arXiv:2601.01573v1 [physics.flu-dyn] 4 Jan 2026

基于连续移动接触线的二维 VOF 模拟接触角处理。

Tian-YangHan[a, b], Jie-Yun Pan[b, *], Chong-Sen Huang[c], Jie Zhang[c], Ming-Jiu Ni[a, **], Stéphane Popinet[b], Stéphane Zaleski[b, d]

[a]中国科学院大学工程科学学院，中国，北京 *101408*[b]索邦大学、法国国家科学研究中心、让·勒朗·达朗贝尔研究所 *UMR 7190*，法国巴黎 *F-75005*[c]机械结构强度与振动国家重点实验室，西安交通大学航天航空学院，中国陕西西安 *710049*[d]法国大学研究院，法国巴黎

摘要

本文提出了一种基于高度函数的数值方法，用于在二维流体体积法模拟中对平坦和曲面固体表面施加接触角。该方法将接触线位置纳入接触线单元的曲率估计，并将界面法向量约束为预设角度，以确保接触线平滑运动。对于平坦固体表面，所提出的模型在施加极小和极大接触角时，比传统的垂直高度函数法精度更高。此外，该方法还可自然推广至采用嵌入边界法表示的曲面固体表面，从而能够施加

*通讯作者

**通讯作者电子邮箱： hantianyang@ucas.ac.cn (Tian-YangHan), yi.pan@sorbonne-universite.fr (Jie-Yun Pan), cshuang@stu.xjtu.edu.cn (Chong-Sen Huang), j_zhang@xjtu.edu.cn (Jie Zhang), mjni@ucas.ac.cn (Ming-Jiu Ni), popinet@basilisk.fr (Stéphane Popinet), stephane.zaleski@sorbonne-universite.fr (Stéphane Zaleski)

任意接触角，且不会在接触线附近引发显著的寄生流。数值验证证实了所提出方法的准确性和稳健性，并表明该方法适用于涉及复杂壁面几何和接触线动力学的多相流。

---

1. 引言

涉及移动接触线的多相流在自然界和工业应用中无处不在，例如喷墨打印 [1], 提高石油采收率[2], 和帘式涂布 [3]。此类流动的数值模拟面临三大挑战：（1）准确捕捉多相界面；（2）一致地离散表面张力；（3）可靠地模拟流体与固体之间的相互作用。最后一方面主要涉及接触线动力学：当在固体壁面上施加无滑移边界条件时，接触线动力学必然会导致压力和剪切应力奇异性[4]。为克服这一困难，必须引入适当的接触线模型，通常将接触线的移动机制（如纳维滑移）与指定的接触角条件相结合，以反映壁面润湿性[5]。过去几十年来，研究人员采用了多种界面捕捉方法来模拟移动接触线问题，包括前沿追踪法（FT）、水平集法（LS）、流体体积法（VOF）和弥散界面法（DI） [6, 7, 8, 9, 10, 11]。其中，VOF方法因其出色的质量守恒特性，以及处理界面合并和破碎的天然优势而尤为引人关注 [12], ，因此本研究采用了该方法。

在 VOF 框架下，表面张力的协调离散化

可通过结合基于高度函数（HF）的曲率估计与平衡力连续表面力（CSF）公式来实现[13]。VOF方法固有的隐式滑移使接触线运动成为可能 [9]。为施加指定接触角，研究者提出了两种主要策略。第一种是在计算域外的幽灵单元中指定体积分数 [8, 10], ；第二种则基于HF方法，在该方法中，高度函数被指定在幽灵单元或相邻非界面单元列中 [14, 15]。两种方法都通过调整接触线处体积分数或高度函数的局部梯度，来施加所需的接触角。本文采用基于HF的方法，因为它在曲率估计方面具有更高的精度 [16]。在二维情况下，Afkhami和Bussmann提出的基于HF的接触角模型[14]由两部分组成：适用于介于 45° 和135°之间接触角的水平HF格式，以及适用于超出此范围角度的垂直HF格式。虽然水平HF模型在接触线处的曲率估计可实现一阶收敛[17], ，但垂直HF模型无法收敛。

上述接触角模型是针对平坦固体边界开发的。然而，对于复杂几何形状固体表面上的接触线运动，准确捕捉流固相互作用更具挑战性。目前已有两种主要策略：（i）贴体网格[21] 和（ii）在笛卡尔网格 [22, 23, 18, 20] 上实现的浸入边界法或嵌入边界法（IBM/EBM）。本文重点关注后一种方法。Patel等人 [22] 和OBrien等人 [23] 将IBM与代数或几何VOF格式相结合，其中规定接触线处的界面法向量 $\mathbf{n}$ 以满足所需的接触角，并将曲

表 1：几何VOF框架结合EBM固体表示时复杂几何中的接触角模型比较。

	接触角施加方法
Tavares等人 [18]	重构界面的线性外推 在混合单元内为固体区域中的 虚拟单元分配体积分数。
Chen 等人 [19][a]	Tavares方法的改进的虚拟单元外推 首先识别接触线单元。
Huang 等人 [20][a]	接触线附近高度函数的抛物线拟合 以重建界面几何并进行外推 将其纳入固体区域。
本研究[a]	基于已识别的接触线位置进行曲率估计， 该位置位于接触线单元内，且不进行任何 向固体区域的外推。

[a]这些方法在界面重构和几何平流过程中，考虑了混合单元内固相的存在。

率计算为 $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}$。虽然这种实现方式能有效施加所需的接触角，但可能会造成局部质量守恒误差，并且曲率估计的网格收敛性有限 [16]。

较新的研究将嵌入边界法与几何VOF方法相结合，从而能够对流体-流体界面和固体-流体界面进行锐界面表示，同时采用精度更高的高度函数法计算曲率。Tavares等人 [18]通过将混合单元中的重构界面延伸至固体区域，以赋予虚拟单元体积分数的方式施加接触角；然而，

当接触角极小或极大时，这种策略的效果会变差。Chen 等人 [19]改进了这一策略，仅在接触线单元内延伸重构界面，从而得到更准确的虚拟单元体积分数和相应的高度函数。此外，Chen 等人还在界面平流过程中考虑了混合单元内固相的存在——这一影响在 Tavares等人的方法中被忽略了。尽管如此，正如 Huang 等人 [20], 所指出的，Chen 等人的公式未能严格满足混合单元中的无散约束，仍可能引入局部质量守恒误差。为解决这一问题，Huang 等人为混合单元提出了一种守恒对流格式，并开发了更复杂的抛物线拟合过程，以直接赋予接触线附近的高度函数，从而在整个接触角范围内实现稳健的精度。表 1总结了在几何 VOFEBM 框架下实现的这些方法之间的差异，并列出本文方法以供比较。

尽管取得了这些进展，VOF 模拟中的现有接触角模型仍面临一些局限性。对于平坦固体表面，适用于极小和极大接触角的传统垂直HF模型无法达到与水平 HF 表述相同的精度。对于具有复杂几何的固体表面，尽管 Huang 等人 [20] 提出的抛物线拟合方法表现出良好的精度，但其实现仍相对复杂。在本文中，我们提出了一种基于 HF 的接触角模型，将接触线位置纳入接触线单元中的曲率估计。所提出的模型有三个目标：(i) 与传统垂直HF模型相比，提高在平坦固体表面上施加极小和极大

接触角的精度；(ii) 在保持实现简便的同时，实现模型从平坦固体边界向曲面固体边界的直接扩展；(iii) 确保在整个接触角范围内接触线附近的曲率估计准确，同时最大限度地减少寄生流。

2. 数值方法

本文采用的数值方法基于开源代码 $Basilisk$ [24]开发，该代码使用时间交错近似投影法，在自适应笛卡尔网格上求解不可压缩 Navier-Stokes 方程。下文首先简要介绍 $Basilisk$ 中用于界面追踪、表面张力离散和接触角施加的数值格式。随后，对切割单元中的界面追踪算法进行修改，以考虑固体边界的存在。最后，我们介绍一种新的接触角模型：该模型最初针对平坦固体边界开发，旨在提高极小和极大接触角下的精度，随后扩展至复杂几何，以施加任意接触角。本文开发的算法可通过 Basilisk 沙盒 [25]免费获取。

2.1. 控制方程

考虑两种不互溶流体的界面流动，其动力学行为由不可压缩纳维–斯托克斯方程控制：

$$\rho(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) + \sigma \kappa \delta_s \mathbf{n} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{2}$$

其中 $\mathbf{u}$、 p、 ρ、 μ 和 σ 分别表示流体速度向量、压力、密度、动力黏度和表面张力系数。应变率张量定义为 $\mathbf{D} = (\partial_j u_i + \partial_i u_j)/2$。单位法向量 $\mathbf{n}$ 和曲率 κ 表征界面几何，而 δ_s 是狄拉克分布函数，用于将表面张力局部化于界面处。方程（1）中的对流项和黏性项的数值离散，以及压力-速度解耦策略，均采用文献[26] 所述方法，本文不再赘述。

两种流体之间的界面采用 VOF方法捕捉。引入标量 c，表示参考流体在每个单元中的体积分数，其演化由下式控制：

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}c) = 0. \tag{3}$$

求解方程（3）的主要挑战在于准确估算 c 穿过单元面的对流通量。本文采用几何方法。具体而言，在每个界面单元（$0 < c < 1$）中重构一条线性界面线段，并据此通过简单的几何计算求得对流通量，如图 1(a) 所示。

2.2. 切割单元中的界面追踪

在 $Basilisk$中，复杂的固体边界通过嵌入边界法（EBM）表示 [27]。如图 1(b) 所示，固相嵌入笛卡尔网格中，并由第二个体积分数场 c_s描述，其中流体为参考相。相应的流体面分数记为 s_f。由于所考虑的固体边界

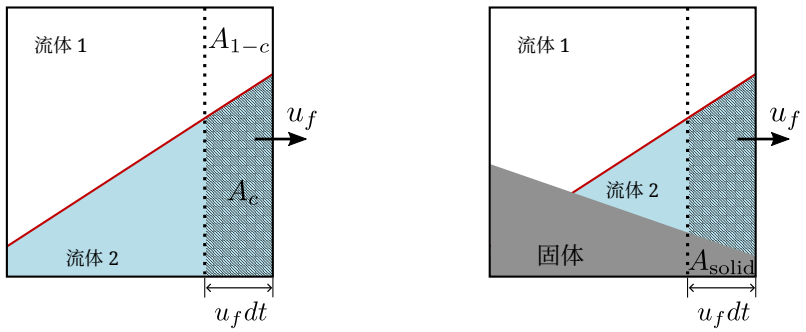


图 1：线性界面重构和几何平流通量估算示意图。(a) 无固体边界。(b) 有嵌入式固体边界。这里，u_f表示单元面处的流体速度，dt 表示时间步长。阴影区域表示流体 2 在距离 $u_f dt$ 内对流的体积。A_c、A_{1-c}和 A_{solid} 分别表示扫掠区域内流体 2、流体 1 和固体的体积。

在此处是静止的，因此在模拟开始时初始化 c_s 和 s_f，并据此在每个同时包含固相和流体的切割单元内，将固体边界重建为一条线段。

本节讨论切割单元中流体-流体界面的重构与平流。如图1(b)所示，当固体边界与流体-流体界面共存于同一网格单元内时，必须修改线性界面重构和平流几何通量估算，以考虑固相的存在。在这些过程中忽略固体体积分数可能会导致不符合物理规律的结果。例如，Tavares等人[18] 在几何界面平流过程中忽略了固相，导致固体对流体质量产生了人为吸收，进而违反了局部质量守恒。

2.2.1. 线性界面重构

在VOF方法中，线性界面重构用方程表示单元内的流体-流体界面

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \alpha, \tag{4}$$

其中 $\mathbf{n}$ 是界面的单位法向量， α 为常数。重构需要建立以下两个关系：

$$c = c(\mathbf{n},\ \alpha), \tag{5}$$

$$\alpha = \alpha(\mathbf{n},\ c). \tag{6}$$

对于矩形单元，这些关系可以通过解析方法推导得出 [28]。然而，在切割单元中，由于流体区域形状不规则，情况会变得更加复杂。为此，Huang 等人 [20]采用了一种最初为任意非结构化网格开发的界面重构策略 [29], ，而 Chen 等人 [19]提出了一种多边形分割算法，用于识别流体占据多边形的顶点，从而便于计算面积。本文提出了另一种方法，直接利用流体区域的多边形几何。接下来，我们首先讨论正问题 (5)，即根据给定的界面方程计算体积分数 c 。

如图 2所示，切割单元中的流体区域可能呈现三种不同的几何构型。图 2(a) 中，流体区域 abc 呈三角形。此时，一旦确定界面与三角形区域 c 之间的交点 anm和 m ，便可轻松计算参考流体（流体 2）的体积分数 n ，该体积分数对应于面积 abc 。

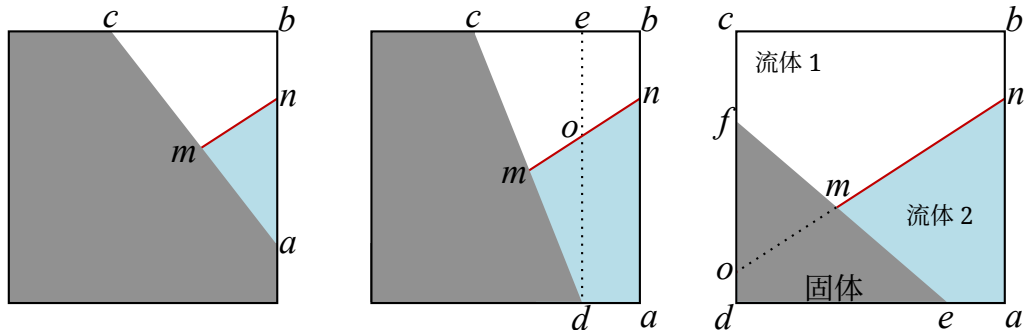


图 2：具有不同流体区域几何形状的切割单元示意图：(a) 三角形，(b) 四边形，以及 (c) 五边形。

当流体区域为四边形时，如图 2(b) 所示，可将四边形 $anmd$ 划分为矩形 $abcd$ 和三角形 $abed$ ，从而计算参考流体的面积。 cde对于这两个子区域，均有解析表达式可用于计算相应的参考流体面积，分别记为 omd 和 $odan$。随后，将两个子区域的贡献相加，即可得到总的体积分数 c 。最后，流体区域也可能形成五边形，如图 2(c) 所示。对此，可将流体界面 nm延伸至 no。然后，参考流体的体积分数可通过以下两部分之差计算得出：(i) 由延伸后的界面 $abcd$ 定义的整个矩形所对应的贡献，其面积为 no；(ii) 由界面线段 $anod$定义的三角形区域所对应的贡献，其面积为 def 。$mo\ emod$

在解决正问题 （5）后，剩余任务是求解逆问题 （6），即根据给定的体积分数 α 和界面法向量c 确定$\mathbf{n}$。为此，采用二分迭代法

算法 1：用于求解逆问题（6）的二分迭代 输入：体积分数 c、界面法向量 n、多边形流体区域的顶点坐标 p_i 、容差 ε输出：界面参数 α根据多边形形状选择适当的 $c = c(\mathrm{n}\ \alpha)$；将 p_i 代入界面方程（4），得到相应的 α_i；计算 $c_i = c(\mathrm{n}\ \alpha_i)$，以确定下界和上界 $c_{\min}$以及 $c_{\max}$，并得到相应的 $\alpha_{\min}$ 和 $\alpha_{\max}$；当尚未收敛时执行 计算中点 $\alpha_m = (\alpha_{\min} + \alpha_{\max})/2$；计算 $c_m = c(\mathrm{n}\ \alpha_m)$；如果 $|c_m - c| < \varepsilon$ 则表示已收敛，返回 α_m；否则，根据（$c_m - c$）的符号更新 $\alpha_{\min}$ 或 $\alpha_{\max}$；

已采用。完整流程总结于算法 1 中。

2.2.2. 几何界面平流

在对流方程（3）的离散化中，体积分数的对流通量F_c c 穿过单元面时由下式给出

$$F_c = \frac{A_c}{\Delta^2}, \tag{7}$$

其中， Δ 为网格尺寸， A_c 表示参考流体沿 $u_f dt$距离平流所扫过的面积，如图1(a)中的阴影区域所示。该公式可轻松推广至切割单元，如图1(b)所示。在这种情况下，

必须考虑扫掠区域内的固相（虚线右侧的矩形），并可使用公式（5）计算阴影区域的面积。

然而，将该公式（7）应用于切割单元时，可能会引入局部体积守恒误差。为说明这一点，我们先重新考察较简单的矩形单元情形。如图1(a)所示，考虑流体 1（体积分数为 $1-c$）穿过右侧单元面的对流。在这种情况下，相应的通量 F_{1-c} 可表示为

$$F_{1-c} = \frac{A_{1-c}}{\Delta^2}, \tag{8}$$

其中， A_{1-c} 表示扫掠区域内流体 1 的面积。将式（7）与式（8）相加可得

$$F_c + F_{1-c} = \frac{u_f dt \Delta}{\Delta^2}, \tag{9}$$

这表明两种流体的对流通量总和等于扫掠区域的面积。将这一关系推广至单元的其余三个面并求和，可得

$$\sum_f (F_c + F_{1-c}) = \sum_f \frac{u_f dt \Delta}{\Delta^2} = 0, \tag{10}$$

这表明当前单元中的流体体积守恒。这里用到了面速度 $\sum_f u_f = 0$ 的无散度条件。

若将上述分析应用于图1(b)所示的切割单元，则可得

$$\sum_f (F_c + F_{1-c}) = \sum_f \frac{u_f dt \Delta}{\Delta^2} - \sum_f \frac{A_{\text{solid}}}{\Delta^2} \neq 0, \tag{11}$$

其中， A_{solid} 表示与每个单元面对应的扫掠区域内固相的面积。该结果表明，局部体积

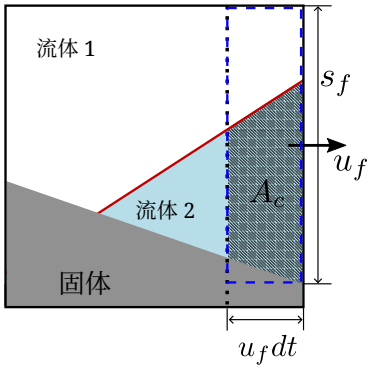


图 3：切割单元中修正后的平流通量估算示意图。这里，u_f表示单元面处的流体速度，s_f 表示流体面分数，dt 表示时间步长。阴影区域 A_c 表示参考流体在距离$u_f dt$内的平流体积，该体积根据式（5）进行几何计算。

守恒在切割单元中遭到破坏。值得注意的是，Chen 等人的平流格式 [19] 本质上等同于公式（7），因此也存在相同的体积守恒问题。

根据上述分析，需要修正通量公式（7），以确保切割单元中的体积守恒。Huang 等人 [20]通过引入一种体积补偿格式解决了这一问题，该格式调整扫掠区域的宽度，以抵消固体所占据的流体体积。相比之下，我们提出了一种更简单的补救方法，只需对公式（7）稍作修改，即

$$F_c = \frac{A_c}{\Delta^2} \cdot \frac{s_f u_f dt \Delta}{A_c + A_{1-c}}, \tag{12}$$

其中 s_f 表示流体相所占的面分数。与式（7）相比，在式（12）的右侧引入了一个修正因子。如图 3所示，分子 $s_f u_f dt \Delta$ 表示流体沿距离 $u_f dt$ 输运的流体体积（由蓝色虚线框表示），

而分母 （$A_c + A_{1-c}$）表示扫掠区域内的几何流体体积，可由式（5）计算得到。采用这一新公式，并使用相同的修正因子计算 F_{1-c}后，式（10）可改写为

$$\sum_f (F_c + F_{1-c}) = \sum_f \frac{s_f u_f dt\Delta}{\Delta^2} = 0, \tag{13}$$

这表明流体体积在切割单元中守恒。这里采用切割单元面速度的无散度条件，即 $\sum_f s_f u_f = 0$。

2.3. 表面张力离散

式（1）中的表面张力采用连续表面力（CSF）模型进行计算 [30],

$$\sigma\kappa\delta_s \mathbf{n} = \sigma\kappa\nabla c. \tag{14}$$

在数值实现中，为了尽量减少寄生流，梯度算子的离散方式必须与压力 p 在式（1）中的离散方式保持一致 [31]。这种方法通常称为平衡力 CSF 格式 [32]。

表面张力离散化中尚待解决的问题是如何估算曲率 κ，该曲率通过高度函数法 [16] 计算。此方法沿网格线对体积分数求和，以获得每个单元列（或行）中的平均界面位置。例如，在 y 方向，高度函数定义为:

$$h_i = \sum_j c_{i,j}\Delta \tag{15}$$

其中，求和范围根据局部界面拓扑自适应选取（详情见 [26]）。确定高度函数后，即可计算界面单元中的界面法向量 $\mathbf{n}$ 和曲率 $\kappa\ (i,\ j)$：

$$\mathbf{n} = (-h_x,\ 1) \tag{16}$$

$$\kappa = \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} \tag{17}$$

这里，h_x 和 h_{xx} 分别表示高度函数的一阶和二阶导数，使用中心有限差分进行计算，即$h_x = (h_{i+1,\ j} - h_{i-1,\ j})/2\Delta$ 和 $h_{xx} = (h_{i+1,\ j} - 2h_{i,\ j} + h_{i-1,\ j})/\Delta^2$。在 *Basilisk* 中，估算界面法向量的另一种方法是 Mixed-Youngs-Centred（MYC）方法 [33]。

2.4. 接触角施加

本节首先回顾在平坦固体边界上施加接触角的现有基于高度函数的方法。随后，我们提出一种改进方案，用于处理极端接触角（即接近 0ř 或 180ř 的角度），其精度高于传统公式。最后，我们进一步推广该方法，以便在具有复杂几何的固体表面上施加任意接触角。

2.4.1. 现有的基于高度函数的接触角模型

Afkhami和Bussmann [14] 提出了一种基于高度函数、用于在二维 VOF 模拟中施加接触角的方案。对于中等接触角（$45° < \theta < 135°$），可使用平行于固体表面定义的高度函数（下文称为水平高度函数）来施加接触角边界条件。具体而言，如图所示

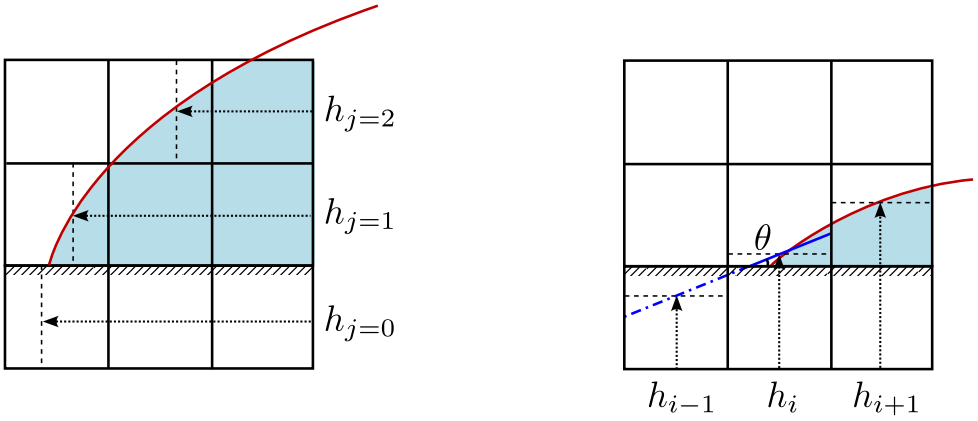


图4：Afkhami和Bussmann提出的现有基于高度函数的接触角模型示意图 [14]。（a）水平高度函数。（b）垂直高度函数。在（b）中，在接触线单元内重构与固体表面形成 θ 角度的线性界面（蓝色实线），并将其延伸至相邻列（蓝色点划线）以定义高度函数 h_{i-1}。

图 4(a)中，幽灵单元层中的高度函数 $h_{j=0}$由相邻的高度函数 $h_{j=1}$ 和指定接触角 θ 赋值得到：

$$h_{j=0} = h_{j=1} + \Delta / \tan\theta, \tag{18}$$

其中， Δ 表示网格尺寸。

对于较小或较大的接触角（$\theta < 45°$ 或 $\theta > 135°$），则采用垂直于固体表面定义的高度函数（下文称为垂直高度函数）。如图 4(b) 所示，首先在接触线单元（即包含接触线的界面单元）内重构一条与固体表面成 θ 角的线性界面线段，然后将其延伸至相邻的非界面单元列。根据该重构界面的方程，可以确定高度函数

h_i 和 h_{i-1}，它们满足以下关系

$$h_{i-1} = h_i - \Delta \cdot \tan\theta. \tag{19}$$

定义接触线单元相邻的高度函数后，即可直接使用方程（16）和（17）计算该单元中的界面法向量和曲率。

在 $Basilisk$中，仅提供基于水平高度函数公式的接触角模型。因此，该模型无法准确处理极端接触角（例如 $\theta < 30°$ 或 $\theta > 150°$）。虽然在这种情况下可以改用垂直高度函数，但其精度不如水平公式。这是因为接触线单元中的高度函数是根据重构线性界面的位置推导得出的，而重构线性界面本身存在一阶误差。通过延伸接触线单元中的重构界面得到的外推高度函数 h_{i-1}（见图4（b）），因此也会继承这一阶误差。正如第3.2节将要说明的，通过垂直高度函数施加接触角的精度低于使用水平高度函数。

对于极端接触角的应用，垂直高度函数必不可少。然而，如上所述，由于接触线单元中的高度函数定义方式，尤其是将其外推至相邻非界面单元，这种方法的精度会降低。为克服这一局限，我们开发了一种用于施加极端接触角的改进模型。该模型仍采用垂直高度函数，但精度更高。

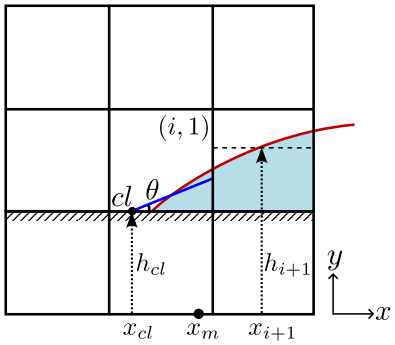


图5：施加极端接触角的改进模型示意图。高度函数 h_{cl} 表示接触线位置 cl处的界面高度；相对于单元底部边界测量时，该高度等于 Δi，0。 x_m 是 x_{cl} 与 x_{i+1}之间的中点。

2.4.2. 极端接触角的改进接触角施加方法

新模型如图 5 所示。与 Afkhami和Bussmann [14] 在第 2.4.1 节所述的方法类似，首先在接触线单元中重构一条与固体表面成 θ 角的线性界面线段。根据其方程，可以得到一个类似于图 4 所示的高度函数 h_i，如图 4(b)所示，该高度函数仅用于估算相邻界面单元 $(i+1,1)$中的界面法向量和曲率。对于接触线单元 $(i,1)$ 本身，则采用不同的处理方法。具体而言，确定重构界面与固体表面的交点 cl，并将其视为接触线位置。此时，可以定义一个精确的高度函数 h_{cl}，以表示 x_{cl} 处的界面高度。利用 h_{cl}、h_{i+1} 和指定接触角 θ，即可计算接触线单元中高度函数的一阶和二阶导数，如下所示：

$$h_{x,cl} = \tan\theta \tag{20}$$

$$h_{x,m} = \frac{h_{i+1} - h_{cl}}{x_{i+1} - x_{cl}} \tag{21}$$

$$h_{xx,cl} = \frac{2(h_{x,m} - h_{x,cl})}{x_{i+1} - x_{cl}}, \tag{22}$$

其中 $h_{x,\ m}$ 表示在 x_{i+1} 与 x_{cl}之间的中点处计算得到的高度函数一阶导数。根据上述定义，$h_{x、\ cl}$ 和 $h_{xx,\ cl}$ 即可利用式（17）计算接触线单元中的曲率。

在所提出的模型中，关键要素是接触线位置 cl，它由接触线单元中的重构线性界面确定。为确保接触线单元中估算的曲率平滑变化，在界面平流过程中，接触线位置 cl 必须沿固体表面连续移动。为满足这一要求，需要将接触线单元中的界面法向量约束为

$$\mathbf{n}_{cl} = (-\cos\theta,\ \sin\theta), \tag{23}$$

其中，θ 是指定接触角。接触线单元中的体积分数 c 连续变化且法向量 $\mathbf{n}_{cl}$ 保持不变时，得到的接触线位置 cl 会在固体表面上平滑移动，这对于确保本模型的精度至关重要。

2.4.3. 扩展至复杂几何

第 2.4.2 节介绍的改进接触角模型 最初是为平坦固体表面上的极端接触角而开发的。这里，我们展示了如何将相同的公式自然地扩展到具有复杂几何形状的固体表面，从而施加任意接触角。在几何VOF框架中，现有的复杂几何接触角模型通常依赖虚拟单元外推。例如，Tavares等人 [18]

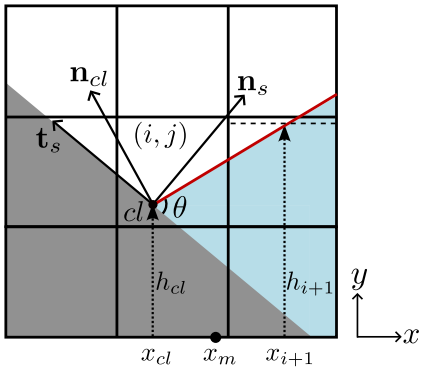


图 6：嵌入式固体表面上的接触角模型示意图。高度函数 h_{cl} 表示接触线位置 cl处的界面高度。$\mathbf{n}_{cl}$ 是接触线单元（i，j）中的界面法向量。$\mathbf{n}_s$ 和 $\mathbf{t}_s$ 分别表示接触线单元内固体边界的法向量和切向量。

和 Chen 等人 [19]将按指定角度定向的重构线性界面外推至固体内部，以赋予虚拟单元体积分数。然而，这种线性外推在极端接触角下表现不佳，尽管 Chen 等人[19]通过在外推前识别接触线单元，部分缓解了这一局限。最近，Huang 等人[20] 提出了一种抛物线拟合方案，用于近似接触线附近的高度函数分布。与线性外推相比，该方法提高了精度，但实现起来更为复杂。相比之下，本文的方法可视为第2.4.2节平壁模型的直接扩展。该方法能够在复杂几何形状上施加任意接触角，精度可与抛物线拟合方法相当，同时实现起来简单得多。

以沿 y 方向定义的高度函数为例，如图 6 所示，首先在接触线单元中重构一段线性界面，使其形成指定的

接触角 θ，并与固体边界相交于接触线单元 (i, j)。根据该重构界面的方程，在单元列的中心线上定义高度函数 h_i （见图 4(b)），并仅用于估算相邻界面单元列 $(i+1, j)$ 中的界面法向量和曲率。对于接触线单元本身，将重构界面与固体边界的交点 cl 确定为接触线位置。在该点定义高度函数 h_{cl}，随后应用相同的公式（20）、（21）和（22）来计算单元 (i, j) 中的界面曲率。

与第2.4.2节中的平面模型相比，唯一的区别在于接触线单元内的界面重构。在此，界面法向量$\mathbf{n}_{cl}$ 由指定接触角 θ 和嵌入式固体边界的局部方向共同确定，即

$$\mathbf{n}_{cl} = \mathbf{n}_s \cos\theta + \mathbf{t}_s \sin\theta, \tag{24}$$

其中，$\mathbf{n}_s$ 和$\mathbf{t}_s$ 分别表示接触线单元内固体边界的单位法向量和切向量，如图6所示。计算$\mathbf{n}_{cl}$ 的实现细节可在 $Basilisk$ 沙盒 [34]中找到。

与平坦固体表面的情况一样，接触线位置 cl 在界面对流过程中应沿嵌入式固体边界平滑移动，因为接触线单元中的曲率估计直接取决于接触线位置。为满足这一要求，接触线单元中重构界面的法向量由式（24）确定，而不是由式（16）计算。结合接触线单元中体积分数的连续变化，该处理确保接触线沿嵌入式固体表面平滑对流。

最后，在施加接触角边界条件之前，准确识别接触线单元非常重要。在本研究中，我们采用了类似于Afkhami和Bussmann [14]所提出的方法。对于小于 $90°$的接触角，与纯气相切割单元（$0 < c < c_s < 1$）相邻的三相单元（$c = 0$ 和 $0 < c_s < 1$）被识别为接触线单元。相反，对于大于 $90°$的接触角，与纯液相切割单元（$c > 0$ 和 $c = c_s$）相邻的三相单元被识别为接触线单元。该判据确保了在嵌入式固体边界上对接触线单元进行一致且稳健的识别。

3. 结果

本节通过开展多个测试案例，对第2节提出的数值格式进行验证。首先，考察圆形界面绕圆柱的纯平流，以评估针对切割单元开发的界面重构和平流算法的性能。其次，模拟液滴在平坦固体表面上的表面张力驱动铺展，以展示第2.4.2 节提出的用于处理极端接触角的改进接触角模型的准确性和有效性。第三，通过考察静置液滴在平坦和弯曲嵌入式曲面上的铺展，以及液滴在多孔介质中的渗入，对嵌入式固体边界上的接触角施加进行评估。最后，考虑两种微通道流动构型，以揭示当前针对嵌入式固体边界的接触角施加方法仍存在的局限性。

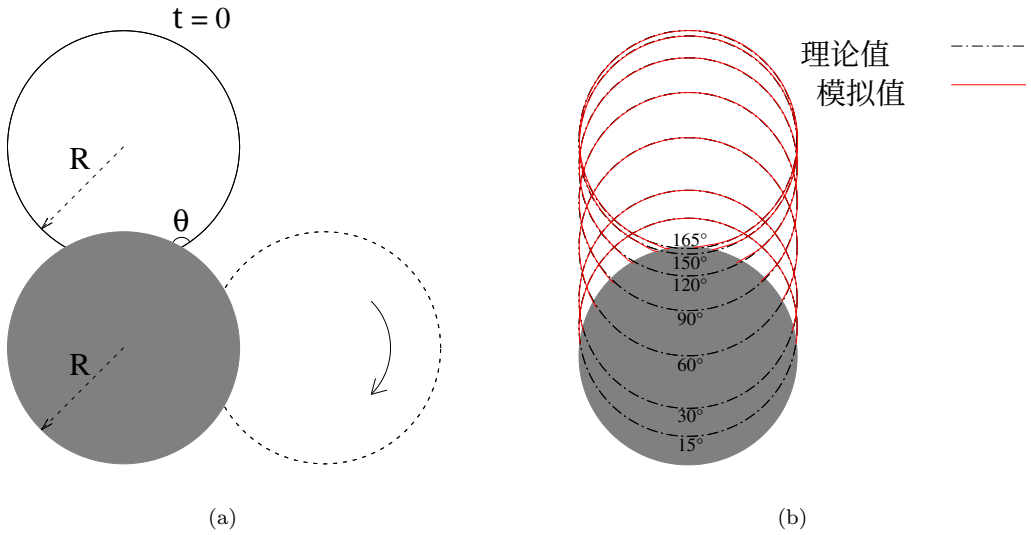


图7：界面平流测试。(a) 半径为R 的圆形界面绕同半径圆柱进行顺时针旋转。实线弧和虚线弧分别表示初始界面位置和中间界面位置。(b) 完成一次完整旋转后，对于 $\theta = 15°$, $30°$, $60°$, $90°$, $120°$, $150°$ 和 $165°$ 的界面形状。黑色点划线表示理论圆形轮廓。网格分辨率为每个半径对应18个网格单元 R。

3.1. 圆柱周围的圆形界面平流

本小节对第2.2节开发的切割单元界面重构和平流算法进行验证。如图7（a）所示，开展了一项纯平流测试：半径为 R 的圆形流体界面在给定速度场作用下，绕着半径相同的静止圆柱运动

$$\begin{cases} u_x = \quad 2\pi y, \\ u_y = -2\pi x. \end{cases} \tag{25}$$

坐标原点位于圆柱体中心。该速度场会使界面绕圆柱顺时针旋转。为满足

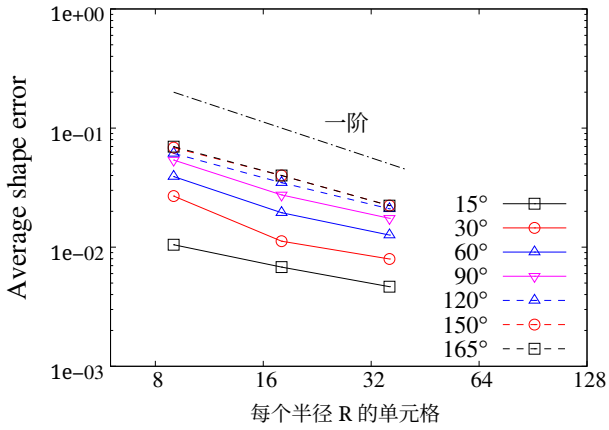


图 8：不同接触角下，平流圆形界面绕圆柱完整旋转一周后的平均界面形状误差。

指定接触角 θ，圆形界面的中心初始位置与圆柱体中心相距 $d = \sqrt{2}(1 - \cos\theta)R$。除非另有说明，网格分辨率设为每个半径对应 18 个网格单元 R。

圆形界面绕圆柱完整旋转一周后的界面形状如图 7(b) 所示。图中还绘出了初始圆形界面轮廓，作为理论参考进行比较。从 $15°$ 到 $165°$，最终界面轮廓与初始轮廓吻合良好，仅在接触角较大时，接触线附近出现明显差异。这种偏差是由于接触线单元中的界面法向量被固定为始终与固体边界形成指定角度 θ，从而在接触线附近的界面平流中引入了误差。

为进一步量化图 7(b) 所示最终界面形状与初始界面形状之间的差异，计算所得体积分数的平均误差

在所有界面单元上评估如下：

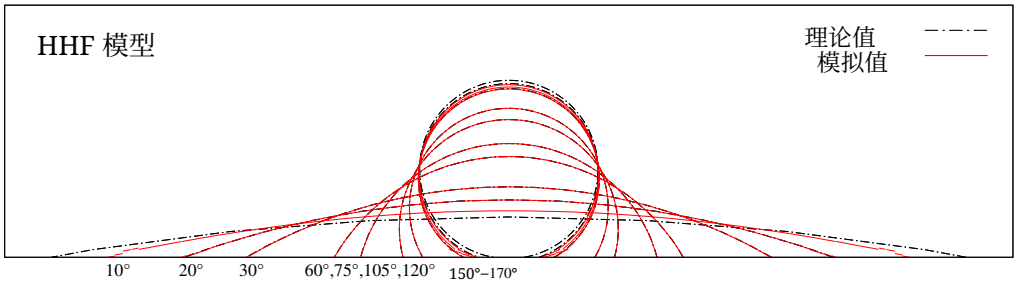
$$E_c = \sqrt{\frac{1}{N_i}\sum_{i=1}^{N_i}\left(c_i - c_{i,\text{exact}}\right)^2}, \tag{26}$$

其中 N_i 表示界面单元总数， c_i 为计算得到的体积分数，而 $c_{i,\ \text{exact}}$ 为相应的精确值。如图 8所示，对于所有接触角，形状误差均随网格细化而单调减小，呈现出近乎一阶收敛的特征。这一现象与本方法采用的线性界面重构相符，也证实了针对切割单元设计的界面重构和对流算法具有良好的准确性。

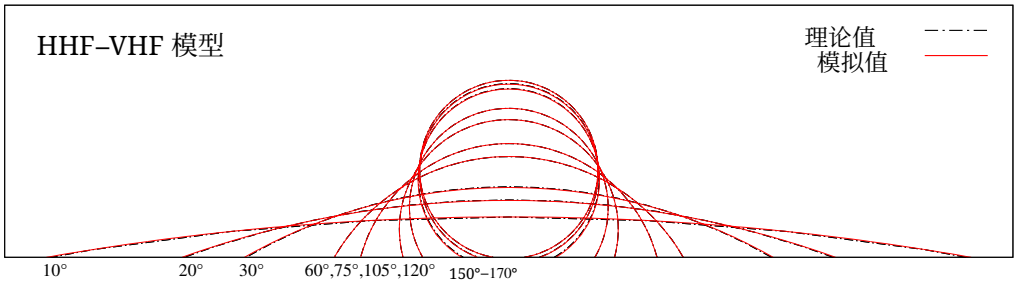
3.2. 平坦固体表面上的表面张力驱动铺展

我们考虑一个半径为 $R = 0.5\text{m}$ 的半圆形液滴，初始时置于平坦固体表面上，并在该表面施加指定接触角 $\theta \neq 90^\circ$ 。在无重力作用的情况下，液滴会铺展或回缩，直至达到与施加的接触角相符的平衡圆形形状。假设液滴与周围流体具有相同的密度和动力黏度，分别为 $\rho = 1\,\text{kg/m}^3$ 和 $\mu = 0.04\text{kg/m}\cdot\text{s}$；两种流体之间的表面张力系数为 $\sigma = 0.1\text{N/m}$。相应的无量纲奥内佐格数为 $\text{Oh} = \mu/\sqrt{\rho\sigma R} = 0.179$。此处选取较大的奥内佐格数，以抑制液滴在平衡状态附近的振荡，并加快其向平衡状态弛豫的过程。除非另有说明，网格分辨率设为每个初始液滴半径对应 16 个单元。

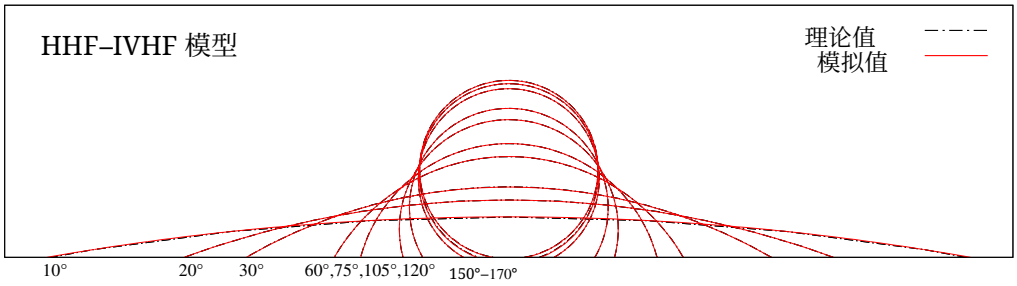
图 9(a) 显示了使用水平高度函数（HF）模型获得的平衡液滴形状 [14], 该模型在第 2.4.1 节中进行了介绍，下文简称 HF 模型



(a)



(b)



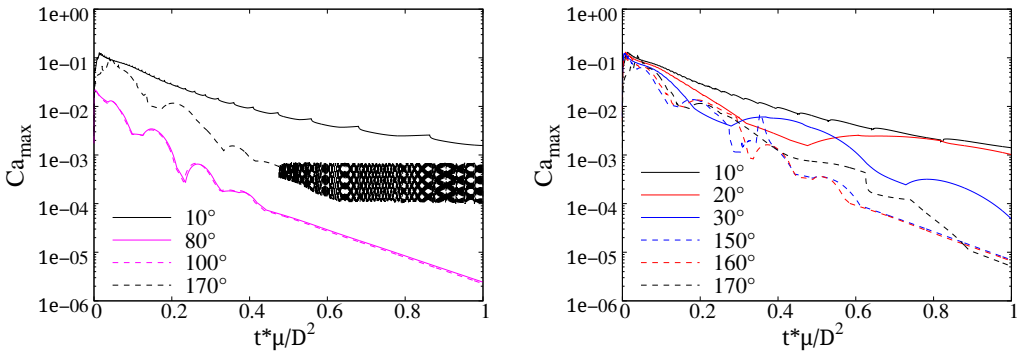
(c)

图 9：接触角为 10°、 20°、 30°、 60°、 75°、 105°、 120°、150°、 160° 和 170°时静置液滴的铺展情况。接触角分别采用以下模型施加：(a) 现有的水平 HF（HHF）模型 [14], (b) 现有的水平和垂直 HF（HHF–VHF）模型[14], 以及 (c) 现有的水平 [14] 和第 2.4.2 节提出的改进的垂直 HF（HHF–IVHF）模型。网格分辨率为每个初始液滴半径 16 个单元。

称为 HHF 模型。当计算域中任一单元的体积分数在连续两个时间步之间的最大变化低于 10^{-6}，或模拟时间超过 $4t_\mu$ 时，即认为液滴达到平衡；其中 $t_\mu = D^2/\mu$ 为黏性时间尺度，且 $D = 2R_。$对于介于 $30°$ 和 $150°$之间的接触角，模拟得到的液滴轮廓与理论解（理想圆帽）吻合良好。此范围也与 $Basilisk$中建议的水平 HF 模型适用范围一致。然而，在接触角极小或极大时，接触线附近的平衡界面形状会变得不连续，表明水平 HF 模型在这些极端接触角下表现不佳。

图 9（b）展示了使用 Afkhami 等人提出的水平和垂直 HF 模型组合（见第 2.4.1节）得到的平衡液滴形状。 [14], 下文称为 HHF-VHF 模型。与图 9（a）相比，只有在极端接触角下才会出现明显差异，此时接触角由垂直 HF 模型施加。正如预期的那样，无论接触角极小（低至 $10°$）还是极大（高至 $170°$），模拟得到的平衡液滴轮廓均与理论解吻合良好，表明垂直 HF 模型能够有效处理极端接触角。

为进一步比较水平和垂直 HF 模型在施加接触角方面的性能，我们绘制了计算域内最大速度的时间演化，其定义为 毛细数$_{\max} = \mu|u_{\max}|/\sigma$，如图 10(a) 所示。选取了四个具有代表性的接触角： $80°$和 $100°$ 对应水平 HF 模型，而 $10°$ 和 $170°$ 对应垂直 HF



(a) (b)

图10：平坦固体表面上静置液滴铺展过程中，计算域内最大速度的时间演化，定义为 毛细数$_{\max} = \mu|u_{\max}|/\sigma$。接触角通过以下模型施加：(a) 现有的水平和垂直 HF 模型 [14]，以及 (b) 第 2.4.2 节提出的改进垂直 HF 模型。

模型，在这些条件下，预计两种模型都能准确发挥作用。然而，这两种模型的结果差异显著。对于水平 HF 模型，最大速度持续衰减，并在 10^{-6} 时达到 t_μ。相比之下，对于垂直 HF 模型，在 10°时速度衰减非常缓慢，这可能是由于该情况下铺展范围较大；并且在 170°时的最终平衡态中出现振荡。这种现象源于接触线处的曲率误差，其原因是接触线单元中的高度函数定义不准确，并将其外推至相邻非界面单元列，如第 2.4.1 节所述。

图 11（a）展示了平均平衡液滴半径的相对误差 R_e，该误差在整个界面上进行评估，定义为

$$E_R = \frac{1}{N_r}\sum_{k=1}^{N_r}\left(\frac{1}{R_{\text{exact}}}\left|\frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i}R_j^{(k)} - R_{\text{exact}}\right|\right), \tag{27}$$

其中， N_i 表示界面单元的总数， $R_j^{(k)}$ 表示针对第 k 种液滴尺寸，在第 j 个界面单元处计算得到的局部半径， R_{exact} 表示理论平衡半径，其表达式为

$$R_{\text{exact}} = \sqrt{\frac{0.5\pi R^2}{\theta - \sin\theta\cos\theta}}. \tag{28}$$

在 N_r 式（27）中的平均值，是根据 $N_r = 100$ 个不同尺寸的液滴计算得到的，其初始半径在 $[R-\Delta, R+\Delta]$内均匀分布，其中 Δ 为网格尺寸。这种采样确保涵盖了广泛的可能界面-网格交叉构型。对于水平 HF 模型， R_e 中的误差随着网格细化以二阶速率减小，这与高度函数法进行曲率估计时已知的精度一致 [16]。相比之下，对于垂直 HF 模型，在 $\theta = 10^\circ$ 处收敛速率降至一阶，并且在$\theta = 170^\circ$处进一步恶化，此时误差起初减小，但随着进一步细化最终趋于饱和。这种较差的收敛性是由于在接触线附近，垂直 HF 进行的曲率估计不会随着网格细化而改善。在 $\theta = 10^\circ$处，液滴较大的铺展范围部分减弱了这种局部误差的影响；而在 $\theta = 170^\circ$ 处，该误差成为主导因素，并且还会在接触线附近引发显著的伪流，如图10（a）所示。结合图10（a）和图11（a）中的结果，我们得出结论：垂直 HF 模型在施加接触角方面的精度低于水平 HF 模型。

最后，我们评估第 2.4.2 节提出的改进垂直 HF 模型在接触角施加方面的性能，以下简称 IVHF 模型。图 9(c) 显示了不同接触角下的平衡液滴形状。对于非常小和非常大的接触角，

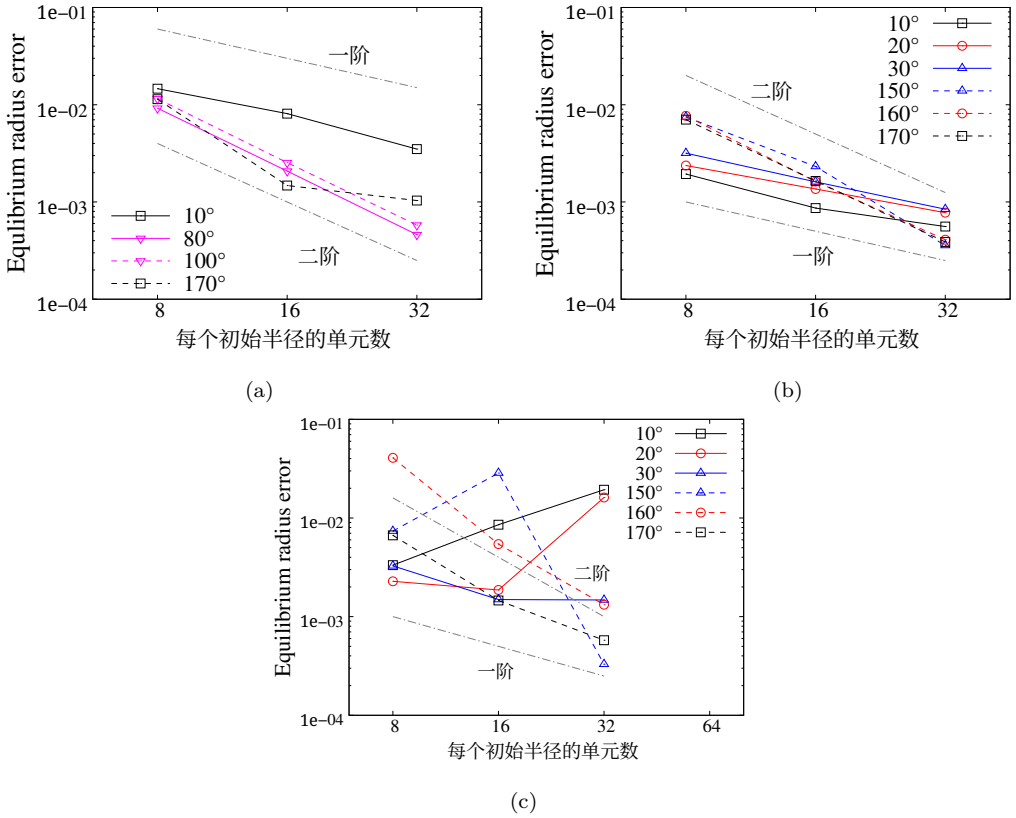


图 11：平坦固体表面上的静置液滴铺展过程中，平衡液滴半径的相对误差随网格分辨率的变化。使用（a）现有的水平和垂直 HF 模型[14]，以及（b、c）第 2.4.2 节提出的改进的垂直 HF 模型施加接触角。在（a）和（b）图中，平衡半径误差基于所有界面单元进行评估；而在（c）图中，仅使用与固体壁面相邻的第一层单元进行评估。

采用 IVHF 模型施加接触角后，得到的平衡轮廓与理论圆弧帽形状高度吻合。为进一步量化这一表现，我们比较了三种模型的平衡液滴半径相对误差：水平 HF（HHF）模型、垂直 HF（VHF）模型和 IVHF 模型。HHF 和 VHF 模型见第 2.4.1节。结果汇总于表2（a），其中仅报告小于 30° 和大于 150° 的接触角。

在这一接触角范围内，通常预期垂直 HF 模型的精度会高于水平 HF 模型。然而，表2（a）的结果显示，除 10° 和 170°外，在所有考察的角度下，VHF 模型的误差都大于 HHF 模型。只有在 10°时，VHF 模型产生的误差才明显小于 HHF 模型。与图 9（a）和 9（b）所示的液滴平衡形状相比，这一结果似乎有违直觉。一个可能的解释在于误差定义：平衡半径误差是对整个界面取平均，因此往往会掩盖接触线附近的局部曲率误差。相比之下，除 160°外，在所有测试的接触角下，IVHF 模型的表现始终优于 VHF 模型。即便与 HHF 模型相比，IVHF 模型在小接触角下的误差也显著较小，而在大接触角下的误差则相当，显示出其相较于 VHF 的优越精度。

为进一步阐明图 9与表 2(a) 中结果之间看似不一致之处，我们还评估了三种模型在平衡状态下的形状误差。形状误差定义为计算得到的体积分数字段与相应

表 2：接触角小于 30° 和大于150°时平衡液滴形状的误差。结果展示了三种接触角施加模型：已有的水平 HF（HHF）模型 [14], 、已有的垂直 HF（VHF）模型 [14], 以及第2.4.2节提出的改进垂直 HF（IVHF）模型。(a) 平衡液滴半径的相对误差。(b) 平衡液滴的形状误差。粗体数字表示各列中的最小误差。

（a）平衡液滴半径的相对误差

	10°	20°	30°	150°	160°	170°
HHF	6。31e−2	1.22e−3	3.16e−3	**3.37e−3**	**2.39e−3**	6.10e−3
VHF	5。56e−3	1。87e−2	2。06e−2	9。12e−3	7.54e−3	5.60e−3
IVHF	**7.96e−4**	**7。39e−4**	**2.26e−4**	4.00e−3	9。45e−3	**4.71e−3**

(b) 平衡液滴的形状误差

	10°	20°	30°	150°	160°	170°
HHF	6.62e−2	1。43e−3	7。22e−4	3.28e−3	8.12e−3	4.68e−2
VHF	**5.91e−4**	4。05e−3	5。17e−3	5。99e−3	**2.99e−3**	**5。99e−4**
IVHF	6.17e−4	**5。41e−4**	**5.74e−4**	**6.82e−4**	3.65e−3	1.55e−3

理想圆形球冠，如式（26）所示，但在计算域内的所有单元上进行评估。结果汇总于表 2(b)。对于小接触角，VHF 模型在 10° 处的误差显著小于 HHF 模型，但在 20° 和 30°处的误差较大。相比之下，IVHF 模型在全部三个角度下的误差始终较小，优于 HHF 和 VHF。对于大接触角情况，VHF 模型在 160° 和 170°处的表现优于 HHF 模型，但在该处误差更大

150°。在全部三种大接触角情况下，IVHF 模型仍比 HHF 模型更准确。然而，与 VHF 相比，它在170° 处产生的误差明显较大。

改进的垂直 HF 模型的最大速度时间演化以及平衡半径误差的收敛特性得到了考察。在图 10(b) 中，对于所有极端接触角，计算域内的最大速度均随时间持续衰减。传统垂直HF模型中观察到的伪流——表现为大接触角下的速度振荡 [参见图10(a)]——得到了有效消除，表明本模型具有更高的精度。图 11(b) 展示了平衡半径误差的网格收敛情况，该误差根据式（27）计算得出。随着网格细化，大接触角下的误差以二阶精度下降，小接触角下则以一阶精度下降，优于图 11(a) 中现有垂直 HF 模型所得的结果。

为进一步阐明图11（b）中小接触角和大接触角所呈现的不对称收敛率，现仅使用位于固体壁面相邻第一层单元中的界面单元，重新评估平衡半径的相对误差。结果如图11（c）所示。需要注意的是，用于估计接触线单元中曲率的公式（20）–（22）并不能保证曲率误差随网格细化而减小。如图5所示，尽管 h_{cl} 处的高度函数根据定义是精确的，但其水平位置 x_{cl} 是根据接触线单元内重构的线性界面确定的，这会引入一阶误差。因此，

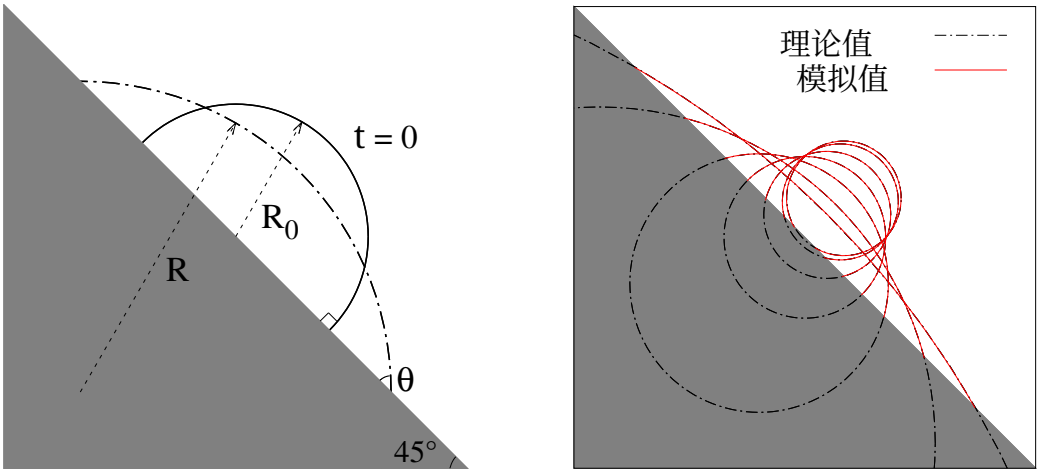
曲率估计——与高度函数的二阶导数直接相关——可能表现出不收敛行为，这一点已由图11（c）中小接触角的结果得到证实。然而，对于大接触角，第一层单元内的平衡半径误差却表现出出乎意料的良好收敛性，这解释了图11（b）中观察到的优异网格收敛行为。

3.3. 嵌入式固体表面上的表面张力驱动铺展

在本小节中，我们通过表面张力驱动液滴铺展，考察嵌入式固体边界上的接触角施加 [，参见第2.43] 节。不同于第3.2节中的测试案例（其中固体边界与计算域边界重合），此处采用嵌入边界法，在计算域内部表示固体表面。我们考虑两种嵌入式固体表面：倾斜平面和圆形表面。文献中也对这两种构型进行了广泛研究[22, 23, 18, 20, 19], ，研究主要聚焦于平衡液滴形状。相比之下，除了评估平衡液滴形状外，我们还考察计算域内速度场的时间演化。

3.3.1. 倾斜平面固体表面

如图 12(a) 所示，我们考虑一个半径为$R_0 = 0.28\text{m}$ 的半圆形液滴，初始时置于倾斜平面固体表面上。该表面嵌入计算域内，与网格线的夹角为 $45°$。施加指定接触角 $\theta \neq 90°$ ，使液滴铺展或回缩，直至达到平衡状态。



(a) (b)

图12：倾斜平坦固壁上的静置液滴铺展。（a）示意图。R_0 和 R 分别表示初始液滴半径和平衡液滴半径。（b） $\theta = 15°$、 $30°$、 $60°$、 $90°$、 $120°$、 $150°$和 $165°$处的平衡液滴形状。黑色点划线表示理论圆弧帽形状。

忽略重力，因此理论平衡形状为半径为 R 的圆弧帽，与施加的接触角一致。假设液滴与周围流体具有相同的密度和动力黏度，分别为 $\rho = 1\,\mathrm{kg/m^3}$ 和 $\mu = 0.04\mathrm{kg/(m{\cdot}s)}$，而表面张力系数为 $\sigma = 0.1\mathrm{N/m}$。相应的无量纲奥内佐格数为 $\mathrm{Oh} = \mu/\sqrt{\rho\sigma R_0} = 0.239$。网格分辨率设定为每个初始液滴半径 R_0 对应 18 个单元。

不同接触角下的平衡液滴形状如图 12(b) 所示。在 $15°$ 和 $165°$之间，模拟得到的界面轮廓与理论圆弧帽形状高度吻合。对整个界面取平均得到的平衡半径 R，绘制为以下变量的函数：

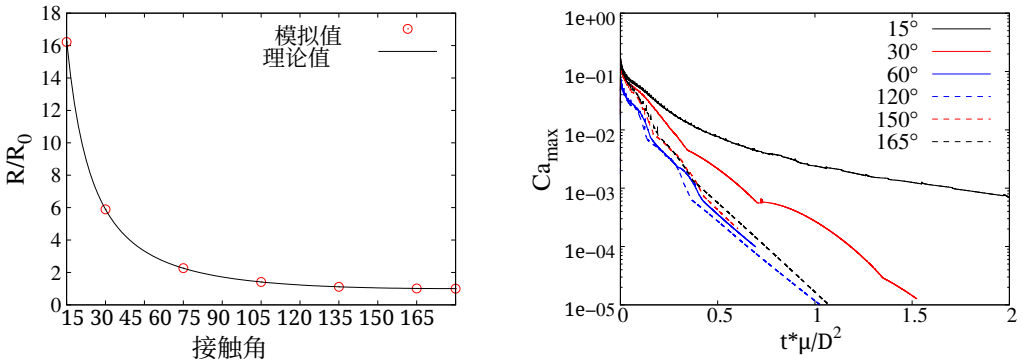


图 13：倾斜平坦固壁上的静置液滴铺展。(a) 平衡液滴半径随接触角的变化。(b) 计算域内最大速度（定义为毛细数 Ca）的时间演化$_{\max} = \mu|u_{\max}|/\sigma$。

接触角的关系如图 13(a) 所示，其与方程（28）给出的解析解一致。此外，图 13(b) 展示了计算域内最大速度的时间演化，该速度随时间持续衰减。在较小接触角下，衰减速度较慢，尤其是在 15°时。如图 12(b) 所示，接触角越小，铺展半径越大，这意味着液滴达到平衡状态需要更长时间。与第 3.2节相同，当任一单元中连续两个时间步之间体积分数的最大变化低于 10^{-6}时，即判定系统达到平衡状态。

3.3.2. 圆形固体表面

接下来，我们考虑一个类似的液滴铺展问题，但这次是在静止圆柱上。如图 14（a）所示，该圆柱的半径为 R_0 =0.140m。一个体积为 πR_0^2 的液滴最初以半径为 R_i = 0.153m 的圆弧帽形状置于圆柱上，并与圆柱相交于

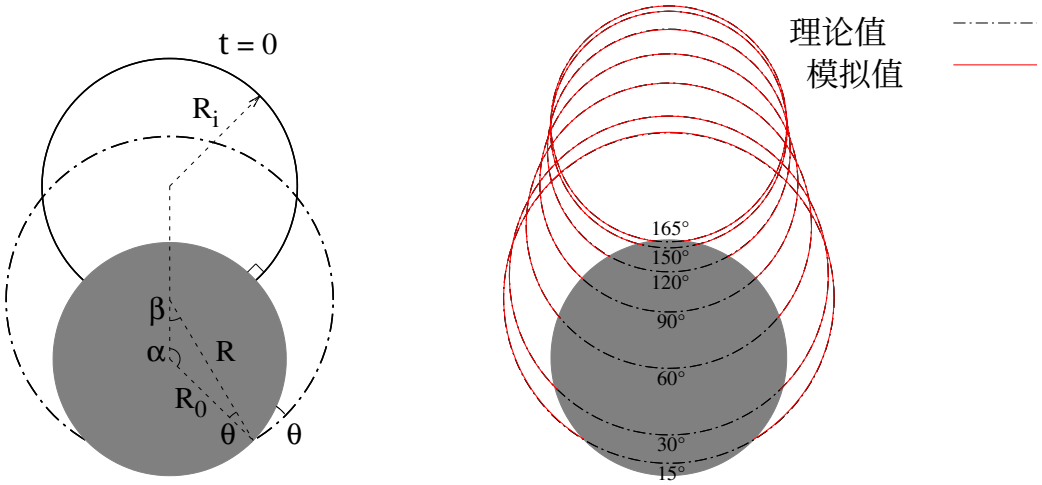


图14：圆柱体上的静置液滴铺展。(a) 示意图。 R_i 和R 分别表示初始液滴半径和平衡液滴半径， R_0 表示圆柱体半径。(b) 接触角分别为 $\theta = 15°$、 $30°$、 $60°$、 $90°$、 $120°$、$150°$和 $165°$时的平衡液滴形状。黑色点划线表示理论圆弧帽轮廓。

$90°$。初始液滴中心与圆柱体中心之间的距离为$d = 0.208\mathrm{m}$。随后施加指定的接触角 $\theta \neq 90°$，使液滴铺展或回缩，直至达到新的平衡状态。忽略重力，因此理论平衡形状对应于半径为 R 的圆弧帽，并与施加的接触角一致。基于几何分析，可通过求解以下方程组确定平衡半径 R：

$$\alpha + \beta + \theta = 180°, \tag{29}$$

$$R \sin\beta = R_0 \sin\alpha, \tag{30}$$

$$R^2(\pi - \beta + \sin\beta\cos\beta) + R_0^2(\sin\alpha\cos\alpha - \alpha - \pi) = 0, \tag{31}$$

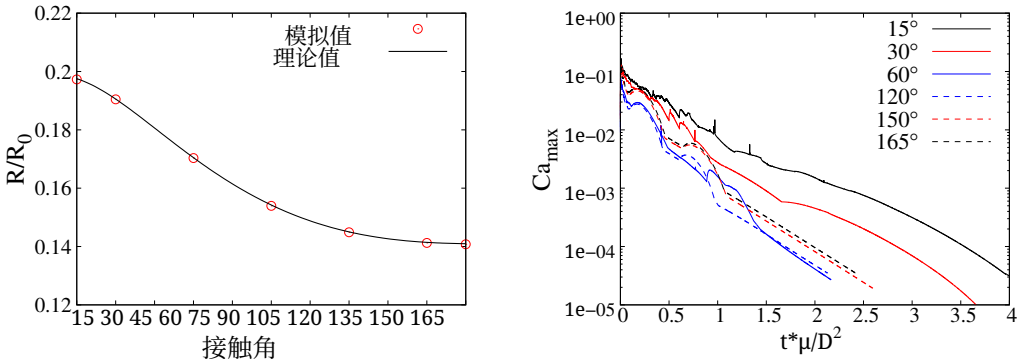


图15：静置液滴在圆柱体上的铺展。(a) 平衡液滴半径随接触角的变化。(b) 计算域内最大速度（定义为毛细数 Ca）的时间演化。

其中 α 和 β 的定义如图 14(a) 所示。两种流体的物理参数与上一小节 3.3.1中的相同，网格分辨率设为每个圆柱体半径包含 18 个单元 R_0。

接触角从 15° 到 165°时的平衡液滴形状如图 14(b) 所示。模拟轮廓与理论圆弧帽轮廓非常吻合。从模拟中提取的相应平衡半径绘于图 15(a) 中，作为接触角的函数；这些结果与解析解吻合良好。此外，图 15(b) 显示，随着液滴逐渐松弛至平衡状态，计算域中的最大速度持续衰减。

对于本小节考察的两个测试案例，与此前大多数结果相比，此处获得的平衡液滴形状更为准确 [22, 23, 18, 19]，尤其是在极端接触角下。只有 Huang 等人报告了相当的精度 [20]，但他们的接触角处理方案依赖于更复杂的抛物线拟合方案。

此外，据我们所知，尚无先前研究分析过计算域内的速度演变。在接触线附近，由于与接触角处理密切相关的曲率误差，容易产生寄生流。对于采用 IBM 或 EBM 方法在笛卡尔网格中表示的复杂固体几何形状，这一问题会更加明显。当前结果表明，所提出的接触角模型能够有效抑制此类寄生流。

3.4. 液滴渗入多孔介质

在本小节中，我们研究二维液滴渗入多孔介质的过程。该基准算例已在此前的多项研究中得到考察 [35, 23, 20]。如图 16 所示，直径为$1.5D$的液滴初始位于$(2.1D, 4.05D)$，并以初始速度 U_0 落入尺寸为 $4.2D \times 5D$的矩形区域。区域内嵌有五个圆柱体：一个直径为 $0.5D$、中心位于$(2.1D, 3.05D)$且接触角为 $150°$的小圆柱，以及四个直径为 D 、分别位于$(0.7D, 2.1D)$、$(3.5D, 2.1D)$、$(1.5D, 0.9D)$和$(2.7D, 0.9D)$的大圆柱。图 16 中标示的大圆柱具有两种不同的接触角，分别为 $30°$ 和$150°$；周围箱体壁面的接触角为 $90°$。重力向下，加速度为 g。物理参数设定如下： $D = 1$毫米、$\rho_l = 1000$ 千克/米^3、 $\rho_g = 1$千克/米^3,$\mu_l = 1 \times 10^{-3}$ 千克/(米 ·秒)、$\mu_g = 2.5 \times 10^{-5}$ 千克/(米 ·秒)以及 $\sigma = 2.5 \times 10^{-3}$ 牛顿/米。下标 l 和 g 分别表示液相和气相。相应的无量纲数为 $\mathrm{Re} = \rho_l U_0 D/\mu_l = 50$、$\mathrm{We} = \rho_l U_0^2 D/\sigma = 1$ 和 $\mathrm{Fr} = U_0/\sqrt{gD} = 0.5$。网格分辨率为每个直径 D个单元。

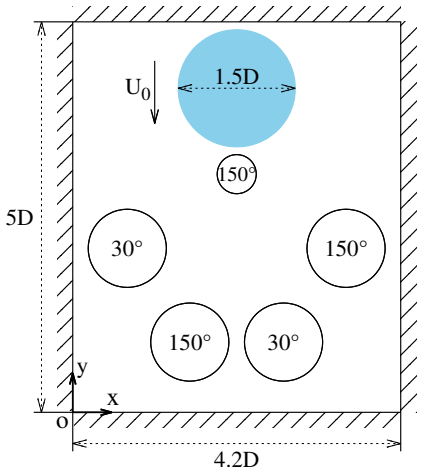


图16：液滴渗入多孔介质的示意图。底部四个圆柱体的直径为 D，顶部圆柱的半径为 $0.5D$。每个圆柱表面的润湿性标注在其内部，周围壁面的接触角为 $90°$。

界面轮廓的时间演化如图 17 所示。撞击中央小圆柱后，液滴并未润湿其表面，而是分裂为两部分，正如之前在 $t = 0.02$s 时所见。左侧部分润湿了上方的亲水圆柱，接触角为 $30°$；右侧部分则未附着于上方的疏水圆柱，其接触角为 $150°$。小圆柱上方形成的薄液膜最终破裂并产生次级液滴，这一现象在 $t = 0.027$ s 时可以观察到。与此同时，液体到达两个下方圆柱：亲水圆柱被润湿，而疏水圆柱仍未被润湿。最终，液体被困在亲水圆柱与周围壁面之间，形成稳定平衡构型。

模拟结果也与 Huang 等人的结果进行了比较 [20]，如图17所示。两种解在最终时刻表现出高度一致

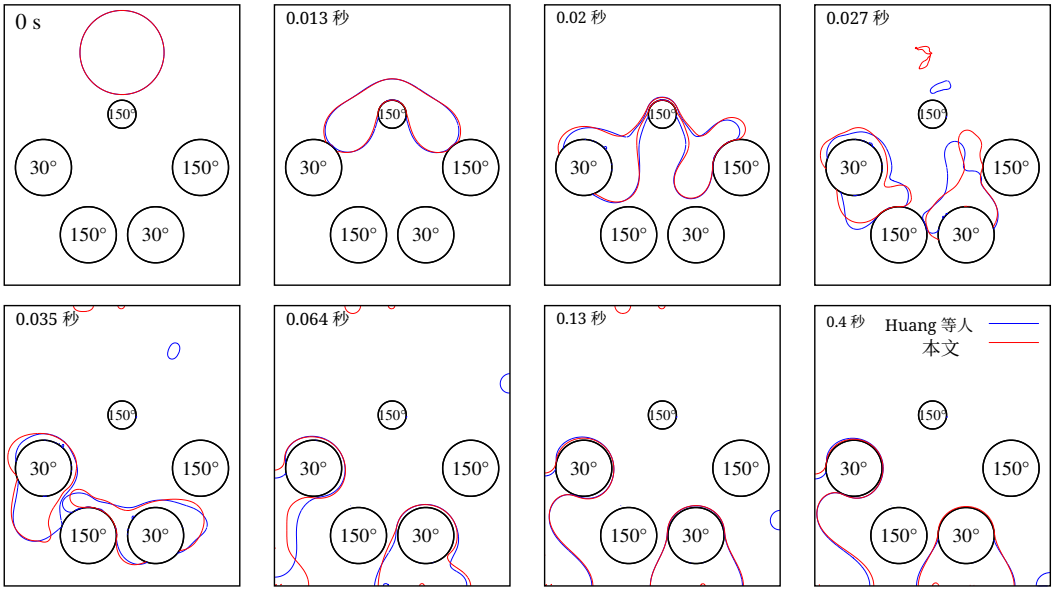


图 17：选定时刻的界面轮廓。还包括 Huang 等人的结果[20] 以作比较。

平衡状态（经过 $t = 0.13$ 秒后），而在中间时刻则出现了轻微差异。这可能源于识别接触线单元的方法不同，详见第2.4.3节。

3.5. 微通道中的两相流

在最后一个小节中，我们考察微通道中的两相界面流，此类流动中表面张力效应通常十分显著。我们考虑两种通道几何形状：直通道和正弦通道。本节旨在评估所提出的嵌入式固体边界接触角约束方法的性能，并找出当前方法仍存在的局限性。

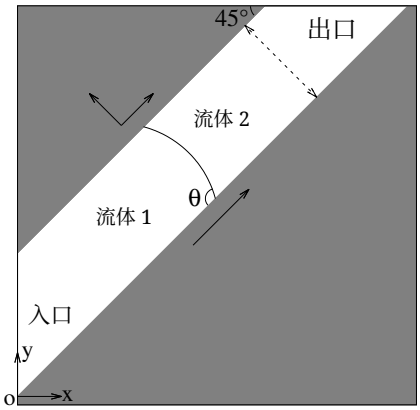


图 18：直微通道中两相泊肃叶流示意图。

3.5.1. 直微通道中的泊肃叶流

如图 18所示，我们考虑直微通道中的泊肃叶流。该通道嵌入计算域内，相对于网格线的方向为 45° 。计算域为边长 $L_0 = 0.4\text{mm}$ 的正方形，通道入口位于左边界，出口位于上边界。通道宽度为$w = 0.102\text{mm}$。通道内初始化为两相流，其中流体 1 驱替流体 2。假设两种流体具有相同的密度和黏度，分别为 $\rho = 1066\text{kg/m}^3$ 和 $\mu = 0.79 \times 10^{-3}\,\text{kg/(m}\cdot\text{s)}$，而表面张力系数为 $\sigma = 0.0657\text{N/m}$。相应的无量纲拉普拉斯数为 拉普拉斯数 $= \rho\sigma w/\mu^2 = 1.14 \times 10^4$，其数值相对较大，以放大表面张力的影响。接触线上施加的恒定接触角为 $\theta = 120^\circ$ 。入口和出口处均规定抛物线型速度分布，如下所示：

$$u_x = u_y = \frac{\rho G}{4\mu} y(\sqrt{2}w - y), \tag{32}$$

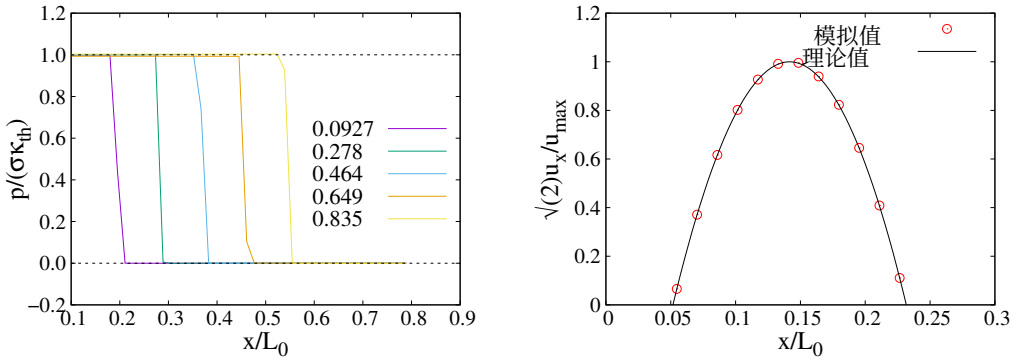
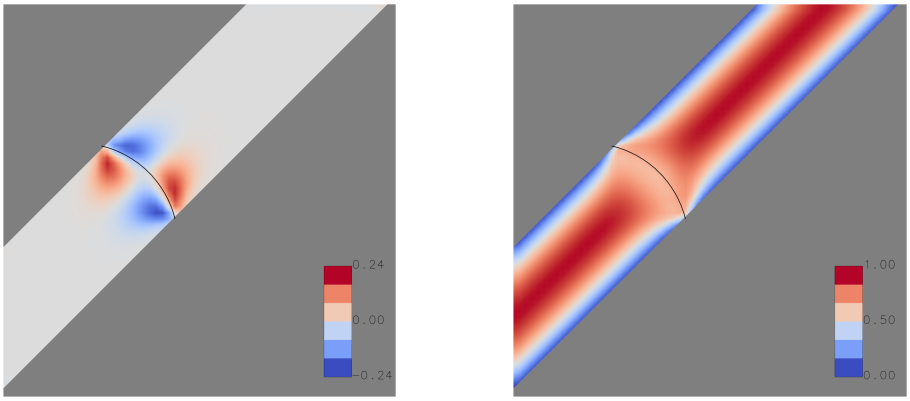


图19：在拉普拉斯数 $= 1.14 \times 10^4$ 和毛细数 $= 1.12 \times 10^{-4}$条件下，直微通道中的两相泊肃叶流。(a) 沿通道中心线在五个时刻的归一化压力分布： $t^* = tu_{\max}/L_0 = 0.0927$、0.278、0.464、0.649 和 0.835。(b) 在远离流体流体界面、位于 $t^* = 0.742$ 处的横截面上的归一化速度分布 $u_x/(u_{\max}/\sqrt{2})$。

其中， $G = 3.75\mathrm{m/s}^2$ 表示施加于两种流体、沿 x 和 y 方向的体力加速度。所有嵌入式固壁上均施加无滑移速度条件。在此情况下，毛细数定义为毛细数 $= \mu u_{\max}/\sigma = 1.12 \times 10^{-4}$，其中 $u_{\max} = \sqrt{2}\rho G w^2/(8\mu)$ 表示通道入口处的最大速度大小。雷诺数定义为雷诺数 $=$ 毛细数 $\cdot$拉普拉斯数 $= \rho u_{\max} w/\mu = 1.27$。网格分辨率设为每个通道宽度 16 个单元。

模拟结果如图 19 所示。图 19(a) 绘出了不同时刻沿通道中心线（$y = x + w/\sqrt{2}$）的压力分布。在流体-流体界面处可以观察到明显的压降，且该界面以恒定速度传播。此压力不连续性由表面张力引起，表达式为 $\sigma\kappa_{th}$，其中理论界面曲率为 $\kappa_{th} = 1/w$。如图 19(a) 所示，模拟得到的压降



(a) (b)

图20：在拉普拉斯数 $= 1.14 \times 10^4$ 和毛细数 $= 1.12 \times 10^{-4}$下归一化速度分量的等值线：(a) $u_\perp/u_{\max}$ 和 (b) $u_\parallel/u_{\max}$。其中，$u_\perp$ 和 $u_\parallel$ 分别表示垂直于和平行于壁面的速度分量。补充材料中提供了展示 $u_\parallel/u_{\max}$ 时间演化的动画 [36]。

与理论预测吻合良好。

归一化速度分量 $u_\parallel/u_{\max}$ 和 $u_\perp/u_{\max}$的等值线如图20所示。其中，$u_\parallel$ 和 $u_\perp$ 分别表示平行于和垂直于固体壁面的速度分量，如图18所示。远离流体界面处，通道横截面上的速度分布与理论抛物线型分布吻合良好，如图19 (b)所示。在界面附近，可以观察到速度分布偏离抛物线型速度分布；这是维持界面在通道内匀速平移所必需的。

图 21(a) 展示了通道内不同毛细数下最大压力的时间演化。通过改变体力加速度 G 来控制毛细数 毛细数 $< 1.12 \times 10^{-4}$,

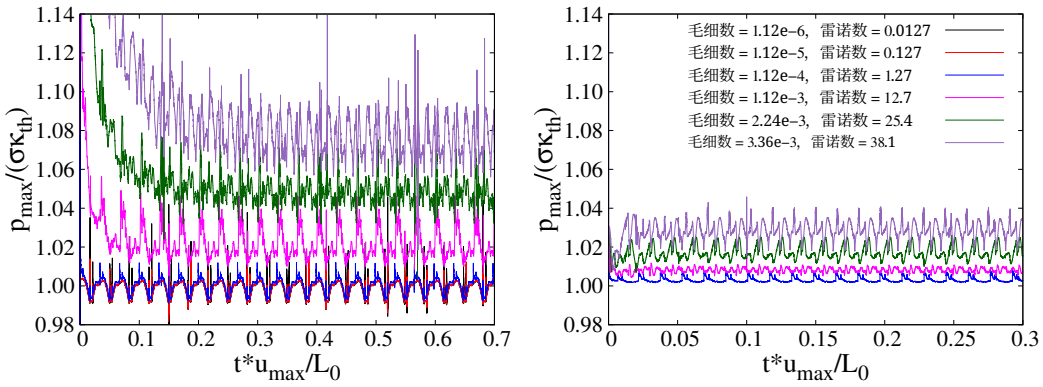


图21：La $= 1.14 \times 10^4$ 时不同毛细数下归一化最大压力的时间演化。(a) 带倾斜壁面的直微通道。(b) 参考情形：无固体壁面时，整个液滴被均匀流带动。

结果几乎重合为一条曲线，表明表面张力占主导地位，界面保持接近半径为 w的圆弧。还观察到轻微的周期性振荡，其振幅低于平均压力的 2%。这种振荡可归因于接触线单元内的曲率计算。请注意，该单元中的曲率根据方程（20）（22）计算，且显式依赖于瞬时接触线位置。因此，当接触线在切割单元内移动时，计算得到的曲率会连续变化；每当接触线跨入相邻的切割单元时，这种变化模式便会重复。

随着毛细数 Ca 增大，平均最大压力如预期般升高，这是由于表面张力的影响减弱，而较高毛细数 Ca 下的黏性效应增强。界面更容易发生流动诱导变形，因此逐渐偏离理论上的圆弧形状。此外，当 Ca $> 2.24\times10^{-3}$ 时，压力振荡变得

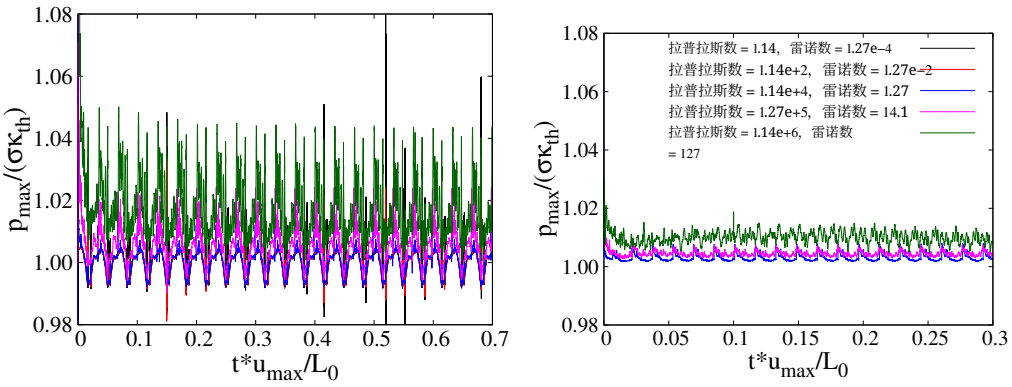


图 22：不同拉普拉斯数下归一化最大压力的时间演化，毛细数为 $= 1.12\times10^{-4}$。（a）具有倾斜壁面的直微通道。（b）参考情形：在没有固体壁面的情况下，整个液滴被均匀流带动。

更加不规则，如图 21(a) 所示，这是因为雷诺数较高，并伴随相应的惯性效应。

为评估接触角约束对所观察到的压21力振荡的影响，图21（b）展示了采用与图18（a）相同参数计算得到的一系列参考算例中最大压力的时间演化。在这些参考算例中，整个液滴被均匀流动驱动，贯穿图 [26] 所示的计算域，且不存在任何固体边界。该设置最初由 Popinet 提出，用于研究表面张力离散化与界面平流相结合所产生的寄生流。由于在如此小的毛细数 $< 1.12\times10^{-5}$ 条件下，寄生流的幅值与施加的均匀流相当，甚至超过后者，从而无法实现液滴平移，因此省略了毛细数的结果。对于所有报告的毛细数，压力振荡均显著小于图21（a）中的压力振荡，表明接触角

约束是嵌入式通道构型中所观察到的振荡的主要来源。此外，当毛细数 $> 2.24 \times 10^{-3}$时，惯性效应变得明显，这与图21（a）中所见的行为一致。

图 22(a) 比较了不同拉普拉斯数下最大压力振荡的时间演化，这些拉普拉斯数通过调节流体黏度来改变。当 $\mathrm{La} < 1.14 \times 10^4$ 时，压力振荡曲线几乎重合。尽管随着 La 减小，黏性效应愈发显著，但流体黏度增加也会同时导致通道内的流速降低。因此，未观察到流动引起的明显界面变形。相比之下，当 $\mathrm{La} > 1.27 \times 10^5$ 时，雷诺数迅速增大并放大惯性效应，压力振荡也因此变得越来越不规则。图 22(b) 展示了参考算例的相应结果，表明纯界面平流引起的压力波动远小于接触角约束所导致的压力波动。附录 A.1 表格给出了更广泛参数范围内更详尽的压力振荡统计数据。附录 A 进一步考察了这种嵌入式微通道流动中的速度波动。B

3.5.2. 正弦微通道中的压力驱动流

我们考虑如图所示的正弦形微通道中的压力驱动的两相流。23通道的总长度为 $L_0 = 0.4$毫米。通道的顶部和底部壁面关于 $y = 0$对称，并且

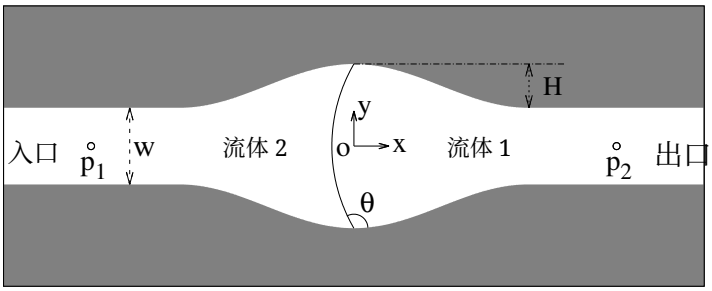


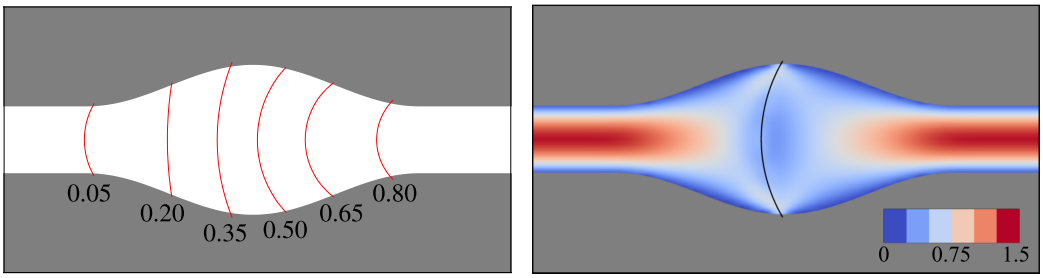
图 23：正弦微通道中压力驱动两相流示意图 .

顶部壁面的形状定义为

$$y = \begin{cases} \dfrac{w}{2}, & \text{if } x < -\dfrac{L_0}{4} \text{ or } x > \dfrac{L_0}{4}, \\ \dfrac{w}{2} + \dfrac{H}{2}\left(1 + \cos\left(\dfrac{4\pi x}{L_0}\right)\right), & \text{if } -\dfrac{L_0}{4} \le x \le \dfrac{L_0}{4}. \end{cases} \tag{33}$$

其中 $w = 0.0375$ 毫米为直线段的宽度， $H = 0.025$毫米为正弦段的振幅，如图 23所示。在直线入口段初始化两相流，其中流体 2 驱替流体 1。两种流体的物理性质与第 3.5.1 节中使用的相同，对应的拉普拉斯数为 拉普拉斯数 $= \rho\sigma w/\mu^2 = 4.21 \times 10^3$。接触线处施加恒定接触角 $\theta = 120^\circ$。入口处规定均匀速度 $U_0 = 1$厘米/秒，出口处采用自由流出边界条件。所有嵌入式固体边界均施加无滑移条件。本例中的毛细数定义为毛细数 $= \mu U_0/\sigma = 1.20 \times 10^{-4}$。网格分辨率设为每个通道宽度 12 个单元 。

模拟结果如图24所示。图24（a）展示了多个时刻的界面轮廓。当界面进入正弦段时，由于



(a) (b)

图24：La $= 4.21 \times 10^3$和 Ca $= 1.20 \times 10^{-4}$条件下正弦微通道中的两相压力驱动流。(a) 六个时刻的界面轮廓，$t^* = tU_0/L_0 = 0.05$、0.20、0.35、0.50、0.65 和 0.80。(b) u_x/U_0 处的归一化流向速度等值线$t^* = 0.4$。

规定的恒定接触角条件，界面曲率随局部壁面方向而变化。扩张区域中的界面曲率明显小于收缩区域中的界面曲率。图24（b）显示了归一化流向速度 u_x/U_0在 $t^* = tU_0/L = 0.4$时的等值线，此时界面到达通道中心。在直线入口段和出口段，通道横截面上的速度分布与理论值抛物线分布吻合良好。相比之下，在正弦段内，由于横截面积的局部变化以及界面的存在，速度场偏离了抛物线型分布。

此外，从图24(a)中的界面轮廓可以看出，正弦段扩张区域和收缩区域中的界面运动明显不对称。为进一步说明这种差异，图25 展示了位于直线入口段和出口段中心的两个参考点之间压力差的时间演化，$p_2 - p_1$，如图23所示。在扩张区域，界面曲率随时间减

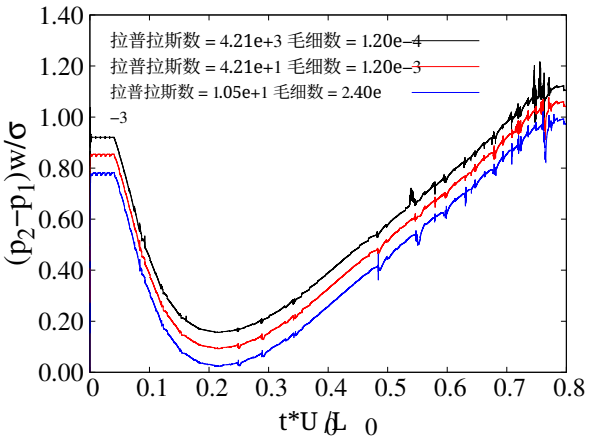


图25：不同参数组下正弦微通道中压力差的时间演化$(p_2 - p_1)$，其中标出了 p_1 和 p_2 的位置，见图23。

小，接触线运动因此平稳。在收缩区域则相反，曲率随时间增大，从而减缓界面运动并引发小幅振荡。这些振荡可能与在接触线单元内计算的曲率波动有关；界面经过收缩区域时，这些波动似乎会被放大。

图 25 还展示了两个流体黏度更高的附加结果，对应较低的拉普拉斯数和较高的毛细数。三个参数组中，压力差的整体变化以及收缩区域内观察到的振荡几乎完全相同。只有 $(p_2 - p_1)$ 的幅值随 拉普拉斯数增大而增大，这反映了表面张力影响的增强，使界面较不易受到流动诱导变形的影响。此处观察到的压力振荡与图 22中的现象一致，进一步表明这些振荡与接触线单元内的曲率波动有关。

本小节考察的两个测试案例凸显了所提出的接触角模型应用于嵌入式固体边界时仍存在的局限。据我们所知，此前尚无研究进行过类似测试；在采用固体表面锐利表示的几何型 VOF 方法中（例如嵌入边界法框架），接触角约束似乎普遍存在这一问题。对于表面张力效应占主导地位的流动，接触线附近由此产生的速度和压力波动可能不可忽略。

4. 结论

在本研究中，我们开发了一种基于高度函数的数值方法，可在二维 VOF 模拟中，对平坦和曲面固体表面施加全范围的接触角。该方法将接触线位置纳入接触线单元的曲率估计，并约束界面法向量，使其与固体表面满足指定接触角，从而确保接触线平滑运动。所提出方法的一大优势是能够轻松地从平坦固体表面扩展到由嵌入边界法表示的曲面固体表面，同时保持实现的简洁性。这种扩展之所以可行，首先是因为解决了多边形流体区域切割单元中的界面重构和几何平流难题。本研究开发的代码可在 Basilisk 沙盒中免费获取 [25]。

数值测试已证实所提出方法的准确性和稳健性。首先，圆柱周围的界面平流测试验证了针对切割单元开发的重构和平流格式。在平坦

固体表面上，表面张力驱动液滴铺展的模拟表明，在施加非常小或非常大的接触角时，该方法比传统的垂直高度函数模型具有更高的准确性。随后，通过倾斜的平坦表面和圆形表面上的静置液滴铺展，对嵌入式固体边界上的接触角约束进行了考察，结果表明，该方法能够准确施加任意接触角，且不会产生显著的寄生流。二维液滴渗入多孔介质的模拟进一步验证了当前方法处理复杂固体几何形状的能力。最后，对直线微通道和正弦微通道中的两相流进行了模拟，揭示了当前方法应用于嵌入式固体边界时仍存在的局限性。

最后，我们探讨将所提出的二维接触角施加策略扩展到三维的可能性。其核心思想——避免将界面从接触线单元外推到固体中——在三维情况下仍然很有吸引力，因为原则上可以同时利用多个相邻接触线单元中的信息来定义虚拟单元体积分数。然而，这种扩展并非易事，尤其是对于嵌入式固体边界。一个主要挑战在于，如何在流体域内选择合适的高度函数数据，以完成接触线单元中的曲率估计。此外，三维切割单元中的界面重构本质上比二维情况更加复杂。

资助

本项目获得了欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划提供的资助（TRUFLOW项目，拨款协议编号883849）。我们感谢GENCI慷慨提供Adastra超级计算机的计算资源（拨款协议编号A0152B14629）。本研究获得了国家自然科学基金委员会资助（项目编号：12302343和12372266），以及中国博士后科学基金会资助（2023M733461）。

致谢

作者谨此感谢 Arthur Moncorge、Hamdi Tchelepi、Moataz Abu AlSaud、Martin Blunt、Branko Bijlelic、Mossayeb Shams 和 Ali Raeni 提供了富有见地的讨论，这些讨论促成了第 3.5.2 节正弦微通道中接触线运动测试案例的建立。

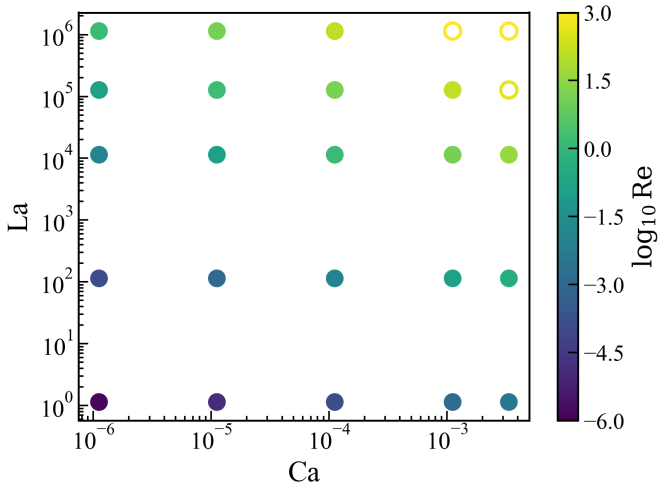


图 A.1：附录 A 和 B中的模拟参数空间，展示毛细数和拉普拉斯数的组合，以及相应的雷诺数（雷诺数 = 毛细数 · 拉普拉斯数）。空心点表示本研究排除的情况。

A. 更广参数空间中的压力振荡

为补充第 3.5.1 节所呈现的分析，本文在更广泛的参数空间内考察直微通道中最大压力的振荡（见图 18），结果如图 A.1 所示。图中右上区域的空心点对应的情况不纳入本研究，因为其雷诺数过大（超过 1000），导致惯性主导的压力振荡掩盖了由接触角约束引起的压力振荡。对于其余情况，计算最大压力波动的均方根（RMS）值如下：

$$\mathrm{RMS}(p_{\max}) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(p_{\max,i} - \overline{p}_{\max}\right)^2}, \tag{A.1}$$

表 A.1：嵌入式微通道中存在移动接触线时，泊肃叶型流入所产生的最大压力波动均方根值。

毛细数\拉普拉斯数	1.14	1.14×10^2	1.14×10^4	1.27×10^5	1.14×10^6
1.12×10^{-6}	0.0128	0.00384	0.00377	0.00404	0.00418
1.12×10^{-5}	0.00409	0.00385	0.00373	0.00358	0.00344
1.12×10^{-4}	0.00405	0.00378	0.00383	0.00549	0.00926
1.12×10^{-3}	0.00380	0.00398	0.00824	0.0121	—
3.36×10^{-3}	0.00360	0.00501	0.00947	—	—

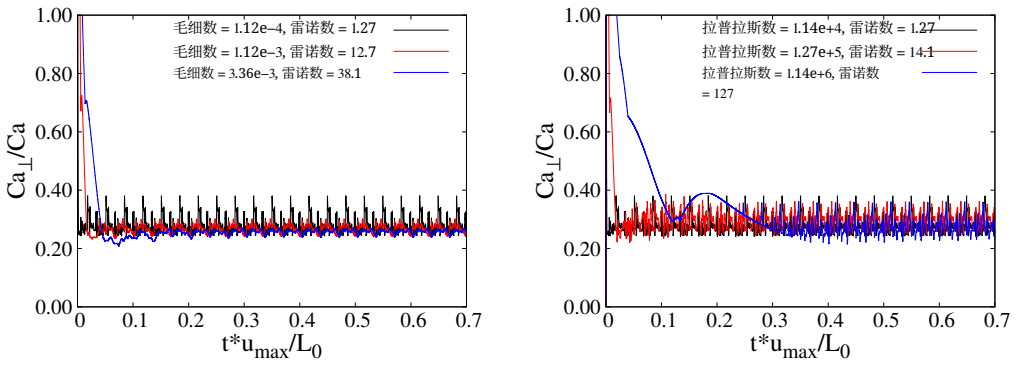
其中 $p_{\max,\ i}$ 为时间步长 i时的瞬时最大压力， $p_{\max}$表示其时间平均值。⁻结果汇总于表A.1。总体而言，对于大多数参数组合，压力波动的量级相近；但表格右下区域的参数组合除外，其对应的雷诺数相对较高。

B. 嵌入式微通道中的速度振荡

除了上文讨论的压力振荡外，第 3.5.1 节中的嵌入式微通道流动（见图 18）还伴有速度振荡，如补充动画 [36]所示。为量化这些振荡，图 B.1 绘出了比值 Ca $_\perp$/Ca 的时间演化。这里，$\mathrm{Ca}_\perp$ 和 Ca 的计算方式如下：

$$\mathrm{Ca}_\perp = \mu |u_\perp|_{\max}/\sigma, \quad \mathrm{Ca} = \mu u_{\max}/\sigma, \tag{B.1}$$

表示使用最大壁法向速度分量 $|u_\perp|_{\max}$ 定义的毛细数，该分量在界面附近达到最大值，如图所示



(a) (b)

图 B.1：嵌入式微通道中泊肃叶型流入且接触线移动时，$Ca_{\perp}/Ca$ 比值的时间演化：(a) $La = 1.14 \times 10^{4}$ 时不同毛细数的情况，以及 (b) $Ca = 1.12 \times 10^{-4}$时不同拉普拉斯数的情况。

图 20，以及最大入口速度大小 $u_{\max}$。界面附近存在非零壁法向速度，是维持其沿通道匀速平移所必需的。在图 B.1(a) 和 (b) 中，毛细数$_{\perp}$/毛细数 的平均值在所测试的 毛细数 和 拉普拉斯数组合中几乎保持不变，这表明毛细作用在决定界面形状方面起主导作用。然而，毛细数$_{\perp}$/毛细数 的波动因不同情况而异，详见下文。

图 B.2 展示了图中参数空间内 毛细数$_{\perp}$ 波动的均方根值（实心圆表示），该参数空间如图 A.1所示。当拉普拉斯数 拉普拉斯数 固定时，毛细数$_{\perp}$/毛细数 的波动幅度会随着 毛细数 减小而增大（通过减小 $u_{\max}$实现），而 毛细数$_{\perp}$ 自身的波动幅度则几乎保持不变。这表明，壁面法向速度波动在很大程度上不受平行于固体壁面的入口速度影响。这些速度波动源于接触角的施加，

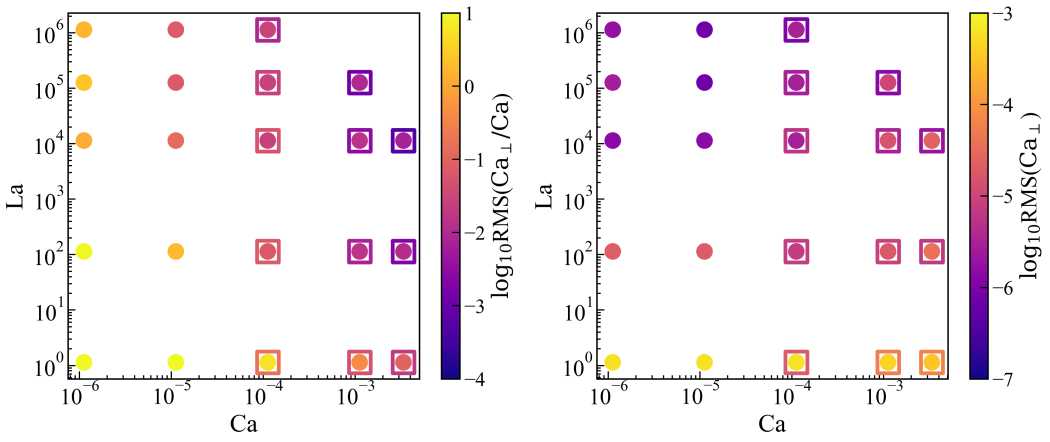


图 B.2：（a）毛细数$_\perp$/毛细数 和（b）毛细数$_\perp$波动的均方根值。实心圆表示具有移动接触线的泊肃叶型流入（见图 18），空心方块表示没有接触线的均匀流入（见图 B.3）。毛细数$_\perp$/毛细数 和 毛细数$_\perp$ 的均方根值根据公式（A.1）计算。

如第 3.5.1节所述。相比之下，当毛细数毛细数 固定时，毛细数$_\perp$/毛细数 和 毛细数$_\perp$ 的波动幅度都会随着 拉普拉斯数增大而减小。请注意，增大 拉普拉斯数 相当于减小流体黏度 μ，这反过来会使入口速度 $u_{\max}$增大。因此，毛细数$_\perp$/毛细数 之比会减小。然而，在拉普拉斯数拉普拉斯数较大时，波动幅度的减小最终趋于饱和，这可能是由于雷诺数迅速增大所致。

为进一步单独考察接触角约束对 毛细数$_\perp$波动的影响，我们考虑一个参考测试案例，如图 B.3所示。在该案例中，直径为 D 的液滴在速度为 U_0 的均匀流入作用下，穿过与图 18中相同的直微通道。通道宽度 w 以及两种流体的物理性质均与

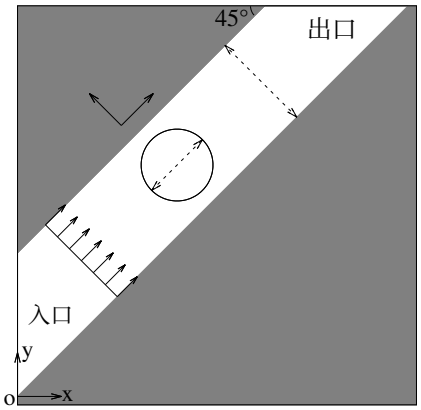


Figure B.3：均匀流入作用下液滴在直微通道中输运的示意图。

第 3.5.1节所用的相同。在两个嵌入式固体边界上施加自由滑移边界条件。在此配置中，壁法向速度分量 $u_\perp$ 理想情况下应为零；因此，任何非零的 $u_\perp$ 都代表完全由数值误差引起的寄生速度。此测试案例是经典平移液滴测试的嵌入边界对应形式；经典平移液滴测试用于评估不存在固体壁面时的寄生流 [26, 37, 38]。

图 B.4 展示了不同液滴尺寸下 毛细数$_\perp$/毛细数 的时间平均值及其波动的均方根（根据式（A.1）计算），对应于 毛细数 $= 1.12\times10^{-4}$ 和 拉普拉斯数 $= 1.14\times10^{4}$，其中 毛细数 $= \mu U_0/\sigma$。 毛细数$_\perp$/毛细数 随液滴尺寸的变化反映了壁面效应对液滴平移的影响。总体而言，随着网格细化，毛细数$_\perp$/毛细数 的平均值和波动幅度均有所降低。作为比较，图 18所示构型中，由泊肃叶型入口流驱动、嵌入式固壁上施加无滑移边界条件时的液滴平移也一并列出，如图 B.4中的虚线所示。发现两种构型下 毛细数$_\perp$ 的波动非常相似。

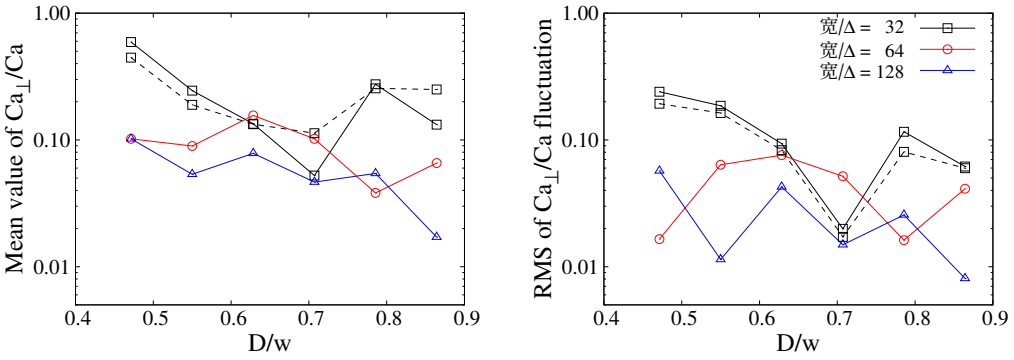
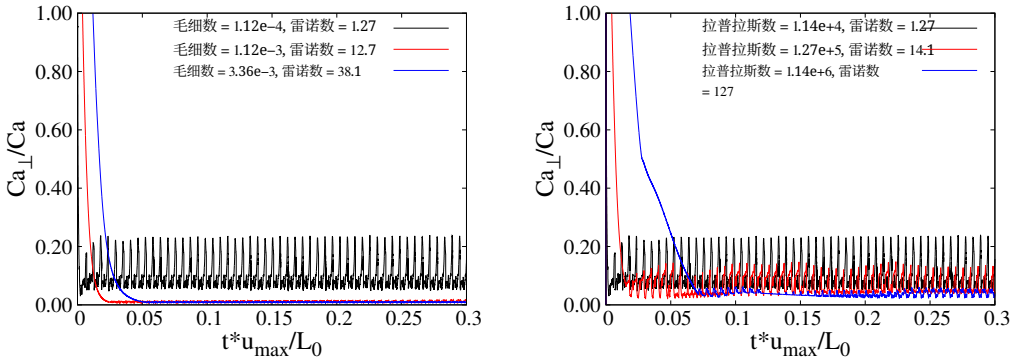


图 B.4：不同网格分辨率下，毛细数 $Ca_\perp/Ca$ 随液滴尺寸的变化（$D/w = 0.47$、0。55，0。63，0。71，0。79，和 0。86），其中毛细数为 $= 1.12\times10^{-4}$，拉普拉斯数为 $= 1.14\times10^{4}$。虚线表示在 $w/\Delta = 32$ 处，嵌入式固壁上采用泊肃叶型流入和无滑移边界条件的情况。

在以下分析中，液滴尺寸固定为 $D/w = 0.707$，网格分辨率固定为 $w/\Delta = 64$。我们研究毛细数 毛细数 和拉普拉斯数 拉普拉斯数 对伪壁面法向速度的影响 $u_\perp$。结果见图 B.5。图 B.5(a)中，毛细数$_\perp$/毛细数 在 毛细数 $= 1.12\times10^{-4}$时，其幅值和波动幅度均显著大于另外两种情况，这归因于入口速度大幅降低 U_0。图 B.5(b)中，毛细数$_\perp$/毛细数 的幅值和波动幅度均随 拉普拉斯数 增大而降低。请注意，增大 拉普拉斯数 意味着降低流体黏度，同时增大 U_0 以保持毛细数不变，从而降低比值 毛细数$_\perp$/毛细数。

图 B.6 展示了不同拉普拉斯数下毛细数$_\perp$/毛细数时间平均值随毛细数的变化。平均值近似呈线性下降



(a) (b)

图 B.5：无接触线的嵌入式微通道中均匀流入时 $Ca_{\perp}/Ca$ 比值的时间演化：(a) La $= 1.14 \times 10^{4}$时不同的毛细数，以及 (b) Ca $= 1.12 \times 10^{-4}$时不同的拉普拉斯数。

随着毛细数增大，这与无固体壁面的平移液滴测试案例中观察到的趋势一致 [26]。相比之下，毛细数⊥/毛细数的平均值基本不受拉普拉斯数影响。此外，当毛细数 $< 1.12 \times 10^{-5}$时，以毛细数$_{\perp}$ 表征的伪速度大小会变得与毛细数相当，从而导致液滴无法被施加的流入输运。

最后，图 B.2 中以空心方块表示两种 毛细数$_{\perp}$/毛细数 波动的均方根值。关于毛细数 和 拉普拉斯数 的变化趋势与存在移动接触线（以实心圆表示）时所得结果一致。对于大多数毛细数 $> 1.12 \times 10^{-4}$的情况，无接触线构型中 毛细数$_{\perp}$/毛细数 的波动幅度小于存在移动接触线时的波动幅度。然而，当毛细数 $< 1.12 \times 10^{-5}$时，伪速度的量级与施加的流入相当，导致液滴无法被输运。因此，

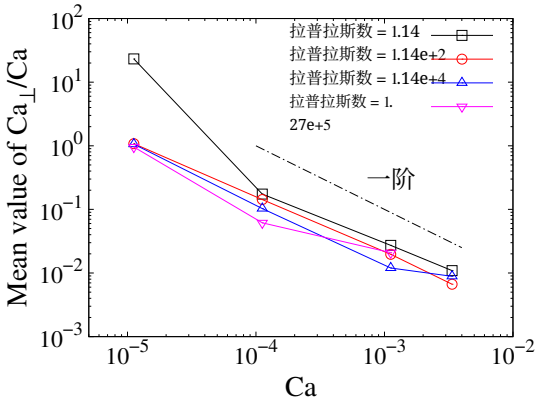


图 B.6：在没有接触线的嵌入式微通道中，均匀流入条件下，比值 $Ca_{\perp}/Ca$ 的时间平均值随毛细数的变化。

相应的均方根值未予报告。这一行为与此前观察到的无固体壁面平移液滴的情况一致，如图 21（b）所示。

参考文献

[1] D. Soltman、B. Smith、S. Morris、V. Subramanian，利用接触角滞后进行精确定义特征的喷墨打印，《胶体与界面科学杂志》400（2013）135–139。

[2] V. Alvarado、E. Manrique，提高石油采收率：最新综述，《能源》3（9）（2010）1529–1575。

[3]T. Fullana, S. Zaleski, S. Popinet，基于流体体积法的幕涂动态润湿失效：四叉树网格上的流体体积模拟，《The European PhysicalJournal Special Topics》229 (10) (2020) 1923–1934。

[4] J. H. Snoeijer, B. Andreotti，移动接触线：尺度、状态与动力学转变，《Annual Review of Fluid Mechanics》45 (1) (2013) 269–292。

[5] Y. Sui、H. Ding、P. D. Spelt，含移动接触线流动的数值模拟，Annual Review of Fluid Mechanics 46 (1) (2014) 97–119。

[6] S. Manservisi、R. Scardovelli，铺展液滴接触角动力学的变分方法，Computers & Fluids 38 (2) (2009) 406–424。

[7] P. D. Spelt，一种用于模拟具有滞后现象的多条移动接触线流动的水平集方法，计算物理学杂志 207 (2) (2005) 389–404。

[8] M. Renardy、Y. Renardy、J. Li，采用流体体积法模拟移动接触线问题，计算物理学杂志 171 (1) (2001) 243–263。

[9] S. Afkhami、S. Zaleski、M. Bussmann，一种用于在 VOF 模拟中施加动态接触角的网格依赖模型，计算物理学杂志 228 (15) (2009) 5370–5389。

[10] J.-B. Dupont, D. Legendre，具有接触角滞后现象的静止与滑动液滴数值模拟，计算物理学杂志 229 (7) (2010) 2453–2478。[11] H. Ding, P. D. Spelt，弥散界面模拟中接触线运动的润湿条件，《物理评论E》统计、非线性与软物质物理 75 (4) (2007) 046708。

[12] R. Scardovelli, S. Zaleski，自由表面与界面流动的直接数值模拟，Annual Review of Fluid Mechanics 31 (1) (1999) 567–603。[13] S. Popinet，表面张力的数值模型，Annual Review of Fluid Mechanics 50 (2018) 49–75。

[14] S. Afkhami, M. Bussmann，基于高度函数在二维体积流体（VOF）模拟中施加接触角，International Journal for Numerical Methods in Fluids 57 (4) (2008) 453–472。

[15] S. Afkhami, M. Bussmann，基于高度函数在三维体积流体（VOF）模拟中施加接触角，International Journal for Numerical Methods in Fluids 61 (8) (2009) 827–847。

[16] S. J. Cummins, M. M. Francois, D. B. Kothe，根据体积分数估算曲率，Computers & Structures 83 (6-7) (2005) 425–434。

[17]T.-Y. Han, J. Zhang, H. Tan, M.-J. Ni，一种用于在三维流体体积法模拟中施加接触角的一致并行化高度函数格式，计算物理学杂志 433 (2021) 110190。

[18] M. Tavares、C. Josserand、A. Limare、J. M. Lopez-Herrera、S. Popinet，《用于模拟任意固体表面上两相流动的耦合体积流体（VOF）/嵌入边界法》，Computers & Fluids 278 (2024) 106317。

[19]X. Chen, T. Han, J. Pan, D. Fuster, S. Zaleski，《复杂表面上动态接触线的体积守恒方法》，Physics of Fluids 37 (2) (2025年)。

[20] C.-S. Huang, T.-Y. Han, J. Zhang, M.-J. Ni, 《一种用于模拟复杂边界上具有滞后的接触线动力学的二维锐界面守恒 VOF 方法》，计算物理学杂志 533 (2025年) 113975。

[21] E. S.-C. Fan、M. Bussmann，球坐标系中的分段线性流体体积法，应用数学建模 37 (5) (2013) 3077–3092。

[22] H. Patel、S. Das、J. Kuipers、J. Padding、E. Peters，一种耦合流体体积法与浸入边界法的方法，用于模拟复杂几何中的接触线动力学及三维多相流，化学工程科学 166 (2017) 28–41。

[23] A. OBrien、M. Bussmann，一种用于具有接触线动力学的多相流的流体体积法虚单元浸入边界法，Computers & Fluids 165 (2018) 43–53。

[24] S. Popinet，一种用于 Serre–Green–Naghdi 方程的四叉树自适应多重网格求解器，计算物理学杂志 302 (2015) 336–358。

[25] T. Han, J. Pan, 代码仓库 （2025年）。网址 https://basilisk.fr/sandbox/Tianyang/embedded_contact_2D/README

[26] S. Popinet, 《一种用于表面张力驱动的界面流动的精确自适应求解器》，《计算物理学杂志》228 (16) (2009) 5838–5866。

[27] H. Johansen，P. Colella，《一种用于不规则区域上泊松方程的笛卡尔网格嵌入边界方法》，《计算物理学杂志》147(1) (1998) 60–85。

[28] R. Scardovelli, S. Zaleski，《矩形网格中线性界面与体积分数之间的解析关系》，计算物理学杂志 164 (1) (2000) 228–237。

[29] D. Dai, A. Y. Tong，《用于二维多边形非结构网格的 PLIC-VOF 方法中的解析界面重构算法》，International Journal for Numerical Methods in Fluids 88 (6) (2018) 265–276。

[30] J. U. Brackbill, D. B. Kothe, C. Zemach，《一种用于表面张力建模的连续介质方法》，计算物理学杂志 100 (2) (1992) 335–354。

[31] S. Popinet, S. Zaleski，《一种用于精确表示表面张力的前沿追踪算法》，International Journal for Numerical Methods in Fluids 30 (6) (1999) 775–793。

[32] M.M. Francois, S. J. Cummins, E. D. Dendy, D. B.Kothe, J. M. Sicilian, M. W. Williams，《体积追踪框架下连续和尖锐界面表面张力模型的平衡力算法》，计算物理学杂志 213 (1) (2006) 141–173。

[33] E. Aulisa、S. Manservisi、R. Scardovelli、S. Zaleski，三维笛卡尔几何中的界面重构：最小二乘拟合与分裂平流，计算物理学杂志 225 (2) (2007) 2301–2319。

[34]S. Popinet，Basilisk 沙盒示例：contact-embed.h，访问日期：2025-08-25（2025）。网址
http://basilisk.fr/sandbox/popinet/contact/contact-embed.h

[35] H.-R. Liu, H. Ding，《弥散界面浸入边界法：在曲面基底上对具有移动接触线的流动进行二维模拟》，计算物理学杂志 294（2015年）484–502。

[36] T. Han，平行于固体壁面的速度分量的时间波动（2025年）。网址
https://doi.org/10.5281/zenodo.17686205

[37] T. Abadie、J. Aubin、D. Legendre，论表面张力力的计算与界面平流对流体体积法和水平集框架中寄生流的综合影响，计算物理学杂志 297（2015年）611–636。

[38] M. Saini、V. Sanjay、Y. Saade、D. Lohse、S. Popinet，积分形式表面张力公式在流体体积法框架中的实现及其在马兰戈尼流中的应用，计算物理学杂志 542（2025年）114348。