arXiv:2601.01565v1 [math.DG] 4 Jan 2026

具有极小赤道的球面

LUCAS AMBROZIO

Abstract. 我们综述关于球面上黎曼度量的分类：在这些度量下，所有赤道都是极小超曲面；并讨论与这些几何相关的问题。

谨以此文献给 *Paolo Piccione*，祝贺他*60*岁生日。

1. Introduction

设 $\mathbb{S}^n$ 为欧几里得空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中以原点为中心、半径为一的 n维球面。 $\mathbb{S}^n$ 的一个赤道是指由 $\mathbb{S}^n$与 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中某个经过原点的超平面相交所确定的任意（$n-1$）维球面。

当 $\mathbb{S}^n$ 配备其截面曲率恒为 1 的典范黎曼度量 g 时，所有赤道都成为全测地超曲面。特别是，在维数为 $n \geq 3$时，所有赤道都是 $(\mathbb{S}^n, g)$ 上的极小超曲面。因此，它们是由 g定义的 $(n-1)$ 维体积测度的临界点。

我们关注以下问题：

对球面$\mathbb{S}^n$ 上的黎曼度量进行分类并理解哪些度量使所有赤道都是极小的。

该问题的任何解都必须考虑将赤道映射为赤道的 $\mathbb{S}^n$ 微分同胚群的作用，因为这个群通过拉回自然作用于这类黎曼度量的集合。

在维数 $n = 2$ 的情形中，这个问题的性质略有不同，因为它是一个关于测地线的问题。Eugenio Beltrami [12] 的研究已经给出了它的完整解：除缩放和上述作用外，只有 $\mathbb{S}^2$ 上的典范度量 $g_{_}$ 才使所有大圆都成为测地线。我们将在下文介绍 Beltrami 这一发现的历史

L.A. 获得了 CNPq 的资助（309908/2021-3 和 302815/2025-2 - Bolsa PQ，以及 406666/2023-7 - Universal），并获得了 FAPERJ 的资助（项目 SEI-260003/000534/2023 - Bolsa E-26/200.175/2023，以及项目 SEI-260003/001527/2023 - APQ1 E-26/210.319/2023）。

，并在附录 A 中讨论它所启发的一些进展。

1.1. **分类**。 问题的第一部分已有相当令人满意的答案：它不仅相当明确地解决了问题，还以全新的视角展现了这些几何，并引出了更多问题。

分类定理。 在球面 $\mathbb{S}^n$ 上所有赤道均为极小子流形的黎曼度量集合，与 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中具有正截面曲率的代数曲率张量集合之间，存在一个 $PGL(n+1,\mathbb{R})$-等变的一一对应关系。

$\mathbb{R}^{n+1}$ 中的代数曲率张量 是一个四线性映射 R，它具有与定义在一个 $(n+1)$ 维流形上的黎曼度量的曲率张量相同的代数对称性。当对于每一对正交单位向量 $v, w \in \mathbb{R}^{n+1}$， R 的截面曲率均为正时，有 $R(v,w,v,w) > 0$。

分类定理特别指出，在每个维数为 n 的球面 $\mathbb{S}^n$ 上，使所有赤道都成为极小曲面的黎曼度量，可以用属于某个有限维实向量空间的开正锥的点来参数化，该向量空间的维数为 $n(n+2)(n+1)^2/12$；并且这种参数化与这些空间上 $n(n+2)$ 维射影一般线性群的作用相容。

我们将介绍、阐释并论证这种对应关系的存在（见第 2 节），并讨论射影一般线性群的作用（见第 3 节）。赶时间的读者可在第 2.3 节的定理 2.9 中找到以算法形式明确描述的对应关系。

我们在此阐述的分类定理证明的核心，与 Fernando Marques、Andr´e Neves 和作者的论文 [4]中所述的证明基本相同，见第 9.4 节。该证明基于 Theodor Hangan [30], 发展的一种技巧；他通过*Killing* 对称二阶张量对所有使超平面成为极小曲面的度量进行了分类，见 $\mathbb{R}^n$。事实上，分类定理最终可以从他的定理推导出来，见注 2.7。

1.2. **几何性质**。 虽然分类定理为具有极小赤道的度量空间提供了一个有用的参数化，但它并未说明如何根据这些参数读出相应黎曼度量的几何性质，也没有说明如何判断其中任意两个度量是否彼此等距。

因此，对于这些度量及其极小赤道的几何的理解，尚未完成。

我们将较为详细地讨论 $n = 3$ 的情形（见第4节）。在如此低的维数下，我们有强有力的工具可用。例如，根据 Jos´e G´alvez 和 Pablo Mira 的唯一性定理 [28]，在任何具有极小赤道的 $(\mathbb{S}^3, g)$ 中，赤道都是唯一的（浸入）极小二维球面。它们的 Morse 指标均为一，零性均为三，且面积相同。此外，还有判定这类度量何时彼此等距的准则，而计算其等距变换群则是表示论中的一个问题。

1.3. 展望。 通过具有正截面曲率的代数曲率张量对具有极小赤道的球面进行分类，揭示了许多引人入胜的新问题。这种对应关系具有明确的形式，因此可以开展实验，例如检验关于指标为一的极小二维球面几何的猜想，或检验 Marques、Neves 和作者在 [4] 中引入的极小子流形理论中的广义佐尔度量相关猜想。这也启示了一种新颖的理解与区分具有正截面曲率的代数曲率张量的方式，即依据与相应的具有极小赤道的度量相关联的几何不变量。我们希望，从这一视角出发，能够加深对具有正截面曲率的黎曼流形的认识。

1.4. 本文概述。 在第 2 节中，我们明确构造了分类定理中的对应关系，并将其推广到稍一般的形式（定理 2.6）。在第 3 节中，我们进一步探讨该对应关系在一般线性群的自然作用下所具有的自然等变性。第4节专门介绍具有极小赤道的三维球面的几何性质。第 5 节汇总了一系列问题，这些问题似乎可作为未来研究的良好起点。

本文还包含两个附录。在附录 A 中，我们追溯了问题的起源，回顾 Beltrami 关于坐标图中测地线表示的工作，解释为什么只有余维为一的赤道这一情形仍留下未解决的问题，并提出关于具有极小超平面的 $\mathbb{R}^n$ 上度量的问题。在附录B中，我们在射影空间以及 Reese Harvey 和 Blaine Lawson 的校准几何背景下，提出了类似的“逆问题” [32]。

致谢：能够为纪念保罗 60 岁生日的专刊撰稿，我深感荣幸，也倍感欣喜。从我还是学生时起，我就看出保罗是巴西微分几何界的中流砥柱之一；我钦佩他的数学造诣、活力与魅力。祝贺你，保罗！

我还要感谢 Renato Bettiol 以及这本文集的所有编辑，感谢他们邀请我参与其中。我的贡献是这篇综述，较为系统地梳理了我自从开始与 Fernando Cod´a 和 Andr´e Neves 合作以来一直在思考的一些观点和问题。其中大部分主要成果已在其他地方发表过，或许形式有所不同或经过推广，见我们的合作论文 [4] 和 [5]。我希望，我在此选择的呈现视角能够激发人们进一步研究这一引人入胜的几何类型。

近年来，我曾就带有极小赤道的度量发表演讲（包括 2024 年 8 月在 USP 举办的 Paolo 生日会议上！），并感谢 Dan Ketover、Reto Buzano、Pablo Mira、Renato Bettiol、克劳迪奥·戈罗德斯基、Robert Bryant、路易斯·弗洛里特和沃尔夫冈·齐勒等人对这些演讲所作的积极评价和提出的有趣问题。这个主题引发的好奇心让我确信，值得为引起人们对相关问题的关注而付出努力，而不是任由这些问题隐含在文献之中。

最后，我要感谢 Gavin Ball、埃拉赫·哈利利和保罗·施万，他们加入了我在「计算几何分析」问题求解工作坊期间开展的关于具有极小赤道的球面的项目。该工作坊于 2025 年 6 月在纽约市立大学举行，而这个项目是我当时提出的。通过合作，我们对这些度量有了许多新见解，希望不久后能共同报告这些成果。

2. The correspondence

2.1. 代数曲率张量与 Killing 对称张量。设 R：$\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ 是一个代数曲率张量。这意味着 R 对其四个变量分别是线性的，并满足以下恒等式：

$i)$ $R(x,y,z,w) = -R(y,x,z,w)$,$ii)$ $R(x,y,z,w) = -R(x,y,w,z)$,$iii)$ $R(x,y,z,w) = R(z,w,x,y)$,$iv)$（比安基恒等式） $R(x,y,z,w)+R(x,z,w,y)+R(x,w,y,z) = 0$。

这些正是黎曼度量 g 的曲率张量的代数对称性，其定义为

$$R_g(X,Y,Z,W) = g(\nabla^g_X\nabla^g_Y W - \nabla^g_Y\nabla^g_X W - \nabla^g_{[X,Y]}W, Z)$$

对于所有切向量场 X、Y、Z 和 W。（注意不同的约定！）在上式中，∇^g 表示 g 的黎曼联络。

令 $Curv(\mathbb{R}^{n+1})$ 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中代数曲率张量的集合。它具有实向量空间的结构，其维数为 $n(n+2)(n-1)^2/12$。

每个 $R \in Curv(\mathbb{R}^{n+1})$ 都在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中无定向二维平面的格拉斯曼流形上定义了一个函数，称为 R 的截面曲率函数。给定 $\sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 一个二维线性子空间，并选取一组基 $\{x,y\} \subset \sigma$，公式

$$sec_R(\sigma) = \frac{R(x,y,x,y)}{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2}$$

计算出 R 在平面 σ 处的截面曲率。R 的对称性保证了数值 $sec_R(\sigma)$ 不依赖于用于计算它的 σ 的基的选取。此外，这些对称性还保证了张量 R 可由其截面曲率函数唯一确定。事实上，可以写出一个显式的（且相当长的）极化公式，用 R 在适当平面上的截面曲率来计算 $R(x,\ y,\ z,\ w)$；这些平面由向量 x、y、z 和 w 的线性组合生成。（例如，参见 [37]。）

给定 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的代数曲率张量 R，令 $k = k_R$ 为 $\mathbb{S}^n$ 上由下式定义的二阶张量

$$k_p(v,w) = R(p,v,p,w) \text{ for all } v,w \in T_p\mathbb{S}^n. \tag{1}$$

注意，$T_p\mathbb{S}^n$ 无非就是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中与 p 正交的向量所组成的集合。

二阶张量 k 具有三个显著性质，它们都是 R 的对称性直接推得的。首先，k 是一个对称的二阶张量。此外，对于每个单位向量 $v \in T_p\mathbb{S}^n$，

$$k_p(v,v) = sec_R(span\{p,v\}).$$

最后，给定 $(\mathbb{S}^n,g)$ 的任意一条单位速率测地线，

$$\gamma(t) = \cos(t)p + \sin(t)v,$$

其中 $\{p,v\}$ 是二维线性空间$\sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$的一组正交归一基，我们有

$$k_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t)) = sec_R(span\{\gamma(t),\gamma'(t)\}) = sec_R(\sigma).$$

在任意黎曼流形上，沿其所有测地线保持常数的对称张量称为 *Killing* 对称张量。换言之，上述三个观察得出的结论是，张量 k_R 属于向量空间 $\mathcal{K}_2(\mathbb{S}^n,g)$，该空间由 $(\mathbb{S}^n, g)$ 上的 Killing 对称二阶张量构成。 –

引理 2.1。映射

$$R \in Curv(\mathbb{R}^{n+1}) \mapsto k_R \in \mathcal{K}_2(\mathbb{S}^n, \overline{g})$$

由 (1) 定义，是一个线性同构。

证明。线性性显然。单射性源于这样一个事实：唯一满足 $sec_R \equiv 0$ 的 $R \in Curv(\mathbb{R}^{n+1})$ 是 $R = 0$。至于满射性，Christiane Barbance $[9]$ 计算得出， n 维黎曼流形上 Killing 对称二阶张量集合的最大维数等于 $n(n+2)(n-1)^2/12 = dim(Curv(\mathbb{R}^{n+1}))$。结论得证。□

我们指出， $\mathcal{K}_2(\mathbb{S}^n, g)$ 的维数公式已由多位作者计算，有时也称为 Delong-Takeuchi-Thompson 维数公式（得名于 $[26], [50]$ 和 $[49]$）。

我们将引理 2.1 作为中间步骤，构造从集合 $Curv_+(\mathbb{R}^{n+1})$（其中包含具有正截面曲率的代数曲率张量）到集合 $\mathcal{E}(\mathbb{S}^n)$ 的映射；后者是关于 $\mathbb{S}^n$ 的黎曼度量集合，在这些度量下所有赤道都是极小的。关键观察是，引理 2.1 建立了 $Curv_+(\mathbb{R}^{n+1})$ 与集合 $\mathcal{K}_2^+(\mathbb{S}^n,g)$ 之间的双射；该集合由 $(\overline{\mathbb{S}}^n,\underline{g})$ 上的正定 Killing 对称二阶张量组成。

在继续之前，我们需要描述 Killing 对称二阶张量的其他一般性质。首先，研究其张量刻画会很有帮助。设 $(M,\ g)$ 为一个黎曼流形。给定 M 上的三阶张量 T，其循环对称化 是 M 上由下式定义的三阶张量 T^S

$$T^S(X,Y,Z) = T(X,Y,Z) + T(Y,Z,X) + T(Z,X,Y)$$

对于 M 上任意的切向量场 X、Y 和 Z，均成立。

引理 2.2。设 k 是黎曼流形 $(M,\ g)$ 上的对称二阶张量。以下断言等价：

$i)$ k 是(M,g)上的 *Killing* 对称二阶张量。$ii)$ $\nabla^g k(X,X,X) = 0$ 对所有定义在 M 上的切向量场 X 均成立。$iii)$ $(\nabla^g k)^S = 0$。

证明。若 $\gamma(t)$ 是 (M,g) 上的一条测地线，且 $\gamma(0)=p$ 和 $\gamma'(0)=v$，则 $(d/dt_{|t=0})k_{\gamma(t)}(\gamma(t)\ \gamma(t))=(\nabla^g k)_p(v,v,v)$。$i)$ 与 $ii)$ 的等价性由此得出。$ii)$ 与 $iii)$ 的等价性利用了 k 的对称性，并由极化得到。□

专门考虑 $(\mathbb{S}^n,g)$ 的情形，可以对其 Killing 对称二阶张量作出简单描述。给定 $(\mathbb{S}^n,g)$ 上的两个 Killing 向量场 K_1 和 K_2，由下式定义的对称二阶张量

$$(K_1\odot K_2)(X,Y)=\overline{g}(K_1,X)\overline{g}(K_2,Y)+\overline{g}(K_2,Y)\overline{g}(K_1,X),\qquad(2)$$

对于所有切向量场 X 和 Y，都属于 $\mathcal{K}_2(\mathbb{S}^n,g)$。Takeshi Sumitomo 和 Kwoichi Tandai 证明，如此构造的 $\mathcal{K}_2(\mathbb{S}^n,g)$ 中的元素构成一组生成元。由于 $(\mathbb{S}^n,g)$ 上的每个 Killing 向量场 K 都对应一个唯一的反对称矩阵 $V\in\mathfrak{so}(n+1,\mathbb{R})$，使得对每个 $p\in\mathbb{S}^n$，$K(p)=Vp$，因此我们可以得到空间 $\mathcal{K}_2(\mathbb{S}^n,g)$ 中所有元素一个相当具体且实用的表示。

2.2. 具有极小赤道和正定 Killing 对称二阶张量的度量。我们首先推导在给定的非空开子集 $U\subset\mathbb{S}^n$ 上、具有任意黎曼度量 g 时赤道的平均曲率公式，然后分析当它们在 (U,g) 中全部为极小时会发生什么。

给定 $\mathbb{R}^{n+1}$中的非零向量 v，考虑如下定义的辅助函数：

$$\hat{V}:p\in\mathbb{S}^n\mapsto\langle p,v\rangle\in\mathbb{R},$$

其中，我们用方括号表示 $\mathbb{R}^{n+1}$上的欧几里得内积，$\hat{}$ 使得 $g=\langle-,-\rangle_{|\mathbb{S}^n}$。于是，$V$是 $\mathbb{S}^n$ 上的光滑函数，且零是其正则值。集合

$$\Sigma_v=\hat{V}^{-1}(0)=\{x\in\mathbb{S}^n\,|\,\langle x,v\rangle=0\}$$

正是 $\mathbb{S}^n$ 中与 v正交的赤道。显然，$\Sigma_{-v}=\Sigma_v$。

设 g 是 $\mathbb{S}^n$的开子集 U 上的任意黎曼度量。那么

$$N^g=\frac{\nabla^g\hat{V}}{|\nabla^g\hat{V}|_g}$$

在 $\Sigma_v\cap U$上定义了一个单位法向量场。于是，$\Sigma_v\cap U$ 在点 $p\in\Sigma_v\cap U$ 处的第二基本形式为

$$A_g(X,Y)=g(\nabla^g_X N^g,Y)=\frac{1}{|\nabla^g\hat{V}|_g}Hess_g\hat{V}(X,Y)$$

对所有 $X,Y\in T_p\Sigma_v$。对 Σ_v 取迹，可得：

引理 2.3. $\Sigma_v \cap U$ 相对于 g 的平均曲率为

$$H_g = \frac{1}{|\nabla^g \hat{V}|_g} \left(\Delta_g \hat{V} - Hess_g \hat{V}(N^g, N^g) \right). \tag{3}$$

ˆ 回忆一下，函数 V 关于黎曼度量 g 的海森矩阵由下式计算：

$$Hess_g \hat{V}(X,Y) = X(Y\hat{V}) - (\nabla^g_X Y)\hat{V} \tag{4}$$

对于所有切向量场 X 和 Y 都成立。在典范度量 g 的特殊情形下，由于函数 V 满足 Obata 方程，

$$Hess_{\overline{g}} \hat{V} + \hat{V}\overline{g} = 0,$$

$Hess_g \hat{V}$ 在 $\Sigma_v = \hat{V}^{-1}(0)$ 上恒等于零。结合这一事实与 (4)，我们可推出以下恒等式，它对于开子集 $U \subset \mathbb{S}^n$ 上的任意黎曼度量 g 都成立：

$$(Hess_g \hat{V})_p(X,Y) = (d\hat{V})_p(\overline{\nabla}_X Y - \nabla^g_X Y) \quad \text{for all } p \in \Sigma_v \cap U, \text{ and for all } X, Y \in T_p\mathbb{S}^n. \tag{5}$$

考虑定义在 U 上的三阶张量 $\mathcal{T}_g$，其定义如下：

$$\mathcal{T}_g(X,Y,Z) = g(\nabla^g_X Y - \overline{\nabla}_X Y, Z) \tag{6}$$

对于所有切向量场 X、Y 和 Z 都成立。

引理 2.4. 设 g 是开子集 $U \subset \mathbb{S}^n$ 上的黎曼度量。在(6) 中定义的三阶张量 $\mathcal{T}_g$ 满足以下性质：

1) $\mathcal{T}_g$ 对前两个变量对称。2) $\mathcal{T}_g$ 的循环对称化为

$$(\mathcal{T}_g)^S = \frac{1}{2}(\overline{\nabla} g)^S.$$

3) $\mathcal{T}_g$ 关于 g 在第二和第三个变量上的迹为

$$tr^{23}_g(\mathcal{T}_g) = d\log(\psi),$$

其中 ψ 是 U 上由$(U、\ g)$和$(U、\ g)$的体积元素唯一确定的正光滑函数，满足

$$dV_g = \psi dV_{\overline{g}}.$$

4) 对于任意 $v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$、$p \in \Sigma_v \cap U$ 以及 X、$Y \in T_p\mathbb{S}^n$，

$$\mathcal{T}_g(X, Y, \nabla^g \hat{V}(p)) = -Hess_g \hat{V}(X,Y),$$

并且，$\mathcal{T}_g$ 关于第一项和第二项的 g 的迹在每一点 $p \in \Sigma_v \cap U$ 处都满足，

$$tr^{12}_g(\mathcal{T}_g)(\nabla^g \hat{V}(p)) = -\Delta_g \hat{V}(p).$$

证明。 性质 1）是以下事实的结果：联络∇^g 和 $\overline{\nabla}$ 都是无挠的。

利用联络 ∇^g 的相容性，我们还可得到

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}g)(X,Y,Z) &= Zg(X,Y) - g(\overline{\nabla}_Z X, Y) - g(X, \overline{\nabla}_Z Y)\\ &= g(\nabla^g_Z X, Y) + g(X, \nabla^g_Z Y) - g(\overline{\nabla}_Z X, Y) - g(X, \overline{\nabla}_Z Y)\\ &= \mathcal{T}_g(Z,X,Y) + \mathcal{T}_g(Z,Y,X)\\ &= \mathcal{T}_g(Z,X,Y) + \mathcal{T}_g(Y,Z,X),\end{aligned}$$

由性质 1) 可得。性质 2) 随之成立。

设 $\{e_i\}$ 是一个局部 g-正交标架。根据定义，

$$dV_g(e_1,\dots,e_n) = 1 \quad \text{and} \quad dV_{\overline{g}}(e_1,\dots,e_n) = \psi^{-1}$$

在该标架的定义域上。体积形式 dV_g 和 dV_g 分别关于相应度量的黎曼联络是平行的。因此，对于 U 上的任意切向量场 X ，

$$\begin{aligned}tr^{23}_g(\mathcal{T}_g)(X) &= \sum_{i=1}^n g(\nabla^g_X e_i - \overline{\nabla}_X e_i, e_i)\\ &= \sum_{i=1}^n dV_g(e_1,\dots,(\nabla^g_X e_i - \overline{\nabla}_X e_i),\dots,e_n)\\ &= X(dV_g(e_1,\dots,e_n)) - \sum_{i=1}^n \psi dV_{\overline{g}}(e_1,\dots,\overline{\nabla}_X e_i,\dots e_n)\\ &= -\psi X(dV_{\overline{g}}(e_1,\dots,e_n)) = -\psi X(\psi^{-1}) = d(\log(\psi))(X).\end{aligned}$$

性质 3) 成立。

最后，性质 4）是恒等式（5）的直接推论。 □

现在，我们可以将所有经过U 的赤道在（U， g）中均为极小的条件表示为涉及 g 和 $\mathcal{T}_g$的方程，甚至表示为涉及 g 和函数 $\psi = dV_g/dV_g$的方程。

命题 2.5。 设 g 是球面 $\mathbb{S}^n$的开子集 U上的一个黎曼度量。以下三个陈述等价：

i) 所有与 U 相交的赤道都是极小的。ii) 在(6) 中定义的三阶张量 $\mathcal{T}_g$ 满足方程

$$\big(\mathcal{T}_g - g \otimes tr^{12}_g(\mathcal{T}_g)\big)^S = 0 \quad on \quad U. \tag{7}$$

$iii)$ 度量 g 和 U 上的光滑正函数 ψ 由$dV_g = \psi dV_g$ 唯一确定，并满足

$$\left(\overline{\nabla} g - \frac{4}{n+1} d\log(\psi) \otimes g\right)^S = 0 \quad on \quad U. \tag{8}$$

证明。点 p 属于 U 赤道 Σ_v，当且仅当 $v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 与 p正交，也就是说，当且仅当 $v \neq 0$ 属于 $T_p\mathbb{S}^n$。因此，给定 U中的任意一点 p，由方程 (3) 和引理 2.4 的第 4) 项可知，等式

$$\mathcal{T}_g(\nabla^g \hat{V}(p), \nabla^g \hat{V}(p), \nabla^g \hat{V}(p)) = |\nabla^g \hat{V}(p)|_g^2 \, tr_g^{12}(\mathcal{T}_g)(\nabla^g \hat{V}(p))$$

对每个 $v \neq 0$ 中的 $T_p\mathbb{S}^n$ 都成立，当且仅当 g 是 U 上的一个黎曼度量，并且相对于该度量，所有包含 p的赤道在 p处的平均曲率均为零。

ˆ线性映射 $v \in T_p\mathbb{S}^n \mapsto \nabla^g V(p) \in T_p\mathbb{S}^n$ 是一个同构ˆ（否则，对于某个 $T_p\mathbb{S}^n$中的 $v \neq 0$，0 将是 V 的临界值）。因此，由于 $p \in U$ 也任意，条件

$$\mathcal{T}_g(X, X, X) = g(X, X) tr_g^{12}(\mathcal{T}_g)(X) \tag{9}$$

对于 U 上的每个切向量场 X，都是 U 上的黎曼度量 g 具有如下性质的充要条件：在（U， g）中所有赤道都是极小的。

i）、 ii）与 iii）之间的等价性可由以下观察得出。首先，根据极化，恒等式（9）等价于其对称化形式：

$$\left(\mathcal{T}_g - g \otimes tr_g^{12}(\mathcal{T}_g)\right)^S = 0 \quad \text{on} \quad U, \tag{10}$$

因为 $g \otimes tr_g^{12}$（$\mathcal{T}_g$）和 $\mathcal{T}_g$在前两个位置上都是对称的。这表明 i）等价于 ii）。

此外，注意到一般而言，三阶张量 $\mathcal{T}$满足

$$tr_g^{12}((g \otimes tr_g^{12}(\mathcal{T}))^S) = (n+2) tr_g^{12}(\mathcal{T}). \tag{11}$$

另一个一般公式是：只要三阶张量 $\mathcal{T}$在前两个变量上对称，就有

$$tr_g^{12}(\mathcal{T}^S) = tr_g^{12}(\mathcal{T}) + 2tr_g^{23}(\mathcal{T}).$$

结合最后两个一般恒等式以及 $\mathcal{T}_g$ 的性质 2) 和 3)，我们推得张量 $\mathcal{S}_g = \mathcal{T}_g - g \otimes tr_g^{12}(\mathcal{T}_g)$ 满足

$$\mathcal{S}_g^S = \left(\frac{1}{2}\overline{\nabla} g - \frac{2}{n+1} g \otimes d\log(\psi) + \frac{1}{n+1} g \otimes tr_g^{12}(\mathcal{S}_g^S)\right)^S$$

现在利用 (11) 可以直接验证,

$$\mathcal{S}_g^S = 0 \text{ on } U \;\Leftrightarrow\; \overline{\nabla} g - \frac{4}{n+1} g \otimes d\log(\psi) = 0 \text{ on } U.$$

因此, $ii)$ 和 $iii)$ 等价, 正如所声称的那样。 □

我们可以证明分类定理第一部分中最重要的一个要点, 并在稍微一般化的框架下表述如下:

定理 2.6. 设 U 是 $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$ 的一个非空开子集。

$i)$ 设 g 是 U 上的黎曼度量, 并用 F_g 表示由恒等式唯一确定的 U 上的正光滑函数

$$dV_g = F_g^{(n+1)/4} dV_{\overline{g}}.$$

若所有与 U 相交的赤道都是 (U, g) 中的极小超曲面, 则张量

$$k_g := \frac{1}{F_g} g$$

是 (U,g)上的正定 ***Killing*** 对称二阶张量。

$ii)$设 k 是(U, g) 上的正定 ***Killing*** 对称二阶张量, 并将(U, g) 上由下式唯一确定的正光滑函数记为 D_k :

$$dV_k = D_k^{(n-1)/4} dV_{\overline{g}}.$$

那么, 张量

$$g_k := \frac{1}{D_k} k$$

是 U 上的黎曼度量; 相对于该度量, 所有赤道与 U 的交集都是(U, g)中的极小超曲面。$iii)$ 按照条目 $i)$ 和 $ii)$中的记号, 这些映射

$$g \mapsto k_g \quad and \quad k \mapsto g_k$$

互为逆映射。

证明。条目 ***i)*** 使用命题 2.5 中的记号, 我们有 $\psi = F_g^{(n+1)/4}$。因此, 对称二阶张量 $k_g = (1/F_g)g$显然是正定的, 并且满足

$$\overline{\nabla} k_g = \frac{1}{F_g} \overline{\nabla} g - \frac{1}{F_g^2} (g \otimes dF_g) = \frac{1}{F_g} \left(\overline{\nabla} g - \frac{4}{n+1} g \otimes d\log(\psi) \right).$$

根据命题 2.5, 第 $iii)$, $k_g = (1/F_g)g$ 是 (U, g) 上的正定 Killing 对称二张量。

条目 *ii)* 对称二阶张量 $g_k = (1/D_k)k$ 显然是 U 上的黎曼度量，它满足

$$dV_{g_k} = \frac{1}{D_k^{n/2}} dV_k = \frac{D_k^{(n-1)/4}}{D_k^{n/2}} dV_{\overline{g}} = \frac{1}{D_k^{(n+1)/4}} dV_{\overline{g}}, \tag{12}$$

根据 D_k 的定义。因此，使用命题 2.5 的记号，$\psi = D_k^{-(n+1)/4}$。由于 k 是 (U, g) 上的 Killing 对称二阶张量，

$$(\overline{\nabla} g_k)^S = \frac{1}{D_k} (\overline{\nabla} k)^S - \frac{1}{D_k^2} (k \otimes dD_k)^S = \frac{4}{n+1} (g_k \otimes d\log(\psi))^S.$$

根据命题 2.5 的第 iii）项，g_k 是 U 上的黎曼度量；相对于该度量，所有赤道与 U 的交集都是极小超曲面。

第 *iii)* 项 利用方程组 (12) 以及 F_g 和 D_k 的定义，我们验证 $F_{g_k} D_k = 1$。类似地，$F_g D_{k_g} = 1$ 也成立。由于 $g = F_g k_g$ 和 $g_k = (1/D_k)k$，结论得证。□

注 2.7。 Morris Knebelman [38] 证明，若两个黎曼流形之间存在一个将（未参数化的）测地线映为（未参数化的）测地线的微分同胚，则这两个流形的 Killing 对称二阶张量集合之间存在双射。该结果阐明了 Hangan 的对应关系（ [30] 中的定理 2）与定理 2.6 所述对应关系之间的联系。事实上，从 $\mathbb{S}^n$ 的开半球到 $\mathbb{R}^n$ 的中心 或心射投影 就是此类映射的实例。

注 2.8. 设 U 是 $\mathbb{S}^n$ 的一个非空连通开子集。(U, g) 上的每个 Killing 对称二阶张量都能唯一延拓为 $\mathcal{K}_2(\overline{\mathbb{S}^n}, g)$ 的一个元素，因为到 U 的限制映射是单射线性映射，其值域的维数至多等于 $\mathcal{K}_2(\mathbb{S}^n, g)$ 的维数，如 [9] 所示。因此，$(\mathbb{S}^n, g)$ 上的每个 Killing 对称二阶张量都有一个（可能为空的）极大定义域，在该域上它是正定的。根据定理 2.6，理解这些极大定义域的连通分支的结构将很有意义。（例如，参见推论 3.4 和注 3.5）。

2.3. **算法**。 值得注意的是，上述定理 2.6 的证明本质上是算法性的，因为它构造了一个从 $U \subset \mathbb{S}^n$ 上具有极小赤道的黎曼度量空间到 (U, g) 上正的 Killing 对称二阶张量空间的显式映射，同时也构造了其显式逆映射。引理 2.1 的证明也具有同样的性质。这意味着，我们可以将分类定理的第一部分表述如下：

定理 2.9。 设 $\mathcal{E}(\mathbb{S}^n)$ 为 $\mathbb{S}^n$ 上具有极小赤道的黎曼度量集合，并设 $Curv_+(\mathbb{R}^{n+1})$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上具有正截面曲率的代数曲率张量集合。

考虑以下两个算法:

1. 输入: $R \in Curv_+$ $(\mathbb{R}^{n+1})$ 。

(1)计算定义在 $\mathbb{S}^n$ 上的正定对称二阶张量 k_R :

$$(k_R)_p(v,w) = R(p,v,p,w)$$

对所有 $p \in \mathbb{S}^n$ 以及所有向量 v、 $w \in T_p\mathbb{S}^n$ 均成立。

(2) 计算定义在 $\mathbb{S}^n$ 上的正光滑函数 D_R ，使得

$$dV_{k_R} = D_R^{\frac{n-1}{4}} dV_{\overline{g}},$$

其中， dV_{k_R} 是 k_R 在 $\mathbb{S}^n$上的体积元。

(3) 计算正定对称二阶张量

$$g_R = \frac{1}{D_R} k_R.$$

输出: $g_R \in \mathcal{E}(\mathbb{S}^n)$。

and

2. 输入: $g \in \mathcal{E}(\mathbb{S}^n)$。

(1) 计算 $\mathbb{S}^n$ 上的正光滑函数 F_g ，使得

$$dV_g = F_g^{\frac{n+1}{4}} dV_{\overline{g}},$$

其中， dV_g 是 g 在 $\mathbb{S}^n$上的体积元。

(2) 计算黎曼度量

$$k_g = \frac{1}{F_g} g.$$

(3) 计算代数曲率张量 R_g ，使得

$$R_g(p,v,p,v) = (k_g)_p(v,v)$$

对于每个 $p \in \mathbb{S}^n$ 和每个向量 $v \in T_p\mathbb{S}^n$。

输出: $R_g \in Curv_+(\mathbb{R}^{n+1})$。

那么，这些映射

$g \in \mathcal{E}(\mathbb{S}^n) \mapsto R_g \in Curv_+(\mathbb{R}^{n+1})$ 以及 $R \in Curv_+(\mathbb{R}^{n+1}) \mapsto g_R \in \mathcal{E}(\mathbb{S}^n)$ 均定义良好，且互为逆映射。

证明。结合引理 2.1 和定理 2.6（对于 $U = \mathbb{S}^n$）。 □

注记 2.10. 根据对应关系的显式公式，可以验证，使所有赤道都为极小的 $\mathbb{S}^n$ 度量实际上都是解析的。

我们通过计算一些简单的例子来探究该算法。

例 2.11. 该对应关系显然将典范度量 g 映射为唯一一个截面曲率为 $\overline{-}$一的代数曲率张量，即 $R(x,y,z,w) = \langle x,z\rangle\langle y,w\rangle - \langle x,w\rangle\langle x,z\rangle$。它也将 R 的缩放映射为 g 的缩放（但缩放因子会受到维数幂的影响）。

例 2.12. 来自紧对称空间的下一个最简单的代数曲率张量，是 $\mathbb{CP}^m$，$m \geq 2$ 的曲率张量 R。令 $J\colon \mathbb{R}^{2m+2} \to \mathbb{R}^{2m+2}$ 在自然同一识别下对应于乘以虚数 i

$$(x_1, y_1, \ldots, x_{m+1}, y_{m+1}) \in \mathbb{R}^{2m+2} \sim (x_1+iy_1, \ldots, x_{m+1}+iy_{m+1}) \in \mathbb{C}^{m+1}.$$

Then

$$\begin{aligned} R(x,y,z,w) =& \langle x,z\rangle\langle y,w\rangle - \langle x,w\rangle\langle y,z\rangle \\ &+ \langle Jx,z\rangle\langle Jy,w\rangle - \langle Jx,w\rangle\langle Jy,z\rangle + 2\langle Jx,y\rangle\langle Jz,w\rangle. \end{aligned}$$

对于所有 $p \in \mathbb{S}^{2m+1} \subset \mathbb{R}^{2m+2}$ 和所有 $v \in T_p\mathbb{S}^{2m+1}$，我们都有

$$(k_R)_p(v,w) = \langle v,w\rangle + 3\langle Jp,v\rangle\langle Jp,w\rangle.$$

注意，根据众所周知的事实，R 的截面曲率可以是区间 $[1,4]$，中的任意数。

选取 $\{e_1 = Jp, e_2, \ldots, e_{2m+1}\} \subset T_p\mathbb{S}^{2m+1}$ 一个 g-正交归一基。注意，$(Jp)^\perp \cap T_p\mathbb{S}^{2m+1}$ 在 J 下是不变的。在此基下，$[(k_R)_p(e_i, e_j)]$ 是一个具有两个特征值的对角矩阵，即特征值 4 的重数为 1，而特征值 1 的重数为 $2m$。因此

$$D_{k_R}(p) = \left(\sqrt{det[(k_R)_p(e_i,e_j)]}\right)^{\frac{4}{2m}} = 4^{\frac{1}{m}},$$

从而

$$(g_R)_p(X,Y) = \frac{1}{4^{\frac{1}{m}}}(\overline{g}(X,Y) + 3\overline{g}(Jp,X)\overline{g}(Jp,Y)).$$

除去缩放因子 $4^{-1/m}$，我们认出这是对圆度量的一种伯格变形：它只沿着生成霍普夫作用的向量场方向缩放度量 g，$\overline{\ }$使其长度恒为 2（即向量场 $p \mapsto Jp$）。

我们注意到维数 $2m = 4$ 的特殊之处：在这种情况下， g_R 的标量曲率为零！然而，高维情形并非如此（参见 [19], 命题 4.2）。

例 2.13。设 g 是 $\mathbb{S}^3$ 上的左不变度量，其中 $\mathbb{S}^3$ 是单位四元数组成的李群。令 L_i、L_j 和 L_k 表示 $\mathbb{S}^3$ 上分别延拓虚四元数 i、j、$k \in T_1\mathbb{S}^3$ 的左不变向量场。这些向量构成一个正交标架，也是 $(\mathbb{S}^3, g)$ 的 Killing 向量场，因此我们可以写成

$$g = a\, L_i \odot L_i + b\, L_j \odot L_j + c\, L_k \odot L_k$$

其中 a、b 和 c 为某些正数。

由此可知， g 本身是一个正定 Killing 对称二阶张量。由于 $dV_g/dV_g = \sqrt{abc}$ 是常数，对于张量 $k_g = (1/F_g)g$ 也同样如此。根据定理2.5， $g = g_{k_g}$ 是一个具有极小赤道的度量。

3. The actions

设 $\mathcal{G}_n$ 是将赤道映射为赤道的 $\mathbb{S}^n$ 的微分同胚群。该群通过拉回作用于空间 $\mathcal{E}(\mathbb{S}^n)$，因为对于 $\mathbb{S}^n$ 的任意微分同胚 ϕ，子流形 $\Sigma \subset \mathbb{S}^n$ 关于拉回度量 $\phi^* g$ 是极小的，当且仅当子流形 $\phi(\Sigma)$ 关于 g 是极小的。为了对 $\mathbb{S}^n$ 上具有极小赤道的度量的模空间提出问题，我们首先需要理解这个群及其作用。

3.1. 在 $GL(n+1, \mathbb{R})$ 上的作用 $\mathcal{E}(\mathbb{S}^n)$。

推广我们迄今使用的术语，我们将 k-赤道定义为$\mathbb{S}^n$ 与 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的某个 $(k+1)$ 维线性子空间的交集，对每个$k = 0, \ldots, n-1$均如此。给定 $T \in GL(n+1, \mathbb{R})$ 中的一个元素，即一个线性可逆映射 $T : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$，映射

$$\phi(T) : x \in \mathbb{S}^n \mapsto \frac{T(x)}{|T(x)|} \in \mathbb{S}^n \tag{13}$$

定义了 $\mathcal{G}_n$ 中的一个元素。

映射

$$T \in GL(n+1, \mathbb{R}) \mapsto \phi(T) \in \tilde{\mathcal{G}}_n \tag{14}$$

是一个群同态。接下来的命题是经典代数结果的推论，该结果称为射影几何基本定理（参见 [8], 第二章，第 10 节），它表明 (14) 是一个满同态。

˜**命题 3.1**。 设 $\mathcal{G}_n$ 是由球面 $\mathbb{S}^n$ 上将$(n-1)$-赤道互相置换的微分同胚˜所组成的群。 $\mathcal{G}_n$ 中的每个元素都具有 $\phi(T)$ 的形式，其中某个 $T \in GL($ $n+1, \mathbb{R})$ 如(13)中所述。

证明。对于每个非负整数 $k < n$， $\mathbb{S}^n$ 的任意 k-赤道都是一般位置上 $n-k$ 个不同的（$n-1$）-赤道的交集。反过来，一般位置上 $n-k$ 个不同的（$n-1$）-赤道的交集定义了唯一的 k-赤道。因此，对于每个 $k = 0, \ldots,$ $n-1$， ϕ 在 $\mathcal{G}_n$ 中的每个微分同胚都是一个置换 k-赤道的映射。

由此可知，将每个真向量子空间 $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 映射到由（dim（V）-1）-赤道 ϕ（$V \cap \mathbb{S}^n$）生成的真向量子空间的映射，是一个共线变换；也就是说，它置换 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的真向量子空间，同时保持由包含关系诱导的偏序。根据射影几何基本定理，存在 $T \in GL$（$n+1$， $\mathbb{R}$），使得对于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的每个真向量子空间 V，子空间 T（V）恰好是由 ϕ（$V \cap \mathbb{S}^n$）生成的子空间。

专门考虑一维子空间，我们得出，对于 x in $\mathbb{S}^n$ 中的每个 $\phi(x)$， $\mathbb{S}^n$ 中的点必须要么等于 $T(x)/|T(x)|$，要么等于 $-T(x)/|T(x)|$。由于 T 是线性同构，连续映射 $x \in \mathbb{S}^n \mapsto \langle T(x)\ \phi(x)\rangle \in \mathbb{R}$ 从不取零值。因此，如我们所要证明的，(13) 中的情形必为 $\phi = \phi(T)$ 或 $\phi = \phi(-T)$。□

另一方面，同态 (14) 的核更容易确定。如果对于每个 $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ 都有 $\phi(T)(x) = x$，那么 T 会将每个单位向量映射为其自身的正倍数。但这个倍数必须相同。否则，在由两个分别对应于 T 的不同特征值的单位向量 v 和 w 生成的平面中，可以看到 $\phi(T)$ 将 $(v+w)/\sqrt{2}$ 映射为一个并非其自身正倍数的向量。因此，同态 (14) 的核由映射 λId 组成，其中 $\lambda > 0$。

综合这些事实，我们得出结论：映射 (14) 诱导出一个同构

$$\tilde{\mathcal{G}}_n \simeq GL(n+1, \mathbb{R})/\{\lambda Id \,|\, \lambda > 0\},$$

并且群 $GL(n+1, \mathbb{R})$ 按照以下规则作用于 $\mathcal{E}(\mathbb{S}^n)$

$$g \cdot T = \phi(T)^* g. \tag{15}$$

值得注意的是， $\phi(-T)$ 和 $\phi(T)$ 在赤道集合上诱导出相同的置换。不过，目前尚不清楚 T 和 $-T$ 对 $\mathcal{E}(\mathbb{S}^n)$ 的作用方式是否相同。这个问题将在本节末尾得到解答（见推论 3.4）。

3.2. $GL(n+1,\mathbb{R})$ 对 $\mathcal{K}_2(\mathbb{S}^n,g)$ 的作用。 设 T 是一般线性群 $GL(n+1,\mathbb{R})$ 的一个元素，并记其转置为 $T^\top$。若 $V\in\mathfrak{so}(n+1,\mathbb{R})$ 是反对称矩阵，显然可验证 $T^\top VT$ 也是反对称矩阵。考虑到 $(\mathbb{S}^n,g)$ 的 Killing 向量场与反对称矩阵之间的对应关系，我们可以按以下规则定义 $T\in GL(n+1,\mathbb{R})$ 对 $(\mathbb{S}^n,g)$ 的 Killing 向量场 K 的右作用

$$K\cdot T=\frac{1}{det(T)^{\frac{2}{n+1}}}T^\top KT.$$

这一线性作用自然延拓到 Killing 对称张量场空间。只需在一个生成集上定义它，例如定义在形如 $K\odot L\in\mathcal{K}_2(\mathbb{S}^n,g)$ 的元素集上，如式（2）所示，其中 K 和 L 是 $(\mathbb{S}^n,g)$ 的 Killing 向量场。于是

$$(K\odot L)\cdot T=\frac{1}{det(T)^{\frac{4}{n+1}}}(K\cdot T)\odot(L\cdot T),\tag{16}$$

注意，子集 $K_2^+(\mathbb{S}^n,g)$ 在此作用下是不变的。

不难验证，对于线性正交变换 $T\in O(n+1,\mathbb{R})\subset GL(n+1,\mathbb{R})$，上述作用与 T 的标准作用一致；将 T 视为 $(\mathbb{S}^n,g)$ 的等距变换时，该作用由拉回操作作用于空间 $\mathcal{K}_2(\mathbb{S}^n,g)$ 上。

3.3. 关于 $GL(n+1,\mathbb{R})$ 在 $Curv(\mathbb{R}^{n+1})$ 上的作用。 令 T 为一般线性群 $GL(n+1,\mathbb{R})$ 的一个元素。给定 $R\in Curv(\mathbb{R}^{n+1})$，我们在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上定义四线性映射 $R\cdot T$ 如下：

$$R\cdot T(x,y,z,w)=\frac{1}{det(T)^{\frac{4}{n+1}}}R(Tx,Ty,Tz,Tw).\tag{17}$$

不难验证，这是一个定义良好的运算，它定义了 $GL(n+1,\mathbb{R})$ 在 $Curv(\mathbb{R}^{n+1})$ 上的一个作用，并且扩展了 $O(n+1,\mathbb{R})$ 的标准作用。此外，很明显，子集 $Curv_+(\mathbb{R}^{n+1})$ 在此作用下保持不变。

3.4. 等变性。 下面我们证明，前面各小节中所描述的 $GL(n+1,\mathbb{R})$ 在 $\mathcal{E}(\mathbb{S}^n)$、$\mathcal{K}_2^+(\mathbb{S}^n,g)$ 和 $Curv_+(\mathbb{R}^{n+1})$ 上的作用（见（15）、（16）和（17））通过第 2 节中定义的这些空间之间的映射彼此交织。

引理 2.1 中定义的映射 $R\in Curv(\mathbb{R}^{n+1})\mapsto k_R\in\mathcal{K}_2(\mathbb{S}^n,g)$ 显然具有这一性质。因此，亟待证明的关键事实是以下陈述：

定理 3.2。 定理 *2.6* 中所述的、使所有赤道均为极小的 $\mathbb{S}^n$ 上的黎曼度量与 $\mathbb{S}^n$,g） 上正定 *Killing* 对称二阶张量之间的对应关系，对于两个空间中的 GL（$n+1,\mathbb{R}$）-作用是等变的。

证明。 设 $T \in GL(n+1,\mathbb{R})$，并按式 (13) 定义 $\phi := \phi(T)$。若 g 是 $\mathbb{S}^n$ 上的黎曼度量，且相对于该度量所有赤道都是极小的，则拉回度量 $\phi^* g$ 也具有相同性质。根据定理 2.6,

$$g = F_g k_g \quad \text{and} \quad \phi^* g = F_{\phi^* g} k_{\phi^* g},$$

其中

$$dV_g = (F_g)^{\frac{n+1}{4}} dV_{\overline{g}}, \quad dV_{\phi^* g} = (F_{\phi^* g})^{\frac{n+1}{4}} dV_{\overline{g}},$$

且 k_g、 $k_{\phi^* g}$ 均属于 $\mathcal{K}_2^+(\mathbb{S}^n, g)$。我们只需证明

$$k_{\phi^* g} = k_g \cdot T, \tag{18}$$

其中右侧由规则 (16) 定义。

设 $\delta(T)$ 是 $\mathbb{S}^n$ 上的正函数，由条件 $\phi(T)^* dV_g = \delta(T)^{\frac{n+1}{4}} dV_g$唯一确定。则，

$$\begin{aligned}(F_{\phi^* g})^{\frac{n+1}{4}} dV_{\overline{g}} = dV_{\phi^* g} = \phi^*(dV_g) = \phi^*(F^{\frac{n+1}{4}} dV_{\overline{g}}) \\ = (\phi^* F_g)^{\frac{n+1}{4}} \phi^* dV_{\overline{g}} = ((\phi^* F_g)\delta(T))^{\frac{n+1}{4}} dV_{\overline{g}}.\end{aligned}$$

因此， $F_{\phi^* g} = (\phi^* F_g)\delta(T)$，并且

$$k_{\phi^* g} = \frac{1}{F_{\phi^* g}} \phi^* g = \frac{1}{\delta(T)} \phi^* \left(\frac{1}{F_g} g \right) = \frac{1}{\delta(T)} \phi(T)^* k_g. \tag{19}$$

断言 1： $\delta(T)(p) = det(T)^{\frac{4}{n+1}} / |Tp|^4$ 对每个 $p \in \mathbb{S}^n$ 都成立。

事实上，对每个 $p \in \mathbb{S}^n$ 和 $v \in T_p \mathbb{S}^n$,

$$d\phi(T)(p)v = \frac{1}{|Tp|} \left(Tv - \frac{\langle Tv, Tp \rangle}{|Tp|^2} Tp \right).$$

令 dV_{euc}为 $\mathbb{R}^{n+1}$的体积元。由于对于所有 $p \in \mathbb{S}^n$ 和 $v_1, \ldots, v_n \in T_p \mathbb{S}^n$, $dV_g(p)(v_1, \ldots, v_n) = dV_{euc}(p, v_1, \ldots, v_n)$，因此我们有

$$\begin{aligned}(\phi(T)^* dV_{\overline{g}})(p)(v_1, \ldots, v_n) = \\ = dV_{euc}\left(\phi(T)(p), d\phi(T)(p)v_1, \ldots, d\phi(T)(p)v_n\right) \\ = \frac{1}{|Tp|^{n+1}} dV_{euc}(Tp, Tv_1, \ldots, Tv_n) \\ = \frac{det(T)}{|Tp|^{n+1}} dV_{euc}(p, v_1, \ldots, v_n)\end{aligned}$$

$$= \frac{det(T)}{|Tp|^{n+1}} dV_{\bar{g}}(p)(v_1, \ldots, v_n).$$

该断言得证。

断言 2：对于每个 $p \in \mathbb{S}^n$ 和 $k \in \mathcal{K}_2(\mathbb{S}^n, \bar{g})$,

$$(\phi(T)^* k)(p) = \frac{det(T)^{\frac{4}{n+1}}}{|Tp|^4} (k \cdot T)(p).$$

只需证明该断言对形如 $k = K \odot L$, $K, L \in \mathfrak{so}(n+1, \mathbb{R})$ 的 Killing 对称二阶张量成立。注意到 $K(x), L(x) \in T_x\mathbb{S}^n$ 与 $x \in S^n$正交，我们对每个 $p \in \mathbb{S}^n$和 $v, w \in T_p\mathbb{S}^n$计算得,

$$\begin{aligned}
&(\phi(T)^*(K \odot L))_p(v, w) = \\
&\quad = \left\langle K\left(\frac{Tp}{|Tp|}\right), d\phi(T)(p)v \right\rangle \left\langle L\left(\frac{Tp}{|Tp|}\right), d\phi(T)(p)w \right\rangle + \ldots \\
&\quad = \left\langle K\left(\frac{Tp}{|Tp|}\right), \frac{Tv}{|Tp|} \right\rangle \left\langle L\left(\frac{Tp}{|Tp|}\right), \frac{Tw}{|Tp|} \right\rangle + \ldots \\
&\quad = \frac{1}{|Tp|^4} \left\langle T^\top K T p, v \right\rangle \left\langle T^\top L T p, w \right\rangle + \ldots \\
&\quad = \frac{det(T)^{\frac{4}{n+1}}}{|Tp|^4} ((K \odot L) \cdot T)_p(v, w).
\end{aligned}$$

（在上述计算中，我们用省略号隐去了涉及 K 和 L 置换的项。）该断言得证。

结合两个断言与方程（19），我们验证了（18）的有效性，结论随之得出。□

对应关系的等变性直接推出以下结论：

推论 3.3. 设 $g \in \mathcal{E}(\mathbb{S}^n)$ 和 $R \in Curv_+(\mathbb{R}^{n+1})$ 由定理 *2.9* 中定义的映射相关联。设 $T \in GL(n+1, \mathbb{R})$。那么， $R \cdot T = R$当且仅当映射 $\phi(T)$ （如式(13) 所示）是 $(\mathbb{S}^n, g)$的等距变换。

证明。 事实上， $R \cdot T = R$ 当且仅当 $\phi(T)^* g = g$。 □

作为应用，我们得到：

推论 3.4. 对每一个使所有赤道均为极小的球面 $\mathbb{S}^n$ 上的黎曼度量，对跖映射都是等距变换。

证明. 注意，对跖映射就是映射 $A = \phi(-Id) : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$。由于 $det(-Id) = (-1)^{n+1}$，且每个 $R \in Curv(\mathbb{R}^{n+1})$ 都是四线性的，因此对于每个 $R \in Curv(\mathbb{R}^{n+1})$，都有 $R \cdot (-Id) = R$。根据推论 3.3，每个 $g \in \mathcal{E}(\mathbb{S}^n)$ 都满足 $A^* g = g$。□

特别地，对于每个 $g \in \mathcal{E}(\mathbb{S}^n)$和每个 $T \in GL(n+1, \mathbb{R})$，都有 $\phi(-T)^* g = \phi(T)^* A^* g = \phi(T)^* g$。因此，该群

$$\mathcal{G}_n = \tilde{\mathcal{G}}_n / \{\pm Id\} \simeq GL(n+1, \mathbb{R}) / \{\lambda Id \,|\, \lambda \neq 0\} = PGL(n+1, \mathbb{R})$$

在 $\mathcal{E}(\mathbb{S}^n)$上有一个定义良好的作用，由 $g \cdot [T] = \phi(T)^* g$给出：对于每个 $[T] \in PGL(n+1, \mathbb{R})$和每个 $g \in \mathcal{E}(\mathbb{S}^n)$，

值得注意的是，$\mathcal{G}_n$ 的不同元素会在$(n-1)$-赤道的集合中诱导出不同的置换。

显然也可验证，$GL(n+1, \mathbb{R}^n)$在空间 $\mathcal{K}_2(\mathbb{S}^n, g)$和 $Curv(\mathbb{R}^n)$上的作用也诱导出一个 $PGL(n+1, \mathbb{R}^n)$-作用，因为对于每个 $\lambda \neq 0$ 以及每个$T \in GL(n+1, \mathbb{R})$，$\lambda T$ 的作用方式与 T 相同。

现在，我们已经定义了 $PGL(n+1, \mathbb{R})$ 在各个空间$\mathcal{E}(\mathbb{S}^n)$ 和 $Curv_+(\mathbb{R}^{n+1})$ 上的作用，并根据定理 3.2 验证了该作用在定理 2.9 所述对应关系下的等变性，因此，引言中陈述的分类定理的证明就完成了。

注 3.5. 本节所述的类似等变性断言，在定理 2.6 的更一般情形下同样成立，且可用相同的论证加以证明。也就是说，只需考虑 $GL(n+1, \mathbb{R}^n)$ 中满足以下条件的映射所构成的子群：微分同胚 $\phi(T)$（如式 (13) 所示）将给定的开子集$U \subset \mathbb{S}^n$ 映射到自身。关于 Hangan 对应（ [30]中的定理 2），也可以作出类似的观察。

注 3.6. 令 $\mathbb{RP}^n$ 表示通过对 $\mathbb{S}^n$ 取对跖映射的商而得到的 n维实射影空间。$\mathbb{S}^n$ 的一个 k维赤道的商，是 $\mathbb{RP}^n$ 中嵌入的一份 $\mathbb{RP}^k$，我们称之为线性射影 k维平面。推论 3.4 的一个结果是，标准投影 $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ 的拉回给出了以下两个集合之间的双射对应：$\mathbb{RP}^n$ 上的黎曼度量集合，其中所有线性射影 $(n-1)$ 维平面都是极小的；以及集合 $\mathcal{E}(\mathbb{S}^n)$。我们将在注 4.6 中进一步探讨 $\mathbb{RP}^n$ 上这些度量的几何性质。

4. Three-dimensions

4.1. 唯一性。 $\mathbb{S}^3$ 的定向赤道集是由 $\mathbb{S}^3$ 中光滑嵌入的定向二维球面组成的集合，并由

$\mathbb{S}^3$ 本身通过光滑映射 $v \mapsto \Sigma_v$ 参数化。给定任意一点 $p \in \mathbb{S}^3$ 和任意一个（定向的）二维线性子空间 $\pi \subset T_p\mathbb{S}^3$，存在唯一一个经过 p 且满足 $\pi = T_p\Sigma_{(p,\pi)}$ 的（定向）赤道 $\Sigma_{(p,\pi)} \subset \mathbb{S}^3$。此外，映射 $(p,\ \pi) \mapsto \Sigma_{(p,\pi)}$ 是光滑的。

因此，在任何具有极小赤道的 $(\mathbb{S}^3, g)$ 上，有向赤道构成一个有向嵌入极小二维球面的传递族，其含义见 J. G´alvez 和 P. Mira（参见 [28] 中的定义 2.1）。因此，我们可以应用他们的唯一性定理（[28], 定理 2.3），得出以下强结论：

定理 4.1. 设 g 是球面 $\mathbb{S}^3$ 上的一个黎曼度量，使得所有二维赤道都是极小的。关于 $(\mathbb{S}^3, g)$，任何浸入极小二维球面都必定是一个赤道。

这一结论不能推广到维数 $n > 3$。例如，$(\mathbb{S}^4, g)$ 本身就包含无穷多个并非赤道的嵌入极小三维球面。这些非全测地超球面最初由 Wu-Yi Hsiang 构造 [34]。（另见 [35], 定理 4）。

4.2. 两个赤道的面积、指标与零性。设 Σ 是$(\mathbb{S}^n, g)$中的极小可定向超曲面，并按照某个单位法向量 N^g的选取确定其定向。 Σ 的Jacobi算子是对称椭圆算子 $\mathcal{J}_g$，作用于函数 $\eta \in C^\infty(\Sigma)$，其定义为

$$\mathcal{J}_g(\eta) = \Delta_g\eta + Ric_g(N^g, N^g)\eta + |A_g|_g^2\eta.$$

这里， A_g 是$(\mathbb{S}^n, g)$中 Σ 的第二基本形式， Ric_g 是$(\mathbb{S}^n, g)$的Ricci张量。Jacobi算子自然地出现在面积泛函 [45]的二阶变分研究中。事实上，对于 $\Sigma_0 = \Sigma$ 的任意光滑变分 $\{\Sigma_t\}$，若其在 $t = 0$处的法向速度为 η，则

$$\frac{d^2}{dt^2}_{|t=0} area(\Sigma_t, g) = -\int_\Sigma \eta\mathcal{J}_g(\eta)d\Sigma_g.$$

Σ 的Morse指标等于 $\mathcal{J}_g$ 的负特征值数量（按重数计）。因此，它衡量了 Σ 作为面积泛函临界点的不稳定程度。

另一方面， Σ的零性是 Jacobi函数空间的维数，也就是 $\mathcal{J}_g$的核的维数。对于极小超曲面 $\Sigma = \Sigma_0$ 的一个变分 $\{\Sigma_t\}$，其在 $t = 0$处的法向速度为η，将 Σ_t上的平均曲率 H_t 视为 Σ上的函数，则满足

$$\frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} H_t = -\mathcal{J}_g(\eta).$$

因此，由极小超曲面构成的 Σ 的变分会在 Σ上生成一个 Jacobi函数。（然而，一般而言，非零的 Jacobi函数并不会生成这种变形。）

定理 4.2. 设 g 是球面 $\mathbb{S}^3$ 上的一个黎曼度量，使得所有赤道都是极小二维球面。那么，$(\mathbb{S}^3, g)$ 中的每个赤道都有一个 *Morse*指标、零性为三，且面积相同。

证明。 该定理可由以下一系列断言推出：

1) 所有赤道的面积都相同。事实上，有向极小赤道的集合可由 $\mathbb{S}^3$ 本身光滑地参数化。由于它们都是面积泛函的临界点，因此面积相同。

2) 所有赤道的零性至少为三。给定一个赤道 Σ_v 及其单位法向量 N_g，考虑线性映射 $K \in \mathfrak{so}(4, \mathbb{R}) \mapsto g(K, N_g) \in C^\infty(\Sigma_v)$。该映射的核由满足对每个 $p \in \Sigma_v$ 都有 $K(p) \in T_p\Sigma_v$ 的 K 组成，是其六维定义域的一个三维子空间。此外，其三维像由 Σ_v 上的 Jacobi函数构成，因为 K 的流是由 $SO(4)$ 中的元素生成的流，因此会产生赤道 Σ_v 的一个变分，其变分曲面均为 $(\mathbb{S}^3, g)$ 中的极小赤道。

3)所有赤道的指标至少为一。 对称椭圆算子 $\mathcal{J}_g$ 的第一特征值具有重数一。根据断言 2，零不可能是 $\mathcal{J}_g$的第一特征值。

4) 所有赤道的指标均为一。回忆一下，根据定理 4.1，$(\mathbb{S}^3, g)$中的极小二球面必为赤道。根据断言 3，$(\mathbb{S}^3, g)$满足 Marques-Neves极小极大定理的假设（见 [41],定理 3.4）。因此，所有赤道的指标尤其都等于一。

5) 所有二维赤道的零性均为三。 事实上，根据 Shiu Yuen Cheng 的一般性结果，在二球面上，形如 $\mathcal{J}_g$ (*Cf.* [23], 第 3 节)的对称椭圆算子的第二特征值，其重数至多为三。根据断言 4， $\mathcal{J}_g$ 除第一特征值外的所有特征值均非负。因此，每个赤道的零性至多为三。根据断言 2，我们得出每个赤道的零性恰为三，定理的证明至此完成。□

注 4.3. 基于 Marques-Neves 定理的上述断言 4 的证明实际上表明，$(\mathbb{S}^3, g)$ 中极小赤道的共同面积等于该空间的 *Simon-Smith*宽度 。这是与 $\mathbb{S}^3$ 中嵌入的二维球面空间上的面积泛函极小极大理论相关联的最简单的几何不变量。（有关该理论的介绍，见 [24] 。）

嵌入球面的空间的拓扑为我们带来了另外三个极小极大数。在 [5], 中，我们证明了，实际上，$(\mathbb{S}^3,\ g)$ 的四个球面面积宽度在存在极小赤道时都等于这些极小赤道的共同面积。然而，反过来并不成立。（参见 [5] 中的定理 B，了解进一步阐述。）

4.3. 等距变换。 如果 ϕ 是度量 $g \in \mathcal{E}(\mathbb{S}^n)$ 的等距变换，它会将每个赤道映射到 $(\mathbb{S}^n, g)$ 中的一个极小超球面，而后者先验上并不保证是另一个赤道。在这方面，请回想前面提到的由 Hsiang –[34]在 $(\mathbb{S}^4,g)$ 中构造的那些非赤道极小三维球面。

然而，在 $n = 3$维中，我们可以证明， $\mathcal{E}(\mathbb{S}^n)$ 中度量的等距变换会将赤道映射到赤道。更确切地说：

定理 4.4。 设 g_1 和 g_2 是球面 $\mathbb{S}^3$上的黎曼度量，并且相对于这些度量，所有赤道都是极小的。如果

$$\phi : (\mathbb{S}^3, g_1) \to (\mathbb{S}^3, g_2)$$

是一个等距变换，则 $\phi = \phi(T)$ 如 (13) 所示，对某个 $T \in GL(n+1, \mathbb{R})$成立。

证明。 根据定理 4.1，等距变换 ϕ对任意赤道的像也必定是一个赤道，即 ϕ 置换赤道。该定理现在立即由命题 3.1推出。□

因此， $\mathcal{E}(\mathbb{S}^3)$ 中的两个度量彼此等距，当且仅当它们位于 $GL(n+1,\ \mathbb{R})$ 的作用所产生的同一轨道上。

此外，结合定理 4.4 和推论 3.3，我们可以简单地描述度量 $g \in \mathcal{E}(\mathbb{S}^3)$ 的等距变换群。为了清晰地陈述这一点，回顾一下：在李群 H 作用的空间中，一个点的稳定子是 H 中由所有固定该点的元素组成的闭子群。

定理 4.5。 设$(\mathbb{S}^3, g)$ 是一个具有极小赤道的球面，设$R_g \in Curv_+(\mathbb{R}^n)$ 是通过定理 *2.6* 与 g 对应的代数曲率张量。由式 *(14)* 定义的映射 $T \in GL(n+1, \mathbb{R}) \mapsto \phi(T)$ 诱导出同构

$$Stab_{GL(4,\mathbb{R})}(R_g) \simeq Isom(\mathbb{S}^3, g) \text{ 和 } Stab_{SL(4,\mathbb{R})}(R_g) \simeq Isom_0(\mathbb{S}^3, g),$$

它们分别刻画了$(\mathbb{S}^3, g)$ 的等距变换群及该群中恒等变换的连通分支。

证明。 根据定理 4.4，$(\mathbb{S}^3, g)$ 的任意等距变换都必为某个 $T \in GL(4, \mathbb{R})$ 所对应的 $\phi(T)$。关于 $Isom(\mathbb{S}^n, g)$ 的结论随即由推论 3.3 得出。

$Isom_0(\mathbb{S}^3, g)$ 中的任意元素都可表示为 $\phi(T)$ 的形式，其中 $T \in GL(4, \mathbb{R})$ 的行列式为正，因为当且仅当 $\phi(T)$ 保定向时，

当且仅当 $det(T) > 0$。特别地，将 T 乘以一个正数后， $\phi(T)$ 对于唯一的一个满足 $det(T') = 1$ 的 $T' \in GL(4, \mathbb{R})$，有 $= \phi(T')$。但因此，这个 T' 是特殊线性群 $SL(4, \mathbb{R}) \subset GL(n+1, \mathbb{R})$ 中的一个元素，并且固定 R_g。命题的第二部分由此得证。□

鉴于定理 4.5，计算 $Isom(\mathbb{S}^3, g)$ 是一个代数问题。但从计算角度来看，这并非易事。在 [4], 中，我们着重计算了这个群的维数。通过研究线性化作用，我们得以在 $\mathcal{E}(\mathbb{S}^3)$ 上找到具有离散等距变换群的度量。（参见 [4] 第 9.4 节）。尤其是，这些度量提供了这样的度量示例：它们定义在 $\mathbb{S}^3$ 上，与典范度量任意接近，并包含光滑的三参数极小球面族；这些球面族并非由移动给定极小球面的环境等距变换所形成的光滑族产生。（这些度量与丘成桐在 [52], 第 248 页提出的一个问题有关。更多内容见 [4], 定理 C。）

注 4.6。设 g 是 $\mathbb{RP}^3$ 上的一个黎曼度量，使得所有线性射影二维平面都是极小的，如注 3.6 所述。按照该注中的做法，将此度量拉回到 $\mathbb{S}^3$ 上，我们可以运用定理 4.1 得出以下推论：在 $(\mathbb{RP}^3, g)$ 中，任何嵌入的极小射影平面都必定是线性射影二维平面。

此外，每个线性射影平面的面积都相同，且等于 $(\mathbb{RP}^3, g)$ 中嵌入射影平面的最小面积。事实上，线性射影平面构成一个道路连通的极小曲面集，在 $(\mathbb{RP}^3, g)$ 中光滑变化，因此它们的面积相同。根据 [22], 命题 2.3，在 $(\mathbb{RP}^3, g)$ 中存在一个面积最小的嵌入射影二维平面 Σ。根据上述唯一性断言， Σ 必定是线性射影二维平面之一。（这是对 [29], 的推广；该文对 $\mathbb{RP}^3$上的 Berger度量进行了类似推理。）

这些观察应与以下结果进行对照。Juan Carlos Alvarez-Paiva 和 Emmanuel Fernandez 根据 n 维欧氏空间的二维平面格拉斯曼流形上的光滑正测度，对所有线性射影超平面在其同调类中都使霍姆斯-汤普森面积达到极小的 $\mathbb{RP}^n$ 芬斯勒度量进行了分类（参见 [2], 定理 8.5）。然而，在他们的分类中，如何从这些度量中立即辨别出黎曼度量并不清楚，也不清楚如何根据这些测度的性质来理解芬斯勒度量的几何性质。

5. Perspectives

5.1. 进一步的几何探索。虽然定理 4.2 确定了具有极小赤道的（$\mathbb{S}^3$, g）中极小球面的变分性质，但还可以围绕它们提出其他一些有趣的几何问题。

例如，与赤道在 ($\mathbb{S}^3$,g) 中所具有的性质一样，它们是否在包围总体积相同比例的曲面中使面积最小？

利用定理 4.4 和 4.5，还可以研究模空间 $\mathcal{E}(\mathbb{S}^3)/\sim$，其中，如果两个度量相差一个等距变换和缩放，则将它们视为相同。它是否具有有趣的拓扑或几何结构？ $\mathcal{E}(\mathbb{S}^n)$ 中的度量序列会以哪些方式退化？ $\mathcal{E}(\mathbb{S}^3)$ 中的一个一般度量的等距变换群是否只包含对跖映射？而 $\mathcal{E}(\mathbb{S}^3)$ 中度量的等距变换群可能有哪些？

在高维中，相应的问题同样具有意义。不过请注意，对于 $\mathcal{E}(\mathbb{S}^n)$ 中、维数为 $n \geq 4$ 的度量，定理 4.2 、 4.4 和 4.5 的适当版本仍然缺失，因为它们的证明使用了一些专门针对三维的命题，例如定理 4.1。

5.2. 极小超曲面理论中的类佐尔度量。 我们研究维数为 $n \geq 3$ 的具有极小赤道的球面的一个主要动机是，它们将成为球面上最简单的非平凡黎曼度量实例，且这类度量允许大量极小超球面，也就是说，在 $(\mathbb{S}^n, g)$ 中存在一族嵌入的余维一球面 $\{\Sigma_\sigma\}$ ，由点 $\sigma \in \mathbb{RP}^n$ 光滑参数化，并满足以下公理：对于每个点 $p \in \mathbb{S}^n$ 和每个切超平面 $\pi \subset T_p\mathbb{S}^n$，都存在唯一的 $\sigma \in \mathbb{RP}^n$ ，使得 $p \in \Sigma_\sigma$ 且 $\pi = T_p\Sigma_\sigma$。这一概念由 F. Marques、A. Neves 和作者在 [4] 中提出（当时我们称之为极小超球面的佐尔族），它抓住了 $\mathbb{S}^2$ 上佐尔度量的测地线集的本质特征；所谓佐尔度量，即其测地线都是闭合的、简单的，且长度相同的度量。（关于佐尔度量这一主题，内容全面且至今仍相当新近的参考资料，是 Arthur Besse 的优秀著作 [18]）。

在我们开始研究时，我们所知道的这类度量的唯一非平凡例子，是 $\mathbb{S}^3$ 上的齐性度量。事实上，虽然 Francisco Torralbo [51] 明确指出，伯杰度量以左不变度量的标准形式给出时，是具有极小赤道的度量，但 Meeks-Mira-Perez-Ros [42] 对所有齐性三维球面中浸入的常平均曲率球面的总分类定理可以用来证明

它们的极小二维球面空间蕴含着大量上述意义下的极小二维球面。然而，他们的研究并未明确说明这些极小球面在 $\mathbb{S}^3$ 内究竟是什么样子。由于齐性度量在 $\mathbb{S}^3$ 上（相差等距变换）恰好就是左不变度量，因此令人惊喜地发现， $\mathbb{S}^3$ 上所有 左不变度量都是具有极小赤道的度量！见例 2.13。

无论如何，在任意维数 $n \geq 3$中，具有极小赤道的度量只占球面 $\mathbb{S}^n$ 上度量空间中的一小部分，而这个空间中存在大量极小超曲面。这一事实源于我们通过扰动方法构造此类度量，这种方法在 [4]中得到了发展。最近，Diego Guajardo 和作者改进了这一构造，并获得了更多例子：这些例子的等距变换群可控，且可等距嵌入为 $\mathbb{R}^n$的超曲面，这与 Otto Zoll 最初在 $\mathbb{S}^2$中的构造颇为相似。（不过，我们不知道所构造的这些旋转度量在维数 $n \geq 3$ 中是否解析。）[1]

关于 $\mathbb{S}^n$ 上的广义佐尔度量，一个重要问题是其大量极小超球面是否具有唯一性。正如我们在第 4.1 节中所见，在维数 $n = 3$中存在更强的唯一性结论，但这一结论在高维中并不成立。在具有极小赤道的度量这一类中（甚至在g中）研究这一唯一性问题，似乎是一个很有前景的起点。值得注意的是，若答案为肯定，就可以将第 4.3 节的许多结果推广到所有维数$n \geq 4$。

另一个相关问题是，大量极小超球面是否非退化；这里的非退化是指，这一族中每个极小超球面的所有 Jacobi函数，都是该族成员所作变分的法向速度。（换言之，它们构成了面积泛函的莫尔斯-博特临界点族。）($\mathbb{S}^n$,g)中的赤道族在所有维数下都具有这种意义上的非退化性。再者，或许值得对具有极小赤道的度量类研究这一问题，这可能是将定理 4.2 推广到所有维数的一步。

为了进一步探索$\mathbb{S}^n$上的广义佐尔度量空间，我们认为，确立与具有极小赤道的球面中的赤道族（$\mathbb{S}^n$， g）相关联的芬克-拉东变换 的一般性质十分重要。该映射将

[1]我感谢 Alberto Abbondandolo 提醒我，最初的佐尔旋转球面的解析性，是当年他的发现令专家们感到惊讶的最重要原因。O. Zoll 是 D. Hilbert 的学生，而这类几何的存在性是他博士论文的主要结果，该论文发表于 [53]。

每个 $f \in C^\infty(\mathbb{S}^n)$ 映射为函数 $\mathcal{R}(f) \in C^\infty(\mathbb{RP}^n)$，使得

$$\mathcal{R}(f)(\sigma) = \int_{\Sigma_v} f(x)\, dA_g(x),$$

其中 $\sigma = [\pm v]$。

典范度量下的 Radon 变换已得到充分理解，因为它在 $SO(n+1)$的作用下具有等变性，因此可以应用该群的表示论。我们认为，对具有极小赤道的非齐次度量的 Radon 变换进行分析，将带来有趣的挑战。

如果赤道族是 Morse-Bott 的，且对于某个具有极小赤道的 $(\mathbb{S}^n, g)$，该变换是满射并且其核有明确刻画，那么我们便有理由期待：可以直接调整 [4]和 [3]中采用的技术，将典范度量 g 扰动为 $\mathbb{S}^n$ 上的新度量，使其具有丰富的极小超球面；同样，也可以通过扰动 g来得到这类新度量。

最后，令 $A(g)$表示具有极小赤道的 $(\mathbb{S}^n, g)$的赤道的共同面积。若存在某个定义在 $\mathbb{RP}^n$ 上的概率测度 μ，使得

$$\int_{\mathbb{RP}^n} \mathcal{R}(f)(\sigma) d\mu(\sigma) = \frac{A(g)}{vol(\mathbb{S}^n, g)} \int_{\mathbb{S}^n} f(p) dV_g(p).$$

$\mathbb{S}^3$ 上齐次度量的 Radon 变换具有这一性质（见 [6], 定理 3.1）。如果一般情形也是如此，我们猜想，在共形类中具有相同体积的度量之间，具有极小赤道的度量很可能是这样一个泛函的局部极大值：对于每个 $\mathbb{S}^n$中的度量 g，该泛函计算（$\mathbb{S}^n, g$）中极小超球面面积的下确界。（参见 [7], 命题 1.4.1）

5.3. 正截面曲率流形。设（M^{n+1}, h）是一个维数为 $n+1 \geq 4$ 的黎曼流形。在每个切空间 T_pM 上，我们可以利用分类定理，将曲率张量 R_p 关联到单位球面 $\mathbb{S}^n \subset (T_pM, h_p)$ 上的一个黎曼度量 g_p，使得所有赤道相对于该度量都是极小的。

因此，一个非常有趣的问题是，探索将每个 $p \in M$ 映射到度量 g_p的等距类的映射具有哪些性质。一种研究方法是从这些度量 g_p 中选取某个几何不变量——例如它们赤道的共同面积或第一拉普拉斯特征值——并研究由此得到的函数在M 上的整体行为。一个引人遐思的可能性是，这些函数或许能揭示正截面曲率流形的新面貌，或者在里奇流下呈现优美的演化方式。

另一个相关问题（由 Gavin Ball 提出）是对具有正截面曲率的（完备）黎曼流形进行分类，使得每一点处的曲率张量都定义同一个具有极小赤道的度量等距类。它们是否就是具有正截面曲率的齐性流形?

Appendix A - An inverse problem

本综述讨论的问题，是几何变分背景下一个逆问题：在给定空间上，找出所有使与之相关的几何泛函具有指定临界点集的几何。符合这一描述的问题有很多；我们特别指出一个影响深远的问题。在他著名的问题清单中，David Hilbert 将构造并研究 直线段是两点之间最短连接的几何，列为第四问题 [33],。他的表述含糊不清，当然有多种解读方式（例如什么是几何？），并由此促成了富有成果的数学研究，其中许多研究都收录于 J.´Alvarez-Paiva [1] 和 Athanase Papadopoulos [44] 撰写的优秀综述中。

Hilbert 的灵感之一来自贝尔特拉米定理。1865年，Beltrami 发表了他关于如下问题的研究成果：确定所有（连通）曲面，使其存在一个局部坐标图构成的图册，其中曲面的（无参数化）测地线都表示为直线 [12]。尽管他最初表示希望找到这类曲面的非平凡例子，Beltrami 最终证明，若这样的图册存在，则该曲面具有常数（正、零或负）高斯曲率。

更进一步，Beltrami经过巧妙的计算得出了这一结论，并为这些局部坐标图上的此类度量（可能经过仿射坐标变换）推导出一个简洁的公式。Beltrami 的公式为

$$R^2\frac{(v^2+a^2)du^2-2uvdudv+(u^2+a^2)dv^2}{(u^2+v^2+a^2)^2},$$

其中 R 和 a是常数。这是一种高斯曲率等于 $1/R^2$的度量。Beltrami 在计算中明确将虚数也视为有效常数，但制图学方面的动机使他排除了这种可能性。

有趣的是，三年后，Beltrami 发表了他那篇关于双曲几何的著名论文 [13], ，他在单位圆盘上定义的完备双曲度量 $u^2+v^2<1$ 恰好就是上述度量，只是常数取值为 $R=a=i$。这便是

如今所谓的抽象双曲平面的 Beltrami-Cayley-Klein（射影）模型的起源之一。

Ludwig Schl¨afli [46] 将贝尔特拉米定理推广到了所有维数 $n \geq 3$ （另见 Beltrami 对 Schl¨afli 论文[14]的评论）。更准确地说，他证明了：一个由坐标图覆盖的（连通）黎曼 n维流形，若这些坐标图将其（未参数化的）测地线表示为直线，则该流形具有常截面曲率。 ´Elie Cartan 的一个相关定理（见 [21], 第六章第九节）断言，黎曼流形具有常截面曲率，当且仅当对某个固定的 $k \geq 2$，每一点处的切空间中每个k维子空间，都存在一个与之相切的 k维全测地子流形。（现代证明见 [25]中的定理 1.16。）

也许令人惊讶的是，直到最近，几何学家才开始关注这样一个问题：对于给定的$k = 2, \ldots n-1$，如何刻画使所有 k平面均为极小的 $\mathbb{R}^n$ 上的黎曼度量。[2]

这个问题基本上已由 Hangan 在两篇论文中解决。在[31], 中，他刻画了 $\mathbb{R}^n$的开子集$n \geq 3$上的所有黎曼度量；对于这些度量，所有与给定集合相交的 k维平面（其中$2 \leq k \leq n-2$为某个固定值）都是极小的。通过巧妙的张量计算，Hangan 证明了这类度量还必定具有常截面曲率。

在讨论由 Hangan 于 [30],处理的情形 $k = n-1$之前，正好可以将以上所有结果总结如下：

定理 (Beltrami [12], Schl¨afli [46], Hangan [31])。 设 $n \geq 2$ 为一个整数，且 $k = 1$ 或 $k \leq n-2$ 为正整数。若 g是$\mathbb{R}^n$ 的一个连通非空开子集 U 上的黎曼度量，并且所有与 U 相交的 k维平面在(U, g)中都是极小的，则 g 具有常截面曲率。

$\mathbb{R}^n$中的球上的贝尔特拉米-凯莱-克莱因度量、欧几里得度量本身，以及通过中心投影将球面$\mathbb{S}^n$ 上的典范度量推前至 $\mathbb{R}^n$ 所得到的度量，提供了具有所有可能常截面曲率值（至缩放为止）的例子。

[2]我们能找到的一个例外是 Hermann Busemann 的著作 [20]。不过，他的表述更接近希尔伯特问题的思路，而且讨论的并非仅限于由黎曼度量确定的几何。事实上，在 [20], 的引言中，Busemann 表示，在这种一般设定下研究所有这类几何并无裨益，因为这类几何实在太多了。

此外，由于对于每个 $k = 1$、.....、 $n - 1$，中心投影都会将 k-赤道（的一部分）映入 $\mathbb{R}^n$ 中的 k-平面，因此由上面的定理可知，对于每个固定整数 $n \geq 2$ 以及每个正整数 $k \leq n-2$ 或 $k = 1$，若 $\mathbb{S}^n$ 上的黎曼度量使所有 k-赤道都是极小的，那么该度量必具有常正截面曲率。因此，将重点放在 $k = n - 1 \geq 2$ 这一情形是合理的。

关于 $k = n - 1 \geq 2$ 这一情形，还能说些什么？尽管 Hangan 的分类结果（[30], 定理 2）已经给出，但似乎尚未有人系统研究过 $\mathbb{R}^n$ 上开区域的度量的几何性质，尤其是那些使所有超平面都成为极小超平面的度量。

Mohammed Bekkar 的研究使这一主题在九十年代受到关注。他注意到海森堡度量

$$g = dx^2 + dy^2 + (dz + ydx - xdy)^2$$

在 $\mathbb{R}^3$ 上是一种齐性度量，且所有平面都是极小的 [15]。随后，Robert Lutz 提出了这样一个问题：在 $\mathbb{R}^n$ （的开区域）上，哪些度量具有极小超平面（见 [17]）。[3]

Bekkar 在 $n = 3$ （[16],[17]）时开始系统研究这类度量。特别是，他对其中具有 axy-对称性的度量进行了分类，例如海森堡度量，并计算了欧几里得度量附近解集的形式维数。[4] Hangan 在一种代数假设下给出了海森堡度量的另一种刻画（[30], 定理 3），并在 [31] 中指出，Aroldo Kaplan 引入的广义海森堡空间 [36] 是这类度量在 $\mathbb{R}^n$ 上的齐性实例，适用于所有维数 $n \geq 4$。

例如，研究开连通子集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上的这类度量中，哪些是完备的，会是一件很有意思的事。这种几何度量限制可能也会对开子集本身施加限制（例如，参见注 2.8）。此外，特别值得寻找非齐性例子，并研究它们在无穷远附近的行为。

关于它们的极小超平面，我们认为一个有趣的问题是，例如，确定在什么附加条件下，这些超平面具有有限的总（内禀）曲率，以及

[3]在 [30], 一文中，Hangan 给出了该问题的解答，并且也承认 Lutz 提出了这个问题。[4]在 [17], 中，Bekkar 提到 Robert Bryant 大约同时也研究了这个问题；他还特别计算出 $\mathbb{R}^3$ 中具有极小平面的度量空间的维数为 20。

依据哪些有意义的判据，可以将它们归类为面积极小曲面或极小平面。（它们无疑是面积极小曲面，因为平行超平面是极小的，并且将空间分叶。它们是否在 [32] 的意义下是校准的？我们指出，三维海森堡空间包含非平面的整体极小图 [27], ，其高斯曲率非正，且内禀面积增长至多为二次 [40]。）

Appendix B - Other model geometries

$\mathbb{S}^n$ 的赤道一旦给定无向切超平面格拉斯曼流形中的一个点，便可唯一确定；此外，它相对于典范度量还是全测地的。正如我们所见，研究使这一特定超曲面族中的所有超曲面都成为极小超曲面的度量问题，带来了有趣的结果。因此，自然会对其他模型空间提出类似的问题：这些空间包含自然的子流形族，这些子流形一方面由其无向切 k平面的格拉斯曼流形中某个特殊子流形上的点唯一确定，另一方面相对于某种典范几何又是全测地的。

因此，赋有标准对称度量的射影空间 $\mathbb{RP}^n$、 $\mathbb{CP}^n$、 $\mathbb{HP}^n$ 和凯莱平面 $Ca\mathbb{P}^2$（即除 $\mathbb{S}^n$之外的紧致秩一对称空间），连同它们的射影线性子空间族，便是接下来值得考察的模型几何。

由于具有极小赤道的度量具有对跖不变性（由推论 3.4 可知），因此在 $\mathbb{RP}^n$ 中对这一问题的研究可归结为在 $\mathbb{S}^n$中对该问题的研究。

在 [39], 中，Luciano L. Junior 系统研究了 $\mathbb{CP}^m$ 上的近似 Hermitian 结构，使得给定的 $k = 1,\ldots, m-1$ 中所有 $\mathbb{CP}^k$都是极小且复的 子流形。例如，他证明了当 $m \geq 3$ 和 $k = m-1$时，必要且充分条件是复结构可积，且 K¨ahler 形式$\omega(\cdot,\cdot) = g(J\cdot,\cdot)$满足 $d\omega^{n-1} = 0$。这些结构被称为平衡Hermitian 结构 [43], ，其中大多数并非 K¨ahler。

据我们所知，其他射影空间的情形尚未得到研究，其非紧致伴随空间上的对称度量情形也尚未得到研究。（关于欧几里得空间的情形，参见附录 A。）

除了射影空间之外，其他相关的模型几何还包括具有校准的几何 [32]。例如，参见 Gavin Ball 和 Jesse Madnick 的著作 [10] 和[11]。

References

[1] Juan Carlos ´Alvarez Paiva，二维希尔伯特第四问题，MASS selecta，165-183，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2003年。[2] Juan Carlos ´Alvarez Paiva 和 Emmanuel Fernandes，盖尔范德变换与克罗夫顿公式。Selecta Math. (N.S.) 13 (2007)，第3期，369-390。[3] Lucas Ambrozio 和 Diego Guajardo，具有佐尔族极小球面的球面的等变构造。预印本 arXiv 2501.16032。[4] Lucas Ambrozio、Fernando C. Marques 和 Andr´e Neves，具有佐尔族极小超曲面的球面上的黎曼度量，J. Differential Geometry 130 (2025)，269-341。[5] Lucas Ambrozio、Fernando C. Marques 和 Andr´e Neves，黎曼流形面积宽度的刚性定理。预印本 arXiv:2408.14375。[6] Lucas Ambrozio 和 Rafael Montezuma，实射影空间的二阶 systole，Rev. Mat. Iberoam. 36 (2020)，第7期，1979 - 1988。[7] Lucas Ambrozio 和 Rafael Montezuma，单位体积三维球面的极小极大宽度，J. Differential Geom. 126 (3) 875 - 907。[8]Emil Artin，几何代数。Interscience Publishers, Inc.，纽约-伦敦，1957年。x+214页。[9] Christiane Barbance，关于对称张量，C. R. Acad. Sc. Paris，276 (1973)，A辑，387-389。[10] G. Ball 和 J. Madnick，带挠率 SU(3)结构中特殊拉格朗日三维流形的平均曲率。J. Geom. Phys. 162 (2021)，论文编号 104090，共16页。[11] G. Ball 和 J. Madnick，带挠率例外几何中一阶子流形的平均曲率，Ann. Global Anal. Geom. 59 (2021)，第1期，27-67。[12] Eugenio Beltrami，问题的解答："将曲面上的点映射到平面上，使测地线表示为直线"，Ann. di Mat. (1) 7 (1865)，185-204。[13]Eugenio Beltrami，非欧几何解释札记。那不勒斯：s.n.，1868年。http://eudml.org/doc/203338。[14] Eugenio Beltrami，关于Schl ¨afli教授前一篇论文的评论，Ann. di Mat. (2) 5 (1871-73)，第194-198页。[15] Mohammed Bekkar，海森堡空间中的极小曲面实例。Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 61 (1991)，第2期，123-130。[16] Mohammed Bekkar，海森堡度量的一种刻画，C. R. Acad. Sci. Paris I辑数学 318 (1994)，第11期，1017-1019。[17] Mohammed Bekkar，关于使平面成为极小曲面的度量，Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996)，第10期，3077-3083。[18] Arthur Besse，所有测地线均闭合的流形，数学及其边缘领域成果丛书第93卷。施普林格出版社，柏林-纽约，1978年。ix+262 页。[19] Renato Bettiol 和 Paolo Piccione，球面上亚马贝问题齐性解的分岔与局部刚性，Calc. Var. Partial Differential Equations 47 (2013)，第3-4期，789-807。[20] Herbert Busemann，平面使面积取极小值的几何，Ann. Mat. Pura Appl. (4) 55 (1961)，171-189。

[21] ´Elie Cartan, 《黎曼空间几何讲义》。（法文）第2版。Gauthier-Villars, 巴黎，1946年。viii+378 页。[22]Hubert Bray、Simon Brendle、Michael Eichmair 和 Andr´e Neves, 《三维流形中的面积极小射影平面》。纯粹与应用数学通讯 63（2010），第9期，1237-1247页。[23] Shiu Yuen Cheng, 《特征函数与节点集》, 《瑞士数学评论》57（1976），43-55页。[24] Tobias Colding 和 Camillo de Lellis, 《极小曲面的极小极大构造》。微分几何论丛，第VIII卷（马萨诸塞州波士顿，2002年），75-107页, 《微分几何论丛》8，国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2003年。[25] Marcos Dajczer 和 Ruy Tojeiro, 《子流形理论：超越入门》

施普林格，纽约，2019年。xx+628 页。[26] Richard P. Delong Jr., 《Killing张量与Hamilton-Jacobi方程》，博士论文，明尼苏达大学。1982年，161页。[27] Isabel Fernandez 和 Pablo Mira, 《海森堡空间中的全纯二次微分与伯恩斯坦问题》，美国数学会汇刊，361（2011年），第11期，5737-5752。[28] Jos´e A. G´alvez 和 Pablo Mira, 《三维流形中浸入球面的唯一性》，微分几何杂志，116（3），459-480。[29] Olga Gil-Medrano, 《Berger度量下三维射影空间的面积极小射影平面》，巴黎科学院数学报告，354（2016年），第4期，415-417。[30] Theodor Hangan, 《论使所有超平面均为极小超曲面的 $\mathbb{R}^n$ 上的黎曼度量》，J. Geom. Phys. 18（1996年），第4期，326-334。[31] Theodor Hangan, 《论贝尔特拉米定理与广义海森堡群》，意大利数学联合会通报 B（第7辑）11（1997年），第2期，增刊，107-114。[32]Reese Harvey 和 Blaine Lawson, 《校准几何》，数学学报148（1982年），47-157。[33] David Hilbert, 《数学问题》，美国数学会通报8（1902年），第10期，437-479。[34] Wu-Yi Hsiang, 《极小锥与球面伯恩斯坦问题 I》，数学年刊（第2辑）118（1983年），第1期，61-73。[35] Wu-Yi Hsiang 和 Ivan Sterling, 《极小锥与球面伯恩斯坦问题 III》，Invent. Math. 85（1986年），223-247。[36] Aroldo Kaplan, 《由二次型复合生成的一类亚椭圆偏微分方程的基本解》，美国数学会汇刊258（1980年），第1期，147-153。[37] Hermann Karcher, 《Berger曲率张量估计的简短证明》，美国数学会会刊26（1970年），第4期，642-644。[38] Morris Knebelman, 《论相关空间中的运动群》，美国数学杂志52（1930年），第2期，280-282。[39] LucianoL. Junior, 《 $\mathbb{CP}^n$中的平衡度量、Zoll变形与等周长不等式》。预印本 arXiv:2310.10877。[40]Jos´e Manzano, 《海森堡空间中的对偶二次微分与整体极小图》，Ann. Global Anal. Geom. 55（2019年），第2期，197–213。[41]Fernando Cod´a Marques 和 Andr´e Neves, 《三维流形中极小极大极小球面的刚性》，杜克数学杂志161（2012年），第14期，2725-2752。

[42]Willian Meeks III、Pablo Mira、Joaquim P´erez 和 Antonio Ros，《齐性三维球面中的常平均曲率球面》，预印本 arXiv: 1308.2612。即将在微分几何杂志发表。[43] Marie-Louise Michelson，《复几何中特殊度量的存在性》，数学学报143（1983年），第261-295页。[44] Athanase Papadopoulos，《希尔伯特第四问题》，载于《希尔伯特几何手册》，391-431，IRMA 数学理论物理讲义，第22卷，欧洲数学学会，苏黎世，2014年。¨James Simons，《黎曼流形中的极小子流形》，数学年刊（第2辑）88（1968年），62-105。[45] Ludwig Schl[46] afli，《关于Beltrami先生的回忆录“论常曲率空间”》，Ann. di Mat.（第2辑）5（1871-73），178-193。¨Takeshi Sumitomo 和 Kwoichi Tandai，《[47] (SO) $n+1$(/SO) $n-1$(2)的二阶Killing张量场与谱》，大阪数学杂志17（1980年），第3期，649-675。 $\times$ SOTakeshi Sumitomo 和 Kwoichi Tandai，《标准球面上的Killing张量场以及[48] (SO)$n+1$(/(SO) $n-1$(2))和 $\times$ SO(O)$n+1$(/(O1)$n-$(2))的谱》，大阪数学杂志20（1983年），第1期，51-78。 $\times$ OMasaro Takeuchi，《常曲率空间上的Killing张量场》，筑波数学杂志7（1983年），第2期，233-255。[49]Gerard Thompson，《常曲率空间中的Killing张量》，数学物理杂志27（1986年），第11期，2693-2699。[50] Francisco Torralbo，《Berger 球面中的紧致极小曲面》，Ann. Global Anal. Geom. 41（2012年），第4期，391-405。[51] 丘成桐，《几何中的非线性分析》，数学教学（第2辑）33（1987年），第1-2期，109-158。[52] Otto Zoll，《论具有闭测地线族的曲面》，数学年刊57（1903年），108-133。

IMPA - Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Apli-cada, Rio de Janeiro, RJ, Brazil, 22460-320.电子邮件地址: l.ambrozio@impa.br