（$\mathbb{H}_2$）。则

$$\omega\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) \leq \frac{1}{2}(\omega(A)+\omega(D)) + \frac{1}{2}\sqrt{(\omega(A)-\omega(D))^2+\omega(|B|+i|C^*|)\,\omega(|B^*|+i|C|)+\frac{1}{2}\left\||B|^2+|C^*|^2\right\|+\omega(CB)}.$$

注 3.7。根据我们在注 *2.2* 中的讨论，很容易看出，一般而言，推论 *3.1* 和 *3.3* 中的两个界是不可比较的。

令 $A = D = O$ 在推论 2×2 中，并采用与推论 2.1 中类似的方法，我们可以陈述如下结果。

推论 3.4。令 $T \in \mathbb{B}(\mathbb{H})$。则

$$\omega(T) \leq \frac{1}{2}\sqrt{\omega^2(|T|+i|T^*|)+\frac{1}{2}\left\||T|^2+|T^*|^2\right\|+\omega(T^2)}.$$

注 3.8。当然，推论 *3.4* 改进了推论 *3.2*。

现在，我们可以给出算子乘积之和的谱半径的如下界。

定理 3.3。令 $A_i \in \mathbb{B}(\mathbb{H}_i,\mathbb{H}_1)$，令 $B_i \in \mathbb{B}(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_i)$。则

$$r\left(\sum_{i=1}^{n} A_iB_i\right) \leq \omega\left(\left[\gamma_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}\right),$$

其中

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \omega(B_iA_i) & if\ i=j \\ \sqrt{\omega\left(|B_iA_j|+i\left|A_i^*B_j^*\right|\right)\omega\left(\left|A_j^*B_i^*\right|+i|B_jA_i|\right)+\|B_iA_j\|\,\|B_jA_i\|+\omega(B_jA_iB_iA_j)} & if\ i<j \\ 0 & if\ i>j \end{cases}.$$

证明。令

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ O & O & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & O \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} B_1 & O & \cdots & O \\ B_2 & O & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_n & O & \cdots & O \end{bmatrix} \in \mathbb{B}\left(\oplus_{i=1}^{n}\mathbb{H}_i\right),$$

我们得到

$$r\left(\sum_{j=1}^{n}A_jB_j\right)=r\left(\sum_{j=1}^{n}A_jB_j\oplus O\right)=r(AB)=r(BA)\le\omega(BA).$$

现在，由定理 3.1 可推出该结果。 □

作为定理 3.3 的直接应用，我们得到以下谱半径界。

推论 3.5。设 $A_1,A_2,B_1,B_2\in\mathbb{B}(\mathbb{H})$。则

$$\begin{aligned} &r(A_1B_1+A_2B_2)\\ &\le\frac{1}{2}\left(\omega(B_1A_1)+\omega(B_2A_2)\right)\\ &\quad+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\omega(B_1A_1)-\omega(B_2A_2)\right)^2+\omega\left(|B_1A_2|+i\left|A_1^*B_2^*\right|\right)\omega\left(\left|A_2^*B_1^*\right|+i|B_2A_1|\right)+\|B_1A_2\|\,\|B_2A_1\|}+\omega(B_2A_1B_1A_2). \end{aligned}$$

另一方面，定理 3.2 推出以下另一个界。

定理 3.4。 设 $A_i\in\mathbb{B}\left(\mathbb{H}_i,\mathbb{H}_1\right)$ 且设 $B_i\in\mathbb{B}\left(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_i\right)$。则

$$r\left(\sum_{i=1}^{n}A_iB_i\right)\le\omega\left(\left[\lambda_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}\right),$$

其中

$$\lambda_{ij}=\begin{cases} \omega(B_iA_i) & \text{if } i=j \\ \sqrt{\omega\left(\left|B_iA_j\right|+i\left|A_i^*B_j^*\right|\right)\omega\left(\left|A_j^*B_i^*\right|+i\left|B_jA_i\right|\right)+\frac{1}{2}\left\|\left|B_iA_j\right|^2+\left|A_i^*B_j^*\right|^2\right\|+\omega(B_jA_iB_iA_j)} & \text{if } i<j \\ 0 & \text{if } i>j \end{cases}.$$

作为 定理 3.4 的推论，我们得到谱半径的另一个如下界 .

推论 3.6. 设 $A_1,A_2,B_1,B_2\in\mathbb{B}(\mathbb{H})$。则

$$\begin{aligned} &r(A_1B_1+A_2B_2)\\ &\le\frac{1}{2}\left(\omega(B_1A_1)+\omega(B_2A_2)\right)\\ &\quad+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\omega(B_1A_1)-\omega(B_2A_2)\right)^2+\omega\left(|B_1A_2|+i\left|A_1^*B_2^*\right|\right)\omega\left(\left|A_2^*B_1^*\right|+i|B_2A_1|\right)+\frac{1}{2}\left\|\left|B_1A_2\right|^2+\left|A_1^*B_2^*\right|^2\right\|}+\omega(B_2A_1B_1A_2). \end{aligned}$$

DECLARATIONS

伦理批准。 本声明不适用。

利益冲突。 所有作者均声明不存在利益冲突。

作者贡献。 所有作者对本研究的贡献相同。

经费支持。 作者未获得任何经费资助来完成本研究。

数据和材料的可用性。此声明不适用。

参考文献

[1] A. Abu-Omar，F. Kittaneh，n ×n 算子矩阵的数值半径不等式，《线性代数及其应用》468 (2015)，18–26。[2] F. Al-Turman，F. Kittaneh 和 M. Sababheh，非负矩阵的数值半径，《数学研究成果》(2025) 80:200。[3] W. Audeh，H. R. Moradi 和 M. Sababheh，某些算子矩阵的数值半径界，Filomat. 39(13) (2025)，4341–4355。[4] P. Bhunia，谱半径、数值半径和 Berezin 半径不等式的强化，《西班牙皇家精确、物理与自然科学学院学报 A辑：数学》120，4 (2026)。https://doi-org.aure.unab.edu.co/10. 1007/s13398-025-01795-0[5] P. Bhunia，A. Bhanja，D. Sain 和 K. Paul，基于 B(H) 上新范数的算子矩阵不等式，《米什科尔茨数学札记》24(2) (2023)，653–664。[6] M. L. Buzano，《柯西–施瓦茨不等式的推广》，《都灵理工大学数学研讨会报告》31 (1971/73)，405–409；(1974)（意大利语）。[7] M. Goldberg，E. Tadmor 和 G. Zwas，正矩阵的数值半径，《线性代数及其应用》12 (1975)，209–214。[8] K. E. Gustafson，D. K. M. Rao，《数值域》，施普林格，纽约，1997。[9] M. Hajmohamadi，R. Lashkaripour 和 M. Bakherad，算子矩阵非对角部分上数值半径的若干推广，《数学不等式杂志》12(2) (2018)，447–457。[10] O. Hirzallah，F. Kittaneh 和 K. Shebrawi，某些算子矩阵的数值半径不等式，《积分方程与算子理论》71 (2011)，129–147。[11] J. C. Hou，H. K. Du，正算子矩阵的范数不等式，《积分方程与算子理论》22 (1995)，281–294。[12] S. Jana，P. Bhunia 和 K. Paul，d元算子组及算子矩阵的欧几里得算子半径不等式，《斯洛伐克数学》74(4) (2024)，947–962。[13] T. Kato，线性算子的一些不等式注记，《数学年刊》125 (1952)，208–212。[14] F. Kittaneh，一条数值半径不等式及 Frobenius 伴随矩阵数值半径的一个估计，《数学研究》158(1) (2003)，11–17。[15] H. R. Moradi，M. Sababheh，数值半径的新估计，Filomat. 35(14) (2021)，4957–4962。[16] M. Sababheh，C. Conde 和 H. R. Moradi，关于算子矩阵的数值半径，《数学不等式及其应用》27(2) (2024)，417–434。 2×2 K. Shebrawi，某些算子矩阵的数值半径不等式 II，《线性代数及其应用》523 (2017)，1–12。
（M. Sababheh）萨米娅公主科技大学基础科学系，安曼，约旦 电子邮件地址：sababheh@yahoo.com（H. R. Moradi）伊斯兰阿扎德大学 Ma.C. 数学系，马什哈德，伊朗 电子邮件地址：hrmoradi@mshdiau.ac.ir