arXiv:2601.01582v1 [math.RT] 4 Jan 2026

具有循环缺陷群的块的源代数等价类，第三部分

GERHARD HISS 与 CAROLINE LASSUEUR

Abstract. 这一系列论文旨在为有限群的 p-块按源代数等价进行分类的计划作出贡献，首先从循环块的情形入手。对于具有循环缺陷群 D的有限群的任意 p-块$\mathbf{B}$，Linckelmann 关联了一个不变量 $W(\mathbf{B})$，它是 D上的一个不可分解端置换模，并且与$\mathbf{B}$的Brauer树一起，基本上决定了其源代数等价类。

在本系列论文的第二部分中，假设 p 是一个奇素数，我们将拟单经典群的循环p-块$\mathbf{B}$ 所产生的不变量 $W(\mathbf{B})$ 的分类，归约为特殊线性群或酉群的拟单商群的循环 p-块的分类。本第三部分将实现这一目标。

1. Introduction

设 p 为奇素数。本文旨在确定所有具有单商群 $\mathrm{PSL}_n^\varepsilon(q)$ 的拟单群的循环 p-块 $\mathbf{B}$ 的各项不变量 $W(\mathbf{B})$。按照惯例，$\varepsilon \in \{-1, 1\}$ 且当 $\varepsilon = 1$ 时，$\mathrm{PSL}_n^\varepsilon(q) = \mathrm{PSL}_n(q)$；当 $\varepsilon = -1$ 时，$\mathrm{PSL}_n^\varepsilon(q) = \mathrm{PSU}_n(q)$。对群 $\mathrm{SL}_n^\varepsilon(q)$ 和 $\mathrm{GL}_n^\varepsilon(q)$ 也采用类似约定。我们在第 5 节以术语表的形式汇总本文以及本系列文章第一和第二部分中使用的记号。

以下是我们分析所得的首个主要结果。

定理 1.1。设 $n \geq 2$ 为整数，q 为素数幂，且 $G := $特殊线性群$_n^\varepsilon(q)$。设 p 为满足 $p \mid q - \varepsilon$ 的奇素数。

$Let\ G$ 令 G 表示 G 的 p 中心商，并令 $\bar{G}$ 其具有一个阶为 ℓ 的非平凡循环缺陷群 $\bar{D}$ 是一个 p-块，

(a) 若 $G =$ 特殊线性群$_n(q)$，则 $W(\bar{\mathbf{B}}) \cong k$。

日期：2026年1月6日。2010 数学主题分类。主要分类号 20C20、20C15、20C33。关键词和短语。具有循环缺陷群的块、源代数等价、内置换模、特殊线性群、特殊酉群。

(b) 若 $G = \mathrm{SU}_n(q)$ 且 $p \equiv -1$ (模 4)，则对于满足以下任一条件的子集 $W(\mathbf{B}) \cong W_{\bar{D}}(A)$ $A \subseteq \{1, \dots, l-1\}$。

(i) A 是一个区间（可能为空集）；

(ii) $A = [a, l-1] \setminus \{l-a\}$ 对于某个 $1 \le a \le l/2$;

(iii) $A = \{l-a\} \cup [a, l-1]$ 对于一个整数 $l/2 < a \le l-1$。

(c) 若 $G = \mathrm{SU}_n(q)$ 且 $p \equiv 1 \pmod 4$， $W(\mathbf{B}) \cong W_{\bar{D}}()$ 对于一个子集 $A \subseteq \{1, \dots, l-1\}$，其中 $|A| \le 1$。□

定理 1.1 的证明由命题 3.27、3.29 和 3.31 给出，其中提供了更精确的信息。

按照定理中的记号，情形 $p \nmid q - \varepsilon$ 已在 [HL24，命题 6.3]（若 $p \mid q$）以及 [HL25，注记 4.2.3]（若 $p \nmid q$）中处理。

为证明此定理，我们假设 $G = G/Y$ 有一个非平凡子群 $Y \le Z(G)$，并令$\mathbf{B}$ 为 G的一个循环的 p-块。为确定$\mathbf{B}$的 W，我们可以假设 Y 是一个 p-群。事实上，$\hat{}\tilde{G} := G/O_p(Y)$ 是由一个 p'-群作核的 G 的中心扩张；若$\mathbf{B}\hat{}$ ^表示支配$\mathbf{B}$的 G的 p-块，则由 [HL24，引理 4.1]，有 $W(\mathbf{B}) = W(\mathbf{B})$。

令$\mathbf{B}$ 表示支配$\mathbf{B}$的 G 的块。则$\mathbf{B}$的一个缺陷群 D是阿贝尔群，且至多有 2 个生成元，但不一定是循环的。令$\mathbf{B}$在 $C_G(D)$中的一个 Brauer 对应块为$\mathbf{c}$ 。现在将 $G\tilde{}$嵌入 $G =$ 一般线性群$^{\varepsilon}_n(q)$，并令$\mathbf{c}$ 为覆盖$\mathbf{c}$的 $C_{\tilde{G}}(D)$的一个块。于是， $\tilde{}\mathbf{c}$ 的一个缺陷群 D 是阿贝尔群，且至多有 3 个生成元。第 3 节详细分析了这一情形，由此完整枚举了这些块$\mathbf{B}$所产生的$\mathbf{B}$的 W的各种可能性。

在第 4 节中，我们证明，定理 1.1 中列出的所有此类可能性，都可通过适当选择 q 和 n 得到，从而导出以下结果。

定理 1.2. 设 p 为奇素数， $l \ge 1$ 为整数，并设 D 为阶为 p^l 的循环 p-群。

设 A 为 $\{1, \dots, l-1\}$ 的子集。若 $p \equiv -1 \pmod 4$，则假设 A 满足(i)–(iii) 中的某个条件（见定理 1.1(b)）。若 $p \equiv 1 \pmod 4$，则假设 $|A| = 1$。

那么存在一个整数 $n \ge 2$ 和一个素数幂 q，使得 $p \mid q+1$，是$\mathrm{SU}_n(q)$ 的一个中心商 G，且 G 有一个缺陷群为循环群、同构于 D 的 p-块$\mathbf{B}$，满足 $W(\mathbf{B}) \cong W_{\bar{D}}(A)$。□

定理 1.2 的证明见命题 4.2–4.5，这些命题实际上提供了更精确的信息。

注记 1.3. 设 p 为奇素数， $l \ge 1$ 为整数，并设 D 为阶为 p^l的循环 p-群。

若 $l \geq 2$，则 $[1, l-1]$中的区间数（包括空区间）等于 $l(l-1)/2+1$。定理 1.1(b)(ii) 或 (iii) 中所述的 $[1, l-1]$ 的子集数为 $l-1$；若 $l \geq 3$，其中有两个是区间。

因此，内置换 k 的同构类数量 D- 模，形式为 $W(\mathbf{B})$，由定理 1.1 得到：若 $p \equiv 1 \pmod 4$，则数量为 l；若 $l \geq 3$ 且 $p \equiv -1 \pmod 4$，则数量为 $l(l+1)/2-2$。

另一方面，内置换 kD-模的同构类数量为 2^l，因为 p 是奇数。□

2. Preliminaries

在本节中，G 表示一个有限群，而 p 表示一个素数。

我们用 $r(G)$ 表示 G 的最小生成集大小。以下关于 $r(G)$ 的标准结果不加证明地陈述。

引理 2.1. (a) 若 $1 \to L \to G \to H \to 1$ 是有限群的短正合列，则 $r(G) \leq r(L)+r(H)$。

(b) 若 L 和 H 是有限 p-群，则 $r(L \times H) = r(L) + r(H)$。(c) 若 G 是阿贝尔群且 $H \leq G$，则 $r(H) \leq r(G)$。

我们还需要以下对 [HL24, 引理 2.2] 的补充。尽管这众所周知，我们仍给出证明，以方便读者。

引理 2.2. 设 $Z \leq Z(G)$ 是一个 p-群，且 $t \in G$ 是一个 p-元素。那么 $C_G(t)/Z$ 在 $C_{G/Z}(tZ)$ 中的指数是一个 p-幂。特别地，若$N_G(C_G(t))/C_G(t)$ 是一个 p'-群，则

$$C_{G/Z}(tZ) = C_G(t)/Z.$$

证明。令 $C \leq G$ 满足 $C/Z = C_{G/Z}(tZ)$。则 $C_G(t) \leq C \leq N_G(C_G(t))$，因此第二个断言由第一个断言推出。该映射

$$C \to Z, c \mapsto ctc^{-1}t^{-1}$$

是一个群同态，其核为 $C_G(t)$。这就证明了我们的第一个断言。□

最后，我们陈述一个后文将用到的关于 Brauer 对的结果。

引理 2.3。设 $D \leq G$ 是一个阿贝尔 p-子群。设 $E \leq D$ 和$H := C_G(E)$。则 $D \leq H$。设 $\mathbf{c}$ 是 H 的一个 p-块，其缺陷群为 D。令 $\mathbf{B}$ 表示 G 的 p- 块，使得 $(E, \mathbf{c})$ 是一个 $\mathbf{B}$-*Brauer* 对。则 $\mathbf{B}$ 的缺陷群为 D。

证明。 由于 $E \leq D$，我们有 $C_G(D) \leq H$，因而有 $C_G(D) = C_H(D)$。令 $\mathbf{c}_0$ 表示 $\mathbf{c}$ 在 $C_H(D)$ 中的一个 Brauer 对应块。根据 [Lin18，推论 6.3.12]，$\mathbf{c}_0$ 的缺陷群为 D。因此，根据 [AlBr79，定理 3.10]，$(D, \mathbf{c}_0)$ 是 G 中的一个极大 $\mathbf{B}$- Brauer 对。进而，根据 [Lin18，定理 6.3.7]， D 是$\mathbf{B}$的一个缺陷群。□

在克利福德理论的情形下，我们采用一种常见且实用的说法。具体而言，若 N 是 G 的正规子群，且 χ 和 ψ 分别是 G 和 N 的不可约 K- 特征，则若 ψ 是 χ 限制到 N 后的一个成分，我们称 ψ 位于 χ 之下，或称 χ 位于 ψ 之上。

3. Analysis

在此，我们分析相关构形，从而证明定理 1.1。

3.1. 这些群。 我们先介绍这些群以及本节中通篇使用的一些相关记号。

为避免记号过于繁复，我们对 [HL25] 中使用的全局约定稍作调整。由于我们关注的是特殊线性群和$\tilde{}$酉群，$\mathrm{SL}_n^{\varepsilon}(q)$记作 G，$\mathrm{GL}_n^{\varepsilon}(q)$记作 G；见下文记号 3.2。此外， D 不一定表示循环群，而诸如 D_1 这样的符号也有了新的含义。

记号 3.2. (i) 设 $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ 和 $n \geq 2$ 为整数， p 为奇素数， q 为素数 r 的幂，且 $p \mid q - \varepsilon$。令 $\mathbb{F}$ 表示含有 r 个元素的有限域的代数闭包。

(ii) 置 $\tilde{\mathbf{G}}(g) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，令 $\mathbf{V} := \mathbb{F}^n$，$\tilde{g} \in \tilde{\mathbf{G}}$ 的自然向量空间。

(iii) 设 $\tilde{\mathbf{G}}^F := F_{\varepsilon}$ 一般线性群 $\mathrm{GL}_n^{\varepsilon}(q)$。那么，$\mathbf{G}$ 是 F-稳定的，使得 $\tilde{G} = \mathbf{G}^F =$ 特殊线性群$_n^{\varepsilon}(q)$。令$Z := Z(G)$。注意， $|Z| = \gcd(q - \varepsilon, n)$。

(iv) 若 $\varepsilon = 1$，令 $\delta = 1$；若 $\varepsilon = -1$，令 $\delta = 2$，并令 $V := \mathbb{F}_{q^{\delta}}^n \subseteq \mathbf{V}$。$\tilde{}$那么， V 是 G的自然向量空间。（这与 [HL25 第 3.1]小节中引入的记号一致。）

(v) 设 p^a 和 p^b 分别表示整除 $q - \varepsilon$ 和 n 的 p 的最高次幂，并令 $c := \min\{a, b\}$。那么， p^c 是整除 $|Z|$的 p 的最高次幂。□

$\tilde{}$**3.3. 关于 G 的预备知识。** 继续之前，我们先记录关于 G的两个结果。其中第一个纯属群论性质。

引理 3.4。(a) 设$\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$是一个正则子群。那么$\mathbf{H} := \mathbf{G} \cap \mathbf{H}$是$\mathbf{G}$ 的一个正则子群，并且

$$[\tilde{H} : H] = q - \varepsilon.$$

(b) 设 $s \in G$ 是半单的。那么

$$[C_{\tilde{G}}(s) : C_G(s)] = q - \varepsilon.$$

特别地，若 $s \in G$，则 s 的 G-共轭类是一个 G-共轭类。

证明。(a) 包含关系 $\mathbf{G} \to \mathbf{G}$ 是一个正则嵌入；参见 [GeMa20, 定义 1.7.1]。此外，$C_{\tilde{\mathbf{G}}}(s)$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个正则子群。结论由 [HL25, 引理 2.5.3] 得出。□

对于以下结果，回顾在第 2 节中引入的有限群 H 的概念 $r(H)$。

引理 3.5。设 D 是某个 G 的 p- 块的阿贝尔缺陷群，且 $r(\tilde{D}) = 2$。那么 $p^{2a} \mid |\tilde{D}|$。

证明。这由 [FoSr82，定理 (3C)]得出。□

3.6. 块及其缺陷群。我们引入本研究的主要对象，并建立进一步的记号。

记号 3.7。(i) 令 $Y \leq Z$ 为一个 p-群，设 $G := G/Y$，并将 $\bar{\ }: G \to G$ 记为自然满同态。

(ii) 设 $\mathbf{B}$ 表示 p的一个块，$\bar{G}$ 其缺陷群为非平凡循环群。

(iii) 令 $\mathbf{B}$ 并表示由 $\mathbf{B}$ 支配的 p-块 缺陷群。（根据 [HL25，引理 2.4.1]，$D = D/Y$ 是$\mathbf{B}$ 的一个缺陷群。）

(iv) 取 $t \in D$ 使得 $\bar{D} = \langle \bar{t} \rangle$。

(v) 通过 $p^{c'} = |\langle t \rangle \cap Y|$定义非负整数 c'。□

注意，由于 Y是一个 p-群，对于 G 的任意块$\mathbf{B}$，都存在唯一一个由$\mathbf{B}$支配的块$\mathbf{B}$；参见 [NT89，定理 5.8.11]。下面记录一些简单的观察。

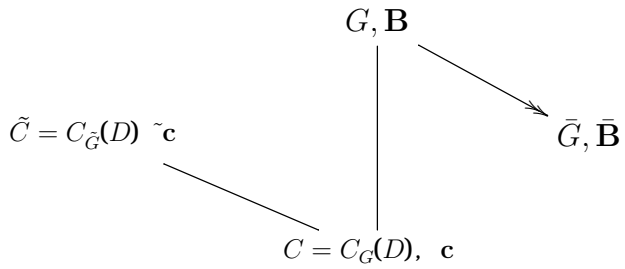
引理 3.8。(a) 我们有 $Y \leq Z(G)$.

(b) 自然满同态 $\langle t \rangle \to D$ 的核等于 $\langle t \rangle \cap Y$，因此 $|\bar{D}| = |t|/p^{c'}$。

(c) 我们有 $O_p(Z) = Z \cap D$。此外，$D = \langle t, Y \rangle = \langle t, O_p(Z) \rangle$。特别地，$r(D) \leq 2$。

(d) 若 $\langle t \rangle \cap O_p(Z) = \{1\}$，则 $Y = O_p(Z)$。(e) 若 $|D| = |t|p^a$，则 $\langle t \rangle \cap O_p(Z) = \{1\}$ 且 $p^a \mid n$。(f) 若 D 是循环的，则 $D = \langle t \rangle$。

FIGURE 1. 一般线性群$_n^\varepsilon(q)$ 的一些子群和块，I



证明。（a）和（b）显然。

(c) 由于 D 是一个缺陷群，因此我们有 $O_p(Z) \leq D$，这就得出了第一个断言。其他断言可由 $D = \langle \bar{t} \rangle$ 和 $Y \leq O_p(Z)$ 得出。

(d) 根据 (c) 和假设， $D = \langle t \rangle \times O_p(Z)$。由于 $Y \leq O_p(Z)$，只有当 $Y = O_p(Z)$ 时，商群 D/Y 才可能是循环的。

(e) 我们有 $|t|p^a = |D| \leq |t||Y| \leq |t||O_p(Z)| \leq |t|p^a$，由此得出所述结论。

(f) 如果 D 是循环的且 D 非平凡，那么 D 的真子群的像是 D的真子群。由于 $\langle t \rangle$的像等于 D，因此得到所述结论。□

3.9. 局部构型。 让我们来看一下局部情形。我们先引入更多记号。

记号 3.10。（i）令 $C := C_G(D)$ 和 $C := C_{\tilde{G}}(D)$。则 $C \trianglelefteq C$。

（ii）令 $\mathbf{c}$ 为$\mathbf{B}$ 在 C中的一个 Brauer 对应块。那么 D 是$\mathbf{c}$的一个缺陷群。

（iii）缺陷群属于块 $\tilde{\mathbf{c}}$ 且满足 D 并令 $C \cap D$。□

注意， $C = C_G(t)$ 和 $C = C_{\tilde{G}}(t)$，作为 $O_p(Z) \leq Z(G)$ 以及$D = \langle t, O_p(Z) \rangle$。相关的群和块显示在图 1 的示意图中。不变量 $W(\mathbf{B})$ 将借助 $\tilde{\mathbf{c}}$ 计算。

引理 3.11。 以下陈述成立。

(a) 群 C/C 是阶为 $q - \varepsilon$ 的循环群。

(b) 群 D/D 是阶整除 p^a 的循环群。特别地， D 是阿贝尔群，且 $r(D) \leq r(D) + 1 \leq 3$。

(c) 我们有 $D = G \cap D$ 和 $D = G \cap O_p(Z(C))$。

(d) 若 D 是 G 的某个极大环面的 *Sylow* p-子群，则 $|D| = |D|p^a$。

证明。 (a) 这由引理 3.4(a) 得出。

(b) 我们有 $D/D = D/(C \cap D) \cong DC/C \leq C/C$，因此第一个断言可由 (a) 推出。特别地， D 是阿贝尔群，因为 $D \leq Z(D)$。下一个断言由第一个断言和引理 2.1(a) 得出。

(c) 第一个断言显然成立，因为 $C = G \cap \tilde{C}$.

为证明第二个断言，我们先证明 $D \leq G \cap O_p(Z(C))$。由于 $D \leq G$，只需证明 $D \leq O_p(Z(C))$。现在， D 是阿贝尔群，因此 $D \leq C_{\tilde{G}}(D) = C$ 和 $[D, C] = \{1\}$。于是 $D \leq Z(C)$，并且由于 D 是一个 p-群，我们得到 $D \leq O_p(Z(C))$。为证明反向包含，首先注意到 $G \cap Z(C) \leq Z(C)$。由于 $G \cap O_p(Z(C))$ 是一个 p-群，这意味着 $G \cap O_p(Z(C)) \leq O_p(Z(C))$。现在， $O_p(Z(C)) = D$，由 [HL24、引理 2.1] 可得，证毕。

(d) 假设 D 是极大环面 T 的 Sylow p-子群，其中该环面属于 G。那么 $D = G \cap D = G \cap T \cap D$ 是 G的 $T := G \cap T$中极大环面的 Sylow p-子群。由引理 3.4(a)可知 $[T\colon T] = q - \varepsilon$，故结论成立。□

3.12. **分析局部构型**。 回顾记号 3.2， V 是 G的自然 n维 $\mathbb{F}_{q^\delta}$-向量空间。下文将使用 HL25 第 3.1、3.2 节中引入的相应记号[3.4]。

引理 3.13. t 的最小多项式至多有三个不可约因子。

证明。 令 h 表示 t 作用于 V时，其最小多项式的不可约因子个数。根据 V 关于 t相对于 $C_{\tilde{G}}(t) = C_1 \times \cdots \times C_h$，其中每个 C_i 都是一般线性群或酉群，且底域可能是 $\mathbb{F}_{q^\delta}$的一个扩域。由于 $p \mid q - \varepsilon$，对每个 $1 \leq i \leq h$都有 $p \mid |Z(C_i)|$ 。

根据引理 2.1(b)，有 $r(O_p(Z(C)) = h$。由于 D 是 C的某个 p-块的缺陷群，因此有 $O_p(Z(C)) \leq D$。由此可得 $h = r(O_p(Z(C)) \leq r(D) \leq 3$，第一个不等式来自引理 2.1(c)，第二个不等式来自引理 3.11(b)。□

记号 3.14。 (i) 令我们用 $\Delta_1, \ldots, \Delta_h$ 表示 $h \in \{1, 2, 3\}$ 的最小多项式的首一不可约因子，其中 $t_\circ$

(ii) 固定 $j \in \{1, \ldots, h\}$。令 $\xi_j \in \mathbb{F}$ 表示 Δ_j的一个根。令 d_j 表示 Δ_j的次数，并令 n'_j 表示其在 t的特征多项式中的重数。记 $n'_j = m_j p^{b_j}$ ，其中 b_j, m_j和 $p \nmid m_j$为非负整数。

(iii) 我们选择记号，使得 $d_1 \geq \cdots \geq d_h$。如果$d_1 = 1$ 且 $h \geq 2$，则我们假设对 $1 \leq j < h$有 $|\xi_j| \geq |\xi_{j+1}|$ 。

(iv) 令 $V_j := \ker(\Delta_j(t))$。则 V_j 是 C-不变的。令 t_j 表示 t 在 V_j上的限制。（视上下文而定，我们将 t_j 视为 V_j 或 V的自同构。） t_j 作用于 V_j上的最小多项式等于 Δ_j。此外，$\dim^{\mathbb{F}_{q^\delta}}(V_j) = n_j$，其中 $n_j := n'_j d_j = m_j d_j p^{b_j}$。□

我们记录上文引入的这些量的一些性质。

引理 3.15。设 j 满足 $1 \le j \le h$。则以下陈述成立。

(a) 我们有 $d_j = p^{a_j}$，其中 a_j是一个非负整数；特别地，若 $b_j = 0$，则$n_j = m_j p^{a_j}$。此外，若 $a_j > 0$，则 $|\xi_j| = p^{a+a_j}$；若$a_j = 0$，则 $|\xi_j| \mid p^a$。

(b) 若 $\varepsilon = -1$，则有 $\Delta_j = \Delta_j^\dagger$，即 ξ_j^{-q} 是 Δ_j的一个根。

(c) p除 $(q^{\delta d_j}-1)/(q^\delta-1)$ 的最高幂等于 p^{a_j}，并定义正整数 m'_j 使得 $(q^{\delta d_j}-1)/(q^\delta-1) = m'_j p^{a_j}$；则$p \nmid m'_j$。

(d) 我们有 $\det(t_j) = \xi_j^{m_j m'_j p^{a_j+b_j}}$。特别地，$|\det(t_j)| = p^{a-b_j}$ 当$a_j > 0$ 且 $b_j \le a$时。

(e)令 κ_j 表示 κ在 V_j上的限制。那么，当 $\varepsilon = -1$时，κ_j 是一个非退化的厄米形式。我们以自然方式将 $I(V_j, \kappa_j)$ 视为 G 的子群 $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$。置 $G_j := I(V_j, \kappa_j)$ 以及 $C_j := C_{\tilde{G}_j}(t_j)$。则$\tilde{G}_j \cong$一般线性群$^\varepsilon_{n_j}(q)$ 和 $\tilde{C}_j \cong$一般线性群$^\varepsilon_{n'_j}(q^{p^{a_j}})$。 $\tilde{}$特别地，$Z(C_j)$ 是循环的，并且 $|Z(C_j)|_p = p^{a+a_j}$。

证明。(a) 参见 [HL25，引理 4。1。1(c)]。

(b) 这是 [HL25，引理 3.2.2]。(c) 这是标准结论。(d) 参见 [HL25，引理 4。1。1(e)]。(e) κ_j 在 $\varepsilon = -1$时非退化这一事实由(b)推出。 □

$\tilde{}$回忆记号 3.10(iii)，D 表示$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$块 $\tilde{}$c的一个缺陷群，其中 $C = C_1 \times \cdots \times C_h$。$\tilde{}$c 可分解为$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ C_j 的块的张量积，其缺陷群为 $D_j \le C_j$，其中 $1 \le j \le h$$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$，且满足 $D \cong D_1 \times \cdots \times D_h$。

引理 3.16。假设采用记号 3.2、3.7、3.10、3.14 和引理 3.15中引入的术语。

(a) </style}我们有，当且仅当 时取等号。(b)我们有

$$|\tilde{D}| \le |D|p^a \le |t|p^{2a} \le p^{3a+a_1}. \tag{1}$$

如果 $|\tilde{D}| = p^{3a+a_1}$，那么 $|D| = |t|p^a$ 和 $|t| = p^{a+a_1}$（即使 $a_1 = 0$）。

(c) 假设 t 的最小多项式不可约，且 $\sim D \not\leq Z$。那么 D 是循环的，因此 D 是循环的，而 **c** 被一个循环块覆盖。此外， $a_1 > 0$ 和 $b_1 = a$。特别是， $n = m_1 p^{a+a_1}$与 $p \nmid m_1$。

(d) 假设 t 的最小多项式恰有两个不可约因子。那么 D_1 和 D_2 是循环的，且 $b_1 = b_2 = 0$。此外，以下陈述成立。

(i) 若 $a_1 > a_2$，则 $\langle t\rangle \cap O_p(Z) = \{1\}$，且 $Y = O_p(Z)$。特别是，地， $c' = 0$。此外， $a_2 = c$ 和 $|D| = p^{a+a_1+c}$。

(ii) 若 $a_1 = a_2 > 0$，则 $|D| = p^{a+2a_1}$、 $c' = c - a_1 < a$ 和 $Y = O_p(Z)$。

(iii) 若 $a_1 = a_2 = 0$，则 D 是阶为 p^a 的循环的。特别地，$D = \langle t\rangle$ 和 $|t| = p^a$。

(iv) 若 $a_2 = 0$，则 D 是循环的。

(v) 我们有 $c \geq a_2$。

(vi) 假设 $a_1 = a_2 = 0$ 且 $c' < c$。则 $n_1 \neq n_2$。

(vii) 对于 $j = 1$，我们有 $|t_j| = p^{a+a_j}$ 2。

(e) 假设 t 的最小多项式恰好有三个不可约因子。则 $b_1 = a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = 0$ 且 $|\tilde{D}| = p^{3a+a_1}$。特别地，在 $\bar{}$ 中， $p^a \mid n$、 $Y = O_p(Z)$ 以及 $c' = 0$。因此 $|D| = |t| = p^{a+a_1}$。

如果 $a_1 > 0$，则 $n_2 \neq n_3$ 且 $N_{\tilde{G}}(C) = N_{\tilde{G}_1}(C_1) \times G_2 \times G_3$。

(f) 在所有情况下， $|\tilde{D}| = |D|p^a$、 $|t| = p^{a+a_1}$ 和 $|\bar{D}| = p^{a+a_1-c'}$。

(g) 如果 t 的最小多项式可约，则在 $\leq C_{\tilde{G}}(D)$ 和 $\leq N_{\tilde{G}}(D)$ 这两种情形下，等号均成立。

证明。 (a) 引理 3.15(a)推出 $|t_1| \mid p^{a+a_1}$；若 $a_1 >$为0，则等号成立；且对 $1 \leq j \leq h$有 $|t_j| \mid p^{a+a_1}$。

(b) 不等式 (1) 中的第一个不等式由引理 3.11(b) 得出，第二个由 $D = \langle t, O_p(Z)\rangle$ 和 $|O_p(Z)| = p^c \leq p^a$得出，最后一个则由 (a) 得出。

最后的断言由 (1) 显然可得。

(c) 此处， $D = G \cap O_p(Z(C_1))$。若 $a_1 = 0$，则 $C_1 = G$ 且 $D \leq Z$，而这正是我们排除的情形。因此，根据 (a) 和引理 3.8(f)， $a_1 > 0$ 且 D 是阶为 p^{a+a_1}的循环的。若 D_1 不是循环的，则 $p^{a+a_1} = |D| \geq |\tilde{D}|/p^a \geq p^{a+2a_1}$；后一个估计由引理 3.5 应用于 C_1得出。这一矛盾表明 D 是循环的。特别地， $|\tilde{D}| = p^{a+a_1+b_1}$， 且 $\tilde{D}$ 是 G的一个极大环面的 Sylow p-子群；参见 HL25 的推论 3.6.2]。引理 3.11(d)推出 $p^{a+a_1} \nmid |D| = |\tilde{D}|/p^a = p^{a_1+b_1}$， 从而得到所述结论 $b_1 = a$。

(d) 回顾一下， $3 \geq r(D) = r(D_1) + r(D_2)$。若 D_j 为非循环，则 $|\tilde{D}_j| \geq p^{2(a+a_j)}$ 由引理 3.5 得出，将其应用于 $\tilde{C}_j$，其中 $j = 1,2$。

~ ~首先假设 D_1 为非循环。则 D_2 为循环的，并利用 (1) 和 [HL25，推论 3.6.2]，得到

$$p^{3a+a_1} \geq |\tilde{D}| \geq p^{2(a+a_1)+a+a_2+b_2} = p^{3a+2a_1+a_2+b_2},$$

这意味着 $a_1 = a_2 = b_2 = 0$，并且还意味着 $|\tilde{D}| = p^{3a}$。现在 $D = G \cap O_p(Z(\tilde{C}))$。由于 $a_1 = a_2 = 0$，我们有 $|O_p(Z(\tilde{C}))| = p^{2a}$。显然，$O_p(Z(\tilde{C})) \not\leq G$，因为 $b_2 = 0$，即 $p \nmid n_2$。因此 $|D| < p^{2a}$，这与 $|D| \geq |D|/p^a$ 矛盾。

~那么假设 D_2 是非循环的。于是

$$p^{3a+a_1} \geq |\tilde{D}| \geq p^{a+a_1+b_1+2(a+a_2)} = p^{3a+a_1+b_1+2a_2},$$

这意味着 $b_1 = a_2 = 0$，并且还意味着 $|\tilde{D}| = p^{3a+a_1}$。如果 $a_1 = 0$，则类似于上面的论证会导出矛盾。因此，以下设 $a_1 > 0$。由 (b) 和引理3.8(e)，我们得到$p^a \mid n$。我们断言 $b_2 = 0$，即 $p \nmid n'_2$。事实上，根据引理 3.15(d)，$|\det(t_1)| = p^a$，并且 $\det(t_2) = \xi_2^{m_2 m'_2 p^{b_2}} = \xi_2^{n'_2 m'_2}$，因为 $a_2 = 0$。由 $\det(t_1)\det(t_2) = \det(t) = 1$，我们得到 $p^a = |\det(t_1)| = |\det(t_2)|$，从而得到 $p \nmid n'_2$，这正是我们的断言。现在 $n = n'_1 p^{a_1} + n'_2$ 并且 $p \nmid n'_2$。由于$a_1 > 0$，我们得出 $p \nmid n$，矛盾。

接下来我们证明 $b_1 = b_2 = 0$，首先假设 $a_1 > 0$。于是由 (a) 得到 $|t| = p^{a+a_1}$。现在 $D = \langle t, O_p(Z) \rangle$ 且 $|O_p(Z)| = p^c$，因此~ ~ $|D| \leq |t||O_p(Z)| = p^{a+a_1+c}$。由于 D_1 和 D_2 是循环的，我们得到 $|\tilde{D}| = p^{2a+a_1+b_1+a_2+b_2}$。由 [HL25 的推论 3.6.2]可知，$\tilde{D}$ 是 $\tilde{G}$ 的 Sylow p-子群；引理 3.11(d) 蕴含

$$|D| = p^{a+a_1+b_1+a_2+b_2}, \tag{2}$$

从而

$$c \geq b_1 + a_2 + b_2. \tag{3}$$

由于 $a \geq c \geq b_1 + a_2 + b_2$，我们得到对于 $j = 1, 2$，有 $a \geq b_j$。若还满足 $a_2 > 0$，则由引理 3.15(d)，对于 $j = 1, 2$，有 $|\det(t_j)| = q^{a-b_j}$。由$|\det(t_1)| = |\det(t_2)|$，如果 $a_1, a_2 > 0$，便得到 $b_1 = b_2$。

现在假设 $a_1 > a_2 > 0$。那么 $n = m_1 p^{a_1+b_1} + m_2 p^{a_2+b_2}$。由$a_1 + b_1 > a_2 + b_1 = a_2 + b_2$，我们得到 $a_2 + b_2 = b \geq c \geq b_1 + a_2 + b_2$。由此可知，$b_2 = b_1 = 0$。

接下来假设 $a_1 > a_2 = 0$。根据引理 3.15(d)，有 $|\text{行列式}(t_1)| = p^{a-b_1}$。由于行列式$(t_2) = \xi_2^{m_2 m'_2 p^{b_2}}$ 且 $|\xi_2| \mid p^a$，因此当 $b_1 = 0$ 时，$b_2 = 0$。现在 $n = m_1 p^{a_1+b_1} + m_2 p^{b_2}$。若 $a_1 + b_1 > b_2$，则 $b_2 = b \geq c \geq b_1 + b_2$，从而 $b_1 = 0$。如上所述，这意味着$b_2 = 0$。否则，$a_1 + b_1 \leq b_2$。若 $a = b_1$，则由 $c \geq b_1 + b_2 = a + b_2 \geq a \geq c$可得 $b_2 = 0$。但此时 $p \nmid n$，这与 $c \geq$矛盾

$b_1 + b_2 = a > 0$。因此 $a \neq b_1$，即 $|$行列式$(t_1)| = p^{a-b_1} > 1$。写作 $|\xi_2| = p^e$，由 $|$行列式$(t_1)| = |$行列式$(t_2)|$可得 $a - b_1 = e - b_2$。由此可知 $a - b_1 = e - b_2 \leq e - a_1 - b_1$，故 $e \geq a + a_1 > a$，矛盾。

最后，假设 $a_1 = a_2 > 0$。由于我们得到 $D \cong \{(t_1^i, t_2^j) \tilde{|} \det(t_1^j) = \det(t_2^i)^{-1}\}$。因此，$|D| = p^{a+a_1+a_2+b_1}$作为映射 det: $\langle t_2 \rangle \to \mathbb{F}^*$ 的核，其阶为 $p^{a_2+b_2}$。由 $p^{a+a_1+a_2+b_2} = |D| \geq |\tilde{D}|/p^a = p^{a+a_1+b_1+a_2+b_2}$ 可得 $b_1 = 0$，进而得到 $b_2 = 0$。

现在假设 $a_1 = a_2 = 0$。在证明 $b_1 = b_2 = 0$的同时，我们也证明陈述 (iii)。选取记号 $\tilde{}$ 使得 $b_1 \geq b_2$。这里，$O_p(Z(C)) = \langle t_1' \rangle \times \langle t_2' \rangle$，其中 $|t_j'| = p^a$ 适用于$j = 1$，2。由于 det(t_1') 和 det(t_2') 位于 $\mathbb{F}^*$ 的同一个子群中，且 $b_1 \geq b_2$，我们得到 $|D| = |G \cap O_p(Z(\tilde{C}))| = p^{a+b_2}$。另一方面，$|D| \geq |\tilde{D}|/p^a = p^{a+b_1+b_2}$，这意味着 $b_1 = b_2 = 0$。由$\tilde{}p \nmid n_1 n_2$，我们可得 $D = G \cap O_p(Z(C)) \cong \langle t_1' \rangle$。由此得到 (iii)。

最后，我们来证明陈述 (i)–(vii)。

我们已经证明了 (iii)。显然，(v) 由 (i) 和 (ii) 得出。根据 (iii)，只需在 (i) 的情形下证明 (iv)。在这种情况下，$\_c = a_2 = 0$，因此 $p \nmid |Z|$。所以 Y 是平凡的，因而 $D = D$ 是循环的。现在来证明 (i)、(ii)。在这种情况下，根据 (2)，有$|t| = p^{a+a_1}$ 和$|D| = p^{a+a_1+a_2}$。此外，根据 (3)，有 $a_2 \leq c$。现在假设 $a_1 > a_2$。由于 $n = m_1 p^{a_1} + m_2 p^{a_2}$ 满足 $p \nmid m_1 m_2$ 和 $a_1 > a_2$，我们得到$b = a_2$。因为 $c \leq b = a_2 \leq c$，所以我们发现 $a_2 = c$。由此可得

$$p^{a+a_1-c'} = |\bar{D}| = |D/Y| \geq |D/O_p(Z)| = p^{a+a_1} \geq p^{a+a_1-c'}.$$

因此 $c' = 0, Y = O_p(Z)$ 和 $\langle t \rangle \cap O_p(Z) = \{1\}$。这就证明了 (i)。现在假设 $a_1 = a_2 > 0$。根据 (2)，这里有 $|D| = p^{a+2a_1}$。由于 $|t| = p^{a+a_1}$且根据定义有 $|\langle t \rangle \cap Y| = p^{c'}$，我们得到

$$p^{a+a_1-c'} = |\bar{D}| = |D/Y|.$$

特别地，$|Y| = p^{a_1+c'}$。此外，$|\langle t \rangle \cap O_p(Z)| = p^{c-a_1}$，因为$D = \langle t, O_p(Z) \rangle$。假设 $|Y| \leq p^{c-a_1}$。那么 $Y \leq \langle t \rangle \cap O_p(Z)$，这意味着 $Y = \langle t \rangle \cap Y$。由此可得

$$p^{a_1+c'} = |Y| = |\langle t \rangle \cap Y| = p^{c'},$$

这意味着 $a_1 = 0$，矛盾。因此 $|Y| > p^{c-a_1}$。于是$\langle t \rangle \cap O_p(Z) \leq Y$，这意味着 $\langle t \rangle \cap Y = \langle t \rangle \cap O_p(Z)$。由此可得$p^{c'} = p^{c-a_1}$，因此 $c' = c - a_1$。此外，

$$|Y| = p^{a_1+c'} = p^{a_1+c-a_1} = p^c,$$

因此 $Y = O_p(Z)$。这就完成了 (ii) 的证明。为证明 (vi)，假设 $n_1 = n_2$。那么 $n = 2n_1$ 和 $p \nmid n_1$。因此 $c = 0$，这与 $0 \le c' < c$ 矛盾。若 $a_j > 0$ 对 $j = 1, 2$ 成立，则根据引理 3.15(a)，$|t_j| = p^{a+a_j}$。若 $a_1 > a_2 = 0$，则根据引理 3.15(d)，$|$行列式$(t_1)| = p^a$，因此 $|t_2| = p^a$，因为行列式$(t_1t_2) = 1$。若 $a_1 = a_2 = 0$，则 $t = t_1t_2 = t_2t_1$, $|t| = p^a$ 和行列式$(t_1t_2) = 1$ 推出 $|t_1| = |t_2| = p^a$。这就证明了 (vii)。

(e) 由于 $r(\tilde{D}_j) \le 3$ 是循环的，由 (b) 得 $[\tilde{D}_j, \tilde{D}_j]$ 是引理 3.11(b)，因子推论 3.6.2]，可得 $|\tilde{D}_j| = p^{a+a_j+b_j}$ 对 $1 \le j \le 3$ 成立。前两个断言由 (1) 得出。关于这些断言的推论，请参见 (b) 以及引理 3.8(d) 和 (e)。

现在证明最后一个断言。我们有 $n = m_1p^{a_1} + n_2 + n_3$ 和 $p \nmid n_2n_3$。由于 $p^a \mid n$ 且 $a > 0$，又有 $p \mid n_2 + n_3$，因为 $a_1 > 0$。这意味着 $n_2 \ne n_3$，因为 p 是奇数。现在 $C = C_{\tilde{G}}(t)$，因此 $N_{\tilde{G}}(C)$ 置换空间 V_1、V_2 和 V_3。由于这些空间的维数两两不同，$N_{\tilde{G}}(C)$ 固定了它们各自，从而得到所需断言。

(f) 这包含在 (c)–(e) 中。

(g) 首先假设 t 的最小多项式不可约。根据 (c)，D 是循环的，因此我们的结论成立。

接下来假设 t 的最小多项式有两个不可约因子。那么，根据 (d)，$b_1 = b_2 = 0$。因此 $|\tilde{D}| = p^{2a+a_1+a_2} = |O_p(Z(\tilde{C}))|$，从而 $D = O_p(Z(C)) \le Z(C)$。故 $C \le C_{\tilde{G}}(D) \le C_{\tilde{G}}(D) = C$。由于 $D = G \cap D$，我们得到 $N_{\tilde{G}}(D) \le N_{\tilde{G}}(D) \le N_{\tilde{G}}(C_{\tilde{G}}(D)) = N_{\tilde{G}}(C) \le N_{\tilde{G}}(O_p(Z(C))) = N_{\tilde{G}}(D)$。$t$ 的最小多项式有三个不可约因子的情形可用类似方法处理。□

3.17. 中间构型。记 $h \in \{1, 2, 3\}$ 为 t 的最小多项式的不可约因子个数。若 $h = 1$，令 E 表示 D 的平凡子群；否则，令 E 表示 D 中阶为 p 的唯一子群。令 $\mathbf{d}$ 表示 $C_{\tilde{G}}(E)$ 中 $\mathbf{B}$ 的一个 Brauer 对应块。则 $W(\mathbf{B}) = W(\mathbf{d})$。后者将通过将 $(E, \mathbf{d})$ 拉回至 G 来计算。

记号 3.18。沿用记号 3.7 中的术语。

(i) 令 $E := \langle t', Y \rangle$，其中 $t' = 1$，若 $h = 1$；否则令 $t' := t^{p^{a+a_1-c'-1}}$。（由于我们假设 $\bar{D}$ 非平凡，且由引理 3.16(f) 可知 $|\bar{D}| = p^{a+a_1-c'}$，因此有 $a + a_1 - c' \ge 1$。）

(ii) 令 $\mathbf{H} := C_{\tilde{\mathbf{G}}}(E) = C_{\tilde{\mathbf{G}}}(t')$，且 $\mathbf{H} := \mathbf{H} \cap \mathbf{G} = C_{\mathbf{G}}(E) = C_{\mathbf{G}}(t')$。□

注意，若 t 的最小多项式不可约，则 $\mathbf{H} = \mathbf{G}$ 且 $\mathbf{H} = \mathbf{G}$。还要注意，包含映射 $\mathbf{H} \to \mathbf{H}$ 是一个正则嵌入，并且 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{H}$ 都是 F-稳定的。

我们汇总上述对象的若干性质，并采用记号 3.7、3.10、3.14、3.18 和引理 3.15(e)中的术语。此外，回顾一下，根据引理 3.8(c)，$D = \langle t, O_p(Z)\rangle$，并且根据引理 3.16(f)，$|t| = p^{a+a_1}$。

引理 3.19. 假设 $h \geq 2$。对于部分 (e) 和(f)，还假设 $|\{n_1, n_2, n_3\}| \geq 2$ 当且仅当 $h = 3$ 且 $a_1 = 0$。则以下陈述成立。

(a) 有 $|t'| = p^{c'+1}$。*(b)* 有 $N_{\tilde{G}}(D) \leq N_{\tilde{G}}(E)$ 和 $N_G(D) \leq N_G(E)$。*(c)* 假设 $h = 2$。那么，除非 $a_1 = a_2 = 0$ 且 $c' < c$，否则 $H = G_1 \times G_2$。在后一种情况下，$H = G$。*(d)* 假设 $h = 3$。若 $a_1 = 0$，则 $H = G_1 \times G_2 \times G_3$。若 $a_1 > 0$，则 $H = G_1 \times G_{2,3}$，其中 $G_{2,3} := I(V_2 \oplus V_3, \kappa_{2,3})$，这里 $\kappa_{2,3}$ 表示将 κ 限制到 $V_2 \oplus V_3$。*(e)* 有 $[N_G(E) : H] = [N_{\tilde{G}}(E) : H] \leq 2$。*(f)* 有 $H = C_{\tilde{G}}(E)$。

证明。若元素 $\xi \in \mathbb{F}^*$ 满足 $\xi \in \mathbb{F}_{q^\delta}$，则称其为有理的。若 ξ 是一个 p 元素，当且仅当 $|\xi| \leq p^a$时，情况便是如此。

(a) 这由 $|t| = p^{a+a_1}$ 得出。

(b) 注意到 Y 是 G 的中心子群，因此 $Y \leq N_{\tilde{G}}(D)$ 且 $Y \leq N_{\tilde{G}}(E)$。于是

$$N_{\tilde{G}}(D)/Y = N_{\tilde{G}/Y}(D/Y) \leq N_{\tilde{G}/Y}(E/Y) = N_{\tilde{G}}(E)/Y,$$

其中，等式由 [HL24，引理 2。2(a)], 得出，而包含关系则源于 D/Y 是循环的这一事实。由此即得我们的断言。

(c) 首先假设 $a_1 > a_2$，因此引理 3.16(d)(i) 适用。由于 $c' = 0$，我们有 $|t'| = p \leq p^a$，所以对于 $j = 1$，2，t' 在 V_j 上的特征值都是有理的。由于 $\langle t'\rangle \cap O_p(Z) = \{1\}$，$t'$ 在 V_1和 V_2 上的特征值互不相同。

现在假设 $a_1 = a_2$，于是引理 3.16(d)(ii)(iii)适用。因此 $|D| = p^{a+2a_1}$。由 $D = \langle t, O_p(Z)\rangle$ 以及 $|t| = p^{a+a_1}$，我们得出：$|\langle t\rangle \cap O_p(Z)| = p^{c-a_1}$。根据 (a)，当且仅当 $c' < c - a_1$时，我们有 $t' \in Z \leq Z(G)$。后一种情况只有在 $a_1 > 0$时才会发生。

现在假设 $c' = c - a_1$。若 $a_1 > 0$，则 $c' + 1 = c - a_1 + 1 \leq c \leq a$，因此 t' 在 V_1 和 V_2 上的特征值都是有理的。若 $a_1 = 0$，则 $|t| = p^a$，因而 t' 在 V_1 和 V_2 上的特征值都是有理的。

(d) 应用引理 3.16(e)。首先假设 $a_1 > 0$。那么 $|t_1| = p^{a+a_1}$ 且 $p^a \mid |t_j|$ 对于 $j = 2$，3。由于 $|t'| = p$ 且 $a + a_1 - 1 \geq a$，t' 在 V_1 上的特征值的阶为 p，而 $V_2 \oplus V_3$ 是 t' 的不动子空间。这就证明了我们的断言。

现在假设 $a_1 = 0$。那么 $|t| = p^a$，且 t 的所有特征值都是有理的。此外，由于 $Y = O_p(Z)$ 且 $|O_p(Z)| = p^a$，我们可以假设 t 在 V_3 上的作用是恒等作用，即 $\xi_3 = 1$。由 $\det(t) = 1$ 和 $p \nmid n_1n_2$，我们得出 $|\xi_1| = |\xi_1^{n_1}| = |\xi_2^{n_2}| = |\xi_2|$。因此 $|\xi_1| = |\xi_2| = p^a$。

t' 的特征值为 $\xi_1^{p^{a-1}}$、$\xi_2^{p^{a-1}}$ 和 1。假设 $\xi_1^{p^{a-1}} = \xi_2^{p^{a-1}}$。那么 $1 = \det(t') = \xi_1^{p^{a-1}n_1}\xi_2^{p^{a-1}n_2} = \xi_1^{p^{a-1}(n_1+n_2)}$。由于 p 整除 $n = n_1 + n_2 + n_3$ 和 $p \nmid n_1n_2n_3$，所以和 $n_1 + n_2$ 互素。这与 $|\xi_1| = p^a$ 这一事实矛盾，因而意味着 t' 具有三个两两不同的特征值。这证明了我们的断言。

(e) 根据引理 3.4，因 $[H: H] = q - \varepsilon$，我们得到 $HG = G$。由此可知 $N_{\tilde{G}}(E)G = G$，从而 $[N_{\tilde{G}}(E): N_G(E)] = q - \varepsilon$。因此 $[N_G(E): H] = [N_{\tilde{G}}(E): H]$。在(c)和(d)中确定的 H 的结构表明 $[N_{\tilde{G}}(E): H] \leq 2$，因为 $N_{\tilde{G}}(E)$ 置换了 V 上 t' 的特征子空间。

(f) 这由 (e) 和引理 2.2 得出。 □

下面的例子表明，引理 3.19 中关于陈述 (e) 和 (f) 的额外假设是必要的。

例 3.20。令 $p = n = 3$，并考虑 $G =$ 特殊线性群$_3(7)$。则 $\bar{G} := G/Z =$ PSL$_3(7)$ 有一个亏 1 的循环 3- 块 $\mathbf{B}$。现在，G 有一个唯一的非中心的 3 阶元素共轭类。令

$$t := \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $\xi \in \mathbb{F}_7$ 的阶为 3，我们不妨设 $D = \langle t, Z\rangle$ 是支配 $\mathbf{B}$ 的 G 的块 $\mathbf{B}$ 的一个亏群。

因此，我们处于 $h = 3$、$a_1 = a_2 = a_3 = 0$ 和 $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ 的情形。此外，$D = E$。然而，$|C_G(E)| = 36 = |C_{\bar{G}}(E)|$，因此 $C_G(E)$ 在 $C_{\bar{G}}(E)$ 中的指数为 3。□

3.21. **中间块**。沿用第3.17小节的记号。特别地，h 表示 t的最小多项式 $\bar{H}$ 的不可约因子个数。回忆一下，根据引理 3.19(f)，除非 $h = 3$、$a_1 = 0$ 和 $n_1 = n_2 = n_3$，否则 $H = C_G(E) = C_{\bar{G}}(E)$。无论如何，$\bar{H} \leq C_{\tilde{G}}(E)$。注意，$C_G(D) = C_{\bar{H}}(D)$，且 $C_{\tilde{G}}(D) = C_{\tilde{H}}(D)$。

记号3.22。(i) 令 $\mathbf{d}$ 表示 H 的块，使得（E，$\mathbf{d}$）与 H 的 Brauer 对（D，$\mathbf{c}$）相同。

(ii) 令 $\tilde{\mathbf{d}}$ 表示 H 的块，使得（D，$\tilde{\mathbf{c}}$）是一个 $\tilde{H}$ d-Brauer 对，属于 H。

(iii) 令 $\bar{\mathbf{d}}$ 表示由 $\mathbf{d}$ 支配的 H 块。

引理 3.23. 若 $h = 1$，假设 $D \not\leq Z$。则$\mathbf{d}$ 覆盖 $\mathbf{d}$，且$\mathbf{d}$是$\mathbf{B}$的 *Brauer* 对应块。

证明。注意到 $C_{\tilde{H}}(D) = C_{\tilde{G}}(D) = C$。块 $\mathbf{c}$属于 C，其缺陷群为 D，因此根据引理 2.3，$\mathbf{d}$ 的缺陷群为 D。由于$C_G(D) = C_H(D)$，Brauer 对 $(E, \mathbf{d})$ 包含于 H 的 Brauer 对 $(D, \mathbf{c})$，这也意味着它们是 G 的 Brauer 对之间的包含关系。因此，根据 [Lin18，命题 6.3.6]，$(E,\mathbf{d})$ 是一个$\mathbf{B}$-Brauer 对；于是再次由引理 2.3，$\mathbf{d}$ 的缺陷群为 D。

注意，根据引理 3.16(g)，$N_{\tilde{H}}(D) \leq N_{\tilde{H}}(D)$。令 $\mathbf{b}$和 $\mathbf{b}$分别表示 $N_{\tilde{H}}(D)$ 中 $\mathbf{d}$ 的 Brauer 对应块，以及 $N_H(D)$ 中 $\mathbf{d}$ 的 Brauer 对应块。根据 Harris-Kn¨orr 对应 [HK85，定理]，只需证明$\mathbf{b}$ 覆盖$\mathbf{b}$。根据 Brauer 对包含关系的定义，$\mathbf{b}$ 覆盖 $\mathbf{c}$，且$\mathbf{b}$ 覆盖$\mathbf{c}$。

根据覆盖，$N_H(D)$中覆盖$\mathbf{c}$的某个块。我们将证明 $N_H(D)/C$ 是一个 p-群。于是，$\mathbf{b}$ 是覆盖$\mathbf{c}$ 的 $N_H(D)$ 的唯一块，因此$\mathbf{b}$ 覆盖$\mathbf{b}$。

假设 $h = 1$，从而 $H = G$。由引理 3.16(c)，我们有$C_{\tilde{G}}(D) = \tilde{C} \cong \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{n_1}(q^{p^{a_1}})$，因此 $|N_{\tilde{G}}(\tilde{C})/\tilde{C}| = p^{a_1}$。现在考虑映射链

$$N_G(D) \hookrightarrow N_{\tilde{G}}(D) \hookrightarrow N_{\tilde{G}}(C_{\tilde{G}}(D)) = N_{\tilde{G}}(\tilde{C}) \to N_{\tilde{G}}(\tilde{C})/\tilde{C},$$

其核等于 $N_G(D) \cap C = C$。由此可得，$N_G(D)/C$ 是一个p-群。现在假设 $h \geq 2$。首先，根据 [HL24，引理 2.2(a)]，有 $N_H(D) = N_{\bar{H}}(D)$。因此

$$N_H(D)/C \cong \overline{N_H(D)}/\bar{C} \cong N_{\bar{H}}(\bar{D})/\bar{C}.$$

现在，$N_{\bar{H}}(D)/C_{\bar{H}}(D)$ 是一个 p-群，因为 D 是循环的，且 $N_{\bar{H}}(D)$ 在 E 上的作用是平凡的。此外，由引理 2.2，$C_{\bar{H}}(D)/C$ 是一个 p-群。由于

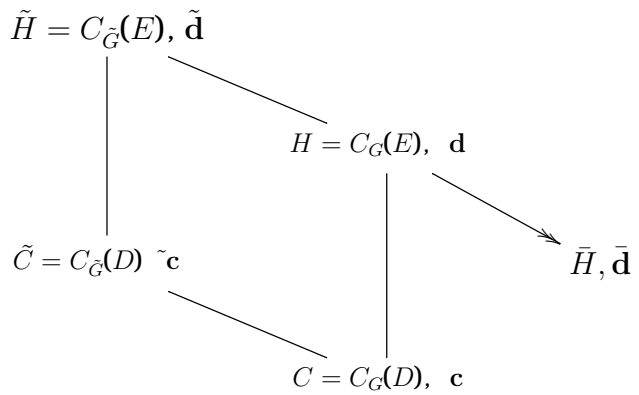
$$|N_{\bar{H}}(\bar{D})/\bar{C}| = |N_{\bar{H}}(\bar{D})/C_{\bar{H}}(\bar{D})| \cdot |C_{\bar{H}}(\bar{D})/\bar{C}|,$$

由此可知，$N_H(D)/C$ 是一个 p-群。

现在我们证明 $\mathbf{d}$ 是 $\mathbf{B}$ 的布劳尔对应块。若 $h = 1$，则显然成立。因此假设 $h \geq 2$。由于 $H = C_{\bar{G}}(D)$，这一陈述是有意义的。由引理 3.19(b)，我们有 $N_G(D) \leq N_G(E)$。令 $\mathbf{b}'$ 和 $\mathbf{b}'$分别表示 $\mathbf{B}$ 在 $N_G(E)$中的布劳尔对应块，以及 $\mathbf{B}$在$N_{\bar{G}}(E)$中的布劳尔对应块。于是由 [HL24，引理 2.2(a)]，有 $N_G(E) = N_{\bar{G}}(E)$；并且由 [HL25，引理 2.4.1]，$\mathbf{b}'$支配 $\mathbf{b}'$。现在，$(E, \mathbf{d})$ 是一个 $\mathbf{B}$-Brauer 对，因此 $\mathbf{b}'$ 覆盖 $\mathbf{d}$。这很容易推出 $\mathbf{b}'$ 覆盖 $\mathbf{d}$，从而 $\mathbf{d}$ 是 $\mathbf{B}$ 的布劳尔对应块。□

相关群和块的示意图见图 2。

FIGURE 2. $\mathrm{GL}_n^{\varepsilon}(q)$ 的一些子群和块，II



~ ~ ~ C 和 H 的极大环面也是 G的极大环面。G 的 G-~极大环面共轭类由 n的分拆标记。若 T 的 G-共轭类由分拆~$\pi = (f_1,\ f_2,\ \ldots\ldots,\ f_m)$标记，则称 T的型为 π。那么

$$\tilde{T} \cong \tilde{T}_{f_1} \times \cdots \times \tilde{T}_{f_m}, \tag{4}$$

~并且 $N_{\tilde{G}}(T)$ 固定了对应于相同 f_j 的 (4) 的子乘积。

~**引理3.24**。若 $h = 3$，假设 $a_1 > 0$。则 $\mathbf{d}$ 关于 T 的极大环面 ~ ~是严格正则的，该极大环面属于 H，其型的各部分为 n_1、……、n_h。

~特别地，存在 $\theta \in$ 不可约特征集合(T) 中的一个 p'-阶且关于 H处于一般位置的元素~，使得

$$\tilde{\chi} := \varepsilon_{\tilde{\mathbf{T}}}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{H}}} R_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\tilde{\mathbf{H}}}(\theta)$$

~是 $\mathbf{d}$ 的一个不可约特征。

~证明。对于 $j \in \{1, \ldots, h\}$，块 ~$\mathbf{c}^j$ 关于~ ~是严格正则的，其中 C_j是 C_j 的一个循环极大环面；当将其视为 G_j 的环面时，其型为 (n_j)，并且 D_j 是 T_j 的一个 Sylow p- 子群；参见 [HL25, ~ ~ ~ ~推论 3.6.2]。因此，$T = T_1 \times \cdots \times T_h$ 包含 D 作为一个 Sylow p- ~ ~ ~子群，并且 ~$\mathbf{c}$ 是 $C = C_1 \times \cdots \times C_h$ 的一个严格正则块，关于 T且~。

我们断言，$1 \le N_{\tilde{H}}(h, \tilde{T})$ 固定每~个因子~= 1，则此结论显然。若 $h = 2$ 且 $H = G_1 \times G_2$，结论也显然。若~ ~$h = 2$ 且 $H = G$，则由引理 3.19(c)可得 $a_1 = a_2 = 0$ 和 $c' < c$。但由引理 3.16(d)(vi)可得 $n_1 \neq n_2$，这也蕴含了所要证明的结论。

若 $h = 3$，根据假设有 $a_1 > 0$，于是 $n_1 = m_1 p^{a_1}$，n_2，n_3两两不同。事实上，若 $n_2 = n_3$，则会有 $n = m_1 p^{a_1} + 2n_2$，从而得到 $p \mid n_2$，矛盾。由此得证。

现在 $\tilde{\mathbf{c}}$ 包含一个不可约特征 $\tilde{\psi}$ 其形式为

$$\tilde{\psi} := \varepsilon_{\tilde{\mathbf{T}}}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{C}}} R_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\tilde{\mathbf{C}}}(\theta),$$

对于某个 T 的 p' 阶不可约特征 θ，且其相对于 C 处于一般位置。根据该断言，θ 相对于 H 也处于一般位置，因此

$$\varepsilon_{\tilde{\mathbf{T}}}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{H}}} R_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\tilde{\mathbf{H}}}(\theta) = \varepsilon_{\tilde{\mathbf{C}}}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{H}}} R_{\tilde{\mathbf{C}}}^{\tilde{\mathbf{H}}}(\tilde{\psi})$$

是 H 的一个不可约特征。此外，根据 [CaEn99, Theorem 2.5]，$\tilde{\chi}$ 属于 $\mathbf{d}$。这证明了我们的断言。□

若 $h = 1$，则有 $\mathbf{B} = \mathbf{d}$、$\mathbf{B} = \mathbf{d}$ 和 $\mathbf{B} = \mathbf{d}$。在此情形下，我们利用 [HL25, Lemma 2.4.2(c)]，根据 $W(\mathbf{B})$ 计算 $W(\mathbf{B})$。若 $h \geq 2$，则按定义，$H \leq C_{\bar{G}}(E)$，其中 E 表示 D 中阶为 p 的唯一子群。

在此情形下，[HL25, Remark 2.3.3] 表明，可以根据符号序列 $\sigma_{\bar{\chi}}^{[l]}(\bar{t})$ 计算 $W(\mathbf{d})$，其中 $\bar{\chi}$ 表示 $\mathbf{d}$ 的非例外特征，而 l 由 $|\bar{D}| = p^l$ 定义。具体而言，若 $\Lambda = \{0, \ldots, l-1\}$，且 $A \subseteq \Lambda \setminus \{0\}$ 满足 $\sigma_{\bar{\chi}}^{[l]}(\bar{t}) = \omega_\Lambda(\mathbf{1}_A)$，则 $W(\mathbf{d}) = W_{\bar{D}}(A)$；记号见 [HL25, Definitions 2.1.1, 2.1.2]。

引理 3.25. 若 $h = 3$，则假设 $a_1 > 0$。令 $\bar{\chi}$ 表示不可约特征集合$(\mathbf{d})$ 的非-例外特征，并令 χ 表示 $\bar{\chi}$ 到 H 的膨胀。此外，令 $\tilde{\chi} \in$不可约特征集合$(\mathbf{d})$ 如引理3.24所述。那么

$$\sigma_{\chi}^{[a+a_1]}(t) = \omega_{\tilde{\mathbf{H}}}^{[a+a_1]}(t) = \sigma_{\tilde{\chi}}^{[a+a_1]}(t) \tag{5}$$

and

$$\sigma_{\tilde{\chi}}^{[a+a_1-c']}(\bar{t}) = \omega_{\tilde{\mathbf{H}}}^{[a+a_1-c']}(t). \tag{6}$$

（对于记号 $\omega_{\tilde{\mathbf{H}}}$，参见 [HL25，定义 2.5.6]）。

证明。根据定义，$\mathbf{d}$ 支配幂零循环块 $\mathbf{d}$。根据[HL25，引理 2.3.4]，特征 $\bar{\chi}$ 是$\mathbf{d}$中唯一的 p-有理特征。由于$\mathbf{d}$ 的不可约特征中核不含 Y 的那些特征不是 p-有理的，$\mathrm{Irr}(\mathbf{d})$具有唯一的 p-有理特征，即 χ，并且 χ 提升$\mathbf{d}$的唯一不可约布劳尔特征。因此，[HL25，引理 2.5.18] 的假设得到满足，所以 $\tilde{\chi}$位于 χ之上。

由$\mathbf{d}$，χ对是不可约特征集合的值是非零整数；见 [HL24，引理 3.3]。于是，对于 $u \in \langle t \rangle$，$\chi(u)$ 的值也如此。

根据 [HL25，引理 2.5.18]，我们有 $\sigma_{\tilde{\chi}}(u) = \sigma_{\chi}(u)$ 对所有 $u \in D$ 均成立，这意味着

$$\sigma_{\tilde{\chi}}^{[a+a_1]}(t) = \sigma_{\chi}^{[a+a_1]}(t).$$

根据 [HL25，引理 2.5.7]，

$$\sigma_{\tilde{\chi}}^{[a+a_1]}(t) = \omega_{\tilde{\mathbf{H}}}^{[a+a_1]}(t),$$

由此得到 (5)。这显然意味着

$$\sigma_{\chi}^{[a+a_1-c']}(t) = \omega_{\tilde{\mathbf{H}}}^{[a+a_1-c']}(t).$$

由于 χ 是 H的 $\bar{\chi}$膨胀，且满同态$\langle t\rangle \to \langle \bar{t}\rangle = \bar{D}$ 的核的阶为 $p^{c'}$，我们得到

$$\sigma_{\bar{\chi}}^{[a+a_1-c']}(\bar{t}) = \sigma_{\chi}^{[a+a_1-c']}(t),$$

由此得到 (6)。 □

3.26. 在 $h = 1$ 情形下计算不变量。 假设 t 的最小多项式不可约。回顾此情形下引理 3.16(c) 和 3.23 的结果。若 $D \not\leq Z$，则 $n = m_1 p^{a+a_1}$，其中 $p \nmid m_1$且 $a_1 > 0$。缺陷群 D 是阶为 p^{a+a_1} 的循环群，而$\mathbf{B}$ 被 $\tilde{G}$ 的一个循环块 $\tilde{\mathbf{B}}$ 覆盖，该块的缺陷群为 $\tilde{D}$，阶为 p^{2a+a_1}。此外，$|\bar{D}| = p^{a+a_1-c'}$。

命题 3.27。 假设 t 的最小多项式不可约。如果 $D \leq Z$，那么 $W(\mathbf{B}) \cong k$。

以下假设 $D \not\leq Z$，因此由引理 3.16(c)可得 $a_1 \geq 1$。那么，若 $\varepsilon = 1$，或若 $p \equiv 1$ (模 4)，或若 m_1' 为偶数，或若$c' = a$且 $a_1 = 1$，则 $W(\mathbf{B}) \cong k$。否则，若$c' < a$，则 $W(\mathbf{B}) = W_{\bar{D}}([a - c', a + a_1 - c' - 1])$；若 $c' = a$且 $a_1 > 1$，则 $W(\mathbf{B}) = W_{\bar{D}}([1, a_1 - 1])$。

证明。若 $D \leq Z$，则 $D \leq Z(G)$，因此根据 [HL24 引理 3.6(b)]，有 $W(\mathbf{B}) \cong k$。于是设 $D \not\leq Z$。

令 $l := a + a_1$且 $\Lambda := \{0, \dots, l-1\}$。由于 $t^{p^{l-1}}$的阶为 p，我们有 $t^{p^{l-1}} \in Z(\tilde{H})$。取 $\tilde{\chi}$ 如引理3.24所述。于是，由 HL25 的引理 4.1.3] 可得 $\sigma_{\tilde{\chi}}^{[a+a_1]}(t) = \omega_{\Lambda}(I)$，其中 $I = \emptyset$；除非 $\varepsilon = -1$, n为奇数且 $p \equiv -1$ (模 4)，此时 $I = [a, l-1]$。结合 HL25 的注记 2.3.3] 以及引理 3.25 中的方程 (5)，得到$W(\mathbf{B}) \cong W_D(I)$。

我们的断言由此以及 [HL25, 引理 2.4.2(c)] 得出。 □

3.28. 在 $h = 2$ 情形下计算不变量。 现在假设 t 的最小多项式恰有两个不可约因子。回顾引理 3.16(d) 中的以下事实。我们有 $n = n_1 + n_2$，其中 $n_1 = m_1 p^{a_1}$，$n_2 = m_2 p^{a_2}$，这里 $a_1 \geq a_2$ 是某些非负整数，且 $p \nmid m_1 m_2$。此外，若 $a_1 > a_2$，则 $c' = 0$；若 $a_1 = a_2 > 0$，则 $c' = c - a_1$。此外，$|\bar{D}| = p^l$，其中 $l = a + a_1 - c'$。

回顾一下，$V = V_1 \oplus V_2$ 是 V 关于 t的初等分解，其中对于 $j = 1,2$，$\dim(V_j) = n_j = m_j p^{a_j}$。另由~记号 3.2(ii)可知，$\mathbf{V} = \mathbb{F}^n$ 是$\mathbf{G}$的自然向量空间。对于$i = 1,2$，令$\mathbf{V}_i$ 表示 V_i的 $\mathbb{F}$-张成空间，并令$\mathbf{G}_i$ 表示$\mathbf{V}_i$上由 $\tilde{\mathbf{G}}$ 诱导的子群。则 $\tilde{\mathbf{G}}_i$是 F-稳定的，并且对于 $i = 1, 2$，$\tilde{\mathbf{G}}_i^F = \tilde{G}_i$。

命题 3.29. 假设 t 的最小多项式恰有两个不可约因子。

那么 $W(\mathbf{B}) = W_{\bar{D}}(I)$，其中 $I \subseteq \{1, \ldots, l-1\}$ 是一个区间。如果 $l = 1$，或，或 $\varepsilon = 1$，或 $a_1 = a_2 = 0$ 且 $c' = c$，那么 $I = \emptyset$，即 $W(\mathbf{B}) \cong k$。

假设下文中 $l \geq 2$、$\varepsilon = -1$，且若 $c' < c$ 则$a_1 = a_2 = 0$。那么，I 非空当且仅当出现以下情形。

(a) 我们有 $a_1 > a_2$，$p \equiv -1 \pmod 4$，且 n_1、n_2 中至少有一个是奇数。于是

$$I = \begin{cases} [a, l-1], & \text{if } n_1 \text{ odd and } (n_2 \text{ even or } a_2 = 0); \\ [a + a_1 - a_2, l-1], & \text{if } n_1 \text{ even, } n_2 \text{ odd, and } a_2 > 0; \\ [a, l - a_2 - 1], & \text{if } n_1 \text{ and } n_2 \text{ odd.} \end{cases}$$

(b) 我们有 $a_1 = a_2 > 0$，$p \equiv -1 \pmod 4$，且 n 是奇数。于是

$$I = [a - c', l-1].$$

(c) 我们有 $a_1 = a_2 = 0$，$c' < c$，且 n_1, n_2 为奇数。于是

$$I = \{c - c'\}.$$

证明。若 $l = 1$，则由 [HL24，引理 3.6(b)]可得 $W(\mathbf{B}) \cong k$。现在假设 $a_1 = a_2 = 0$，且 $c' = c$。由~引理 3.19(c)可得 $H = G_1 \times G_2$。另一方面，由于$a_1 = a_2 = 0$，故 $C = C_1 \times C_2 = G_1 \times G_2$。因此 $H = C$，从而 $H = C$。这意味着 $C_{\bar{G}}(E) = H = C \leq C_{\bar{G}}(D) \leq C_{\bar{G}}(E)$，其中第一个等式由引理 3.19(f)得出。由 [HL24，引理 3.6(b)]，我们的断言成立。

接下来，假设 $l \geq 2$，且若 $a_1 = a_2 = 0$，则 $c' < c$。令 $\Lambda := \{0, 1, \ldots, l-1\}$。为确定 $\omega^{[l]}{}_{\mathbf{H}}(t)$，由引理 3.25 及其前面的注记可得 $W(\bar{\mathbf{B}})$，我们先确定 $\omega^{[l]}{}_{\mathbf{G}_j}(t_j)$，其中$j = 1, 2$。回顾一下，对于 $j = 1, 2$，有 $|t_j| = p^{a+a_j}$；见引理 3.16(d)(vii)。因此 $|t_2^{p^{l-1}}| \leq |t_1^{p^{l-1}}| = p^{c'+1} \leq p^a$，其中最后一个不等式源自

分别由引理 3.16(d)(i)(ii) 以及我们的假设 $c' < c$ （若 $a_1 = a_2 = 0$）可得。因此，对于 $j = 1,2$，有 $t_j^{p^{l-1}} \in Z(\tilde{G}_j)$，且 [HL25、引理 2.5.7、 4.1.3]，从而得到

$$\omega_{\tilde{\mathbf{G}}_j}^{[l]}(t_j) = \omega_\Lambda(\mathbf{1}_{I_j})$$

其区间为 $I_j \subseteq \Lambda \setminus \{0\}$，定义如下。若 n_j 为奇数，且 $\varepsilon = -1$ 和 $p \equiv -1$ （模 4），则

$$I_j = [a + a_1 - c' - a_j, l - 1];$$

否则为 $I_j = \emptyset$。注意，若 $a_2 = 0$，则 $I_2 = \emptyset$。若 $a_1 > a_2$，或者若 $a_1 = a_2$ 且 $c' = c - a_1$，则由引理 3.19(c) 得 $\mathbf{H} = \mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2$，因此

$$\omega_{\tilde{\mathbf{H}}}^{[l]}(t) = \omega_{\tilde{\mathbf{G}}_1}^{[l]}(t_1)\omega_{\tilde{\mathbf{G}}_2}^{[l]}(t_2), \tag{7}$$

右侧的两个 l-元组按分量相乘。

我们在假设 (7) 成立的条件下继续证明。令 $I := I_1 \diamond I_2$ 表示 I_1 与 I_2 的对称差。于是 $\omega^{[l]}\mathbf{G}_1(t_1)\omega^{[l]}\mathbf{G}_2(t_2) = \omega_\Lambda(I)$；参见 [HL25，第 2.2] 小节。由此得到 (a) 和 (b) 中的断言。

现在假设 (7) 不成立。那么 $a_1 = a_2 = 0$ 和 $c' < c$。特别地，由引理 3.16(d)(iii)，$D = \langle t \rangle$ 和 $|t| = p^a$。令 $l_1 := c - c'$ 且 $l_2 := l - l_1$。l-元组 $\omega^{[l]}\mathbf{H}(t)$ 包含 $\omega_{\tilde{\mathbf{H}}}$ 在元素 $t^{p^{l-1}}, t^{p^{l-2}}, \ldots, t^p, t$ 处的取值。当 j 从 1 递增到 l 时，$t^{p^{l-j}}$ 的阶从 $p^{c'+1}$ 递增到 p^a。对于 $j = l_1$，我们得到 $|t^{p^{l-j}}| = p^c$。由于 $O_p(Z) \leq D = \langle t \rangle$，因此恰好当 $j = 1, \ldots, l_1$ 时，$t^{p^{l-j}} \in Z$ 成立。于是

$$C_{\tilde{\mathbf{H}}}(t^{p^{l-j}}) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{H}}, & \text{for } 1 \leq j \leq l_1; \\ C_{\tilde{\mathbf{G}}_1}(t_1^{p^{l-j}}) \times C_{\tilde{\mathbf{G}}_2}(t_2^{p^{l-j}}), & \text{for } l_1 + 1 \leq j \leq l. \end{cases} \tag{8}$$

由引理 3.16(c)，我们有 $\mathbf{H} = \mathbf{G}$。因此

$$\omega_{\tilde{\mathbf{H}}}(t^{p^{l-j}}) = \begin{cases} 1, & \text{for } 1 \leq j \leq l_1; \\ \varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}_1}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}_2}\omega_{\tilde{\mathbf{G}}_1}(t_1^{p^{l-j}})\omega_{\tilde{\mathbf{G}}_2}(t_2^{p^{l-j}}), & \text{for } l_1 + 1 \leq j \leq l. \end{cases} \tag{9}$$

由此可知，$\omega^{[l]}\mathbf{H}(t)$ 是长度为 l_1 的全 1 向量 $(1, \ldots, 1)$ 与

$$\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}_1}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}_2}\omega_{\tilde{\mathbf{G}}_1}^{[l_2]}(t_1)\omega_{\tilde{\mathbf{G}}_2}^{[l_2]}(t_2).$$

根据 [HL25，例 2.5.5，]我们有

$$\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}_1}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}_2} = \begin{cases} -1, & \text{if } \varepsilon = -1 \text{ and } n_1, n_2 \text{ odd}; \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此外，假设 $\varepsilon = -1$，并且 n_1 和 n_2 为奇数。则$I_1 = I_2$，因此对于所有 $1 \le j \le l$，$\omega_{\mathbf{G}_1}(t_1^{p^{l-j}})\omega_{\tilde{\mathbf{G}}_2}(t_2^{p^{l-j}}) = 1$。于是

$$\omega_{\tilde{\mathbf{H}}}^{[l]}(t) = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1),$$

其中第一项 -1 位于位置 $l_1 + 1$。因此，根据 HL25，引理 2.2.1]，$\omega_{\tilde{}}^{[l]}{}_{\mathbf{H}}(t) = \omega_\Lambda(\{l_1\})$。这给出了 (c) 中列出的情形。若 $\varepsilon = 1$ 或 $\varepsilon = -1$，且 n_1、n_2 中至少有一个为偶数，则 $\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}}\varepsilon_{\mathbf{G}_1}\varepsilon_{\mathbf{G}_2} = 1$，故由 (8)、(9) 以及对于$i = 1$, 2 和所有 $1 \le j \le l_1$，$t_i^{p^{l-j}} \in Z(\tilde{G}_i)$ 这一事实可得 (7)。这一矛盾结束了证明。□

3.30. 计算情形 $h = 3$ 的不变量。 现在假设 t 的最小多项式恰有三个不可约因子。回顾引理 3.16(e) 中的以下事实。我们有 $n = n_1 + n_2 + n_3$，其中 $n_1 = m_1 p^{a_1}$，且 a_1 为非负整数，并且 $p \nmid m_1 n_2 n_3$。此外，$c' = 0$，且 $|\bar{D}| = p^l$，其中 $l = a + a_1$。注意，若$a_1 > 0$，则 $l \ge 2$。

回想一下，$V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ 是 V关于 t的初等分解，其中对于 $j = 1$, 2, 3, $\dim(V_j) = n_j$。另据记号 3.2(ii)，回想一下$\tilde{}$，$\mathsf{V} = \mathbb{F}^n$ 是 G 的自然向量空间。$\tilde{}$对于 $i = 1$, 2, 3，令 V_i 表示由 V_i张成的 $\mathbb{F}$，并令 G_i 表示 G 在 V_i上诱导的$\tilde{}$ $\tilde{}$子群。置 $\mathsf{V}_{2,3} := \mathsf{V}_2 \oplus \mathsf{V}_3$, ，并令 $\mathsf{G}_{2,3}\tilde{}$ $\tilde{}$表示 G 在 $\mathsf{V}_{2,3}$上诱导的子群。于是 G_i 是 F稳定的，并且对于 $i = 1$, 2, 3, $\mathsf{G}_i^F = \tilde{G}_i$。类似地，按照引理 3.19(c)(iii)中的记号，$\tilde{}\mathsf{G}_{2,3}$ 是 F稳定的，且 $\tilde{}\mathsf{G}_{2,3}^F = \tilde{G}_{2,3}$。

命题 3.31. 假设 t 的最小多项式恰有三个不可约因子。那么 $W(\mathbf{B}) = W_D(A)$，其中 $A \subseteq \{1, \dots, l-1\}$ 是两个区间的并。若 $a_1 = 0$，或者若 $\varepsilon = 1$，则$A = \emptyset$，即 $W(\mathbf{B}) \cong k$。

以下假设 $a_1 > 0$ 且 $\varepsilon = -1$。那么 A 恰好在以下情形下非空。

(a) n_2、n_3 中至少有一个是偶数，n_1 是奇数，且 $p \equiv -1$ (模 4)。于是

$$A = [a, l-1].$$

(b) n_2 和 n_3 均为奇数，且 $a_1 \ge a$。那么

$$A = \begin{cases} \{a_1\}, & \text{if } n_1 \text{ is even or } p \equiv 1 \pmod 4; \\ [a, l-1] \setminus \{a_1\}, & \text{if } n_1 \text{ is odd and } p \equiv -1 \pmod 4. \end{cases}$$

(c) n_2 和 n_3 均为奇数，且 $a_1 < a$。那么

$$A = \begin{cases} \{a_1\}, & \text{if } n_1 \text{ is even or } p \equiv 1 \pmod 4; \\ \{a_1\} \cup [a, l-1], & \text{if } n_1 \text{ is odd and } p \equiv -1 \pmod 4. \end{cases}$$

证明。首先假设 $a_1 = 0$ 和 $n_1 = n_2 = n_3$。则 $n = 3n_1$，并且 因此 $p = 3$ 和 $a = 1$，因为 $p \nmid n_1$。在此情形下，$|D| = 3$，故 $W(\mathbf{B}) \cong k$由 [HL24，引理 3.6(b)]。

接下来假设 $a_1 = 0$ 和 $|\{n_1, n_2, n_3\}| \geq 2$。那么 $\tilde{H} = G_1 \times G_2 \times G_3$ 由引理 3.19(d)。因此 $H = C$ 和 $H = C = C_G(D)$。特别地，$H \leq C_{\bar{G}}(D)$。现在，根据引理 3.19(f)，$H = C_{\bar{G}}(E)$，并且所以 $H \leq C_{\bar{G}}(D) \leq C_{\bar{G}}(E) = H$。我们的断言由 [HL24，引理 3.6(b)]得出。

从现在起，假设 $a_1 > 0$。令 $t_{2,3} := t_2 t_3$ 且 $\Lambda := \{0, 1, \ldots, l-1\}$。由于根据引理 3.19(d)，$C_{\mathbf{H}}(t) = C_{\mathbf{G}_1}(t_1) \times C_{\mathbf{G}_{2,3}}(t_{2,3})$，我们得到

$$\omega^{[l]}_{\tilde{\mathbf{H}}}(t) = \omega^{[l]}_{\tilde{\mathbf{G}}_1}(t_1)\omega^{[l]}_{\tilde{\mathbf{G}}_{2,3}}(t_{2,3}),$$

右侧 l 元组的乘法按分量定义。

根据 [HL25，推论 4.1.4]，我们有

$$\omega^{[l]}_{\tilde{\mathbf{G}}_1}(t_1) = \omega_\Lambda(\mathbf{1}_{I_1})$$

其中 $I_1 = \emptyset$，除非 n_1 为奇数，此时 $\varepsilon = -1$ 且 $p \equiv -1$（模 4），在这种情况下 $I_1 = [a, l-1]$。

令 $1 \leq j \leq l$，并设 $u := t_{2,3}^{p^{l-j}}$。引理 3.16(e) 表明，当 $j \leq a_1$ 时，$C_{\tilde{\mathbf{G}}_{2,3}}(u) = \mathbf{G}_{2,3}$；而当 $a_1+1 \leq j \leq a+a_1$ 时，$C_{\mathbf{G}_{2,3}}(u) = \mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_3$。前一种情况下，$\omega_{\tilde{\mathbf{G}}_{2,3}}(u) = 1$。后一种情况下，

$$\omega_{\tilde{\mathbf{G}}_{2,3}}(u) = \varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}_{2,3}}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}_2}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}_3}.$$

根据 [HL25，例 2.5.5]，我们得到

$$\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}_{2,3}}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}_2}\varepsilon_{\tilde{\mathbf{G}}_3} = \begin{cases} -1, & \text{if } \varepsilon = -1 \text{ and } n_2, n_3 \text{ odd}; \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由此可得，当 n_2 和 n_3 为奇数且 $\varepsilon = -1$时，$\omega^{[l]}_{\mathbf{G}_{2,3}}(t_{2,3}) = \omega_\Lambda(\mathbf{1}_{I_{2,3}})$，其中 $I_{2,3} = \{a_1\}$；否则，$I_{2,3} = \emptyset$。

根据 [HL25，第 2.2] 小节中的讨论，我们得出

$$\omega^{[l]}_{\tilde{\mathbf{G}}_1}(t_1)\omega^{[l]}_{\tilde{\mathbf{G}}_{2,3}}(t_{2,3}) = \omega^{[l]}_\Lambda(\mathbf{1}_A)$$

其中 $A = I_1 \diamond I_{2,3}$ 是 I_1 与 $I_{2,3}$ 的对称差。这就得出了我们的断言。□

˜我们记录上述结果的一个具体推论。若 T 是 G 中型为 π 的极大˜环面，我们记作 $T_\pi := T \cap G$。由于 $\mathrm{SL}_n^\varepsilon(q)$ 的每个极大环面都具有这种形式，因此这给出了 $\mathrm{SL}_n^\varepsilon(q)$ 的极大环面（在共轭意义下）由 n 的分拆标记的一种方式。

推论 3.32. 假设 $p = 3$ 和 $n \in \{3, 6, 9\}$，或 $p = 5$和 $n = 5$。设 $\mathbf{B}$ 为 G =特殊线性群$_n^\varepsilon(q)$ 的一个 p-块，其具有非平凡循环缺陷群 D。若 $n = 9$ 假设 $D \not\leq Z$ 且 $a \geq 2$，则有以下陈述成立。

(a) 我们有 $|D| = p$ 或 $|D| = p^a$。此外，$W(\mathbf{B}) \cong k$ 或 $W(\mathbf{B}) \cong W_D(\{1\})$。后者成立当且仅当 $\varepsilon = -1$，$|D| = 3^a$ 且 $a \geq 2$，并且 $n = 6$。在这种情况下，按照 命题 3.29 中的记号，我们有 $h = 2$ 和 $\{n_1, n_2\} = \{5, 1\}$。

(b) 假设 $p = 3$ 和 $n = 6$。若 $W(\mathbf{B}) \ncong k$，则 $\mathbf{B}$ 关于 $T_{(5,1)}$是严格正则的。

˜证明。(a) 在记号 3.7 的设定中，我们有 $Y = \{1\}$，因此 $\mathbf{B}$ =$\mathbf{B}$且 $c' = 0$。此外，记号 3.7(ii) 中的群 D 是循环的，是$\mathbf{B}$的一个缺陷群，并且 $|D| = |t| = p^{a+a_1}$；后者由引理 3.16(f) 得出。特别地，我们不可能有 $h = 3$，因为在这种情况下 $Y = O_p(Z) \neq \{1\}$。

若 $D \leq Z$，则由 [HL24、引理 3.6(b)] 可得 $W(\mathbf{B}) \cong k$。此外，根据假设有 $n \neq 9$，因此 $|D| = p$。以下假设 D 不是中心的。设 $h = 1$。则由引理 3.16(c)，$p^{a+a_1} \mid n$ 且$a_1 \geq 1$。由于我们已假设，若 $n = 9$，则有 $a \geq 2$，因此这种情况不可能发生。

最后假设 $h = 2$。由于 D 是循环的，$c > 0$，且 $|D| = p^{a+a_1}$，由引理 3.16(d)(i)(ii)可知，必有 $a_1 = a_2 = 0$。特别地，$|D| = p^a$。命题 3.29 表明，$W(\mathbf{B}) \cong k$，除非 $\varepsilon = -1$、$a \geq 2$以及 n_1 和 n_2 均为奇数。若这些后续条件均成立，则 $n = 6$ 且 $\{n_1, n_2\} = \{5, 1\}$，因为 $3 \nmid n_1 n_2$。此外，由命题 3.29(c)可知，$W(\mathbf{B}) \cong W_D(\{c - c'\}) = W_D(\{1\})$。

(b) 假设 $p = 3$、$n = 6$ 以及 $W(\mathbf{B}) \ncong k$。不失一般性，可假设 $n_1 = 5$ 且 $n_2 = 1$。采用˜引理 3.15(e)中的记号，有 $C_1 = G_1 = \mathrm{GU}_5(q)$ 以及 $C_2 = G_2 = \mathrm{GU}_1(q)$。˜此外，$D \leq D = D_1 \times D_2$，其中 D_j 是˜块的循环缺陷群，该块属于 C_j，$j = 1, 2$。特别地，D 是一个˜极大环面 $T \leq G$ 的 Sylow 3-子群，该环面为 (5，1) 型；参见 [HL25，推论 3.6.2]。

令 $\chi \in \mathrm{Irr}(\mathbf{B})$。则 χ具有高度 0，因此 $\chi(1)_3 = 3^{4a+2}$，如$|G|_3 = 3^{5a+2}$所示。G 的特征标次数见 [Lue21a]，表明$\chi(1) = [G\colon T]_{r'}/f$满足 $T = T_{(4,1,1)}$和 $f \in \{1, 2\}$，或满足 $T = T_{(5,1)}$和$f = 1$。因此，$\mathbf{B}$ 关于这些环面中的一个是正则的。

前一种情形不可能发生，因为环面 $T_{(4,1,1)}$ 没有循环的 Sylow 3-子群。因此**B** 关于 $T_{(5,1)}$是严格正则的。□

注 3.33. 假设 $p = 3$ 和 $n = 9$，且 $a \geq 2$，因此 $c = 2$。令 $Y \leq Z$ 满足 $|Y| = 3$，并令 **B** 为 $G = G/Y$ 的一个 3-块，其缺陷群 $D = D/Y$ 是非中心的循环群。那么，根据引理 3.16(c)(d)(e)，$h = 2$ 和$a_1 = a_2 = 0$ 。

令**B** 为 G 的一个块，其缺陷群 $D \leq T$。特别地，**B** 符合推论 3.32 的条件，因此 D 是阶为 3^a的循环群。因此 $c' = 1$ 和 $|\bar{D}| = 3^{a-1}$。根据推论 3.32(a)及 HL25 引理 2.4.2(c)]，，我们有 $W(\mathbf{B}) \cong k$。

4. Synthesis

现在我们考察第 3 节中列出的哪些参数集对应于块。本节中，我们固定一个奇素数 p。

回顾一下，我们已固定一个符号 $\varepsilon \in \{-1, 1\}$。按照记号 3.2(iv)，若 $\varepsilon = 1$，则令 $\delta = 1$；若 $\varepsilon = -1$，则令 $\delta = 2$。为了构造具体的例子，我们将改变参数 r、q 和 n，同时保留它们的主要意义。因此，q 是素数 r 的幂，其中 $r \neq p$，且 n 是一个正整数。每当选定 r、q 和 n 后，我们就采用第 3 节中引入的相应记号。特别地，$\mathbb{F}$ 表示含有 r 个元素的有限域的代数闭包。此外，$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{GL}_n(\mathbb{F})$，$\tilde{G} = \mathrm{GL}_n^{\varepsilon}(q) = \tilde{\mathbf{G}}^F$，$G = \mathrm{SL}_n^{\varepsilon}(q) = \tilde{\mathbf{G}}^F$，以及 $Z = Z(G)$，其中 F 与记号 3.2(iii) 中的定义相同。这些定义与记号 3.2 一致，只是这里还允许 $n = 1$。此外，$\tilde{\mathbf{G}}$ 我们令 $\mathbf{G}^* := \mathbf{G}/Z(\mathbf{G}) = \mathbf{PGL}_n(\mathbb{F})$，其斯坦伯格态射由 $\mathbf{G}$ 上的斯坦伯格态射诱导而来。于是 $G^* = G/Z(G) = \mathrm{PGL}_n(q)$。注意，$\tilde{\mathbf{G}}$包含映射 $i : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ 是一个正则嵌入，并且对偶满同态 $i^* : \mathbf{G}^* \to \mathbf{G}^*$ 就是典范映射，只要将 $\tilde{\mathbf{G}}$ 视为其对偶群 $\mathbf{G}^*$。我们的主要目标是证明定理 1.2。

我们首先构造合适的素数幂 q。

引理 4.1。设 a为一个正整数。则存在一个素数 r 及其一个幂 q，使得 r $p^a \mid q - \varepsilon$ 且 $p^{a+1} \nmid q - \varepsilon$。若 $p^a = 3$，则存在这样的一个 q，使得 $q > 2$。

证明。设 r 为一个素数，使得 $p \mid r - \varepsilon$ 但 $p^2 \nmid r - \varepsilon$。然后令$q := r^{p^{a-1}}$。最后一个陈述是显然的。□

下面的结果考察引理 3.16(c)中的情形。

命题 4.2. 设 a、a_1、c' 为整数，其中 a、a_1 为正整数，且 $0 \leq c' \leq a$。设 q 满足关于 p 的引理 4.1 的结论

以及 a，并令 $n := p^{a+a_1}$。则存在一个属于 G =特殊线性群$^{\varepsilon}_{n}(q)$ 的块 $\mathbf{B}$，使得以下陈述成立。

(a) $\mathbf{B}$ 的缺陷群 D 是阶为 p^{a+a_1}的循环群。(b) 存在一个一般线性群$\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{n}(q)$ 的循环块覆盖$\mathbf{B}$。(c) 存在子群 $Y \leq Z$，使得 $|Y| = p^{c'}$；并且存在 G/Y的一个块 $\bar{\mathbf{B}}$，它受$\mathbf{B}$ 支配且缺陷群为 D/Y。

证明。令$\mathbf{T}$ 表示$\mathbf{G}$的一个考克斯特环面；因此 T 是一个阶为 $q^n - \varepsilon$ 的循环群（注意 n 是奇数且 $n \geq 3$）。令$\mathbf{T} := \mathbf{T} \cap \mathbf{G}$。根据[HL25，引理 3.6.3]，存在 $\tilde{s} \in T$，其在 G^* 中的像是严格正则的。

令 $\tilde{\chi}$ 表示相应的$\mathbf{B}$ 的不可约 Deligne-Lusztig 特征标，其中$\mathbf{B}$ 表示包含 $\tilde{\chi}$的$\mathbf{B}$ 的 p-块。根据 [HL25，引理 2.5.16]，T 的一个 Sylow p-子群 D 是$\mathbf{B}$的缺陷群。特别地，$\tilde{D}$ 是阶为 p^{2a+a_1}的循环群。

由于 $s \in G^*$ 是严格正则的，[HL25，推论 2.5.17] 表明$\chi := \mathrm{Res}^{G}_{G}(\tilde{\chi})$ 是不可约的，$\bar{\mathbf{B}}$ 覆盖 G 的唯一块 $\mathbf{B}$，并且 $D := D \cap G$ 是 $\mathbf{B}$ 的缺陷群。显然，D 是阶为 p^{a+a_1}的循环群。令 $Y \leq G$，其中 $|Y| = p^{c'}$。由 $\mathbf{B}$ 支配的 G/Y的 p-块 $\bar{\mathbf{B}}$ 的缺陷群为 D/Y。证明完毕。□

命题 4.2 表明，引理 3.16(c)中确定的所有可能参数都来自块。接下来我们研究引理 3.16(d)的情形，其中我们将范围限制在命题 3.29(a)中 n_1、n_2 为奇数的情况，以及命题 3.29(b)中 n_1 为偶数且 n_2 为奇数的情况。

命题4.3。令 a、a_1、a_2为整数，其中 a、a_1为正数，且 $0 \leq a_2 \leq a$、a_1。若 $a_1 > a_2$，则令 $c := a_2$。若 $a_1 = a_2$，取满足$a_1 \leq c \leq a$的整数 c。若 $a_1 = a_2 = c$，令 $p > 3$。

令 q 满足相对于 p 和 a 的引理 4.1 的结论。若 $p^a = 3$，则假设 $q > 2$。设 $m_2 := 1$。若 $a_1 > a_2$，令 $m_1 := 1$。若 $a_1 = a_2$，则令 $m_1 := p^{c-a_1} - 1$，除非 $c = a_1$；在后一种情况下，若 $p \neq 3$，令$m_1 := 2$；若 $p = 3$，则令 $m_2 := 4$。最后，对 $j = 1$，令 $n := n_1 + n_2$，其中$n_j := m_j p^{a_j}$，2。

令$G := G/Y$，其循环缺陷群的阶为 $p^{a+a_1+a_2-c}$，且存在一个块 $\bar{\mathbf{B}}$ 支配 $\mathbf{B}$ 的 G 的块$\mathbf{B}$ 具有阿贝尔缺陷群，它们是两个阶分别为 p^{a+a_1} 和 p^{a_2} 的循环群的直积。

证明。注意，如果 $a_1 > a_2$，则 $n = p^{a_1} + p^{a_2}$；如果 $a_1 = a_2 < c$，则 $n = p^c$。若 $a_1 = a_2 = c$，则如果 $p > 3$，有 $n = 3p^{a_2}$；如果 $p = 3$，有 $n = 5p^{a_2}$。无论哪种情况，$|O_p(Z)| = p^c$。

设 V 表示 G的自然向量空间。写作 $V = V_1 \oplus V_2$，这是一个正交分解为非退化子空间的分解，若 $\varepsilon = -1$，且 $\dim V_j = n_j$对于 $j = 1, 2$。固定 $j \in \{1, 2\}$。设 G_j表示 G 在 V_j上诱导的子群，使得 $G_j \cong \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{n_j}(q)$。选取一个极大环面 $T_j \leq G_j$，使得 T_j是阶为 $q^{n_j} - \varepsilon^{n_j}$的循环群。设 D_j 表示 T_j的 Sylow p子群；则 D_j 是阶为 p^{a+a_j}的循环群。

设 $D = D_1 \times D_2$和 $T := T_1 \times T_2 \leq G_1 \times G_2 \leq G$。则 T是 G 的一个极大环面，对应于 n的一个分拆，其部分为n_1、n_2。若 $n_2 = 1$，则设 $f_2 = 1$和 $\tilde{s}_2 = 1$。否则， $n_j \geq 3$对于 $j = 1$、2、，且环面 T_j 包含一个 p'元元素 $\tilde{s}_j$，其阶为素数 f_j，使得对所有 $1 \leq i < n_j$，$f_j \nmid q^i - \varepsilon^i$ 成立；参见 [HL25，引理 3.6.3]。根据定义，$n_1 \neq n_2$，因此 $f_1 \neq f_2$。设 $\tilde{s} := \tilde{s}_1\tilde{s}_2 \in T$。那么， $\tilde{s}_1$ 和 $\tilde{s}_2$没有共同特征值，因此 $C_{\tilde{G}}(\tilde{s}) = C_{\tilde{G}_1}(\tilde{s}_1) \times C_{\tilde{G}_1}(\tilde{s}_1) = T_1 \times T_2 = T$。换言之， $\tilde{s}$ 在 G中正则。令 s 表示 $\tilde{s}$ 在 G^*中的像。则 $|s| = f_1f_2$，因此根据 [HL25， 2.5.1]，s 在 G^* 中严格正则。令 B 表示 G 的 p-块，其中包含不可约 Deligne-Lusztig 特征标 $\tilde{\chi} \in \mathcal{E}(G, \tilde{s})$。如命题 4.2 的证明中所示，我们发现 $\chi := \mathrm{Res}^G_G(\tilde{\chi}) \in$ 不可约特征集合(G)，而 G 的 p-块 B（其中包含 χ）是 G 中被 B 覆盖的唯一块。此外， $D := D \cap G$ 是 B 的一个缺陷群。

对于 $j = 1, 2$，令 u_j 表示 D_j的一个生成元。由引理 3.15(d)，对于 $j = 1, 2$，有 $|\det(u_j)| = p^a$。若 $a_1 = a_2$我们选择 u_1和 u_2，使得 $(u_1u_2)^{p^{a_1}} \in Z$，这是可行的，因为 D_1与 D_2 的生成元的特征值张成了 $\mathbb{F}^*$的同一个子群。无论如何，都存在一个与 p互素的整数 e，使得 $u_1u_2^e$ 的行列式为 1，且阶为 p^{a+a_1}。根据我们对 u_1、u_2的选择，在 $a_1 = a_2$的情况下，我们可以且将取 $e = -m_1$。由于 $u_2^{p^a}$ 的行列式为 1，且阶为 p^{a_2}，我们得到$D = \langle u_1u_2^e \rangle \times \langle u_2^{p^a} \rangle$。由此得到关于 D的结构的结论。

我们断言， $D := D/Y$是循环的。若 $a_1 > a_2$，则 $\langle u_1u_2^e \rangle \cap Y = \{1\}$，因为 $u_1^{p^{a_1}}$ 和 $u_2^{ep^{a_1}}$ 的非平凡特征值具有不同的阶。由于 $|D| = p^{a+a_1+a_2}$ 和 $a_2 = c$，我们得到 $D = \langle u_1u_2^e \rangle \times Y$。特别地，$\bar{D}$ 是循环的。若 $a_1 = a_2$，根据我们对 u_1 和 u_2的选择，有 $Y = \langle (u_1u_2)^{p^{a+a_1-c}} \rangle$。 D 的 Frattini 子群 $\Phi(D)$由$(u_1u_2^e)^p$生成，并且 $u_2^{p^{a+1}}$ 是一个直积。初等计算表明，$(u_1u_2)^{p^{a+a_1-c}}$ 不包含于 $\Phi(D)$中。事实上， $u_1u_2 = (u_1u_2^e)u_2^{1-e}$，因此$(u_1u_2)^{p^{a+a_1-c}} \in \langle (u_1u_2^e)^p \rangle \times \langle u_2^{p^{a+1}} \rangle$ 将意味着

$$u_2^{fp^{a+1}} = u_2^{(1-e)p^{a+a_1-c}} = u_2^{(1+m_1)p^{a+a_1-c}}$$

对于某个整数 f。然而， $1+m_1$ 的 p-部分等于 p^{c-a_1}。因此

$$|u_2^{(1+m_1)p^{a+a_1-c}}| = |u_2^{p^a}| > |u_2^{fp^{a+1}}|,$$

矛盾。由于 D 是二生成群，这意味着 D 是循环的。

Let $\mathbf{B}$ 表示由$\mathbf{B}$支配的 G 的块。其缺陷群 $\mathbf{B}$ 等于 D，这证明了我们的断言。□

接下来我们考察引理 3.16(d)(iii)中的情形。

命题 4.4. 设 p 是一个奇素数，且 c'、c、a 是满足$0 \le c' \le c < a$的整数。若 $c = 0$，令 $n := 2$。否则，令 $n \in \{p^c, 2p^c\}$。

令 q 关于 p 和 a满足引理 4.1 的结论。则 G =特殊线性群$^{\varepsilon}_{n}(q)$ 存在一个块 $\mathbf{B}$，使得以下陈述成立。

(a) $\mathbf{B}$ 的缺陷群是阶为 p^a 的循环的群。
(b) 存在 G 的一个块$\mathbf{B}$ 满足这块由$\mathbf{B}$支配。

证明。如果 $c = 0$ 且 $n = 2$，则这些陈述显然成立。因此在下文中假设 $c > 0$。置 $n_1 := n-1$ 且 $n_2 := 1$。令 $G_1 :=$ 一般线性群$^{\varepsilon}_{n_1}(q)$，其自然嵌入于 G 中。令 $D := O_p(Z(G_1))$。则 D 是阶为 p^a 的循环的群。由于 $c < a$，我们有 $C_G(D) = G_1$。如果 $n_1 > 2$，则 G_1 的一个阶为 $q^{n_1} - \varepsilon^{n_1}$ 的循环极大环面包含 p'-元素，这些元素关于 G_1 是正则的；见 [HL25，引理 3.6.3]。在这种情况下，[HL25，引理 2.5.16] 保证存在一个 G_1 的块 b，其缺陷群为 D。对于 $n_1 = 2$，同样的结论显然也成立。现在$N_G(G_1) = G_1$，因此 b 的 Brauer 对应块 B 满足 (a)。

(b) 的证明与命题 4.2 的 (c) 的证明类似。

□

最后，我们考察引理 3.16(e) 的情形，在此我们将范围限制在命题 3.31(b)(c) 的情形，并且还假设 $a \neq a_1$。（如果命题 3.31(b) 中的 $a = a_1$，则得到的集合 A 是一个区间。）

命题 4.5. 设 p 为奇素数，a、a_1 为满足 $a \neq a_1$ 的正整数。

设 q 满足引理 *4.1* 关于 p 和 a 的结论。令 $n_1 := p^{a_1}$，且 $n_3 := 1$。若 $a_1 > a$，令 $n_2 := 2p^a - 1$；若 $a_1 < a$，令 $n_2 := p^a - p^{a_1} - 1$。无论哪种情况，令 $n := n_1 + n_2 + n_3$，使得 $p^a = |O_p(Z)|$。

设 $Y := O_p(Z)$。那么 $G := G/Y$ 存在一个块 $\mathbf{B}$，其循环缺陷群的阶为 p^{a+a_1}。此外，G 中支配$\mathbf{B}$ 的块$\mathbf{B}$的缺陷群，是两个阶分别为p^{a+a_1} 和 p^a的循环群的直积。

证明。设 V 表示 G的自然向量空间。记 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$为非退化子空间的一个正交分解，若 $\varepsilon = -1$，其中 dim $V_j = n_j$， $j = 1, 2, 3$。固定 $j \in \{1, 2, 3\}$。令 G_j 表示 G 在 V_j上诱导的子群，从而 $G_j \cong \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{n_j}(q)$。选取一个极大环面 $T_j \leq G_j$，使得 T_j是阶为$q^{n_j} - \varepsilon^{n_j}$的循环群。令 D_j 表示 T_j的 Sylow p-子群；于是 D_j 是阶为 p^{a+a_j} 的循环群（其中$a_2 = a_3 = 0$）。

令 $D = D_1 \times D_2 \times D_3$和 $T := T_1 \times T_2 \times T_3 \leq G_1 \times G_2 \times G_3 \leq G$。则 T 是 G 的一个极大环面，对应于 n的分拆，其部分为 n_1、n_2、n_3。

对于包含一个 p元素 s 的 T_j，$j = 1, 2$，环面，其阶为素数f_j，使得对所有 $1 \leq i < n_j$，均有 $f_j \nmid q^i - \varepsilon^i$ ；参见 [HL25，引理 3.6.3]。现在 $f_1 \neq f_2$，因为 $n_1 \neq n_2$。特别地， $\tilde{s}_1$ 和 $\tilde{s}_2$ 没有共同的特征值，且没有特征值 1。令 $\tilde{s} := \tilde{s}_1 \tilde{s}_2 \in T$。则 $C_{\tilde{G}}(\tilde{s}) = C_{\tilde{G}_1}(\tilde{s}_1) \times C_{\tilde{G}_2}(\tilde{s}_2) \times G_3 = T_1 \times T_2 \times T_3 = T$。换言之， $\tilde{s}$在 G中是正则的。令 s 表示 $\tilde{s}$ 在 G^*中的像。则 $|s| = f_1 f_2$，因此，根据 [HL25， 2.5.1]， s在 G^* 中是严格正则的。

Let $\tilde{\mathbf{B}}$ 包含相应的 p-块 G 的 Deligne-Lusztig 特征 $\tilde{\chi} \in \mathcal{E}(G, s)$。如命题 4.2 的证明中一样，我们发现 $\chi := \mathrm{Res}^G_G(\tilde{\chi}) \in$ 不可约特征集合(G)，而包含 χ 的 G 的 p-块 $\mathbf{B}$ 是 G 中被 $\mathbf{B}$ 覆盖的唯一块。此外，$D := D \cap G$ 是 $\mathbf{B}$ 的一个缺陷群。

显然，D，因此 D 的结构如所述。存在一个阶为 p^{a+a_1} 的元素 $t \in D$ ，它在 V_2 上平凡作用，且其在 V_3 上的特征值的阶为 p^a。特别地，$\langle t \rangle \cap Y = \{1\}$，从而 $D = \langle t \rangle \times Y$。因此， D/Y是阶为 p^{a+a_1} 的循环群。

由 $\mathbf{B}$ 支配的 G 的块 $\mathbf{B}$ 的缺陷群为 D/Y，这证明了我们的断言。□

结合 $\varepsilon = -1$、命题 4.2–4.5 以及命题 3.27– 3.31，可证明定理 1.2。

5. Glossary

最后，为便于读者阅读我们的结果，我们将本文使用的主要记号汇总成一份术语表。其中部分记号已在我们工作的第一部分和第二部分中引入。

一般假设:

- p是一个奇素数；
- $(K, \mathcal{O}, k)$ 是一个足够大的 p-模系统，其中 $\mathcal{O}$是特征为零且剩余域 $k = k$ 的特征为 p的离散赋值环；

• l 是非负整数。

特殊函数与区间:

• $\sigma_\chi := \mathrm{sgn} \circ \chi$： $X \to \{-1, 0, 1\}$ 是与映射 $\chi : X \to \mathbb{R}$相关联的符号函数，其中 X 是一个集合（见 [HL25，定义 2.1.1]）；

• $\rho^{[m]}(t) := (\rho(t^{p^{m-1}})\ \rho(t^{p^{m-2}})\ \ldots\ldots,\ \rho(t^p)\ \rho(t))\ \in X^m$ 对于集合 X 和正整数 m，按逆序列出有限群 H 中映射 ρ： $H \to X$ 在 p-元素 t，t^p，t^{p^2}，……，$t^{p^{m-1}}$ 处的取值（见[HL25，定义 2.1.2]）；

• $\Lambda := \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq l-1\}$;

• 区间 是 Λ 的子集，它是 Λ 与 $\mathbb{R}$的某个区间的交集，也可能是空集（见 [HL25，第 2.2]小节）；

• 一个非空区间记作 $[i, j]$，其中 i 分别是其最小元素，j 分别是其最大元素;（参见 [HL25，第 2.2] 小节）；

• $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ 是含有 2 个元素的域;

• $\mathbf{1}_A$ 是 $A \subseteq \Lambda$ 的示性函数，即元素 $\mathbf{1}_A$ =(α_0，α_1，……，α_{l-1}) $\in \mathbb{F}_2^\Lambda$，其中 $\alpha_j = 1$ 当且仅当 $j \in A$（参见 [HL25，第 2.2] 小节）；

• ω_Λ： $\mathbb{F}_2^\Lambda \to \{-1, 1\}^l$ 是对每个 $1 \leq i \leq l$ 定义的 $\mathbb{F}_2$-同构；（参见 [HL25，第 2.2] 小节）$\omega_\Lambda(\alpha_0, \ldots, \alpha_{l-1})_i = \begin{cases} +1, \text{ if } \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j = 0 \\ -1, \text{ if } \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j = 1 \end{cases}$

与缺陷群 D 阶为 p^l的循环块 $\mathcal{B}$ 相关联的端置换模:

• $W(\mathcal{B})$ 是与 $\mathcal{B}$ 相关联的端置换 kD-模，它作为 D的戴德群中的元素，由 l-元组 (α_0，α_1，……，α_{l-1}) $\in \mathbb{F}_2^\Lambda$唯一确定，也记作 $W(\mathcal{B})$ $= W_D(\alpha_0$，α_1，……，$\alpha_{l-1})$（参见 [HL24，第 3.1] 小节）；

• 上面的标签（α_0、α_1、……、α_{l-1}）通过 $\mathbb{F}_2$-同构 $\mathcal{P}(\Lambda) \to \mathbb{F}_2^\Lambda$、$A \mapsto \mathbf{1}_A$（见 [HL25，第 2.2 和 2.3] 小节）被视为 Λ 的一个子集;

• $W_D(A)$：对于任意子集 $A \subseteq \Lambda$，$= W_D(\mathbf{1}_A)$（见 [HL25，定义 2.3.1]）；

• $W_D(\emptyset) \cong k$，即平凡模（上述情形的特例）；

• ω_W： $= \sigma_{\rho_W}$ 是与 K-特征标 ρ_W 相关联的符号函数，该特征标由 W 的行列式为一的唯一提升 $= W(\mathcal{B})$ 到 $\mathcal{O}$ 所赋予（见 [HL24，第 3.1] 小节）；

• $\omega_W^{[l]}(t)$ 中的 t 为 D 的生成元时， W 确定了 [的同构类（参见2] HL25，引理 2.3.）；

• $\omega_W^{[l]}(t) = \sigma_\chi^{[l]}(t)$，条件是 t 如上所述，$\langle t^{p^{l-1}} \rangle$ 属于所考虑群的中心，并且 $\chi \in \mathrm{Irr}(\mathcal{B})$ 表示唯一的非例外特征（参见 [HL25，注 2.3.3]）；

• $\omega_{\mathbf{H}}(s)$：$= \varepsilon_{\mathbf{H}}\varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{H}}(s)}$，若出现，则是与所考察的代数群 $\mathbf{H}$ 及任意半单元素$s \in H$ 相关联的一个符号（参见 [HL25，定义 2.5.6]）。

所考虑的群（第1节、第 3 节和第 4 节）：

• $\varepsilon \in \{\pm 1\}$；$\delta$：$= 1$ 若 $\varepsilon = 1$，且 δ：$= 2$ 若 $\varepsilon = -1$;
• q 是素数 r 的幂，且满足 $p \mid q - \varepsilon$;
• $\mathbb{F}$ 是含有 r 个元素的有限域的代数闭包;
• n 是满足以下条件的正整数：$n \geq 2$ 在第1节和第 3 节中，且 $n \geq 1$ 在第 4 节中；
• $\mathbf{G}$:=一般线性群$_n(\mathbb{F})$，且$\mathbf{G} := \{g \in \mathbf{G} \mid$ 行列式$(g) = 1\}$;
• $F := F_\varepsilon$ 是$\mathbf{G}$ 的斯坦伯格态射，满足 $\tilde{G} := \mathbf{G}^F =$ 一般线性群$_n^\varepsilon(q)$;
• G:= $\mathbf{G}^F =$ 特殊线性群$_n^\varepsilon(q)$;
• $Z := Z(G)$，且满足 $|Z| = \gcd(q - \varepsilon, n)$;
• a, b, c 是非负整数，使得 p^a, p^b, p^c 分别是整除 $q - \varepsilon$、n 和 gcd($q - \varepsilon, n$)的 p 的最高幂。因此$a > 0$ 且 $c = \min\{a, b\}$；
• $\mathbf{V}$：$= \mathbb{F}^n$ 是$\mathbf{G}$的自然向量空间，而 V：$= \mathbb{F}_{q^\delta}^n \subseteq \mathbf{V}$；
• $\mathbf{G}^*$：$= \mathbf{G}/Z(\mathbf{G})$ =PGL$_n(\mathbb{F})$（其斯坦伯格态射由$\mathbf{G}$上的斯坦伯格态射诱导）；
• G^* := $G/Z(G)$ =PGL$_n(q)$;
• $Y \leq Z$ 是一个 p-子群，而 $\bar{G}$：$= G/Y$ 是 G的中心商群。

块及其相关的局部构型（第 3 节）：

• $\mathbf{B}$是 G 的一个循环的 p-块，且$\mathbf{B}$是支配$\bar{\mathbf{B}}$的 G 的唯一块；
• D 是$\mathbf{B}$ 的一个缺陷群，使得 $\bar{D} := D/Y$ 是$\bar{\mathbf{B}}$的一个缺陷群;
• $t \in D$ 满足 $\bar{t} := tY \in \bar{G}$ 生成 $\bar{D}$;
• $h \in \{1, 2, 3\}$ 是 t 作用于 V时其最小多项式的不可约因子数;
• c' 是满足$|\bar{D}| = |t|/p^{c'}$的非负整数
• $C := C_G(D)$和 $\tilde{C} := C_{\tilde{G}}(D)$；
• $\mathbf{c}$ 是$\mathbf{B}$在 C 中的Brauer 对应块，且 $\tilde{\mathbf{c}}$ 是覆盖$\mathbf{c}$的 C 的一个块；参见图 1；
• D 是 $\tilde{\mathbf{c}}$ 的缺陷群，且具有 $D = C \cap \tilde{D} = G \cap \tilde{D}$。

Acknowledgements

作者感谢 Olivier Dudas、Meinolf Geck、Radha Kessar、Burkhard K¨ulshammer、Markus Linckelmann、Frank L¨ubeck、Klaus Lux、Gunter Malle 和 Jay Taylor，感谢他们就本研究的各个方面进行了无数次宝贵的讨论，并作出了详尽的解释。

References

[AlBr79] J. Alperin 和 M. Brou´e，《块理论中的局部方法》，《数学年刊》110 (1979), 143–157。[CaEn99] M. Cabanes 和 M. Enguehard，《有限约化群的块与扭曲诱导》，《数学进展》145 (1999), 189–229。[FoSr82] P. Fong 和 B. Srinivasan，《有限一般线性群和酉群的块》，《数学发明》69 (1982), 109–153。[GeMa20] M. Geck 和 G. Malle，《李型有限群的特征标理论：导览》，剑桥高等数学研究丛书，第187卷，剑桥大学出版社，剑桥，2020。[HK85] M. E. Harris 和 R. Kn¨orr，《有限群覆盖块的 Brauer对应》，《代数通讯》13 (1985), 1213–1218。[HL24] G. Hiss 和 C. Lassueur，《具有循环缺陷群的块的源代数等价类，I》，《代数与几何贡献》65 (2024), 187–207。[HL25] G. Hiss 和 C. Lassueur，《具有循环缺陷群的块的源代数等价类，II》，预印本。[Lin18] M. Linckelmann，《有限群代数的块理论》，第二卷，伦敦数学会学生教材，第92卷，剑桥大学出版社，剑桥，2018。[Lue21a] F. L¨ubeck，《若干秩为 < 9 的李型群的特征标次数及其重数》，http://www.math.rwth-aachen.de/~Frank. Luebeck/chev/DegMult/index.html。[NT89] H. Nagao 和 Y. Tsushima，《有限群表示》，学术出版社，波士顿，MA，1989。

Gerhard Hiss, Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie, RWTH Aachen, 52056 Aachen, Germany.
电子邮件地址: gerhard.hiss@math.rwth-aachen.de

Caroline Lassueur, Caroline Lassueur, RPTU Kaiserslautern-Land-au, Fachbereich Mathematik, 67653 Kaiserslautern, Germany and Leibniz Universität Hannover, Institut für Algebra, Zahlentheorie und Diskrete Mathematik, Welfengarten 1, 30167 Hannover, Germany.
电子邮件地址: lassueur@mathematik.uni-kl.de