arXiv:2601.01574v1 [gr-qc] 4 Jan 2026

通过哈密顿-雅可比方法不变量求解FLRW宇宙学模型的精确解

E. Ahmadi-Azar*, K. Atazadeh†, A. Eghbali‡

2026年1月6日

物理系，基础科学学院，阿塞拜疆沙希德·马达尼大学，
53714-161，大不里士，伊朗

摘要

本研究利用哈密顿–雅可比方法不变量（IHJM），求解存在宇宙学常数 Λ时空间平坦的弗里德曼–勒梅特–罗伯逊–沃克（FLRW）宇宙学模型的场方程。该方法使我们能够系统地提取两个独立的第一积分，例如$I_{\mathrm{HJ},\,1}(a,\ \dot{a}) = c_1$ 和 $I_{\mathrm{HJ},\,2}(t,\ a,\ \dot{a}) = c_2$，它们与保持宇宙学模型的哈密顿正则方程（HCEs）形式不变的变换群相关。提取这些不变量不仅意味着求得该模型场方程的通解，还意味着获得该模型的拉格朗日函数和哈密顿函数；模型的动力学表现得如同一维迷你超空间 $\mathbb{Q} =(a)$ 中单粒子的动力学。此外，为了获得模型的通解，IHJM还无需借助亥姆霍兹条件，也无需判断拉格朗日函数存在的必要条件是否成立，即可解决变分法逆问题（IPCV）。IHJM的主要内容是求出正则变换（CT）的生成函数，然后利用哈密顿–雅可比方程（HJE）提取所需模型的两个独立不变量。本研究表明，粒子哈密顿函数的正则变换群与保持爱因斯坦-弗里德曼动力学方程（EFDE）不变的单参数李群之间存在密切关系 $\ddot{a} = F(a,\ \dot{a})$，因此二者得出的结果相同。通过这种方式，同时采用IHJM和对称群方法不变量（ISGM），可以将二者统一起来，建立一套综合积分理论，用于研究所需的宇宙学模型。

关键词： 诺特对称性、哈密顿函数、正则变换、FLRW宇宙学模型、哈密顿–雅可比方程、哈密顿-雅可比方法不变量

*e.ahmadi.azar@azaruniv.ac.ir
†atazadeh@azaruniv.ac.ir
‡eghbali978@gmail.com

1 引言

首先，我们从以下问题开始讨论：本文所要研究的 FLRW 宇宙学模型具有哪些诺特对称性？如果该宇宙学模型具有诺特对称性，那么如何利用这些对称性求解所需宇宙学模型的动力学方程？如何更深入地理解前一项研究中考察的“不变量”理论 [1]？要回答这些问题，首先有必要了解如何为 EFDE $\ddot{q} = F(q,\ \dot{q})$构造拉格朗日函数。由运动常数构造拉格朗日结构和哈密顿结构的方法最初由 Sergio A. Hojman 提出 [2]。Hojman 的工作实际上是对 IPCV 的回答，而 IPCV 是经典力学中著名的问题之一 [3]。因此，本节有必要简要回顾 IPCV 的历史。为此，考虑一个动力系统（DS） S_n^2，其具有 n 个自由度。该系统的构型由广义坐标的一个有序 n元组描述 $q^s:=(q^1,\ \cdots,\ q^n)$。假设描述该系统动力学的运动方程 S_n^2 由以下二阶常微分方程（ODEs）组给出：

$$\ddot{q}^k = F^k(t, q^s, \dot{q}^s), \tag{1.1}$$

其中，$k = 1,\ \cdots,\ n$，而“$\cdot$”表示关于时间 t（它是动力系统 S_n^2 的自变量）的全导数算子，其定义如下：

$$\cdot = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} := \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^k \frac{\partial}{\partial q^k} + F^k \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}, \tag{1.2}$$

其中，F^k, s，$k = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n$ 是该动力系统的力函数。IPCV 可表述为：是否存在唯一的非奇异“海森矩阵” $\omega_{ik}(t,\ q^s,\ \dot{q}^s)$（一个 n 阶方阵）和拉格朗日函数 $L(t,\ q^s,\ \dot{q}^s)$，使其满足以下关系：

$$\omega_{ik}\left(\ddot{q}^k - F^k(t, q^s, \dot{q}^s)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}. \tag{1.3}$$

换言之，IPCV 要回答的是，是否存在拉格朗日函数 $L(t,\ q^s,\ \dot{q}^s)$ 和海森矩阵 ω_{ik}，使其对应的运动方程，即欧拉-拉格朗日方程（ELEs）：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \tag{1.4}$$

是否与方程（1.3）的左边相同？如果答案是肯定的，那么这个函数（拉格朗日函数 $L(t,\ q^s,\ \dot{q}^s)$）是唯一的还是有多个？赫尔曼·冯·亥姆霍兹于 [4]1887年对解决 IPCV 作出了首批重要贡献。1870 年，亥姆霍兹正致力于“电动力学理论”的研究。在研究如何为麦克斯韦电动力学理论确定一个适当的拉格朗日量时，他开始涉足最小作用量原理的研究。他尝试将变分泛函从力学推广到电动力学，再推广到其他一些物理领域。在 1886 年发表的著名论文《论最小作用量原理的物理意义》中，他提出了著名的条件（现称为亥姆霍兹条件），用于判断 IPCV 是否存在拉格朗日量 L [5]。

定理 1.1 (赫尔姆霍兹条件 1887年)。设 S_n^2 为一个具有 n个自由度的动力系统，其在任意时刻 t 的构型由广义坐标 $q^s(t) =(q^1(t)\ \cdots, q^n(t))$描述。设一组 n 二阶常微分方程：

$$E_i(t, q^s, \dot{q}^s, \ddot{q}^s) := \omega_{ik}\left(\ddot{q}^k - F^k(t, q^s, \dot{q}^s)\right) = 0, \tag{1.5}$$

其中 $i=1,\ \cdots,\ n$，是动力系统 S_n^2的控制方程。对于该动力系统，存在一个非奇异海森矩阵 ω_{ik}，以及一个拉格朗日函数 $L(t,\ q^s,\ \dot{q}^s)$，当且仅当亥姆霍兹条件成立时。根据 *Dauglas* [6] 和 *Sarlet* [7]，这些条件可表示为：

$$\omega_{ij}=\omega_{ji},\quad \frac{\partial\omega_{ij}}{\partial\dot{q}^k}=\frac{\partial\omega_{ik}}{\partial\dot{q}^j}, \tag{1.6}$$

$$\mathrm{D}\left[\omega_{ij}\right]=\omega_{ik}\Gamma_j^k+\omega_{jk}\Gamma_i^k, \tag{1.7}$$

$$\omega_{ik}\Phi_j^k=\omega_{jk}\Phi_i^k, \tag{1.8}$$

其中

$$\Gamma_j^i:=-\frac{1}{2}\frac{\partial F^i}{\partial\dot{q}^j},\quad \Phi_j^i:=-\frac{\partial F^i}{\partial q^j}-\Gamma_j^k\Gamma_k^i-\mathrm{D}[\Gamma_j^i], \tag{1.9}$$

且 D 是关于自变量 t的全导数：

$$\mathrm{D}:=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}^k\frac{\partial}{\partial q^k}+F^k\frac{\partial}{\partial\dot{q}^k}.$$

当存在一个解 ω_{ij} 满足亥姆霍兹条件组方程（1.6）-（1.8及函数（1.9）时，与常微分方程（ L（t, q^s, $\dot{q}^s$）相关的拉格朗日量可由以下定理得到：1.5。

定理1.2（Engels公式）。设对于动力系统 S_n^2，运动方程如下：

$$E_i(t,q^s,\dot{q}^s,\ddot{q}^s)=0, \tag{1.10}$$

其中 $i=1$、$\cdots$、n。如果亥姆霍兹条件（*1.6*）-（*1.8*）及函数（*1.9*）由运动方程（*1.10*）满足，则动力系统 S_n^2 的矩阵 $\omega_{ij}(t,q^s,\dot{q}^s)$存在，并且拉格朗日函数$L(t,q^s,\dot{q}^s)$可通过函数 E_i和 ω_{ij}, $i,j=1,2,\cdots,n$利用*Engels*公式[8,9]构造：

$$L(t,q^s,\dot{q}^s)=\int_0^1 q^iE_i(t,\lambda q^s,\lambda\dot{q}^s,\lambda\ddot{q}^s)\mathrm{d}\lambda+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\int_0^1\lambda q^i\dot{q}^j\omega_{ij}(t,\lambda q^s,\lambda\lambda'\dot{q}^s)\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\lambda'\,. \tag{1.11}$$

反过来，如果给定一个 L 满足欧拉-拉格朗日方程(1.4)的动力系统拉格朗日函数，那么矩阵ω_{ik} 可由以下方程求得：

$$\omega_{ij}\left(t,q^s,\dot{q}^s\right)=\frac{\partial^2L(t,q^s,\dot{q}^s)}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j}, \tag{1.12}$$

其中 $i,\ j=1,\ \cdots,\ n$，且该矩阵满足亥姆霍兹条件(1.6)-（1.8）以及函数(1.9)对应的恩格尔公式(1.11)。因此，求解 *IP CV* 意味着求出满足亥姆霍兹条件的矩阵 ω_{ik} 。

1894年，G. Darboux 完全解决了一维情形下的 IPCV。他指出，对于一维情形，二阶微分方程的拉格朗日函数通常存在且并非唯一 [10]。自亥姆霍兹的论文（1887年）发表以来，直至20世纪初，IPCV一直从微分角度得到研究。例如，Mayer [11] 证明了亥姆霍兹充分条件的一部分。1901年，Knigsberger [12] 针对一般情形下的 IPCV 提出了一份全面而详尽的综述。1903年，Hamel [13] 解决了三维情形下 IPCV 的一个特殊问题。此后，直到 Douglas 在1941年 [6] 提出

一篇题为“变分法逆问题的解”的详尽论文，解决了二维情形下的逆问题。他的方法主要基于偏微分方程（PDE）的理论，研究与目标动力系统（DS）相关的微分系统。此文发表后，直到20世纪70年代末，IPCV 都没有出现重要进展。在20世纪70年代末和80年代，IPCV 再度受到关注。在此期间，物理学家采用两种不同的方法研究这一课题。在第一种方法中，从流形几何的角度研究动力系统（DS）。该方法还从几何角度研究对称性和运动常数问题，并以同样的方式提出等价拉格朗日量的变换关系。在第二种方法中，研究以亥姆霍兹条件为基础。这些条件属于代数微分方程，求解这一方程组意味着找出矩阵 $\omega_{ik}(t,\ q^s,\ \dot{q}^s)$ 以及拉格朗日函数 $L(t,\ q^s,\ \dot{q}^s)$，从而解决目标系统 [7]的 IPCV。20世纪80年代末和90年代初，许多研究得到拓展，并在物理学的其他分支乃至数学领域取得成果。这些研究的典型代表是 Havas 的研究 [14, 15]。Havas 推进了一阶微分方程变分法逆问题的求解，而这一问题后来由 Hojman 和 Urrutia 完全解决 [16]。他们提出了一种方法，可为这类微分方程组构造无穷多个拉格朗日函数 [17,18]。如前所述，在一维情形下，Darboux 证明拉格朗日量通常存在，但构造这些拉格朗日量需要两个运动常数。1996年，Hojman 用新方法证明，只需一个运动常数和一个对称变换即可构造拉格朗日函数。后来，Hojman 完成了相关研究。2014年，他指出，要为由两个一阶常微分方程或一个二阶常微分方程组成的系统构造拉格朗日量，只需知道一个与时间无关的运动常数。他提出了一种优雅的方法，用于在已知一个与时间无关的运动常数时，为这些动力系统（DS）构造拉格朗日函数。关于 IPCV 的全面综述以及最新进展的完整介绍，可参见参考文献 [19–21]。

本文组织如下。在引言部分之后，第 2 节概述 FLRW 宇宙学模型的主要内容。本节从空间平坦 FLRW 宇宙学模型在存在宇宙学常数时的爱因斯坦场方程（EFEs）出发，首先推导弗里德曼方程，然后说明 FLRW 宇宙学模型的动力学表现得如同单粒子动力学，其中粒子受到一维力的作用。在第3节中，我们将使用 Hojman 方法，为 FLRW 宇宙学模型的动力系统（DS）构造拉格朗日函数和哈密顿函数。随后，利用 Rand-Trautman 恒等式，求出动力学方程（DE）的诺特点对称性。此外，本节还将运用诺特定理，为 FLRW 宇宙学模型的 DE 提取两个不变量（第一积分）。在第 4节中，我们将对哈密顿函数为（3.23）的 FLRW 宇宙学模型应用哈密顿–雅可比理论中的正则变换（CT），以提取与 EFDE（2.9）相关的不变量。由此可得到相应的不变量。最后，在本节末尾，我们将利用哈密顿-雅可比不变量，通过求解哈密顿-雅可比方程（HJE）（2.9），得到 EFDE（4.1）的通解。最后，我们将讨论研究结果，并给出评论与展望。文中使用的部分定义和定理，例如泊松括号矩阵、拉格朗日括号矩阵、Hojman公式等，列于附录 A。此外，附录B介绍了哈密顿–雅可比理论中的正则变换，以讨论求解哈密顿正则方程组（HCEs）和哈密顿-雅可比方程的通解的方法。

2 FLRW 宇宙学模型

在继续研究如何利用Hojman方法推导宇宙学中弗里德曼微分方程的拉格朗日函数之前，有必要先推导空间平坦的（$k=0$）

FLRW宇宙学模型。对于这一宇宙学模型，选择广义相对论（GR）作为背景理论。我们必须首先为空间选择一个合适的时空度规张量，以较好的近似表示宇宙的对称性，即均匀性和各向同性。该度规表示为 [22]

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\Big(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\Big), \tag{2.1}$$

其中，时空坐标为 $x^\mu := (t,\ r,\ \theta,\ \varphi)$，$t$ 是宇宙时间（$t \geq 0$），变量$0 \leq r < \infty$、$-\pi \leq \theta \leq \pi$和 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ 是球极坐标，而 $a(t)$是宇宙时间的可微函数，称为宇宙学尺度因子；k 是三维空间的曲率常数，可取三个值 -1、1、0，分别对应开放宇宙、闭合宇宙和平坦宇宙。

现在，让我们简要讨论一下广义相对论的基础理论。推导经典场（包括广义相对论方程）的一种方法是使用“最小作用量原理”。该原理指出，对于时空流形 M 的所有可能几何，自然界会选择一种几何，使得存在物质时的引力作用量（称为爱因斯坦-希尔伯特作用量） [23]

$$S_{\mathrm{EH}} := \frac{1}{2\kappa c}\int_\Omega (R + 2\Lambda + 2\kappa c\mathcal{L}_{\mathrm{M}})\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4\mathrm{x}, \tag{2.2}$$

是一个极值，也就是说，它相对于动力学变量 $g_{\mu\nu}$ 的变分等于零：$\delta S_{\mathrm{EH}} = 0$，其中 δ 表示一个微小变分。在作用量 (2.2) 中，R 是里奇标量，Λ 是宇宙学常数，$g = \det g_{\mu\nu}$, $\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4\mathrm{x}$ 是时空流形的体积不变量，M $\kappa(= 8\pi\mathrm{G}/\mathrm{c}^4)$ 是爱因斯坦引力常数，而 Ω 是引力场存在的时空流形区域。对爱因斯坦-希尔伯特作用量 S_{EH} (2.2) 关于度规张量 $g_{\mu\nu}$进行变分，可得爱因斯坦场方程 [23]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T^{\mathrm{M}}_{\mu\nu}, \tag{2.3}$$

其中，$T^{\mathrm{M}}_{\mu\nu}$ 是物质的能量-动量张量，由拉格朗日密度$\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$定义，满足 [23]

$$T^{\mathrm{M}}_{\mu\nu} = \Big(\rho + \frac{p}{c^2}\Big)U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}, \tag{2.4}$$

其中，U_μ是与流体共动的观测者的四速度矢量 $U = U^\mu\partial_\mu = (c, 0, 0, 0)$ 的协变分量。此外，流体的压强 p和密度 ρ通过状态方程 $p = w\rho c^2$联系起来，其中系数 w 是一个实数、无量纲数，称为状态方程参数。本研究采用的度规号差为 $(-+++)$，并使用自然单位制，即真空光速为单位值：$c = 1$。

现在，我们可以推导具有线元（$k = 0$）的空间平坦（2.1）FLRW宇宙学模型中的弗里德曼方程。在存在宇宙学常数 Λ的情况下，线元（2.3）的方程（2.1）给出 [24]

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G\rho + \Lambda, \tag{2.5}$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G p - \Lambda. \tag{2.6}$$

为了确定三个未知量 $a(t)$、$\rho(t)$和 $p(t)$，我们只有两个独立方程（2.5）和（2.6）。因此，为了求出这些未知量，我们还需要一个方程，而它正是

状态方程 $p = w\rho$。这个代数方程与两个微分方程（2.5）和（2.6）构成了一个包含三个未知量 $a(t)$、$\rho(t)$ 和 $p(t)$的微分代数方程组。将该方程组中的三个方程组合起来，可得到以下非线性二阶常微分方程：

$$\ddot{a} = \alpha\frac{\dot{a}^2}{a} + \beta a, \tag{2.7}$$

其中，新参数 α 和 β 定义如下：

$$\alpha := -\frac{1+3w}{2}, \quad \beta := \frac{(1+w)\Lambda}{2}. \tag{2.8}$$

为了求解方程（2.7），我们将因变量 $a(t)$变换为新变量 $q(t)$。这样，方程（2.7）可写为

$$\ddot{q} = F(q, \dot{q}), \tag{2.9}$$

其中

$$F(q, \dot{q}) := \alpha\frac{\dot{q}^2}{q} + \beta q. \tag{2.10}$$

一维构形空间 $\mathbb{Q} = (q)$ 中的方程（2.9）（迷你超空间）是牛顿第二定律，其中函数（2.10）是该空间中作用于单位质量粒子的力的分量。请注意，在广义相对论框架下的 FLRW宇宙学模型，可以看作一维空间中受力粒子的动力学，该粒子受到的力为

$$\mathbf{F} = F(q, \dot{q})\frac{\partial}{\partial q}, \tag{2.11}$$

在此力的作用下，粒子的加速度为 $\ddot{q}$。通过 IHJM 求解迷你超空间 $\mathbb{Q} = (q)$ 中方程（2.9）的第一步，是求出迷你超空间中对应于该粒子的拉格朗日函数和哈密顿函数。我们将在下一节完成此事。

3 拉格朗日量和哈密顿结构的构造

为了为 FLRW宇宙学模型的动力系统构造拉格朗日函数 $L(t, q, \dot{q})$，该系统具有遵循方程（2.9）的 EFDE，我们采用 Hojman方法 [2,16,25]。首先，我们定义二元组 $x^k := (x^1, x^2) := (q, \dot{q})$ 为粒子的广义坐标，并将 $(\Phi^1, \Phi^2) := (\dot{q}, F(q, \dot{q}))$ 视为作用在这个新二维空间中粒子上的力。于是，可以将微分方程组（2.9）写成以下形式

$$\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = \Phi^k(x^i). \tag{3.1}$$

其中 $k = 1, 2$。现在，考虑一个由具有 n 个自由度的粒子（$n = 1, 2, \cdots$）组成的动力系统。设 $\mathbb{Q}$ 为该粒子的构形空间，并令 $q^s := (q^1, \cdots, q^n)$ 为任意点 $P \in \mathbb{Q}$ 处的局部广义坐标。粒子在构形空间 $\mathbb{Q} = q^s = (q^1, \cdots, q^n)$ 上的微分方程为

$$\dot{q}^\alpha = F^\alpha(t, q^s, \dot{q}^s). \tag{3.2}$$

其中，力函数 F^α's、$\alpha = 1$、$\cdots$、n 是广义坐标$q^s := (q^1$、$\cdots$、$q^n)$、广义速度 $\dot{q}^s := (\dot{q}^1$、$\cdots$、$\dot{q}^n)$ 以及时间 t（自变量）的可微函数。

通过定义一组单一的 $2n$ 变量 $x^i := (q^s, \dot{q}^s)$ 作为广义坐标，并定义一组单一的 $2n$变量 $\Phi^i := (\dot{q}^s, F^s)$ 作为作用于新切丛 $\mathrm{T}\mathbb{Q}$ 中粒子的力函数，构形空间 $\mathbb{Q} = q^s$ 上的微分方程可变换为 $\mathrm{T}\mathbb{Q}$ 上如下形式的一组一阶常微分方程（3.1）。这些方程中的第一个写作 $\mathrm{d}q^\alpha/\mathrm{d}t = \dot{q}^\alpha$, $\alpha = 1, \cdots, n$，最后一个则是微分方程（3.2）。因此，支配粒子在二维切丛 $\mathrm{T}\mathbb{Q}$ 中运动的方程如下所示:

$$\dot{x}^1 = \Phi^1\left(x^k\right) = \dot{q} = x^2, \tag{3.3}$$

$$\dot{x}^2 = \Phi^2\left(x^k\right) = \alpha\frac{\dot{q}^2}{q} + \beta q = \alpha\frac{(x^2)^2}{x^1} + \beta x^1. \tag{3.4}$$

利用运动方程（3.3）和（3.4），可以求得作用于该流形中粒子的力

$$\mathbf{\Phi} = \Phi^i\frac{\partial}{\partial x^i} = x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + \left(\alpha\frac{(x^2)^2}{x^1} + \beta x^1\right)\frac{\partial}{\partial x^2}. \tag{3.5}$$

为了将 Hojman方法应用于动力系统 S_1^2，我们需要一个时间无关不变量。通过利用对称性进行少量计算，便可轻易得到这个不变量。动力系统 S_1^2 的微分方程被视为 EFDE $\Gamma(q, \dot{q}, \ddot{q}) := \ddot{q} - F(q, \dot{q}) = 0$。该方程不是时间的显函数。因此，无需使用李不变性条件，也可以得到李变换群之一。这个变换群就是以下时间平移群$\mathbf{T}_\varepsilon$: $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$，其中

$$(t, q) \mapsto \left(\bar{t}, \bar{q}\right) = \mathbf{T}_\varepsilon(t, q) = (t + \varepsilon, q), \tag{3.6}$$

和 $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$。微分方程 $\Gamma = 0$ 在“单参数李变换群”（3.6）下保持不变。对称向量$\mathbf{X} = \partial_t$，其中 $\partial_t := \partial/\partial t$，是该变换群的无穷小生成元。这个变换群的存在表明，在动力系统 S_1^2中，粒子的能量守恒。因此，动力系统的第一积分之一就是粒子的能量。我们用符号 $I(q, \dot{q})$表示这个不变量。为了求得 $I(q, \dot{q})$，我们用变量分离法求解 EFDE $\Gamma = 0$。利用链式法则，方程 $\Gamma = 0$ 可写为:

$$\Gamma = \dot{q}\frac{\mathrm{d}\dot{q}}{\mathrm{d}q} - \alpha\frac{\dot{q}^2}{q} - \beta q = 0. \tag{3.7}$$

这一项的存在 $-\beta q$ 于方程（3.7）中，使得无法分离变量 q 和 $\dot{q}$，也无法通过变量分离法求解该微分方程。因此，我们保留这一项。利用另外两项，我们定义一个新的微分方程，其形式为

$$\Gamma^* = \dot{q}\frac{\mathrm{d}\dot{q}}{\mathrm{d}q} - \alpha\frac{\dot{q}^2}{q} = 0. \tag{3.8}$$

假设该方程的第一积分是如下函数: $C_1(q, \dot{q})$。为求出该函数，必须用变量分离法求解方程 $\Gamma^* = 0$。于是，我们得到 $\mathrm{d}\dot{q}/\dot{q} = \alpha\mathrm{d}q/q$。积分后，得到 $\ln\ \dot{q} = \alpha\ln q + C_2$。由此方程可得积分常数 C_2，如下所示: $C_2 = \ln(\dot{q}/q^\alpha)$。这里，我们选择 $C_1 = e^{2C_2}/2$作为微分方程$\Gamma^* = 0$的不变量，并将其作为第一积分。因此，方程 $C_1 = e^{2C_2}/2$ 可写成 $C_1(q, \dot{q}) = \dot{q}^2 q^{-2\alpha}/2$。需要注意的是，由于 C_2 是一个第一积分，它的任何可微函数也都是第一积分。因此，微分方程 $\Gamma = 0$ 的前两项之和给出动能，而第三项 $-\beta q$ 则必定给出粒子的势能。现在，

为了求出与常微分方程 (3.7) 相关的不变量 $I(q,\dot{q})$，我们考虑函数 $I(q,\dot{q})$ 的如下试探形式： $I(q,\dot{q}) = C_1(q,\dot{q}) + C_3(q)$，其中未知函数 $C_3(q)$ 是与 $\Gamma = 0$ 的第三项相关的第一积分。为了求出函数 $C_3(q)$，我们对方程 $I(q,\dot{q}) = C_1(q,\dot{q}) + C_3(q)$ 两边关于时间 t 求全导数：

$$\dot{q}q^{-2\alpha}\big(\ddot{q} - \alpha\frac{\dot{q}^2}{q} + \frac{1}{\dot{q}q^{-2\alpha}}\frac{\mathrm{d}C_3(q)}{\mathrm{d}t}\big) = 0. \tag{3.9}$$

为了使方程（3.9）在其定义域内变量q 的所有取值下始终成立，括号内的表达式等于零是必要且充分的，即

$$\ddot{q} - \alpha\frac{\dot{q}^2}{q} + \frac{1}{\dot{q}q^{-2\alpha}}\frac{\mathrm{d}C_3(q)}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{3.10}$$

将（3.10）与（3.7）进行比较，得到$\mathrm{d}C_3 = -\beta q^{-2\alpha+1}\mathrm{d}q$，然后 C_3（q） $= Cq^{2-2\alpha}/2$，其中 $C:=\beta/$（$1-\alpha$）是一个新参数。因此，（3.7）的时间无关不变量为

$$I(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2q^{-2\alpha} - \frac{1}{2}Cq^{-2\alpha+2}, \tag{3.11}$$

这给出了动力系统中粒子的能量函数 S_1^2。这种时间无关不变量提取方法可用于许多不显含时间的微分方程。既然与方程（2.9）相关的时间无关不变量已经找到，我们现在可以将Hojman方法应用于动力系统 S_1^2。本节的目标是推导动力系统 S_1^2的拉格朗日量和哈密顿函数。将不变量（3.11）作为粒子的时间无关运动常数，我们可以为S_1^2 定义一个哈密顿结构，其中包括哈密顿函数以及用反对称矩阵表示的泊松括号关系 J^{ij} [2, 26–29]（见附录 A）。

现在让我们回到所讨论的问题。为了求出动力系统中粒子的泊松括号矩阵 $J^{ij}(x^k)$和拉格朗日括号矩阵$\sigma_{ij}(x^k)$，其中运动常数与时间无关 S_2^1，由方程（$I(x^k)$3.11）给出，我们使用哈密顿方程（A.3）以及方程（3.5）中的力的分量 $\mathbf{\Phi}$。于是，我们得到

$$J^{ij}(x^k) = \begin{pmatrix} 0 & (x^1)^{2\alpha} \\ -(x^1)^{2\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{ij}(x^k) = \begin{pmatrix} 0 & (x^1)^{-2\alpha} \\ -(x^1)^{-2\alpha} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

需要指出的是，（3.12）中的矩阵满足方程（A.7）。现在我们可以用泊松括号矩阵和拉格朗日括号矩阵 J^{ij}和σ_{ij} 来表示动力系统 S_2^1中的 FLRW宇宙学模型（2.9）的 EFDE。为此，将哈密顿方程（A.3）、运动方程（ $I(x^k)$）与不变量代入哈密顿函数 H，可得以下方程：

$$\dot{x}^i = J^{ij}\frac{\partial I(x^k)}{\partial x^j}, \quad i = 1,2. \tag{3.13}$$

为了用拉格朗日括号矩阵表示这些方程，必须将方程（3.13）两边乘以矩阵 σ_{ki}，然后使用方程（A.7）。结果为

$$\sigma_{ij}\dot{x}^j + \frac{\partial I(x^k)}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1,2. \tag{3.14}$$

因此，对于动力系统 S_2^1，若已知时间无关不变量 $I(x^k)$ 和拉格朗日括号矩阵 σ_{ij}，则方程（3.14）为我们提供了另一种表达粒子在切丛 $\mathrm{T}\mathbb{Q} = (q,\dot{q})$中运动方程的方式。根据方程（A.5），我们有

$$L(x^k) = l_1(x^k)\dot{x}^1 - \frac{1}{2}(x^2)^2(x^1)^{-2\alpha} + \frac{1}{2}C(x^1)^{-2\alpha+2}, \tag{3.15}$$

其中 $l_1(x^k)$ 作为常微分方程（A.6）的通解为 $l_1(x^k)=(x^1)^{-2\alpha}x^2$。然后，将其代入方程（3.15），我们得到如下形式的拉格朗日函数

$$L(x^k)=\frac{1}{2}(x^2)^2(x^1)^{-2\alpha}+\frac{1}{2}C(x^1)^{-2\alpha+2}. \tag{3.16}$$

因此，考虑二元组$(x^1,\ x^2)=(q,\ \dot{q})$ 在（3.16）中，切丛$\mathrm{T}\mathbb{Q}$中粒子的拉格朗日函数变为

$$L(q,\dot{q})=\frac{1}{2}\dot{q}^2q^{-2\alpha}+\frac{1}{2}Cq^{-2\alpha+2}\in\mathcal{F}(\mathrm{T}\mathbb{Q}). \tag{3.17}$$

可以将与拉格朗日量（3.17）对应的动能函数和势能函数定义为 $T(q,\ \dot{q})=\dot{q}^2q^{-2\alpha}/2$ 和 $V(q)=-Cq^{-2\alpha+2}/2$，分别为。要将动力系统的拉格朗日形式转换为哈密顿形式，必须首先定义广义动量。

定义3.1（广义动量，Hojman 2014）。对于具有一个自由度的动力系统 S_2^1 中的粒子，其构形空间为 $\mathbb{Q}=(q)$，泊松括号矩阵为$J^{ij}(x^k)$，$i,\ j\ =1,2$，与广义坐标 $x^1=q$，正则共轭的广义动量定义如下：

$$p(x^k):=\int\frac{dx^2}{J^{12}(x^k)}. \tag{3.18}$$

事实上，这一定义与形式定义 $p:=\partial L/\partial\dot{x}^1$ 一致，即

$$p(x^k)=\frac{\partial L(x^k)}{\partial\dot{x}^1}=\int\frac{dx^2}{J^{12}(x^k)}. \tag{3.19}$$

广义动量（3.19）并不表示构形空间 $\mathbb{Q}$ 上的向量分量，而是一个余向量。二元组 $(q,\ p)$ 应被视为“余切丛”的坐标，而不是切丛中的局部坐标。因此，方程（3.19）应被视为映射 $p:\mathrm{T}\mathbb{Q}\to\mathrm{T}^*\mathbb{Q}$ 的局部描述

$$(q,\dot{q})\mapsto p(q,\dot{q})=\left(q=q,p=\int\frac{dx^2}{J^{12}(x^k)}\right), \tag{3.20}$$

从切丛到余切丛。映射 (3.20) 实际上是与广义坐标 $x^1=q$ 共轭的广义动量的形式定义。给定泊松括号矩阵 J^{ij} 并计算积分 (3.18)，即可得到广义动量 p，它是变量 q 和 $\dot{q}$ 的函数。在此映射中，坐标 $x^1=q$ 应保持不变。需要注意的是，二元组 (q,p) 是 $\mathrm{T}^*\mathbb{Q}$ 的局部坐标。空间 $\mathrm{T}^*\mathbb{Q}$ 由构形空间的余向量组成，在经典力学中通常称为 DS S_1^2 的“相空间”。p 是 1-形式场 $\boldsymbol{\omega}=p\,\mathrm{d}q$ 的分量，而不是向量场的分量。1-形式与向量场互为对偶，因此 $\boldsymbol{\omega}$ 属于一个与 $\mathrm{T}_q\mathbb{Q}$ 对偶的空间。该空间记为 $\mathrm{T}^*\mathbb{Q}$，称为点 $q\in\mathbb{Q}$ 处的余切空间。

现在，我们需要做好准备，以便构造哈密顿动力学的基本函数，即哈密顿函数。为此，我们首先讨论“勒让德变换”（见附录 A）。我们利用这一变换推导哈密顿正则方程。众所周知，最简单且最有用的接触变换之一就是勒让德变换。接触变换与点变换的区别在于，定义这些变换的函数

除了依赖坐标外，还依赖因变量的导数。勒让德变换具有一些显著的性质，并在动力系统的拉格朗日形式与哈密顿形式之间建立了联系。勒让德变换使我们能够根据给定动力系统已知的拉格朗日函数构造哈密顿函数。如前所述，拉格朗日函数定义在构形空间的切丛 $\mathrm{T}\mathbb{Q}$ 上，而哈密顿函数则定义在其对偶 $\mathrm{T}^*\mathbb{Q}$ 上。

在本节中，我们求得了 FLRW宇宙学模型的拉格朗日函数，如式（3.17）所示。现在，对于与构形空间 $\mathbb{Q}=(x^1,x^2)$ 相对应的切丛 $\mathrm{T}\ \mathbb{Q}=(x^1)\ =(q)$，我们通过映射 $\mathrm{T}^*\mathbb{Q}=(x^1,p)$ 定义相空间（或余切丛）$\mathbf{FL}$: $\mathrm{T}\mathbb{Q}\to \mathrm{T}^*\mathbb{Q}$，其中:

$$(x^1,x^2)\mapsto \mathbf{FL}(x^1,x^2)=(x^1=x^1,p=l_1(x^1,x^2)), \tag{3.21}$$

并且 $l_1(x^1,x^2)\ =x^2(x^1)^{-2\alpha}$。反过来，余切丛 $\mathrm{T}^*\mathbb{Q}=(x^1,p)$ 中的任意一点，都可通过映射 $\mathbf{FL}$ 的逆映射变换为切丛 $\mathrm{T}^*\mathbb{Q}\ =\ (x^1,x^2)$ 中的一点，即映射 $(\mathbf{FL})^{-1}:\mathrm{T}^*\mathbb{Q}\to\mathrm{T}\mathbb{Q}$，其中

$$(x^1,p)\mapsto(\mathbf{FL})^{-1}(x^1,p)=(x^1=x^1,x^2=l_2(x^1,p)), \tag{3.22}$$

其中，l_2 是变量 x^1 和 p的函数。注意，映射 (3.22) 中的变换方程 $x^2=l_2(x^1,p)$，是将变换方程 $p=l_1(x^1,x^2)$ 中的变量 x^2表示为变量 x^1 和 p的函数后得到的解。式（3.22）中映射 $(\mathrm{FL})^{-1}$ 的变换方程为：$x^1=x^1$，以及 $x^2=p(x^1)^{2\alpha}$。

现在，考虑时间无关不变量方程 (3.11)，它是动力系统 S_2^1 中粒子的能量函数。将二元组 $(x^1,x^2)\ =(q,\dot{q})$ 代入该方程，再在所得方程中使用变换方程 $x^2=p(x^1)^{2\alpha}$，即可得到余切丛（或相空间）中的所需不变量。所得量称为粒子在相空间上的哈密顿函数，记为 $H(q,p)$:

$$H(q,p)=\frac{1}{2}p^2q^{2\alpha}-\frac{1}{2}Cq^{-2\alpha+2}\in\mathcal{F}(\mathrm{T}^*\mathbb{Q}). \tag{3.23}$$

这样，具有 EFDE (2.9) 的 FLRW宇宙学模型可视为一维粒子动力学。该粒子的广义坐标和广义速度分别为 q 和 $\dot{q}$。作用于粒子、且取决于位置q 和速度 $\dot{q}$ 的 一维力由方程 (2.11) 给出。该粒子的拉格朗日函数和哈密顿函数分别由方程 (3.17) 和 (3.23) 给出。拉格朗日函数 $L(q,\dot{q})$ 定义在切丛 $\mathrm{T}\mathbb{Q}=(q,\dot{q})$ 的空间 $\mathcal{F}(\mathrm{T}\mathbb{Q})$ 上，而哈密顿函数 $H(q,p)$ 定义在余切丛 $\mathrm{T}^*\mathbb{Q}\ =\ (q,p)$ 的空间 $\mathcal{F}(\mathrm{T}^*\mathbb{Q})$ 上。现在，为了考察这些函数是否满足 (A.10)，假设已知 L，则雅可比条件 (A.10) 成立，即 $\det\omega_{11}(q,\dot{q})\ =\ q^{-2\alpha}\ \neq\ 0$。雅可比条件 (A.10) 意味着定理 A.2 的必要条件成立，因此，FLRW宇宙学模型是一个超正则拉格朗日系统。于是，根据定理 A.2，该动力系统存在一个哈密顿函数。根据方程 (A.11)，该函数如下求得：$H=p\dot{q}-L(q,\dot{q})$，其中 $\dot{q}(q,p)$ 是方程 $p=\partial L/\partial\dot{q}$ 的解。根据方程 (A.13)，与广义坐标 q 正则共轭的广义动量如下:

$$p=\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2q^{-2\alpha}+\frac{1}{2}Cq^{-2\alpha+2}\right)=\dot{q}q^{-2\alpha}. \tag{3.24}$$

求解方程 (3.24)，将变量 $\dot{q}$ 表示为正则变量 $(q,\ p)$的函数，可得关系式$\dot{q}\ =\ pq^{2\alpha}$。将其代入 $H\ =\ p\dot{q}\ -\ L$，即可得到哈密顿函数（3.23）。这

正是我们先前通过 Hojman方法得到的函数；在该方法中使用了泊松括号矩阵。

现在出现了一个问题：能否不使用拉格朗日函数 S_n^2，而改用哈密顿函数 $\mathbb{Q}$，来表述动力系统 $= q^s = (q^1, \cdots, q^n)$ 中粒子的运动方程，其中构形空间为$H(q^s, p_s)$？为回答这个问题，我们对方程（A.12）两边关于纤维 p_α's, $\alpha = 1, \cdots, n$求偏导：

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(p_\beta \dot{q}^\beta - L\right) = \dot{q}^\alpha. \tag{3.25}$$

我们再次对方程（A.12）两边关于坐标q^α求偏导：

$$\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial}{\partial q^\alpha}\left(p_\beta \dot{q}^\beta - L\right) = -\dot{p}_\alpha, \tag{3.26}$$

这里用到了方程（A.13）和欧拉-拉格朗日方程（1.4）。因此，方程（3.25）和（3.26）给出了哈密顿动力学的基本方程，称为哈密顿正则方程。这些方程仅包含哈密顿函数 $H(q^s, p_s)$ 和正则变量 (q^s, p_s)。需要注意的是，方程组（3.25）和（3.26）构成了关于 $2n$ 个未知量 $(q^s, p_s) := (q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$ 的 $2n$ 个一阶常微分方程。在哈密顿形式中，这些一阶哈密顿正则方程由关于 n 个未知量 $q^s := (q^1, \cdots, q^n)$ 的 n 个二阶欧拉-拉格朗日方程（1.4）所取代。只要满足雅可比条件（A.10），这两组常微分方程——欧拉-拉格朗日方程和哈密顿正则方程——就完全等价。哈密顿形式的主要优点之一是，q^α's 和 p_α's 被平等对待。为了一致地做到这一点，我们考虑如下定义的 $2n$ 个变量 ξ^k's、$k = 1$、$\cdots$、$2n$ [26]:

$$\xi^k = \begin{cases} q^k, & k = 1, \cdots, n, \\ p_{k-n}, & k = n+1, \cdots, 2n, \end{cases} \tag{3.27}$$

其中，前 n 个 ξ^k在方程（3.27）中是广义坐标 $q^s = (q^1, \cdots, q^n)$，后 n 个是粒子的广义动量 $p_s = (p_1, \cdots, p_n)$。现在，我们可以证明哈密顿正则方程（3.25）和（3.26）可以表示为统一形式。为此，我们定义 $2n$ 变量 Q^k如下:

$$Q^k := \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p_k} = \dfrac{\partial H}{\partial \xi^{k+n}}, & k = 1, \cdots, n, \\ -\dfrac{\partial H}{\partial q^k} = -\dfrac{\partial H}{\partial \xi^{k-n}}, & k = n+1, \cdots, 2n, \end{cases} \tag{3.28}$$

作为作用于余切丛 $\mathrm{T}^*\mathbb{Q}$中粒子的力函数。根据定义（3.28），n 个 Q^k是 $\partial H/\partial \xi^{k+n}$，最后 n 个是 $-\partial H/\partial \xi^{k-n}$。利用方程（3.27）和（3.28），用统一坐标 ξ^k和统一力函数 Q^k 表示的哈密顿正则方程（3.25）和（3.26）为：$\dot{\xi}^k = Q^k$，$k = 1$，$\cdots$，$2n$。现在，我们将由元素S^{jk}组成、其 j、$k = 1$、$\cdots$、$2n$为 $2n \times 2n$ 的“辛矩阵”S定义如下:

$$S^{jk} = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{pmatrix}, \tag{3.29}$$

其中 I_n和 O_n分别是 $n \times n$单位矩阵和零矩阵。利用（3.29），哈密顿正则方程 $\dot{\xi}^k = Q^k$的$k = 1$、$\cdots$、$2n$、可在余切丛 $\mathrm{T}^*\mathbb{Q}$ 上写成如下形式 [30]:

$$\dot{\xi}^k = S^{kj}\frac{\partial H(\xi^i)}{\partial \xi^j}, \tag{3.30}$$

其中 $k=1$、$\cdots$、$2n$ 和 $S^{jk}\in\mathcal{F}(\mathrm{T}^*\mathbb{Q})$。方程（3.30）称为哈密顿正则方程（3.25）和（3.26）的统一形式。哈密顿形式下的方程（3.30）与 Hojman形式下的方程（3.13）有着显著的相似性。由方程（3.13）得到统一形式（3.30），只需将 $x^i\to\xi^i$、$\dot{q}^s\to p_s$、$J^{ij}\to S^{ij}$、$I\left(x^i\right)\to H\left(\xi^i\right)$替换为 i、$j=1$、$\cdots$、$2n$、$s=1$、$\cdots$、n，并且 $I(x^i)\in\mathcal{F}(\mathrm{T}\mathbb{Q})$ 是构形空间 $\mathbb{Q}=q^s$ 中切丛 $\mathrm{T}\mathbb{Q}$ 上粒子的能量函数（时间无关不变量）：$=(q^1,\cdots,q^n)$。

让我们将方程（3.30）应用于FLRW宇宙学模型的动力系统。需要记住的是，FLRW宇宙学模型中粒子的哈密顿函数由方程（3.23）给出。该模型中的辛矩阵 S^{ij} 是一个 2×2 矩阵。利用这一点，并将哈密顿函数（3.23）代入哈密顿正则方程（3.30），可得

$$\dot{q}=\dot{\xi}^1=S^{12}\frac{\partial H}{\partial\dot{\xi}^2}=pq^{2\alpha},\tag{3.31}$$

$$\dot{p}=\dot{\xi}^2=S^{21}\frac{\partial H}{\partial\dot{\xi}^1}=-\alpha p^2q^{2\alpha-1}+\beta q^{-2\alpha+1}.\tag{3.32}$$

结合方程（3.31）和（3.32）可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}q^{-2\alpha}\right)=-\alpha(\dot{q}q^{-2\alpha})^2q^{2\alpha-1}+\beta q^{-2\alpha+1}.\tag{3.33}$$

对方程（3.33）左端关于时间求导，并对所得方程进行化简，即可得到EFDE（2.9）。

现在，对于 S_1^2 具有一个自由度的动力系统以及拉格朗日函数（3.17），我们将泛函作用量定义为 $S[q\ (t)\ ]$，其定义如下有限积分:

$$S[q(t)]=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{1}{2}\,\dot{q}^2\,q^{-2\alpha}+\frac{1}{2}\,C\,q^{-2\alpha+2}\right)\mathrm{d}t\,.\tag{3.34}$$

事实上，泛函作用量（3.34）是从一个函数集到实数集 $\mathbb{R}$的映射。该映射的定义域是由二阶可微函数组成的集合$\Omega=\{q\ (t)\ :\ t\in[t_1,t_2]\}$ 在闭区间 $[t_1,t_2]$上。该映射表示为 [31] $S:\ \Omega\to\mathbb{R}$，其中

$$q(t)\mapsto S[q(t)]=\int_{t_1}^{t_2}L\ (t,q(t),\dot{q}(t))\,\mathrm{d}t.\tag{3.35}$$

定义 3.2（泛函作用量的不变性）。假设对于具有一个自由度的动力系统 S_1^2，其拉格朗日函数为 $L(t,q,\dot{q})$，映射 (3.35) 中的有限积分是闭区间 $[t_1,t_2]\subset\mathbb{R}^+$上的泛函作用量。该泛函作用量在点变换的单参数诺特群 [32–34] $\mathbf{\Phi}_\varepsilon^{(\mathrm{N})}$: $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$, 其中

$$(t,q)\mapsto(\bar{t},\bar{q})=\mathbf{\Phi}_\varepsilon^{(\mathrm{N})}(t,q)=\big(\alpha(t,q;\varepsilon),\psi(t,q;\varepsilon)\big),\tag{3.36}$$

当存在如下满足关系式：的标量场 $N(t,q;\varepsilon)$ 时，称其为不变量

$$\dot{\alpha}L\left(\alpha,\psi(t,q;\varepsilon),(\dot{\alpha})^{-1}\dot{\psi}(t,q;\varepsilon)\right)=L\big(t,q(t),\dot{q}(t)\big)+\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\,.\tag{3.37}$$

这一关系称为“泛函作用量不变条件”或变分对称条件 [34]。

需要指出的是，对于给定的拉格朗日函数，如果变分对称条件（3.37）成立，那么该动力系统具有“变分对称性”。对于这样的动力系统，要找到第一积分（或不变量），我们必须使用诺特定理。对于由具有一个自由度的粒子组成的动力系统，该定理可表述如下：

定理 3.1 (诺特定理)。 设具有一个自由度、拉格朗日函数为 S_1^2 的动力系统 $L\,(t,\ q,\ \dot{q})$，其泛函作用量 $S[q(t)]$ 在由无穷小变换方程给出的单参数点变换诺特群 (3.36)下保持不变：

$$\begin{aligned} t \to \bar{t} = \alpha(t,q;\varepsilon) = t + \varepsilon\tau(t,q) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ q \to \bar{q} = \psi(t,q;\varepsilon) = q + \varepsilon\xi(t,q) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{3.38}$$

即变分对称条件 (3.37)成立，则存在一个函数，例如

$$I(t,q,\dot{q}) = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\left(\xi - \dot{q}\tau\right) - L\tau + G, \tag{3.39}$$

称为诺特荷（或诺特不变量），它满足诺特恒等式 y:

$$\left(\xi - \dot{q}\tau\right)\frac{\delta S}{\delta q} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{3.40}$$

沿动力系统 $S_1^2, \delta S/\delta q = 0$ 的任意运动方程解，诺特荷守恒，即，

$$\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|_{\frac{\partial S}{\partial q}} = 0. \tag{3.41}$$

在诺特荷 (3.39) 中， $G\colon = \partial N/\partial\varepsilon\big|_{\varepsilon=0}$ 称为贝塞尔-哈根（*BH*）项、规范项，有时也称为边界项。

证明。参见参考文献 [32, 34, 35]。

诺特恒等式可改写如下：

$$\left(\xi - \dot{q}\tau\right)\mathrm{E}(L) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(G + H\tau - p\xi\right), \tag{3.42}$$

其中

$$\mathrm{E} := \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}, \tag{3.43}$$

是拉格朗日算子（或变分导数），而 $E(L) = \delta S/\delta q = 0$ 是欧拉-拉格朗日方程。有时，方程 (3.42) 被称为“诺特-贝塞尔-哈根恒等式”（NBHI） [36]。需要注意的是，方程 (3.38) 中的函数 $\tau(t,q) = \partial\alpha/\partial\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ 和 $\xi(t,q) = \partial\psi/\partial\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ 是诺特点对称性 (3.36) 的无穷小变换。对于给定的拉格朗日函数，在处理这一不变性判据时，方程 (3.37) 并不适合用于研究该问题的诺特点对称性，因为求解方程 (3.37) 以求得诺特点对称性的无穷小变换可能很困难。因此，大约在 1970 年，H. Rund 和 A. Trautman 为解决这一问题，提出了一个关于泛函作用量 [33] 不变性判据的有用定理。若对方程 (3.37) 两边关于参数 ε 求导，然后令 $\varepsilon = 0$，所得方程即为 Rand-Trautman 恒等式，表示如下 [37]:

定理 3.2（Rand-Trautman 恒等式）。设对于一个具有拉格朗日函数$L(t,q,\dot{q})$的动力系统，有限积分

$$S[q]=\int_{t_1}^{t_2}L(t,q,\dot{q})\mathrm{d}t, \tag{3.44}$$

为闭区间上的泛函作用量 $[t_1,t_2]\subset\mathbb{R}^+=(0,+\infty)$。若此泛函作用量在点变换的单参数诺特群 (3.36)及其无穷小变换方程 (3.38) 下保持不变，则无穷小变换 $\tau(t,q)$ 和 $\xi(t,q)$ 满足兰德-特劳特曼恒等式：

$$\mathrm{RT}(L,\mathbf{X},G):=\dot{G}-\mathbf{X}^{[1]}(L)-\dot{\tau}L=0, \tag{3.45}$$

其中，向量场 $\mathbf{X}=\tau\partial_t+\xi\partial_q$ 是 $\mathbf{\Phi}_\varepsilon^{(\mathrm{N})}$的生成元，而 $\mathbf{X}^{[1]}$ 是$\mathbf{X}$的一阶延拓，其定义如下：

$$\mathbf{X}^{[1]}:=\tau\frac{\partial}{\partial t}+\xi\frac{\partial}{\partial q}+(\dot{\xi}-\dot{\tau}\dot{q})\frac{\partial}{\partial\dot{q}}. \tag{3.46}$$

一般而言，对于具有 n 个自由度的动力系统 S_n^2 及拉格朗日函数 $L(t,q^s,\dot{q}^s)$，若变换的单参数诺特群 $\mathbf{\Phi}_\varepsilon^{(\mathrm{N})}$：$\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n$，其中

$$(t,q^s)\mapsto(\bar{t},\bar{q}^s)=\mathbf{\Phi}_\varepsilon^{(\mathrm{N})}(t,q^s)=\left(\alpha(t,q^l;\varepsilon),\psi^s(t,q^l;\varepsilon)\right), \tag{3.47}$$

其无穷小变换方程为

$$\begin{aligned}t\to\bar{t}&=a(t,q^i;\varepsilon)=t+\varepsilon\tau(t,q^i)+\mathcal{O}(\varepsilon^2),\\ q^s\to\bar{q}^s&=\psi^s(t,q^i;\varepsilon)=t+\varepsilon\xi^s(t,q^i)+\mathcal{O}(\varepsilon^2),\end{aligned} \tag{3.48}$$

使泛函作用量保持不变

$$S[q^s]=\int_{t_1}^{t_2}L(t,q^i,\dot{q}^i)\mathrm{d}t, \tag{3.49}$$

于是，Rand-Trautman恒等式可写为（3.45），其中

$$\mathbf{X}^{[1]}:=\tau\frac{\partial}{\partial t}+\xi^k\frac{\partial}{\partial q^k}+(\dot{\xi}^k-\dot{\tau}\dot{q}^k)\frac{\partial}{\partial\dot{q}^k}, \tag{3.50}$$

是生成元向量 $\mathbf{X}=\tau\partial_t+\xi^k\partial_{q^k}$ 关于诺特对称群（3.47）的一阶延拓。

此处，为便于计算，我们令规范项为零：$G=0$。于是，Rand-Trautman恒等式（3.45）可写成更简洁的形式：

$$\frac{\partial L}{\partial q}\xi+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\dot{\xi}+\frac{\partial L}{\partial t}\tau-H\dot{\tau}=0. \tag{3.51}$$

关于宇宙时间的全导数算子 $t,\ \dot{}=\mathrm{d}/\mathrm{d}t$，可得无穷小变换的以下关系 $\tau(t,\ q)$和 $\xi(t,\ q)$，它们对应于诺特生成元：$\dot{\tau}=\tau_t+\dot{q}\tau_q$以及 $\dot{\xi}=\xi_t+\dot{q}\xi_q$。将这些关系代入 Rand-Trautman恒等式（3.51），并进行化简后，可得以下关系

$$q^{-2\alpha}[-2a\dot{q}^2\xi+2\dot{q}(\xi_t+\dot{q}\xi_q)-(\dot{q}^2-Cq^2)(\tau_t+\dot{q}\tau_q)]=0. \tag{3.52}$$

一般而言， $q^{-2\alpha} \neq 0$，因此要使这一关系始终成立，充要条件是括号内的表达式等于零

$$Cq^2\tau_t + (2\xi_t + Cq^2\tau_q)\dot{q} + (2\xi_q - \tau_t - 2a\xi)\dot{q}^2 - \tau_q\dot{q}^3 = 0. \tag{3.53}$$

为了使方程（3.53）对变量 t 和 q的所有取值都成立，速度 $\dot{q}$ 的各次幂对应的系数必须分别且独立地等于零，这既是必要条件也是充分条件。令 $\dot{q}$ 的各次幂对应的所有系数均为零，可得以下方程：

$$\partial_t\tau = 0, \tag{3.54}$$

$$2\partial_t\xi + Cq^2\partial_q\tau = 0, \tag{3.55}$$

$$2\partial_q\xi - \partial_t\tau - 2\alpha\xi = 0, \tag{3.56}$$

$$\partial_q\tau = 0. \tag{3.57}$$

方程（3.54）—（3.57）构成了关于无穷小量 $\tau(t,q)$ 和 $\xi(t,q)$ 的一阶偏微分方程组。这些方程称为“Killing方程”。如果能同时求解该微分方程组，得到函数 $\tau(t,q)$ 和 $\xi(t,q)$，就可以得到诺特点对称性的生成元。下一步，得到群的生成元后，应用“李第一基本定理” [38]，，即可获得诺特对称群本身，该群使泛函作用量（3.34）保持不变。现在，我们来求解Killing方程（3.54）—（3.57）。其中，方程（3.54）和（3.57）表明， τ 不显含变量 t 和 q，因此 τ 是常数， $\tau = c_1$。将方程（3.54）和（3.57）代入方程（3.55）和（3.56），可得 $\xi_t = 0$ 和$-\alpha\xi + \xi_q = 0$。Killing方程 $\xi_t = 0$ 表明， ξ 不显含 t，因此$\xi = \xi(q)$。所以，Killing方程 $-\alpha\xi + \xi_q = 0$ 中的偏导数可以替换为全导数，即 $\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}q - \alpha\xi = 0$。对该一阶常微分方程积分，得到解 $\xi = c_2\mathrm{e}^{\alpha q}$，其中 c_2 为积分常数。因此，方程（3.54）—（3.57）的通解为

$$\tau(t,q) = c_1, \quad \xi(t,q) = c_2\mathrm{e}^{\alpha q}. \tag{3.58}$$

现在，利用函数（3.58），因此我们得到点对称性单参数诺特群（3.36）的生成元为：$\mathbf{X}^{(\mathrm{N})} = c_1\partial_t + c_2\mathrm{e}^{\alpha q}\partial_q$。可以看出，该向量是向量 ∂_t 和 $\mathrm{e}^{\alpha q}\partial_q$ 的线性组合。若分别将这些向量记为 $\mathbf{X}_1^{(\mathrm{N})}$ 和 $\mathbf{X}_2^{(\mathrm{N})}$，则可知给定的拉格朗日函数有两个生成元向量：$\mathbf{X}_1^{(\mathrm{N})} = \partial_t$，$\mathbf{X}_2^{(\mathrm{N})} = e^{\alpha q}\partial_q$。以 $\mathbf{X}_1^{(\mathrm{N})} = \partial_t$ 为无穷小生成元的诺特点对称性为$\mathbf{\Phi}_{\varepsilon,1}^{(\mathrm{N})}$：$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$，其中

$$(t,q) \mapsto (\bar{t},\bar{q}) = \mathbf{\Phi}_{\varepsilon,1}^{(\mathrm{N})}(t,q) = \big(\alpha(t,q;\varepsilon), \psi(t,q;\varepsilon)\big) = (t+\varepsilon, q). \tag{3.59}$$

映射（3.59）是一个时间平移变换。我们将求出一个诺特点对称性$\mathbf{\Phi}_{\varepsilon,2}^{(\mathrm{N})}$，使 $\mathbf{X}_2^{(\mathrm{N})} = e^{\alpha q}\,\partial_q$ 成为其无穷小生成元。为此，我们使用“李第一基本定理” [38]。根据该定理，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}(\bar{t},\bar{q}) = \mathbf{X}_2^{(\mathrm{N})} = (0, e^{\alpha\bar{q}}), \tag{3.60}$$

初始条件为（$\bar{t}$， $\bar{q}$）$|_{\varepsilon=0}$ =（t， q）。对这些微分方程两边积分，并利用初始条件，可以轻松得到 $\mathbf{\Phi}_{\varepsilon,2}^{(\mathrm{N})}$ 的变换函数 $\alpha(t,\ q;\ \varepsilon)$ 和 $\psi(t,\ q;\ \varepsilon)$，如下所示：

$$\alpha(t,q;\varepsilon) = t, \quad \psi(t,q;\varepsilon) = -\frac{1}{\alpha}\ln(\mathrm{e}^{-\alpha q} - \alpha\varepsilon). \tag{3.61}$$

因此，与生成元 $\mathbf{X}$ $\mathbf{\Phi}_{\varepsilon\,2}^{(\mathrm{N})}$ $\mathbb{R}^{+}\times$ e 相关的诺特点对称性变为：，：

$$\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}$$

$$(t,q)\mapsto(\bar{t},\bar{q})=\mathbf{\Phi}_{\varepsilon,2}^{(\mathrm{N})}(t,q)=\big(t,-\alpha^{-1}\ln(\mathrm{e}^{-\alpha q}-\alpha\varepsilon)\big). \tag{3.62}$$

现在，根据定理 3.1（诺特定理），与诺特点对称性（3.36）相关联的诺特荷守恒

$$I(t,q,p):=G+H\tau-p\xi=\text{const.} \tag{3.63}$$

利用动力系统 S_1^2的方程组（A.16），我们得到 $\dot{q}=\partial H/\partial p=pq^{-2\alpha}$。因此，广义动量为 $p=\dot{q}q^{2\alpha}$。将规范项 $G=0$ 和广义动量 $p=\dot{q}q^{2\alpha}$ 代入方程（3.63），可得

$$I(t,q,\dot{q}q^{2\alpha})=H(q,\dot{q}q^{2\alpha})\tau-\ \dot{q}q^{2\alpha}\xi=\text{const.} \tag{3.64}$$

这个守恒量是扩展切丛 $\mathbb{R}^{+}\times\mathbf{T}^{*}\mathbb{Q}$ 的变量的函数，我们将其记为 $I_{\mathrm{N}}(t,q,\dot{q}):=I(t,q,\dot{q}q^{2\alpha})$。因此，与诺特点对称性 $\mathbf{\Phi}_{\varepsilon}^{(\mathrm{N})}(t,q)$ 相关联的守恒诺特荷变为：$I_{\mathrm{N}}(t,q,\dot{q})=E(q,\dot{q})\tau-\dot{q}q^{2\alpha}\xi=c_{\mathrm{N}}$，其中 $E(q,\dot{q})=H(q,\dot{q}q^{2\alpha})$ 是粒子的能量函数，而 c_{N} 是一个常数。需要注意的是，能量函数 E 的值恒与哈密顿函数 H 相同，但两者是不同变量的函数。E 是 q、$\dot{q}$（以及可能的 t）的函数，而 H 则必须始终表示为 q、p（以及可能的 t）的函数。由于两者的函数形式不同，因此即使它们的数值相同，也使用不同的符号（能量函数用 E，哈密顿函数用 H）来表示：$E(q,\dot{q})=H(q,p)$。与诺特点对称性（3.59）相关联的无穷小变换为 $\tau=1$ 和 $\xi=0$。将这些函数代入守恒量（3.64），即可得到

$$I_{\mathrm{N},1}(q,\dot{q})=E(q,\dot{q})=c_{\mathrm{N},1}\,, \tag{3.65}$$

其中 $c_{\mathrm{N},1}$ 是一个常数。因此，与诺特点对称性对应的第一积分$\mathbf{\Phi}_{\varepsilon\,1}^{(\mathrm{N})}$，$(t,\ q)\ =(t+\varepsilon,\ q)$ 的无穷小生成元 $\mathbf{X}_1^{(\mathrm{N})}=\partial_t$ 是能量守恒。这样，与诺特点对称性（3.62）及其无穷小生成元 $\mathbf{X}_2^{(\mathrm{N})}=e^{\alpha q}\partial_q$ 对应的守恒量为

$$I_{\mathrm{N},2}(q,\dot{q})=\dot{q}q^{-2\alpha}e^{\alpha q}=c_{\mathrm{N},2}. \tag{3.66}$$

为清晰起见，所得结果汇总于表1中；我们列出了与微分方程（2.9）对应的诺特点对称性以及与这些对称性相关的不变量

表1。微分方程（2.9）的诺特点对称性及与这些对称性对应的第一积分。

对称性	不变量（第一积分）
$\mathbf{X}_1^{(\mathrm{N})}=\partial_t$	$I_{\mathrm{N},1}(q,\dot{q})=\frac{1}{2}\dot{q}^2q^{-2\alpha}-\frac{1}{2}Cq^{-2\alpha+2}=E=c_{\mathrm{N},1}$
$\mathbf{X}_2^{(\mathrm{N})}=e^{\alpha q}\partial_q$	$I_{\mathrm{N},2}(q,\dot{q})=\dot{q}q^{-2\alpha}e^{\alpha q}=c_{\mathrm{N},2}$

EFDE（2.9）的通解无法通过同时求解诺特不变量（3.65）和（3.66）获得，因为这些不变量彼此并不独立。因此，尽管诺特对称性方法为我们提供了有关

宇宙学模型的哈密顿结构的有用信息，但它并不适用于求解像我们的宇宙学模型这样的微分方程。正如我们将在第4节所展示的，这一想法并不正确，因此可以使用哈密顿-雅可比方程找到求解方程（2.9）所需的两个独立不变量，从而完成问题的求解。

4 利用 IHJM 求解 FLRW 的微分方程

我们重新考察第 2 节中的 FLRW宇宙学模型。我们在第 3 节中分别通过 Hojman形式和诺特对称性方法研究了这一模型。如前所述，在 Hojman形式中，动力学点用二元组 $x^i := (q, \dot{q})$ 表示，作用于粒子的力用二元组 $\Phi^i := (\dot{q}, F(q, \dot{q}))$ 表示，微分方程 (2.9) 可改写为 (3.1)。这些方程构成了构形空间 $\mathbb{Q} = (q)$ 的切丛 $\mathrm{T}\mathbb{Q}$ 上的一组一阶常微分方程。在这种形式中，切丛 $\mathrm{T}\mathbb{Q}$ 由构形空间和一组切空间 $\mathrm{T}_q\mathbb{Q}$构成，每个切空间都附属于一个点 $q \in \mathbb{Q}$。Hojman 方程组将向量场 $\mathrm{X} = x^i\partial_{x^i}$ 在 $\mathfrak{X}(\mathrm{T}\mathbb{Q})$ 中的分量 $\dot{x}^i$、 $i = 1$、2 设为向量场$\mathbf{\Phi} = \Phi^i\partial_{x^i} \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}\mathbb{Q})$ 的相应分量。因此，FLRW 模型的 EFDE 表现得如同一个 Hojman动力系统，其粒子在切丛 $\mathrm{T}\mathbb{Q}$中的控制方程由两个一阶常微分方程组成的系统 (3.2) 给出。在这种形式中，利用时间无关不变量 (3.11)——它是与无穷小生成元 $\mathrm{X} = \partial_t$ 相关联的动力系统的能量，且 $\mathrm{X} = \partial_t$ 是该动力系统的两个李点对称性和诺特点对称性之一——我们可以得到拉格朗日函数 (3.16)，进而得到哈密顿函数 (3.23)。

现在，我们将附录B中介绍的方法应用于具有哈密顿函数（3.23）的FLRW宇宙学模型。将此函数代入哈密顿-雅可比方程（B.13），得到以下方程

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 q^{2\alpha} - \frac{1}{2}Cq^{2-2\alpha} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{4.1}$$

为了求解偏微分方程（4.1），我们将哈密顿主函数分离为以下形式 $S(t, q, P) = S_1(q, P) + S_2(t, P)$。于是得到 $\partial S/\partial q = \mathrm{d}S_1/\mathrm{d}q$以及 $\partial S/\partial t = \mathrm{d}S_2/\mathrm{d}t$。将这些方程代入方程（4.1），得到以下一阶常微分方程

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}q}\right)^2 q^{2\alpha} - \frac{1}{2}Cq^{2-2\alpha} = -\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}t}, \tag{4.2}$$

正如它可以是 s 上式两边显然必须等于一个常数值 P，该常数称为“分离常 数”。因此，我们得到两个一阶常微分方程

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}q}\right)^2 q^{2\alpha} - \frac{1}{2}Cq^{2-2\alpha} = P, \tag{4.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}t} = -P. \tag{4.4}$$

对方程（4.3）和（4.4）进行积分，可得到以下解

$$S_1(q, P) = \int q^{-\alpha}\sqrt{Cq^{2-2\alpha} + 2P}\,\mathrm{d}q, \tag{4.5}$$

$$S_2(t, P) = -Pt. \tag{4.6}$$

然后，可以得到哈密顿主函数：

$$\begin{aligned} S(t,q,P) &= S_1(q,P)+S_2(t,P) \\ &= -Pt+\int q^{-\alpha}\sqrt{Cq^{2-2\alpha}+2P}\,\mathrm{d}q. \end{aligned} \tag{4.7}$$

可以证明，函数（4.7）满足海森条件 $\partial^2 S/\partial q\partial P \neq 0$。因此，生成函数（4.7）是 HJE（4.1）的完备解。现在，将该生成函数代入方程组（B.14）的第一个方程，可得到以下方程

$$Q=-t+\int \frac{q^{-\alpha}\mathrm{d}q}{\sqrt{Cq^{2-2\alpha}+2P}}. \tag{4.8}$$

为计算方程（4.8）中的积分，可以定义新变量： $u:=q^{-\alpha+1}$。我们分别在三种不同情况下计算此积分： $C>0$、 $C=0$ 和 $C<0$。最后可得

$$Q=\begin{cases} -t+\frac{1}{\sqrt{|\beta(1-\alpha)|}}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{|C|}}{\sqrt{2P}}q^{1-\alpha}\right) & C<0, \\ -t+\frac{q^{1-\alpha}}{\sqrt{2P}(1-\alpha)} & C=0, \\ -t+\frac{1}{\sqrt{\beta(1-\alpha)}}\sinh^{-1}\left(\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{2P}}q^{1-\alpha}\right) & C>0, \end{cases} \tag{4.9}$$

其中，常数 α 和 β 根据方程（2.8）定义。下文中，将生成函数（4.7）代入方程组（B.14）的第二个方程，可得

$$p=q^{-\alpha}\sqrt{Cq^{2-2\alpha}+2P}. \tag{4.10}$$

现在，同时求解方程（4.9）和（4.10），可得到正则变量Q 和 P 关于变量 p、 q 和 t的表达式。同样，我们分别在三种不同情况下进行计算： $C<0$、 $C=0$ 和 $C>0$:

（a）情形 $C>0$。在这种情形下，通过求解关于变量P和 Q 的代数方程（4.9）和（4.10，我们得到

$$P = \frac{1}{2}p^2q^{2\alpha}-\frac{1}{2}Cq^{2-2\alpha}, \tag{4.11}$$

$$Q = -t+\frac{1}{\sqrt{\beta(1-\alpha)}}\sinh^{-1}\left(\frac{\sqrt{C}q^{-\alpha+1}}{\sqrt{p^2q^{2\alpha}-Cq^{-2\alpha+2}}}\right). \tag{4.12}$$

我们注意到，方程（4.11）和（4.12）共同给出了宇宙学常数 Λ 为正时的正则变换。事实上，该变换保持哈密顿正则方程不变。

（b）情形 $C=0$。同理，可以证明情形 $C=0$下正则变换的方程为

$$P = \frac{1}{2}p^2q^{2\alpha}, \tag{4.13}$$

$$Q = -t+\frac{q^{1-2\alpha}}{(1-\alpha)p}. \tag{4.14}$$

（c）情形 $C<0$。在这种情况下，正则变换的方程变为

$$P = \frac{1}{2}p^2q^{2\alpha}+\frac{1}{2}|C|q^{2-2\alpha}, \tag{4.15}$$

$$Q = -t+\frac{1}{\sqrt{|\beta(1-\alpha)|}}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{|C|q^{-\alpha+1}}}{\sqrt{p^2q^{2\alpha}+|C|q^{-2\alpha+2}}}\right). \tag{4.16}$$

根据与广义坐标 q 共轭的广义动量的定义，方程（A.13）给出 $p=\dot{q}q^{-2\alpha}$。

现在我们可以从正则变换中提取与 EFDE（2.9）相关的不变量了。在这种情况下，将 $p=\dot{q}q^{-2\alpha}$ 代入正则变换（4.11）-（4.16）即可得到相应的不变量。所得结果汇总于表2；我们展示了三种不同情形 $C>0$、 $C=0$、 $C<0$对应的不变量。请注意，在表2中，不变量右侧的 P 和 Q 均为常数。

表2。从正则变换得到的与 EFDE（2.9）相关的不变量。

不同情形	不变量（第一积分）
$C<0$ $(\Lambda<0)$	$I_{\mathrm{Hj},1}(q,\dot{q})=\frac{1}{2}\dot{q}^2q^{3w+1}-\frac{\Lambda}{6}q^{3(w+1)}=P,$ $I_{\mathrm{Hj},2}(t,q,\dot{q})=-\frac{3(w+1)}{2}t+\frac{1}{\sqrt{-\Lambda/3}}\tan^{-1}\left(\frac{q}{\dot{q}}\sqrt{-\Lambda/3}\right)=(1-\alpha)Q$
$C=0$ $(\Lambda=0)$	$I_{\mathrm{Hj},1}(q,\dot{q})=\frac{1}{2}\dot{q}^2q^{3w+1}=P,$ $I_{\mathrm{Hj},2}(t,q,\dot{q})=\frac{-3(w+1)}{2}t+\frac{q}{\dot{q}}=(1-\alpha)Q.$
$C>0$ $(\Lambda>0)$	$I_{\mathrm{Hj},1}(q,\dot{q})=\frac{1}{2}\dot{q}^2q^{3w+1}-\frac{\Lambda}{6}q^{3(w+1)}=P,$ $I_{\mathrm{Hj},2}(t,q,\dot{q})=-\frac{3(w+1)}{2}t+\frac{1}{\sqrt{\Lambda/3}}$双曲正切$^{-1}\left(\frac{q}{\dot{q}}\sqrt{\Lambda/3}\right)=(1-\alpha)Q.$

值得注意的是，通过表2中的正则变换得到的不变量，与我们此前通过 ISGM 得到的不变量相同 [1,39]。将这些不变量作为一个含两个未知数的二元代数方程组来求解 q 和 $\dot{q}$，便可轻松完成该问题。因此，分别求解由表2中的不变量构成的方程组，可以得到变量 q 关于时间 t 和常数P 及 Q 的表达式，如下所示

$$q(t)=\begin{cases}\left(-\frac{6P}{\Lambda}\right)^{\frac{1}{3(w+1)}}\sin^{\frac{2}{3(w+1)}}\left[\frac{w+1}{2}\sqrt{-3\Lambda}(t+Q)\right], & \Lambda<0,\\ \left(3P(w+1)\right)^{\frac{1}{3(w+1)}}(t+Q)^{\frac{2}{3(w+1)}}, & \Lambda=0,\\ \left(\frac{6P}{\Lambda}\right)^{\frac{1}{3(w+1)}}\sinh^{\frac{2}{3(w+1)}}\left[\frac{w+1}{2}\sqrt{3\Lambda}(t+Q)\right], & \Lambda>0,\end{cases} \tag{4.17}$$

这是通过使用哈密顿-雅可比不变量求解 HJE（2.9）而得到的 EFDE 的通解（）。正如我们所见，这一解是通过求解 HJE（4.1）并使用保持 HCEs 不变的正则变换 $\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{CT}}(t,q,p)\mapsto(t,Q,P)$ 得到的。在哈密顿动力学中，由于我们处理的是正则变换对称性，当所需的宇宙学模型能够描述为动力系统时，便可得到该动力系统的独立不变量。如果存在与时间无关的运动常数，那么动力系统的哈密顿形式便是研究该宇宙学模型的合适方法，因为对于动力系统，可以通过 Hojman方法构造拉格朗日函数和哈密顿函数。因此，利用 HJE 可以找到保持 HCEs 不变的正则变换。完成这一变换后，我们实际上便找到了两个独立不变量$\left(I_{\mathrm{HJ},1},I_{\mathrm{HJ},2}\right)=\left((1-\alpha)Q,P\right)$。这样，所需问题便可通过 IHJM 求解。这种求解方法还有另一项优点：除了得到问题的完整解之外，也能求解 IPCV。构造宇宙学模型的拉格朗日函数和哈密顿函数尤为重要，因为通过构造拉格朗日函数（进而构造哈密顿函数），可以采用 Hojman 方法为该动力系统构造具有泊松括号和拉格朗日括号的哈密顿结构。例如，如果需要在宇宙学模型中提出量子

论证，那么 IHJM 也可用于那些具有场论方程、且需要寻找其拉格朗日函数的宇宙学模型。

5 结论

在本研究中，我们提出了一种新方法，用于求解广义相对论框架下、存在宇宙学常数时空间平坦的FLRW宇宙学模型的微分方程（$k = 0$）。我们将宇宙视为满足状态方程 $p = w\rho$,$-1 \leq w \leq 1$ 的理想流体。本研究称之为 IHJM 的这一方法具有解析性和系统性。除了求解 FLRW宇宙学模型的微分方程外，它还可用于任何动力学表现得如同单粒子的宇宙学模型，因此能够采用哈密顿形式。IHJM 是一种算法式方法，包含若干步骤：首先，我们证明，在存在 Λ且处于广义相对论框架下时，FLRW宇宙学模型的动力学表现得如同迷你超一维空间中的单粒子动力学 $\mathbb{Q} = (a)$，该空间称为构形空间。宇宙学模型与迷你超构形空间$\mathbb{Q} = (a)$之间的这种对应关系，使我们能够利用空间 $\mathbb{Q} = (a)$ 中单粒子的动力学来求解 FLRW宇宙学模型的微分方程。在研究的下一阶段，我们证明，在构形空间中，粒子的能量是该动力系统的运动常数之一。利用这一运动常数并通过 Hojman方法 [39], ，我们分别得到了粒子在切丛空间 T$\mathbb{Q}$ 和余切丛空间 T$^*\mathbb{Q}$ 中的拉格朗日函数与哈密顿函数。随后，我们在哈密顿形式下给出了由泊松括号矩阵 J^{ij} 和拉格朗日括号矩阵 σ_{ij} 构成的哈密顿结构。在接下来的讨论中，我们首先简要回顾了诺特点对称性、诺特定理和 Rand-Trautman 恒等式，然后利用 Killing方程得到了粒子在构形空间中的诺特对称性。我们指出，这些对称性不足以求解粒子的微分方程，因此必须转而使用哈密顿－雅可比定理（定理 B.1）。接着，在已知哈密顿函数的基础上，利用哈密顿－雅可比定理，我们找到了一个保持哈密顿正则方程不变的正则变换。通过这一变换，我们得以显式得到两个独立不变量（或第一积分）I_{HJ},1$(a, \dot{a}) = P$ 和 I_{HJ},2$(t, a, \dot{a}) = (1 - \alpha)Q$。这些不变量与我们此前在其他工作中利用 ISGM 得到的结果完全相同 [1, 40]。事实上，通过 IHJM 提取迷你超空间中粒子微分方程的这两个独立不变量，不仅为我们的宇宙学模型的微分方程提供了精确解析解，也解决了 IPCV。换言之，利用 IHJM，除了获得目标宇宙学模型微分方程的通解之外，还可以从构形空间中的粒子微分方程提取另一项重要结果，即从粒子的微分方程中提取该动力系统的拉格朗日函数；也就是说，无需诉诸亥姆霍兹条件，也无需判断拉格朗日函数存在的必要条件是否成立，即可解决 IPCV。因此，开展这部分研究，即为给定宇宙学模型的微分方程求得拉格朗日函数，在诸如 Rastall引力理论 [41], 这类已知场方程并希望找到其拉格朗日函数的理论中，可能具有特殊的重要性。根据利用 IHJM 和 ISGM 对 FLRW宇宙学模型所得的相同结果，这两种求解方法的关系似乎密切相关。或许将这两种求解方法结合起来，能够为我们提供一套全面的积分理论，用于求解引力与宇宙学中的微分方程。

A 文中使用的一些定义和定理：泊松括号矩阵和拉格朗日括号矩阵、Hojman公式等。

在本附录中，我们回顾本文中使用的一些定义和定理。

定义 A.1（泊松括号矩阵）。对于 *FLRW*宇宙学模型，其动力学可视为粒子在二维切丛$\mathrm{T}\mathbb{Q}$中运动，局部坐标为$x^k := (q, \dot{q})$，且 $I(x^k)$ 是该粒子的一个与时间无关的运动常数。反对称矩阵 J^{ij}，$i, j = 1,2$，满足以下条件，称为泊松括号矩阵 [2]，

（a）反对称条件：

$$J^{ij} = -J^{ji}, \tag{A.1}$$

（b）雅可比恒等式：

$$J^{ij}{}_{,k}J^{kl} + J^{jl}{}_{,k}J^{ki} + J^{li}{}_{,k}J^{kj} = 0, \tag{A.2}$$

（c）以及哈密顿方程：

$$\Phi^i(x^k) = J^{ij}\frac{\partial H}{\partial x^j} := [x^i, H], \tag{A.3}$$

其中，Φ^i's、$i = 1,2$是动力系统 S_2^1 中作用于粒子的力的分量，$H = I(x^k)$是其哈密顿函数。此外，$[A, B]$ 称为泊松括号，其定义为任意一对动力学变量 A（x^i）和 B（x^j）如下：

$$[A, B] := \frac{\partial A}{\partial x^i}J^{ij}\frac{\partial B}{\partial x^j}, \tag{A.4}$$

其中采用爱因斯坦求和约定。请注意，在雅可比恒等式 (A.2),中，符号“,”表示对相应变量求偏导。例如，$J^{ij}{}_{,k} = \partial J^{ij}/\partial x^k$。

请注意，将 $A = x^i$ 和 $B = H$ 代入方程 (A.4)可得 (A.3)：

$$[x^i, H] = \frac{\partial x^i}{\partial x^k}J^{kj}\frac{\partial H}{\partial x^j} = \delta^i{}_k J^{kj}\frac{\partial H}{\partial x^j} = J^{ij}\frac{\partial H}{\partial x^j},$$

其中，$\delta^i{}_k$ 是克罗内克δ：当 $i \neq k$时，$\delta^i{}_k = 0$；当 $i = k$时，$\delta^i{}_k = 1$。

定理 A.1（Hojman公式，2014年）。对于动力系统 S_2^1，若其具有与时间无关的运动常数 $I(x^k)$ 和泊松括号矩阵 $J^{ij}(x^k)$, $i, j = 1, 2$, 则拉格朗日函数 $L(x^k)$定义如下 [2]：

$$L(x^k) = l_1(x^k)\dot{x}^1 - I(x^k), \tag{A.5}$$

其中，函数 $l_1(x^k)$ 是偏微分方程：的通解

$$\frac{\partial l_1(x^k)}{\partial x^2} = \frac{1}{J^{12}(x^k)}. \tag{A.6}$$

事实上，粒子的拉格朗日函数 L是从切丛$\mathrm{T}\mathbb{Q}$到实数集 $\mathbb{R}$的映射，即：L: $\mathrm{T}\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$，其中方程（A.5）成立。因此，$L$ 是构形空间切丛上的实值函数：$L \in \mathcal{F}(\mathbb{TQ})$。

证明。 见 [2]。

需要指出的是，用于计算拉格朗日函数的方程（A.5归功于 S. A. Hojman [2], 因此，在本研究中，我们为纪念其作者，将其称为“Hojman公式”。

定义 A.2（拉格朗日括号矩阵）。对于动力系统 S_2^1 中的一个粒子，其泊松括号矩阵为 $J^{ij}(x^k)$， $i, j = 1, 2$，拉格朗日括号矩阵 $\sigma_{ij}, i, j = 1, 2$，定义如下 [2]:

$$\sigma_{ij} = -J_{ij}. \tag{A.7}$$

其中 J_{ij} 是泊松括号矩阵 J^{ij}的逆映射，也就是说， $J^{ij}J_{jl} = \delta^i{}_l$， 且 $x^k := (x^1, x^2) := (q, \dot{q})$。

很容易证明，泊松括号矩阵 J^{lj} 与拉格朗日括号矩阵 σ_{ij}满足以下关系： $J^{li}\sigma_{ij} = -\delta^l{}_j$. 为此，我们将方程 (A.7) 两边乘以 J^{li}，然后对哑指标 i求和，最后使用爱因斯坦求和约定。计算结果即为所需方程。

上述讨论可概括如下：已知时间无关不变量 $I(x^k)$时，选择不变量 $I(x^k)$ 作为哈密顿函数 $H = I(x^k)$，即可定义哈密顿结构，因此矩阵 $J^{ij}(x^k)$ 完全由条件 (A.1)、(A.2) 和 (A.3) 确定。确定泊松括号矩阵 J^{ij} 后，利用偏微分方程 (A.6) 即可求出函数 $l_1(x^k)$。最后，得到函数 $l_1(x^k)$ 后，便可通过Hojman公式 (A.5) 为动力系统 S_2^1中的粒子构造拉格朗日函数 $L(x^k)$。

定义 A.3 （勒让德变换）。考虑一个具有 n个自由度、构形空间为 $\mathbb{Q} = q^\alpha := (q^1, \ldots, q^n)$ 。设 $L(q^\alpha, \dot{q}^\alpha)$ 是该动力系统的拉格朗日函数，它定义在切丛 $\mathrm{T}\mathbb{Q}$。拉格朗日函数L的勒让德变换由函数 L 关于纤维 q^α, s 的纤维导数给出，该导数由映射 $\mathbf{FL} : \mathrm{T}\mathbb{Q} \to \mathrm{T}^*\mathbb{Q}$定义，其中

$$(q^\alpha, \dot{q}^\alpha) \mapsto \mathbf{FL}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha) = (q^\alpha, p_\alpha), \tag{A.8}$$

其中 $p_\alpha := \partial L/\partial \dot{q}^\alpha \in T^*_{q^\alpha}\mathbb{Q}$ 的 $\alpha = 1, \ldots, n$。正如我们已经看到的，在点 $q^\alpha \in \mathbb{Q}$ 处的广义速度 $\dot{q}^\alpha \in T_{q^\alpha}\mathbb{Q}$ 称为切丛 $T\mathbb{Q}$ 的纤维。量 $p_\alpha \in T^*_{q^\alpha}\mathbb{Q}$ 通常称为与构形变量 q^α 的正则动量共轭量， $\alpha = 1, \ldots, n$。请注意，在一些论文中，例如 [42–47],，映射 $FL : T\mathbb{Q} \to T^*\mathbb{Q}$，其中 $(q^\alpha, \dot{q}^\alpha) \mapsto (q^\alpha, p_\alpha)$ $p_\alpha = \partial L/\partial \dot{q}^\alpha$，称为勒让德变换，有时也称为拉格朗日函数的纤维导数。

为了在拉格朗日表述与哈密顿表述之间相互转换，映射（A.8）充当切丛 $\mathbb{TQ}$与余切丛 $\mathbb{T}^*\mathbb{Q}$之间的桥梁。

定义 A.4 (非退化拉格朗日系统)。 动力系统 S_n^2 的拉格朗日函数 $L(q^s, \dot{q}^s)$ 称为非退化的，如果拉格朗日函数 $L(q^s, \dot{q}^s)$的海森矩阵 $n \times n$ ，即

$$M_{\mathrm{L}} := \omega_{\alpha\beta}(q^s, \dot{q}^s) := \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \partial \dot{q}^1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \partial \dot{q}^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^n} \end{pmatrix}, \tag{A.9}$$

在切丛 $\mathrm{T}\mathbb{Q}$ 上处处可逆。换言之，海森矩阵 非奇异，即满足雅可比条件：

$$\det M_{\mathrm{L}}=\frac{\partial(p_1,...,p_n)}{\partial(\dot{q}^1,\cdots,\dot{q}^n)}\neq 0. \tag{A.10}$$

满足雅可比条件的这类拉格朗日系统(A.10)也称为超正则系统[45–49]。

定理 A.2 （哈密顿函数）。假设 $L(q^s,\dot{q}^s)$是 S_n^2 的拉格朗日函数，其构形空间为 $\mathbb{Q}=q^s:=(q^1,\cdots,q^n)$，若拉格朗日函数 $L(q^s,\dot{q}^s)$ 是超正则的，则该动力系统的哈密顿函数 $H(q^s,p_s)$ 存在，并可由映射 $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{L}}$: $\mathcal{F}(\mathrm{T}\mathbb{Q})\to\mathcal{F}(\mathrm{T}^*\mathbb{Q})$得到，其中

$$L\mapsto\mathbf{\Phi}_{\mathrm{L}}(L)=H(q^s,p_s)=p_\alpha\dot{q}^\alpha(q^s,p_s)-L\big(q^\alpha,\dot{q}^\alpha(q^s,p_s)\big), \tag{A.11}$$

其中 $\dot{q}^\alpha(q^s,p_s)$的，$\alpha=1,\cdots,n$，是方程组 $p_\alpha:=\partial L/\partial\dot{q}^\alpha$的解，对于切丛的纤维，$\dot{q}^\alpha$以正则变量 q^α表示，且 p_α的。将拉格朗日函数变换为哈密顿函数的映射(A.11)称为拉格朗日函数 L的勒让德映射，且方程：

$$H(q^s,p_s)=p_\alpha\dot{q}^\alpha(q^s,p_s)-L\big(q^\alpha,\dot{q}^\alpha(q^s,p_s)\big), \tag{A.12}$$

$$p_\alpha=\frac{\partial L(q^s,\dot{q}^s)}{\partial\dot{q}^\alpha},\quad \alpha=1,\cdots,n, \tag{A.13}$$

称为拉格朗日函数的勒让德变换。

将拉格朗日函数 $L(q^s,\dot{q}^s)$ 变换为哈密顿函数$H(q^s,p_s)$ 的映射 (A.11)，实际上就是勒让德映射 (A.8)，但二者的区别在于：映射 (A.8) 将切丛空间 $\mathrm{T}\mathbb{Q}$ 变换为余切丛空间 $\mathrm{T}^*\mathbb{Q}$，而通过映射 (A.11)，拉格朗日函数 $L(q^s,\dot{q}^s)$ 变换为哈密顿函数 $H(q^s,p_s)$。因此，映射 (A.11) 也称为“勒让德映射”。需要指出的是，由于假定给定的拉格朗日函数 $L(q^s,\dot{q}^s)$ 是非退化的，因此方程组 (A.13) 可以同时求解出纤维 $\dot{q}^\beta$，并用正则变量 q^α 和 p_α 表示。这样，勒让德变换就将拉格朗日函数映射为哈密顿函数。同理，通过应用勒让德变换的逆映射，即 $\mathbf{\Phi}^{-1}$ L，哈密顿函数 $H(q^s,p_s)$ 变换为拉格朗日函数 $L(q^s,\dot{q}^s)$。

定理 A.3 （定理 A.2 的逆映射）。设 *DS* S_n^2，的哈密顿函数 H（q^s,p_s）已给定，且雅可比条件

$$\det M_{\mathrm{H}}=\frac{\partial(\dot{q}^1,\cdots,\dot{q}^n)}{\partial(p_1,\cdots,p_n)}\neq 0, \tag{A.14}$$

其中，$n\times n$ 矩阵

$$M_{\mathrm{H}}:=\Omega^{\alpha\beta}(q^s,p_s)=\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha\partial p_\beta}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 H}{\partial p_1\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1\partial p_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_n\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial p_n\partial p_n}\end{pmatrix}$$

由于哈密顿函数 $H(q^s,\ p_s)$ 的海森矩阵，在余切丛 $\mathrm{T}^*\mathbb{Q}$ 上处处满足条件，因此 *DS* S_n^2 的拉格朗日函数 $L(q^s,\ \dot{q}^s)$ 存在，并可由映射$\mathbf{\Phi}^{-1}{}_{\mathrm{L}}:\ \mathcal{F}(\mathrm{T}^*\mathbb{Q})\to\mathcal{F}(\mathrm{T}\mathbb{Q})$，得到，其中

$$H\mapsto\mathbf{\Phi}_{\mathrm{L}}^{-1}(H)=L(q^s,\dot{q}^s)=\dot{q}^\alpha p_\alpha(q^s,\dot{q}^s)-H(q^\alpha,p_\alpha(q^s,\dot{q}^s)),\tag{A.15}$$

其中，$p_\alpha=p_\alpha(q^s,\dot{q}^s)$'s, $\alpha=1,\cdots,n$, 是方程组的解

$$\dot{q}^\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha},\quad \alpha=1,\cdots,n,\tag{A.16}$$

关于纤维 p_α's, ，用动力学变量 q^α'sand $\dot{q}^\alpha$'s. 表示。该映射将动力系统的哈密顿函数变换为其拉格朗日函数，并且是映射 $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{L}}$. 的逆映射。

哈密顿表述中的方程（A.14）、（A.15）和（A.16）与拉格朗日表述中的方程（A.10）、（A.11）和（A.13）有着显著的相似性。方程（A.14）、（A.15）和（A.16）在哈密顿表述中的作用，与其对应方程（A.10）、（A.11）和（A.13）在拉格朗日表述中的作用相同。给定其中一组方程，例如方程（A.10）、（A.11）和（A.14），通过改变 $L\to H,\ \dot{q}^s\to p_s,\ \omega_{\alpha\beta}\to\Omega^{\alpha\beta}$ 和 $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{L}}\to\mathbf{\Phi}^{-1}{}_{\mathrm{L}}$，便可轻松得到第二组方程，即方程（A.14）、（A.15）和（A.16）；反之，给定第二类方程，通过改变 $H\to L,\ p_s\to\dot{q}^s,\ \Omega^{\alpha\beta}\to\omega_{\alpha\beta}$ 和 $\mathbf{\Phi}^{-1}{}_{\mathrm{L}}\to\mathbf{\Phi}_{\mathrm{L}}$，便可轻松得到第一类方程。

B 哈密顿–雅可比理论中的正则变换

本附录首先介绍哈密顿–雅可比理论中的正则变换。随后讨论如何求解哈密顿正则方程组（方程（B.1））和哈密顿-雅可比方程（方程（B.13））的通解。

一般而言，假设动力系统的哈密顿函数依赖于时间，例如 $H(t,\ q,\ p)$。在哈密顿形式中，重点是求解哈密顿正则方程：

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p},\quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}.\tag{B.1}$$

哈密顿正则方程（B.1）构成关于正则变量 q 和 p的两个一阶偏微分方程组成的方程组。在哈密顿-雅可比理论中，若已知哈密顿函数 $H(t,q,p)$，则不直接求解哈密顿正则方程（B.1），而是先定义一种称为正则变换的变换。

定义 *B.1*（正则变换）。假设某个具有一个自由度 S_1^2的动力系统，其哈密顿函数为 $H(t,q,p)$，p 是与广义坐标 q共轭的广义动量。此外，假设 $F_2(t,q,P):=S(t,q,P)$ 是满足条件$\partial^2S/\partial q\partial P\neq0$的任意函数。映射 $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{CT}}:\ \mathbb{R}^+\times T^*\mathbb{Q}\to\mathbb{R}^+\times T^*\mathbb{Q}$，其中 $(t,q,p)\mapsto\mathbf{\Phi}_{\mathrm{CT}}(t,q,p)=(t,Q,P)$，保持哈密顿正则方程（*B.1*）的形式不变。也就是说，在变换后的系统 (t,Q,P) 中，哈密顿正则方程的形式为 $\dot{Q}=\partial K/\partial P$和 $\dot{P}=-\partial K/\partial Q$。这种变换称为生成函数为 $S(t,q,P)$ 的正则变换。在新的哈密顿正则方程中，$K(t,Q,P)$ 是动力系统的新哈密顿函数，它由旧哈密顿函数 $H(t,q,p)$ 定义如下 [31, 40, 50]:

$$K=H+\frac{\partial S}{\partial t}.\tag{B.2}$$

换言之，可逆变换 $(t,q,p)\mapsto\mathbf{\Phi}_{\mathrm{CT}}(t,q,p)=(t,Q,P)$ 当且仅当存在函数 $K(t,Q,P)$ 和 $S(t,q,P)$，使得方程 *(B.2)* 成立时，才称为正则变换。

对于动力系统，正则变换有四种类型 [37,51]。上述正则变换是其中的第二种。由于求解变换后的系统中的哈密顿正则方程 $Q = \partial K/\partial P,\ P = -\partial K/\partial Q$ 并不比求解原来的哈密顿正则方程 $\dot{q} = \partial H/\partial p, \dot{p} = -\partial H/\partial q$ 更容易，那么为什么要使用正则变换呢？使用正则变换的原因在于，生成函数 $S(t, q, P)$ 是任意的。如果选择该函数，使新的哈密顿函数 K 等于零，那么只需对变换后的哈密顿正则方程 $Q = \partial K/\partial P,\ P = -\partial K/\partial Q$进行简单积分，就可以得到以下结果： $Q = c_2$，且$P = c_1$，其中 c_1 和 c_2 为积分常数。因此，新的正则变量 P 和 Q均为定值。

现在，为了得到正则变换，我们重新考察旧正则坐标 B.1 中的哈密顿正则方程（$(t,\ q,\ p)$，以及变换后的哈密顿正则方程

$$\dot{Q} = \partial K/\partial P, \quad \dot{P} = -\partial K/\partial Q, \tag{B.3}$$

在新正则坐标 $(t,\ Q,\ P)$ 中。方程（B.1）和（B.3）同时成立，意味着以下变分原理同时成立：

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \big(p\dot{q} - H(t,q,p)\big)\mathrm{d}t = 0, \tag{B.4}$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Big(P\dot{Q} - K(t,Q,P)\Big)\mathrm{d}t = 0. \tag{B.5}$$

如果相应的被积函数之差是某个任意函数（例如 $\Sigma(t,\ q,\ p)$）的全导数，则方程（B.4）和（B.5）将同时成立。因此，变换 $(t,\ q,\ p) \mapsto \mathbf{\Phi}_{\mathrm{CT}}(t,\ q,\ p) = (t,\ Q,\ P)$在满足以下方程时，保持哈密顿正则方程的形式不变

$$p\dot{q} - H = P\dot{Q} - K(t,Q,P) + \frac{\mathrm{d}\Sigma}{\mathrm{d}t}. \tag{B.6}$$

方程（B.6）可用微分形式改写如下：

$$p\mathrm{d}q - P\mathrm{d}Q + (K - H)\mathrm{d}t = \mathrm{d}\Sigma\,. \tag{B.7}$$

方程（B.7）称为正则变换的“特征方程”。该方程的形式提示我们，可将 Σ 视为旧广义坐标和新广义坐标的函数。假设正则变换的第二个方程 $P = P(t,p,q)$ 可解出 p，并将其表示为 t、q 和 P 的函数，即 $p = p(t,q,P)$。在这种情况下，正则变换的第二个方程，即 $Q = Q(t,q,p)$，使我们能够将变换后的广义坐标 Q 表示为变量 t、q、P 的函数，即 $Q = Q\big(t,q,p(t,q,P)\big)$。若取 q和 P为两个自变量，则存在一个如下形式的生成函数

$$F_2(t,q,P) := PQ(t,q,P) + \Sigma\big(t,q,p(t,q,P)\big). \tag{B.8}$$

该生成函数是四种不同类型生成函数中的第二类。在此函数中，变量 q和 P分别从旧正则变量 $(t$、q、$p)$和新正则变量 $(t$、Q、$P)$中选取。显然，我们有恒等式 $-P\mathrm{d}Q = -\mathrm{d}(PQ) + Q\mathrm{d}P$。将此恒等式代入方程（B.7）即可得到

$$p\mathrm{d}q + Q\mathrm{d}P + (K - H)\mathrm{d}t = \mathrm{d}F_2. \tag{B.9}$$

这里我们已使用方程（B.8）。注意，F_2 是变量 t、q和 P 的函数，使得

$$\mathrm{d}F_2(t,q,P) = \frac{\partial F_2}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial F_2}{\partial q}\,\mathrm{d}q + \frac{\partial F_2}{\partial P}\,\mathrm{d}P. \tag{B.10}$$

将方程（B.10）代入方程（B.9可得

$$\Big(K - H - \frac{\partial F_2}{\partial t}\Big)\mathrm{d}t + \Big(p - \frac{\partial F_2}{\partial q}\Big)\mathrm{d}q + \Big(Q - \frac{\partial F_2}{\partial P}\Big)\mathrm{d}P = 0. \tag{B.11}$$

由于 t、 q 和 P 是自变量，方程（B.11）恒成立的充要条件是$\mathrm{d}t$、$\mathrm{d}q$ 和$\mathrm{d}P$ 的系数分别为零，即:

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \qquad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}, \qquad K - H = \frac{\partial F_2}{\partial t}. \tag{B.12}$$

方程（B.12）给出了关于两个未知函数 $P(t,q,p)$ 和 $Q(t,p,q)$ 的两个偏微分方程。为求出正则变换的显式形式，对 F_2 关于变量 q 求偏导，可得到一个关于变量 t、 q、 p 和 P 的代数方程。该方程为: $= p - Y(t,q,P) = 0$其中$Y(t,q,P)$: $= \partial F_2(t,q,P)/\partial q$。接着，解出该代数方程中的变量 P，即可得到 $P = P(t,q,p)$，这就是正则变换的第一个方程。现在，将这一结果代入（B.12）的第二个方程，可得以下代数方程

$$\frac{\partial F_2(t,q,P)}{\partial P} := \omega(t,q,P) = \omega\big(t,q,P(t,q,p)\big) := Q(t,q,p),$$

这是正则变换（B.12）的第二个方程。由此，方程组 $P = P(t,q,p)$ 和 $Q = Q(t,q,p)$ 确定了该正则变换。在此变换下，变换后的哈密顿函数$K(t,q,P)$ 与旧的哈密顿函数 $H(t,q,p)$ 由（B.12）的第三个方程联系起来。如定义 B.1 中所述，我们将这个生成函数记为 $S(q,P,t)$，即$F_2(t,q,P) := S(t,q,P)$。现在，将 $K = 0$和 $p = \partial S/\partial q$代入（B.12）的第三个方程，可得

$$H\Big(t,q,\frac{\partial S}{\partial q}\Big) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{B.13}$$

这是一个关于时间的一阶偏微分方程 t 和广义坐标 q ，其未知函数为生成函数$S(t,\ q,\ P)$，称为哈密顿-雅可比方程。在这个方程中，生成函数 S通常称为哈密顿主函数 [51]。因此，哈密顿正则方程（B.1）的解等价于一阶偏微分方程（B.13）的解。求解方程（B.13）比求解偏微分方程组容易得多。满足海森条件 S 的哈密顿-雅可比方程（B.13）的任意解 $\partial^2 S/\partial q\partial P \neq 0$称为完全解。历史上，W. R. Hamilton 于 1834年首次推导出方程（B.13）。后来在 1837年，J. Jacobi 明确建立了方程（B.13）的解与其研究之间的联系，并由此提出了一个定理，称为哈密顿－雅可比定理。

定理 B.1 （哈密顿-雅可比，1837年）。设函数 S（$t,\ q,\ P$）是 *HJE* 的一个完备解 （B.13）。则 *HCEs* 的通解 （B.1）由以下偏微分方程组给出

$$\frac{\partial S(t,q,P)}{\partial P} = Q, \quad \frac{\partial S(t,q,P)}{\partial q} = p, \tag{B.14}$$

其中 Q是任意常数 [3]。
证明: 参见文献 [3]。

如今，人们已知哈密顿-雅可比理论在引力和宇宙学中有着广泛应用。这一理论在求解引力场方程时发挥着关键作用。哈密顿-雅可比理论为半经典分析提供了起点，可用于研究随机暴胀 [52,53], 以及量子宇宙学。1962年，A. Peres 首次使用了哈密顿-雅可比方程 [54]。在他们的研究中，Peres 等人试图构建

将广义相对论理论纳入量子理论。通过考虑爱因斯坦-希尔伯特作用量，并应用最小作用量原理和Arnowitt-Deser-Misner形式，Peres 得到了弯曲时空中哈密顿-雅可比方程的张量形式。该方程是弯曲黎曼时空中哈密顿-雅可比方程的广义形式，称为哈密顿–雅可比–爱因斯坦方程（HJEE）。1994年，J. Parry 等人 [52]通过纳入物质场，提出了一种求解哈密顿-雅可比方程的系统方法。该方法可用于推导广义相对论理论中的“泽尔多维奇近似”。近年来，许多作者提出了用于计算宇宙学中生成函数的系统且实用的方法 [53, 55–60]。本研究旨在寻找一种正则变换，使哈密顿正则方程的形式保持不变。利用这一变换，我们便可得到该正则变换的生成函数。这样做的目的是为哈密顿函数已知的FLRW宇宙学模型寻找两个独立不变量（第一积分）。为此，我们回到所讨论的问题。获得哈密顿-雅可比方程的完整解后，（B.12）的前两个方程给出以下函数 [32, 40, 51, 58]

$$\alpha(t,q,p,P) := p - \frac{\partial S(t,q,P)}{\partial q} = 0, \tag{B.15}$$

$$\beta(t,q,Q,P) := Q - \frac{\partial S(t,q,P)}{\partial P} = 0, \tag{B.16}$$

其中 α和 β分别是变量 $(t,\ q,\ p,\ P)$ 和 $(t,\ q,\ Q,P)$ 的已知函数。现在，我们将方程 (B.15) 和 (B.16) 视为一个代数方程组，并联立求解正则变量 Q 和 P，将它们表示为其他变量 t, p 和 q的函数：

$$Q = Q(t,q,p), \quad P = P(t,q,p). \tag{B.17}$$

事实上，这些方程就是由生成函数 $S(q,P,t)$ 产生的正则变换。由于 P和 Q 都是运动常数，因此我们将得到以下两个独立不变量：

$$P(t,q,p) = c_1, \quad Q(t,q,p) = c_2 \tag{B.18}$$

其中 c_1 和 c_2 是常数。在最后一步中，利用方程 (A.13)，我们得到

$$p = \frac{\partial L(t,q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} := \chi(t,q,\dot{q}). \tag{B.19}$$

在方程 (B.18) 中用函数 $\chi(t,q,\dot{q})$ 代替变量 p，即可得到

$$I_{\mathrm{HJ},1}(t,q,\dot{q}) := P(t,q,\chi(t,q,\dot{q})) = c_1, \tag{B.20}$$

$$I_{\mathrm{HJ},2}(t,q,\dot{q}) := Q(t,q,\chi(t,q,\dot{q})) = c_2. \tag{B.21}$$

因此，求解哈密顿-雅可比方程（B.13）使我们得以提取两个独立不变量（或第一积分），在本研究中我们称之为哈密顿–雅可比不变量。将这些不变量作为代数方程组同时求解，即可得到动力系统的通解。为求解方程组（B.20）和（B.21），首先求解其中一个不变量，例如将第一不变量（B.20）中的变量 $\dot{q}$表示为其他变量 t、q以及运动常数 c_1的函数，形式如下：$\dot{q} = \Omega(t,q;c_1)$，其中 Ω 是变量 t、q 和运动常数 c_1的已知函数。将其代入第二个不变量（B.21）后，可得：$I_{\mathrm{HJ},2}\big(t,q,\Omega(t,q;c_1)\big) = c_2$。最后，通过求解该代数方程，将广义坐标 q 表示为时间 t以及运动常数 c_1和 c_2的函数，即可得到最终解：$q = q(t;\ c_1,c_2)$，它就是哈密顿-雅可比方程（B.13）的通解。实际上，该解也是哈密顿正则方程组（B.1）的通解。

参考文献

[1] E. Ahmadi-Azar、K. Atazadeh 和 A. Eghbali，《通过对称群不变量求得精确宇宙学解》，《Phys. Scr.》，99（2024年）055014，arXiv:2310.19772 [引力与宇宙学].[2] S. A. Hojman，《从一个运动常数出发构造拉格朗日与哈密顿结构》，《Acta Mech.》，226（3）（2014年）735-744。[3] B. V. Brunt，《变分法》，纽约：施普林格出版社，（2004年）。[4] H. von Helmholtz，《论最小作用量原理的物理意义》，《纯粹与应用数学杂志》，100（1887年）137-166。[5] J. Kotuleel，《变分法逆问题的历史札记》，硕士学位论文，奥帕瓦：西里西亚大学，（2002年）。[6] J. Douglas，《变分法逆问题的解》，《美国数学会汇刊》，50（1）（1941年）71-128。[7] W. Sarlet，《重新审视亥姆霍兹条件：拉格朗日动力学逆问题的新方法》，《物理学杂志A：数学与一般物理》，15（5）（1982年）1503-1517。[8] F. Pardo，《经典力学中以运动常数表示的亥姆霍兹条件》，《数学物理杂志》，30（9）（1989年）2054-2061。[9] E. Engels，《关于拉格朗日形式存在的亥姆霍兹条件。II》，《新物理学评论B辑》，26（1975年）481-492。[10] G. Darboux，《曲面一般理论讲义》，第三部分，（Gauthier Villars，巴黎），5（1894年）3-58。[11]A. Mayer，《动能势存在的条件》，《莱比锡皇家萨克森科学学会数学物理类报告》，48（1896年）519-529。[12] L. Konigsberger，《力学原理》，（莱比锡，1901年）。[13] G. Hamel，《直线为最短线的几何学》，《数学年刊》，57（1903年）231-264。[14] P. Havas，《守恒定律与不变群之间的联系：传闻、虚构与事实》，《奥地利物理学报》，38（1973年）145-167。[15] P. Havas，《牛顿力学的四维表述及其与狭义相对论和广义相对论的关系》，《现代物理学评论》，36（4）（1964年）938-965。[16] S. Hojman 和 L. F. Urrutia，《论变分法逆问题》，《数学物理杂志》，22（9）（1981年）1896-1903。[17] S. Hoiman，《拉格朗日量及其运动方程的对称性》，《物理学杂志A：数学与一般物理》，17（12）（1984年）2399-2412。[18] S. A. Hoiman 和 L. C. Shepley，《没有拉格朗日量？就没有量子化！》，《数学物理杂志》，32（1）（1991年）142-146。

[19] O. Krupkova 和 G. E. Prince, 《射流丛中的二阶常微分方程与变分法逆问题》, 《全球分析手册》, （2008年）。[20] T. Do 和 G. Prince, 《变分法逆问题的新进展》, Com- mun. Math., 29 (1)（2021年）131-149。[21] T. Do 和 G. Prince, 《变分法逆问题的新进展》, Differ. Geom. Appl., 45（2016年）148-179。[22] A. Friedmann, 《空间曲率》。Z. Phys., 10 (1)（1922年）377-386。[23] O Gron 和 S. Hervik, 《爱因斯坦广义相对论：宇宙学中的现代应用》, 纽约：施普林格, （2007年）。[24] D. Baumann, 《宇宙学》, 剑桥 CB2 8BS：剑桥大学出版社, （2022年）。[25] R. Hojman、S. Hojman 和 J. Sheinbaum, 《根据运动方程快速构造任意拉格朗日量》, Phys. Rev. D, 28 (6)（1983年）1333-1336。[26] I. Percival 和 D. Richards, 《动力学导论》, 剑桥：剑桥大学出版社, （1982年）。[27] J. Guckenheimer 和 P. Holmes, 《非线性振荡、动力系统与向量场分岔》, 纽约：施普林格, （1983年）。[28] A. J. Litchenberg 和 M. A. Lieberman, 《规则运动与随机运动》, 《应用数学科学》第38卷, 纽约：施普林格, （1983年）。[29] F. Sheck, 《力学：从牛顿定律到确定性混沌》, 海德堡：施普林格, （2010年）。[30] T. Frankel, 《物理学的几何：导论》, 第三版, 剑桥：剑桥大学出版社, （2012年）。[31] H. Kielhofer, 《变分法：一维理论导论, 含示例与习题》, 施普林格国际出版公司, （2018年）。[32] N. A. Lemos, 《分析力学》, 剑桥：剑桥大学出版社, （2018年）。[33] D. H. Kobe, 《带电粒子在电磁场中的诺特定理与功-能定理》, Am. J. Phys., 81 (3)（2013年）186-189。[34] J. D. Logan, 《不变变分原理》, 《数学与科学工程》第138卷, 纽约：学术出版社（1977年）。[35] W. Sarlet 和 F. Cantrijn, 《经典力学中诺特定理的推广》, SIAM Review, 23 (4)（1981年）467-494。[36] K. Sundermeyer, 《基础物理学中的对称性》, 海德堡：施普林格, （2014年）。[37] D. E. Neuenschwander, 《埃米·诺特的精彩定理》, 巴尔的摩：约翰·霍普金斯大学出版社, （2011年）。[38] G. W. Bluman 和 S. Komel, 《对称性与微分方程》, 纽约：施普林格, （1989年）。

[39] S. A. Hojman, 《从动力系统的对称性与守恒律构造泊松结构》, 《物理学杂志A：数学与一般物理》, 29 (3)（1996年）667-674。[40] E. Ahmadi-Azar、K. Atazadeh 和 A. Eghbali, 《通过对称群不变量求解布兰斯–迪克理论中的宇宙学解》, 国际几何方法与现代物理学杂志, 21(11)（2024年）240192, arXiv:2401。17893 [引力与宇宙学]。[41] F. Darabi、K. Atazadeh 和 Y. Heydarzade, 《Rastall引力理论中的爱因斯坦静态宇宙》, Eur. Phys. J. Plus, 133 (7)（2018年）1-9。[42] J. F. Carinena 和 J. Fernandez-Nunez, 《雅可比乘子在可积性与力学逆问题中的应用》, Symmetry, 13 (8)（2021年）1413[43] J. F. Carinena、P. Guha 和 M. F. Ranada, 《拟哈密顿结构与 Hojman 构造》, J. Math. Anal. Appl., 332 (2)（2007年）975-988。[44] J. F. Carinena、P. Guha 和 M. F. Ranada, 《拟哈密顿结构与 Hojman 构造 II：南部力学与南部–Ojosson结构》, 预印本 89/2007, 马克斯·普朗克数学研究所（莱比锡）, （2007年）。[45] S. Stenberg 和 J. A. Wolf, 《电荷共轭与 Segal宇宙学》, Nuvo Cimento, 28 (2)（1975年）253-271。[46] R. Abraham 和 J. E. Marsden, 《力学基础》, 纽约：Addison-Wesley Publishing Company, Inc.,（1978年）。[47] D. D. Holm、T. Schmah 和 C. Stoica, 《几何力学与对称性：从有限维到无限维》, 牛津：牛津大学出版社, （2009年）。[48] L. Godinho 和 J. Natario, 《黎曼几何导论：及其在力学与相对论中的应用》, 纽约：施普林格, （2014年）。[49] T. Lee、M. Leok 和 N. H. McClamroch, 《流形上拉格朗日与哈密顿动力学的全局表述：建模与分析的几何方法》, 施普林格,（2018年）。[50] G. F. Torres del Castillo, 《哈密顿力学导论》, 施普林格, （2018年）。[51] J. V. Jose, 《经典动力学：一种现代方法》, 第8次印刷, 剑桥：剑桥大学出版社, （2012年）。[52] L. N. Hand 和 J. D. Finch, 《分析力学》, 剑桥：剑桥大学出版社, （2008年）。[53] J. Parry、D. S. Salopek 和 J. M. Stewart, 《求解广义相对论的哈密顿–雅可比方程》, Phys. Rev. D, 49 (6)（1994年）2872-2881。[54] D. S. Salopek 和 J. M. Stewart, 《含物质场的广义相对论哈密顿–雅可比理论》, Class. Quantum Gravity, 9 (8)（1992年）1943-1967。[55] A. Peres, 《广义相对论中的柯西问题——II》, IL Nuovo Cimento Series 10, 26 (1)（1962年）53-62。[56] S. L. Bazanski, 《测地线及测地线偏离的哈密顿–雅可比形式体系》, 《数学物理杂志》, 30 (5)（1989年）1018-1029。

[57] D. Bardley、E. Liang 和 R. Sachs，《无旋尘埃宇宙学中的速度主导奇点》，《数学物理杂志》，**13**(1) (1972年) 99-107。[58] R.C.Santos、J. Santos 和 J. A. S. Lima，《幂律势的哈密顿-雅可比方法》，巴西物理学杂志，**36** (4a) (2006年) 1257-1261。[59] R. Kerner 和 J. W. Van Holten，《非线性σ模型宇宙学的哈密顿-雅可比方法》，国际几何方法与现代物理学杂志，**13** (8) (2016年) 1640004。[60] G. F. Torres del Castillo，《正则变换的生成函数》，墨西哥物理学评论 *E*，**57**(2) (2011年) 158-163。