立方下记录型变换分布族：理论、估计与应用

Caner Tanış

内吉梅丁·埃尔巴坎大学统计学系，土耳其科尼亚；*caner.tanis@erbakan.edu.tr*

arXiv:2601.01583v1 [stat.ME] 4 Jan 2026

摘要

本研究提出了一种称为立方下记录型变换分布的分布族，并将其一个特殊情形作为指数分布的替代方案。本文探讨了该分布族的若干统计性质，并采用九种不同方法估计所提出分布的参数。为比较这些方法的表现，我们开展了一项全面的蒙特卡罗模拟研究。模拟研究结果表明，最小绝对距离估计量是最大似然估计量的一种有价值的替代方法。随后，我们进行了两个真实世界数据示例，以评估所提出分布的拟合效果及其潜在竞争分布的拟合效果。真实数据分析结果表明，对于这两个数据集，拟合效果最佳的分布均为我们的模型。

关键词：下记录值、变换分布、点估计、蒙特卡罗模拟、真实数据分析。

AMS： 62E10, 62F10, 62P99.

1 引言

近几十年来，寿命分布的系统化提出已成为统计建模发展的重点，尤其是在提高灵活性和解释力方面。尽管经典分布构成概率论的基石，但在对具有不对称性、重尾或多峰等特征的真实数据集进行建模时，往往存在不足。为克服这些局限，人们对变换方法和广义分布族的兴趣日益浓厚。在此背景下，Shaw 和 Buckley 提出的变换映射[19] 采用基于次序统计量的方法，被认为是文献中最有效的工具之一。相关研究中定义的变换映射的数学表达式 [19] 如下：

设 X_1 和 X_2 为具有累积分布函数（CDF） G（。）和概率密度函数（PDF） g（。）的独立同分布（iid）随机变量， $X_{1:n}$、 $X_{2:n}$ 为与该样本相关的前两个次序统计量。

我们定义随机变量 T

$$\begin{aligned} T &\overset{d}{=} X_{1:2}, \text{ with probability } \omega, \\ T &\overset{d}{=} X_{2:2}, \text{ with probability } 1-\omega, \end{aligned}$$

且对应的累积分布函数为

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \omega P(X_{1:2} \le x) + (1-\omega) P(X_{2:2} \le x) \\ &= \omega\left(1-(1-G(x))^2\right) + (1-\omega) G^2(x) \\ &= 2\omega G(x) + (1-2\omega) G^2(x). \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\omega \in (0,\ 1)$

代入 $\omega = \frac{1+\lambda}{2}$ 式（~~1~~）中，累积分布函数可改写如下：

$$F_T(x) = (1+\lambda) G(x) - \lambda (G(x))^2, \tag{2}$$

相应的概率密度函数为

$$f_T(x) = (1+\lambda) g(x) - 2\lambda G(x) g(x), \tag{3}$$

其中 $\lambda \in [-1, 1]$。近几十年来，许多作者利用基于次序统计量分布的变换映射生成灵活的统计分布。以下列举其中一些研究：Aryal 和 Tsokos [5] 提出了变换 Weibull 分布，作为威布尔分布的一种替代。Mahmoud 和 Mandouh [11]研究了变换 Fréchet 分布。Afaq 等人提出了变换逆瑞利分布 [1]。Tanış 等人 [28] 给出了变换互补指数幂分布。

随后，Granzotto 等人 [10]基于前三个次序统计量的分布，利用三次秩变换映射（CRTM）提出了三次秩变换分布族。CRTM 可概括如下：

设 X_1、X_2、X_3 为具有累积分布函数 $G(x)$ 和概率密度函数 $g(x)$ 的独立同分布随机变量。 $X_{1:n}$、$X_{2:n}$ 和 $X_{3:n}$ 为该样本的次序统计量。定义随机变量 Z

$$\begin{aligned} Z &\overset{d}{=} \mathrm{X}_{1:3}, \text{ with probability } p_1, \\ Z &\overset{d}{=} \mathrm{X}_{2:3}, \text{ with probability } p_2, \\ Z &\overset{d}{=} \mathrm{X}_{3:3}, \text{ with probability } p_3, \end{aligned}$$

其中 $p_1 + p_2 + p_3 = 1$。 Z 的相应累积分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= p_1 P(X_{1:3} \le x) + p_2 P(X_{2:3} \le x) + p_3 P(X_{3:3} \le x) \\ &= p_1 \left[1 - (1 - G(x))^3\right] + 6p_2 \int_0^x G(t)(1 - G(t)) g(t)\, dt + p_3 G^3(x) \\ &= 3p_1 G(x) + (3p_2 - 3p_1) G^2(x) + (1 - 3p_2) G^3(x). \end{aligned} \tag{4}$$

代入 $3p_1 = \lambda_1$、$3p_2 = \lambda_2$ 到公式（4）中， Z 的累积分布函数和概率密度函数分别为

$$F_Z(x) = \lambda_1 G(x) + (\lambda_2 - \lambda_1) G^2(x) + (1 - \lambda_2) G^3(x), \tag{5}$$

and

$$f_Z(x) = g(x)\left[\lambda_1 + 2(\lambda_2 - \lambda_1) G(x) + 3(1 - \lambda_2) G^2(x)\right], \tag{6}$$

分别为，其中 $\lambda_1 \in [0, 1]$、 $\lambda_2 \in [-1, 1]$。Granzotto 等人 [10] 基于 Weibull 分布和对数逻辑斯谛分布，提出了三次秩变换分布族（CRTFD）的两个子模型。随后，Saraçoğlu 和 Tanış [18] 基于 Kumaraswamy 分布引入了 CRTFD 的一个新成员。此外，三次秩变换 Kumaraswamy 分布是 CRTFD 中第一个其随机变量定义在单位区间（0,1）上的成员。Tanış 和 Saraçoğlu [25] 研究了三次秩变换逆瑞利分布。Tanış 和 Saraçoğlu [27] 基于广义 Gompertz 分布引入了 CRTFD 的一个新成员。

同样，正如式（1）中所示，Balakrishnan 和 He [6] 提出了一种基于前两个上记录统计量的新分布族，即基于记录值的变换分布族（RBTFD）。RBTFD 由如下定义的基于记录值的变换映射（RBTM）得到：

设 X_1 和 X_2 是来自累积分布函数为 $G(.)$、概率密度函数为 $g(.)$ 的分布的两个样本量的随机样本，且$X_{U(1)}$ 和 $X_{U(2)}$ 是相应样本的上记录值。

定义随机变量 R

$$\begin{aligned} R &\overset{d}{=} X_{U(1)}, \text{ with probability } p_1, \\ R &\overset{d}{=} X_{U(2)}, \text{ with probability } p_2, \end{aligned}$$

其中 $U_{(n)} = \min\{i : i > U(n-1)\}$ $X_i > X_{U(n-1)}\}$ $\{U_{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$表示上记录时刻，$\{X_{U(n)}\}_{n=1}^{\infty}$指相应的记录序列 [6],Arnold 等人 [3]，$p_1 + p_2 = 1$ 而 R 表示一个来自基于记录值的变换分布的随机变量。因此，R 的累积分布函数为

$$\begin{aligned} F_R(x) &= p_1 P\left(X_{U(1)} \le x\right) + p_2 P\left(X_{U(2)} \le x\right) \\ &= G(x) + p\left[(1 - G(x)) \ln(1 - G(x))\right], \end{aligned} \tag{7}$$

相应的概率密度函数为

$$f_R(x) = g(x)\left[1 + p\left(-\ln(1 - G(x)) - 1\right)\right], \tag{8}$$

其中 $p \in$ （0，1）。基于均匀分布、指数分布、线性指数分布、Weibull 分布、正态分布和逻辑斯谛分布，文献 [6] 引入了 RBTFD 的六个子模型。然而，文献 [6] 未对所提出的分布提供统计推断。Tanış 和 Saraçoğlu [26] 提供了基于记录值的变换 Weibull 分布和指数分布的统计推断及理论性质。在相关文献中，还有一些基于 Lindley 分布 [23], 、广义线性指数分布 [4], 、幂 Lomax 分布 [17], 和 Burr X 分布 [2]的 RBTFD 特例。

此外，Balakrishnan 和 He [6]基于前三个上记录值的分布，提出了三次基于记录值的变换分布族（CRBTFD）。CRBTFD 是通过三次基于记录值的变换映射（CRBTM）导出的。CRBTM 定义如下:

设 X_1、X_2 和 X_3 是独立同分布随机变量，其累积分布函数为 G(。)，概率密度函数为 g(。)，而 $X_{U(1)}$、$X_{U(2)}$ 和 $X_{U(3)}$ 是与该样本相关的上记录值。

定义随机变量 R^*

$$\begin{aligned} R^* &\overset{d}{=} X_{U(1)}, \text{ with probability } p_1, \\ R^* &\overset{d}{=} X_{U(2)}, \text{ with probability } p_2, \\ R^* &\overset{d}{=} X_{U(3)}, \text{ with probability } 1 - p_1 - p_2, \end{aligned}$$

其中，R^* 表示一个来自 CRBTFD 中某个分布的随机变量，R^* 的累积分布函数为 is

$$\begin{aligned} F_{R^*}(x) &= p_1 P\left(X_{U(1)} \le x\right) + p_2 P\left(X_{U(2)} \le x\right) + (1 - p_1 - p_2) P\left(X_{U(3)} \le x\right) \\ &= 1 - (1 - G(x))\left(1 + (1 - p_1)\left(-\ln(1 - G(x))\right)\right) \\ &\quad + (1 - G(x))\left(\frac{1 - p_1 - p_2}{2}\left(-\ln(1 - G(x))\right)^2\right), \end{aligned} \tag{9}$$

其中，$0 < p_1$，$p_2 < 1$，$p_1 + p_2 \le 1$。R^* 的相应概率密度函数为

$$f_{R^*}(x) = g(x)\left(p_1 + p_2\left(-\ln(1 - G(x))\right) + \frac{1 - p_1 - p_2}{2}\left(-\ln(1 - G(x))\right)^2\right). \tag{10}$$

Tanış [24] 对 CRBTFD 及其基于威布尔分布的一个特例进行了统计推断。除了基于记录值的变换映射（RBTM）外，Balakrishnan 和 He [6] 还提出了基于双记录值的变换映射（DRBTM），用于从基于双记录值的变换分布族（DRBTFD）生成灵活的分布。DRBTM 基于前两个下记录值的分布，定义如下:

设 X_1 和 X_2 为具有累积分布函数 G(。) 和概率密度函数 g(。) 的独立同分布随机变量，$X_{L(1)}$ 和 $X_{L(2)}$ 为相应样本的下记录值。

定义随机变量 L

$$\begin{aligned} L &\overset{d}{=} X_{L(1)}, \text{ with probability } 1-p \\ L &\overset{d}{=} X_{L(2)}, \text{ with probability } p, \end{aligned}$$

其中 $L_{(n)}$ =最小值$\{i: \ i > L(n-1) \ \ X_i < X_{L(n-1)}\}$ $\{L_{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$表示下记录时刻， $\{X_{L(n)}\}_{n=1}^{\infty}$表示相应的记录序列 [6],Arnold 等人 [3]， L 表示服从 DRBTFD 中任一分布的随机变量。因此， L 的累积分布函数为

$$\begin{aligned} F_L(x) &= (1-p)\,P\left(X_{L(1)} \le x\right) + pP\left(X_{L(2)} \le x\right) \\ &= (1-p)\,G(x) + p\left[G(x)\left(1-\ln\left(G(x)\right)\right)\right] \\ &= G(x)\left[1-p\ln\left(G(x)\right)\right], \end{aligned} \tag{11}$$

相应的概率密度函数为

$$f_L(x) = g(x)\left[1+p\left(-\ln\left(1-G(x)\right)-1\right)\right]. \tag{12}$$

其中 $p \in (0,\ 1)$。近年来，一些研究基于 Fréchet 幂函数 [21] 分布和逆 Rayleigh [22] 分布探讨了 DRBTFD。 [29],

Balakrishnan 和 He [6] 在其论文中简要提及了 DRBTFD 的三阶版本，但未作详细阐述。受此工作的启发，本研究旨在提出三次下记录型变换映射（CLRBTM），并为未来利用前三个下记录值的分布，在立方下记录型变换分布族（CLRBTFD）中构造新分布的研究奠定基础。

本文结构安排如下：第2节提出 CLRBTM，以生成连续分布。此外，第2节提出了一种基于指数分布的 CLRBTFD 特例。第3 节介绍所提出分布的一些分布性质。第4节重点讨论所引入分布的点估计，采用九种不同方法。随后，我们在第5节设计了一项全面的蒙特卡洛（MC）模拟研究，以比较这些估计量的表现。在第6节，我们给出两个实际数据示例，以说明所提出的分布在实际数据建模中的用途。最后，第7节给出总结性评论。

2 Cubic 基于记录值的变换分布族

Balakrishnan 和 He [6]提到了基于前三个下记录值的分布所构造的 CLRBTM。然而， [6]并未给出 CLRBTM 的明确公式。本节将介绍 CLRBTM 的构造，并详细说明通过 CLRBTM 得到的 CLRBTFD，定义如下：

令 X_1, X_2, 且 X_3 是一个随机样本，其累积分布函数为 $G(。)$，概率密度函数为 $g(。)$，且 $X_{L(1)}$, $X_{L(2)}$和 $X_{L(3)}$ be 的下记录值 同一样本。

定义一个随机变量 L^*

$$\begin{aligned} L^* &\overset{d}{=} X_{L(1)}, \text{ with probability } p_1, \\ L^* &\overset{d}{=} X_{L(2)}, \text{ with probability } p_2, \\ L^* &\overset{d}{=} X_{L(3)}, \text{ with probability } 1-p_1-p_2, \end{aligned}$$

其中 $p_1+p_2=$ 1，且 L^* 表示来自 CLRBTFD 分布的随机变量，而 L^*的累积分布函数 is

$$\begin{aligned} F_{L^*}(x) &= p_1 P\left(X_{L(1)} \le x\right) + p_2 P\left(X_{L(2)} \le x\right) + (1-p_1-p_2)\,P\left(X_{L(3)} \le x\right) \\ &= p_1 G(x) + p_2\left[G(x)\left(1-\ln\left(G(x)\right)\right)\right] + (1-p_1-p_2)[G(x)(1-\ln G(x) + \frac{1}{2}(-\ln G(x))^2)] \\ &= G(x)\left[1-(1-p_1)\ln G(x) + \frac{1-p_1-p_2}{2}\left(-\ln G(x)\right)^2\right], \end{aligned} \tag{13}$$

其中 $0 < p_1,\ p_2 < 1,\ p_1 + p_2 \leq 1$。因此，$L^*$ 对应的概率密度函数为

$$f_{L^*}(x) = g(x)\Big[p_1 - p_2 \ln G(x) + \frac{1 - p_1 - p_2}{2}\big(\ln G(x)\big)^2\Big]. \tag{14}$$

2.1 立方下记录变换指数分布 n

在本节中，我们提出了基于立方下记录的变换指数分布（CLRBTE），采用的是CLRBTM。

令 $X \sim \text{CLRBTE}(\lambda,\ p_1,\ p_2)$ 表示一个随机变量。将指数分布累积分布函数 $G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ 代入式（13），即可得到 X 的累积分布函数和概率密度函数，如下所示:

$$F_{CLRBTE}(x) = \big(1 - e^{-\lambda x}\big)\left[1 - (1 - p_1)\ln\big(1 - e^{-\lambda x}\big) + \frac{1 - p_1 - p_2}{2}\big(\ln(1 - e^{-\lambda x})\big)^2\right]. \tag{15}$$

and

$$f_{CLRBTE}(x) = \lambda e^{-\lambda x}\Big[p_1 - p_2 \ln(1 - e^{-\lambda x}) + \frac{1 - p_1 - p_2}{2}\big(\ln(1 - e^{-\lambda x})\big)^2\Big], \quad x \geq 0, \tag{16}$$

分别为 $p_1,\ p_2 \in [0, 1]$ 和 $p_1 + p_2 \leq 1$。当 $p_1 = 1$ 且 $p_2 = 0$时，CLRBTE分布退化为标准指数分布。

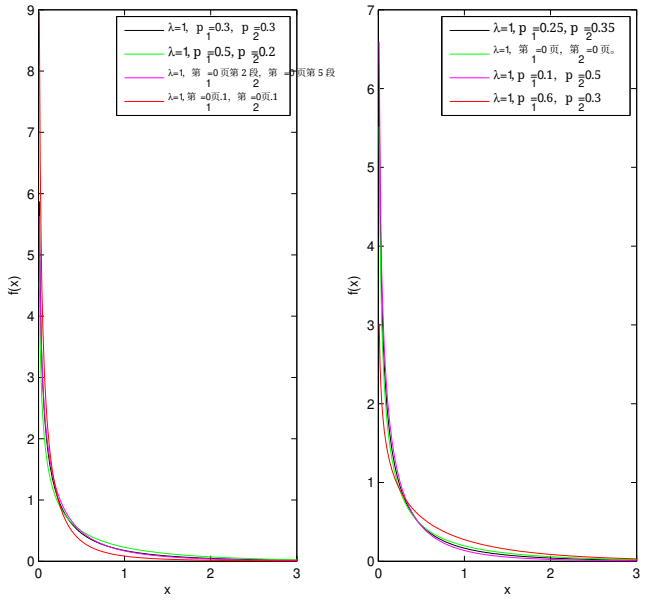

图1：不同参数取值下 CLRBTE分布的概率密度函数

图1 展示了所选参数取值下 CLRBTE分布可能具有的概率密度函数形态。从图1中可以清楚地看到，CLRBTE分布的概率密度函数是递减的。

3 一些分布性质

本节探讨 CLRBTE分布的一些统计性质，即风险函数（hf）、矩、均值、方差、变异系数、偏度系数和峰度系数。

3.1 风险函数

CLRBTE分布的风险函数（hf）为

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \frac{f(x)}{1-F(x)} \\
&= \frac{\lambda e^{-\lambda x}\left[p_1 - p_2\ln(1-e^{-\lambda x}) + \frac{1-p_1-p_2}{2}(\ln(1-e^{-\lambda x}))^2\right]}{1-(1-e^{-\lambda x})\left[1-(1-p_1)\ln(1-e^{-\lambda x}) + \frac{1-p_1-p_2}{2}(\ln(1-e^{-\lambda x}))^2\right]}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

其中 F（。） 和 f（。） 分别是方程（15）和（16）中给出的CLRBTE分布的累积分布函数和概率密度函数。图 2 展示了CLRBTE分布可能的风险函数形状。

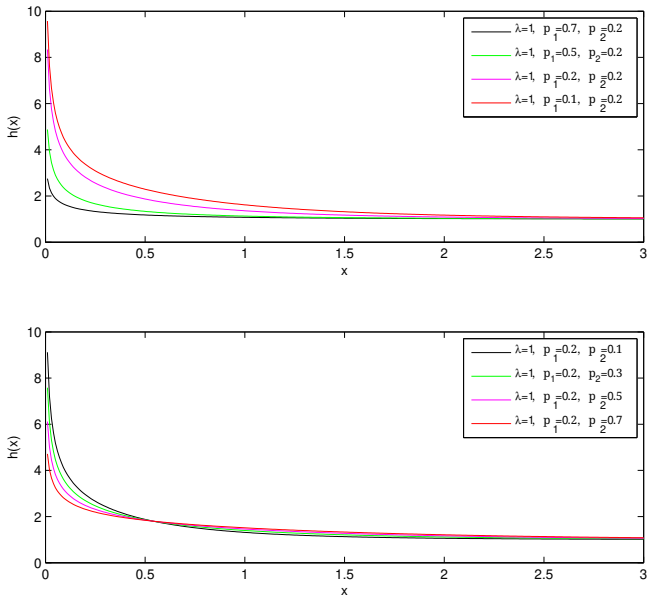

图2：不同参数取值下CLRBTE分布的风险函数形状 s

图 2 显示风险函数呈递减形状。

3.2 矩

在本小节中，我们给出 r阶中心矩，该中心矩适用于 $CLRBTE(\lambda, p_1, p_2)$ 分布，依据定理1。

定理 1. 设 X 是服从 $CLRBTE(\lambda, p_1, p_2)$ 分布的随机变量。其 r阶中心矩为

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^r] &= \int_0^\infty x^r f_{CLRBTE}(x)\,dx \\
&= x^r \lambda e^{-\lambda x}\left[p_1 - p_2\ln(1-e^{-\lambda x}) + \frac{1-p_1-p_2}{2}\left(\ln(1-e^{-\lambda x})\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{\lambda^r}\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_r=1}^{\infty}\frac{1}{k_1\cdots k_r}\left[\frac{p_1}{K+1} + \frac{p_2}{(K+1)^2} + \frac{1-p_1-p_2}{(K+1)^3}\right], \quad K = k_1+\cdots+k_r.
\end{aligned} \tag{18}
$$

证明. 为求 r阶矩，我们进行代换 $u = 1 - e^{-\lambda x}$，由此得到 $x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$ 和$dx = \lambda \frac{du}{1-u()}$。经过这一变换，积分变为——

$$\mathbb{E}[X^r] = \frac{1}{\lambda^r}\int_0^1 \big(-\ln(1-u)\big)^r \Big[p_1 - p_2 \ln u + \frac{1-p_1-p_2}{2}(\ln u)^2\Big] du.$$

将 $-\ln(1-u)$ 展开为幂级数

$$-\ln(1-u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k}, \quad |u| < 1,$$

并交换求和与积分的顺序（由绝对收敛性可知这是合理的），我们得到 in

$$\mathbb{E}[X^r] = \frac{1}{\lambda^r}\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_r=1}^{\infty}\frac{1}{k_1\cdots k_r}\int_0^1 u^{k_1+\cdots+k_r}\Big[p_1 - p_2\ln u + \frac{1-p_1-p_2}{2}(\ln u)^2\Big] du.$$

利用标准积分

$$\int_0^1 u^m du = \frac{1}{m+1}, \quad \int_0^1 u^m \ln u\, du = -\frac{1}{(m+1)^2}, \quad \int_0^1 u^m (\ln u)^2\, du = \frac{2}{(m+1)^3},$$

结合 $m = k_1 + \cdots + k_r$，我们有

$$\int_0^1 u^m \Big[p_1 - p_2\ln u + \frac{1-p_1-p_2}{2}(\ln u)^2\Big] du = \frac{p_1}{m+1} + \frac{p_2}{(m+1)^2} + \frac{1-p_1-p_2}{(m+1)^3}.$$

因此，r 阶矩可表示为一个收敛级数

$$\mathbb{E}[X^r] = \frac{1}{\lambda^r}\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_r=1}^{\infty}\frac{1}{k_1\cdots k_r}\left[\frac{p_1}{K+1} + \frac{p_2}{(K+1)^2} + \frac{1-p_1-p_2}{(K+1)^3}\right], \quad K = k_1+\cdots+k_r.$$

因此，证明完成。 □

3.3 变异系数、偏度和峰度

本小节给出了 CLRBTE γ_1 分布的偏度系数 γ_2 和峰度系数(λ, p_1, p_2)，分别见式（19）和式（20）。

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2(\mu_1')^3}{(\sigma)^3} \tag{19}$$

and

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4' - 4\mu_3'\mu + 6\mu_2'\mu^2 - 3\mu^4}{(\sigma)^4}, \tag{20}$$

其中，前四阶矩 μ_i', $i = 1,2,3,4$ 可通过在式（ $r = 1,2,3,4$ 18）中代入求得，μ_1' 为均值，而 σ^2 为方差， $\sigma^2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$。

此外，变异系数为

$$\mathrm{CV} = \frac{\sigma}{\mu}. \tag{21}$$

表1：参数取不同值时的一些描述性统计量

λ	p_1	p_2	μ_1'	σ^2	σ	CV	γ_1	γ_2
0.5	0.5	0.5	1.3550	2.7758	1.666	1.2295	2.5782	12.9647
1	0.5	0.5	0.6775	0.6939	0.8330	1.2295	2.5782	12.9647
2	0.5	0.5	0.3387	0.1734	0.4165	1.2295	2.5782	12.9647
1.5	0.1	0.6	0.2392	0.1226	0.3502	1.4637	3.6422	25.1704
1.5	0.3	0.6	0.3522	0.2273	0.4768	1.3537	3.0116	16.9262
1.5	0.6	0.6	0.5216	0.3365	0.5801	1.1121	2.4077	11.7738
1.5	0.9	0.6	0.6910	0.3883	0.6231	0.9018	2.1977	10.2468
0.7	0.4	0.1	0.7314	1.2324	1.1101	1.5177	3.0031	15.9308
0.7	0.4	0.4	0.8180	1.2422	1.1145	1.3624	2.8380	14.9678
0.7	0.4	0.7	0.9046	1.2369	1.1122	1.2294	2.7246	14.3841
0.7	0.4	0.9	0.9623	1.2251	1.1068	1.1501	2.6775	14.1848

表1 列出了在参数 λ、 p_1和 p_2的若干选定组合下，CLRBTE分布的描述性统计量。尺度参数 λ 主要调节分布的总体量级，这体现在随着 λ取值增大，均值和方差均持续下降；而变异系数、偏度和峰度等形状相关指标保持不变，表明缩放会影响离散程度，但不会改变分布形式。相比之下，变换参数 p_1和 p_2 对高阶特征的确定起着关键作用。较低的 p_1取值，尤其是在与中等或较大的 p_2取值结合时，会加剧变异、不对称性和尾部厚重性，使分布呈现更明显的高峰厚尾和偏斜特征。相反，较大的 p_1 取值会减弱这些效应，使分布更趋于对称且尾部更轻。综合来看，这些发现凸显了双重参数化机制： λ控制总体尺度，而 p_1和 p_2则赋予分布塑造方面显著的灵活性，从而提升了CLRBTE分布在各种实证应用中的适应性。

4 点估计

本节探讨 CLRBTE分布的点估计。我们采用九种方法来估计参数 λ、 p_1和 p_2。

4.1 最大似然估计量

本小节探讨参数 λ、 p_1和 p_2的最大似然估计量（MLEs）。

设 $X_1, X_2 ... X_n$ 是来自 CLRBTE 的独立同分布随机变量， $x_1, x_2 ... x_n$ 表示样本的观测值。那么，对数似然函数如下:

$$\ell(x;\lambda,p_1,p_2) = n\ln\lambda - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\ln\left(p_1 - p_2\ln\left(1-e^{-\lambda x_i}\right) + \frac{1-p_1-p_2}{2}\left[\ln\left(1-e^{-\lambda x_i}\right)\right]^2\right). \tag{22}$$

$\ell(x;\ \lambda,\ p_1,\ p_2)$ 关于参数 λ、 p_1和 p_2 的一阶偏导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ell(x;\lambda,p_1,p_2)}{\partial\lambda} &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i e^{-\lambda x_i}\left[-p_2 + (1-p_1-p_2)\ln\left(1-e^{-\lambda x_i}\right)\right]}{\left(1-e^{-\lambda x_i}\right)\left(p_1 - p_2\ln\left(1-e^{-\lambda x_i}\right) + \frac{1-p_1-p_2}{2}\left[\ln(1-e^{-\lambda x_i})\right]^2\right)}.\end{aligned} \tag{23}$$

$$\frac{\partial \ell(x;\lambda,p_1,p_2)}{\partial p_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1-\frac{1}{2}\left[\ln(1-e^{-\lambda x_i})\right]^2}{p_1 - p_2\ln(1-e^{-\lambda x_i}) + \frac{1-p_1-p_2}{2}\left[\ln(1-e^{-\lambda x_i})\right]^2}. \tag{24}$$

$$\frac{\partial \ell(x;\lambda,p_1,p_2)}{\partial p_2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{-\ln(1-e^{-\lambda x_i}) - \frac{1}{2}\left[\ln(1-e^{-\lambda x_i})\right]^2}{p_1 - p_2\ln(1-e^{-\lambda x_i}) + \frac{1-p_1-p_2}{2}\left[\ln(1-e^{-\lambda x_i})\right]^2}, \tag{25}$$

分别为。参数 λ， p_1 和 p_2 的最大似然估计值是使 $\ell(x;\ \lambda,\ p_1,\ p_2)$达到最大值的参数值。最大似然估计值同时也是令方程（23）、（24）和（25）分别等于零时所得方程组的解。

可以利用一些数值方法，即牛顿-拉夫森法和内尔德-米德法，来求解这一优化问题

4.2 最小二乘估计量

在本小节中，我们研究参数的最小二乘估计量（LSE） λ、 p_1和 p_2。最小二乘估计由 [20] 提出，作为最大似然估计的替代方法。最小二乘估计量可通过最小化公式（26）中的函数获得。

$$LS(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\left[F(x_{i:n}) - \frac{i}{n+1}\right]^2, \tag{26}$$

其中， $x_{i:n}$ 对于 $i=1,\ 2...n$ 表示次序统计量。

4.3 加权最小二乘估计量

本小节介绍通过 λ提出的方法，对 CLRBTE 的参数 p_1、 p_2 和 [20]进行加权最小二乘估计。我们通过最小化公式（27）推导加权最小二乘估计量。

$$WLS(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)}\left[F(x_{i:n}) - \frac{i}{n+1}\right]^2. \tag{27}$$

4.4 安德森-达林估计量

本小节讨论参数 λ、 p_1和 p_2的安德森-达林估计量（ADE）。参数λ、 p_1和 p_2 的安德森-达林估计量可通过最小化公式（28）求得。

$$AD(x_i) = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\left[\ln F(x_{i:n}) + \ln(1-F(x_{n-i-1:n}))\right]. \tag{28}$$

4.5 Cramér-vonMises 估计量

在本小节中，我们研究参数 λ、 p_1和 p_2的克拉默-冯·米塞斯估计量（CvME）。 [8]提出了克拉默-冯·米塞斯法。我们通过最大化公式（29）中的函数来计算克拉默-冯·米塞斯估计量。

$$C(x_i) = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\left[F(x_{i:n}) - \frac{2i-1}{2n}\right]^2. \tag{29}$$

4.6 最大间距乘积估计量

本小节介绍 [7] 和 [16] 提出的最大间距乘积法，该方法作为最大似然法的替代方案，通过最大化公式（30）中的函数来获得最大间距乘积估计量（MPSE）。

$$\delta\left(x_i\right)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\ln I_i(x_i), \tag{30}$$

其中 $I_i(x_i)=F(x_{i:n})-F(x_{i-1:n})$，$F(x_{0:n})=0$和 $F(x_{n+1:n})=1$.

4.7 右尾安德森-达令估计量

在本小节中，我们探讨参数的右尾安德森-达令估计量（RTADE） λ， p_1和 p_2。我们通过最小化式（31）推导出RTADE。

$$L(\lambda,p_1,p_2)=\frac{n}{2}-2\sum_{i=1}^{n}F\left(x_{i:n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(2i-1\right)\ln\left(1-F\left(x_{n-i+1}\right)\right). \tag{31}$$

4.8 最小间距绝对距离估计量

在本小节中，我们提出参数的最小间距绝对距离估计量（MSADE） λ， p_1和 p_2。参数 λ， p_1和 p_2 的 MSADE 通过最小化式（32）中给出的函数计算。

$$\Lambda(\lambda,p_1,p_2\mid x_i)=\sum_{i=1}^{n+1}\left|I_i-\frac{1}{n+1}\right| \tag{32}$$

4.9 最小间距绝对对数距离估计量

在本小节中，我们讨论参数 λ， p_1和 p_2。 [30] 提出了最小间距绝对对数距离法，作为最大似然法的替代方案。我们通过最小化方程（33），推导参数 λ， p_1和 p_2 的最小间距绝对对数距离估计量

$$\Psi(\lambda,p_1,p_2\mid x_i)=\sum_{i=1}^{n+1}\left|I_i-\log\frac{1}{n+1}\right|. \tag{33}$$

5 模拟

本节通过广泛的蒙特卡罗模拟研究，评估第4节所给出的上述估计量的性能。在蒙特卡罗模拟研究中，我们采用以下设置:

- 样本量； $n=50$，100，200，500，1000
- 重复次数：5000
- 参数 λ、 p_1 和 p_2 的初始值如下：$Senerio_I=(\lambda=1.5,$ $p_1=0.5,p_2=0.3)$,$Senerio_{II}=(\lambda=0.5,p_1=0.4,p_2=0.5)$, $Senerio_{III}=(\lambda=0.6,p_1=0.3,p_2=0.2)$,$Senerio_{IV}=(\lambda=2,$ $p_1=0.2,p_2=0.4)$,

我们采用偏差、均方误差（MSE）和平均相对误差（MRE）来评估所考察估计量的性能。这些度量定义如下：

$$Bias = \frac{1}{5000}\sum_{i=1}^{5000}\left(\hat{\Upsilon}-\Upsilon\right),$$

$$MSE = \frac{1}{5000}\sum_{i=1}^{5000}\left(\hat{\Upsilon}-\Upsilon\right)^2,$$

$$MRE = \frac{1}{5000}\sum_{i=1}^{5000}\frac{|\hat{\Upsilon}-\Upsilon|}{\Upsilon},$$

其中 $\Upsilon = (\lambda, p_1, p_2)$。

5.1 随机样本生成

为从 $CLRBTE(\lambda, p_1, p_2)$ 分布生成随机样本，我们使用接受-拒绝（AR）抽样算法。在 AR 算法中，我们选择威布尔分布作为提议分布。AR 算法如下：

算法1。
A1. 生成随机变量 $Y \sim Weibull(\gamma, \nu)$ 的数据，其概率密度函数 g 如下：

$$g(\gamma, \nu) = \gamma\nu x^{\nu-1}e^{-\gamma x^{\nu}}.$$

A2. 从标准均匀分布生成 U （与 Y 相互独立）。
A3. 如果

$$U < \frac{f(Y;\lambda,p_1,p_2)}{k \times g(Y;\gamma,\nu)}$$

则设置为 $X = Y$ （“接受”）；否则返回A1（“拒绝”），其中概率密度函数 f （。）如公式（16）所示，且

$$k = \max_{z\in\mathbb{R}_+}\frac{f(z;\lambda,p_1,p_2)}{g(z;\gamma,\nu)}.$$

在蒙特卡罗模拟研究中，我们使用算法1生成随机样本。此外，所有优化问题均通过R 软件 [15]和 `optim()` 函数，并采用BFGS（Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno） [14]算法求解。

我们在表2-5中报告了蒙特卡罗模拟研究的结果。

表2： $\lambda = 1.5$、 $p_1 = 0.5$ 和 $p_2 = 0.3$中的模拟结果

		Bias			MSE			MRE		
估计量	n	$\hat{\lambda}$	$\hat{p}_1$	$\hat{p}_2$	$\hat{\lambda}$	$\hat{p}_1$	$\hat{p}_2$	$\hat{\lambda}$	$\hat{p}_1$	$\hat{p}_2$
MLE	50	-0.0817	-0.0702	0.0669	0.1155	0.0267	0.0327	0.1793	0.2541	0.4837
	100	-0.0773	-0.0619	0.0567	0.0946	0.0251	0.0318	0.1675	0.2503	0.4736
	200	-0.0542	-0.0387	0.0454	0.0791	0.0199	0.0290	0.1468	0.2168	0.4673
	500	-0.0165	-0.0368	0.0377	0.0521	0.0174	0.0268	0.1158	0.2115	0.4287
	1000	0.0054	-0.0109	0.0068	0.0240	0.0090	0.0140	0.0782	0.1429	0.3122
LSE	50	-0.3657	-0.1937	0.0991	0.2744	0.0624	0.0485	0.3053	0.4519	0.6268
	100	-0.2759	-0.1618	0.0811	0.2008	0.0557	0.0434	0.2593	0.4226	0.5871
	200	-0.1748	-0.1070	0.0780	0.1299	0.0401	0.0427	0.2040	0.3398	0.5790
	500	-0.0970	-0.0579	0.0437	0.0807	0.0273	0.0334	0.1579	0.2717	0.5083
	1000	-0.0357	-0.0200	0.0082	0.0475	0.0160	0.0219	0.1159	0.2015	0.3982
WLSE	50	-0.3604	-0.1953	0.1177	0.2353	0.0609	0.0448	0.2806	0.4346	0.5916
	100	-0.2718	-0.1625	0.1107	0.1761	0.0523	0.0402	0.2406	0.3957	0.5657
	200	-0.1767	-0.1088	0.0867	0.1174	0.0382	0.0399	0.1867	0.3145	0.5457
	500	-0.0755	-0.0475	0.0422	0.0570	0.0205	0.0271	0.1280	0.2272	0.4434
	1000	-0.0236	-0.0135	0.0067	0.0292	0.0106	0.0162	0.0887	0.1594	0.3350
ADE	50	-0.2347	-0.1546	0.1243	0.1724	0.0467	0.0447	0.2366	0.3716	0.5845
	100	-0.2265	-0.1477	0.1231	0.1491	0.0459	0.0416	0.2203	0.3703	0.5675
	200	-0.1563	-0.1020	0.0901	0.1029	0.0351	0.0388	0.1773	0.3025	0.5340
	500	-0.0753	-0.0487	0.0455	0.0562	0.0204	0.0270	0.1273	0.2267	0.4432
	1000	-0.0243	-0.0146	0.0087	0.0294	0.0107	0.0161	0.0885	0.1591	0.3335
CvME	50	-0.2392	-0.1707	0.1427	0.1982	0.0523	0.0556	0.2525	0.4169	0.6639
	100	-0.2114	-0.1487	0.1259	0.1660	0.0504	0.0538	0.2338	0.4032	0.6578
	200	-0.1445	-0.1003	0.0883	0.1169	0.0377	0.0449	0.1936	0.3303	0.5870
	500	-0.0853	-0.0552	0.0469	0.0769	0.0263	0.0334	0.1545	0.2677	0.5078
	1000	-0.0303	-0.0188	0.0098	0.0462	0.0157	0.0219	0.1149	0.2000	0.3972
MPSE	50	-0.3487	-0.1682	0.0817	0.2479	0.0584	0.0382	0.2803	0.3977	0.5275
	100	-0.3225	-0.1594	0.0741	0.2184	0.0534	0.0348	0.2621	0.3797	0.5038
	200	-0.2534	-0.1390	0.0679	0.1704	0.0534	0.0343	0.2173	0.3608	0.4852
	500	-0.1553	-0.0893	0.0270	0.1017	0.0371	0.0267	0.1559	0.2807	0.4469
	1000	-0.0704	-0.0385	0.0198	0.0435	0.0159	0.0178	0.0961	0.1740	0.3449
TADE	50	-0.2227	-0.1321	0.0761	0.1725	0.0457	0.0410	0.2334	0.3567	0.5501
	100	-0.2175	-0.1238	0.0661	0.1577	0.0422	0.0403	0.2234	0.3424	0.5480
	200	-0.1572	-0.0953	0.0491	0.1087	0.0366	0.0367	0.1794	0.3069	0.5224
	500	-0.0765	-0.0461	0.0349	0.0585	0.0221	0.0308	0.1268	0.2337	0.4756
	1000	-0.0292	-0.0170	0.0104	0.0294	0.0113	0.0183	0.0876	0.1618	0.3518
MSADE	50	-0.2380	-0.1109	0.0482	0.1518	0.0349	0.0320	0.2077	0.2979	0.4817
	100	-0.2223	-0.1037	0.0361	0.1447	0.0307	0.0289	0.2028	0.2843	0.4564
	200	-0.1595	-0.0852	0.0283	0.0983	0.0304	0.0287	0.1610	0.2689	0.4559
	500	-0.0829	-0.0500	0.0161	0.0599	0.0213	0.0276	0.1235	0.2211	0.4428
	1000	-0.0433	-0.0244	0.0047	0.0351	0.0132	0.0202	0.0937	0.1706	0.3725
MSALDE	50	-0.2909	-0.1551	0.0713	0.2344	0.0577	0.0430	0.2674	0.3980	0.5649
	100	-0.2840	-0.1488	0.0674	0.2122	0.0526	0.0415	0.2556	0.3836	0.5440
	200	-0.2184	-0.1224	0.0581	0.1580	0.0513	0.0388	0.2120	0.3589	0.5224
	500	-0.1339	-0.0783	0.0392	0.0980	0.0353	0.0359	0.1578	0.2812	0.5185
	1000	-0.0650	-0.0373	0.0254	0.0474	0.0177	0.0221	0.1039	0.1907	0.3868

表3： $\lambda = 0.5$、 $p_1 = 0.4$ 和 $p_2 = 0.5$中的模拟结果

		Bias			MSE			MRE		
估计量	n	$\hat{\lambda}$	$\hat{p}_1$	$\hat{p}_2$	$\hat{\lambda}$	$\hat{p}_1$	$\hat{p}_2$	$\hat{\lambda}$	$\hat{p}_1$	$\hat{p}_2$
MLE	50	0.0767	0.0598	-0.0517	0.0519	0.0459	0.0778	0.3493	0.4384	0.4778
	100	0.0456	0.0371	-0.0505	0.0307	0.0413	0.0733	0.2731	0.4272	0.4621
	200	0.0235	0.0317	-0.0340	0.0205	0.0389	0.0672	0.2241	0.3982	0.4372
	500	0.0149	0.0205	-0.0332	0.0139	0.0355	0.0545	0.1908	0.3942	0.3887
	1000	0.0024	0.0061	-0.0282	0.0081	0.0245	0.0354	0.1426	0.3155	0.3072
LSE	50	0.0218	0.0605	-0.3040	0.0731	0.1186	0.4328	0.4138	0.6430	1.0035
	100	0.0213	0.0410	-0.1742	0.0522	0.0848	0.2185	0.3389	0.5571	0.7228
	200	0.0177	0.0383	-0.1158	0.0316	0.0702	0.1491	0.2742	0.5394	0.6079
	500	0.0136	0.0322	-0.0845	0.0202	0.0484	0.0871	0.2200	0.4608	0.4771
	1000	0.0030	0.0257	-0.0601	0.0109	0.0314	0.0518	0.1738	0.3801	0.3739
WLSE	50	-0.0593	-0.0619	-0.2289	0.0554	0.0910	0.4196	0.3751	0.5881	0.9259
	100	-0.0438	-0.0357	-0.0368	0.0319	0.0621	0.1445	0.2847	0.5139	0.6127
	200	-0.0231	-0.0228	-0.0131	0.0230	0.0589	0.1014	0.2438	0.5134	0.5244
	500	-0.0126	-0.0221	-0.0220	0.0155	0.0436	0.0662	0.2017	0.4424	0.4313
	1000	0.0034	0.0093	-0.0352	0.0082	0.0250	0.0398	0.1501	0.3350	0.3312
ADE	50	-0.0144	-0.0108	-0.1276	0.0460	0.0837	0.2516	0.3388	0.5766	0.7054
	100	0.0086	0.0103	-0.0510	0.0332	0.0539	0.1112	0.2831	0.4779	0.5378
	200	0.0017	-0.0068	-0.0451	0.0222	0.0526	0.0904	0.2362	0.4909	0.4975
	500	0.0004	0.0057	-0.0465	0.0144	0.0382	0.0633	0.1936	0.4183	0.4200
	1000	0.0003	0.0017	-0.0306	0.0080	0.0252	0.0392	0.1491	0.3357	0.3292
CvME	50	0.0909	0.0939	-0.1706	0.0810	0.1318	0.3346	0.4138	0.6573	0.8770
	100	0.0609	0.0588	-0.1165	0.0538	0.0876	0.1916	0.3334	0.5486	0.6765
	200	0.0458	0.0600	-0.1042	0.0330	0.0703	0.1422	0.2730	0.5275	0.5949
	500	0.0340	0.0418	-0.0792	0.0203	0.0475	0.0853	0.2169	0.4512	0.4725
	1000	0.0191	0.0308	-0.0597	0.0108	0.0308	0.0509	0.1715	0.3742	0.3704
MPSE	50	-0.1279	-0.0713	-0.6228	0.0693	0.1855	1.9005	0.4440	0.6591	1.4353
	100	-0.0941	-0.0790	-0.1894	0.0451	0.0530	0.2454	0.3498	0.5196	0.6977
	200	-0.0752	-0.0608	-0.0619	0.0318	0.0546	0.0978	0.2935	0.4965	0.4990
	500	-0.0511	-0.0549	-0.0328	0.0207	0.0473	0.0638	0.2358	0.4727	0.4138
	1000	-0.0397	0.0448	0.0109	0.0123	0.0358	0.0386	0.1783	0.3896	0.3290
TADE	50	-0.0253	-0.0232	-0.2083	0.0572	0.0997	0.3458	0.3764	0.6191	0.8542
	100	-0.0257	-0.0142	-0.1014	0.0349	0.0674	0.1475	0.2963	0.5384	0.6186
	200	-0.0136	-0.0085	-0.0495	0.0232	0.0535	0.1045	0.2443	0.4992	0.5281
	500	-0.0083	-0.0028	-0.0473	0.0149	0.0418	0.0710	0.1998	0.4373	0.4344
	1000	-0.0053	0.0006	-0.0298	0.0085	0.0264	0.0423	0.1513	0.3414	0.3373
MSADE	50	-0.0638	-0.0235	-0.2072	0.0427	0.0427	0.1803	0.3405	0.3807	0.5908
	100	-0.0389	-0.0203	-0.1011	0.0281	0.0313	0.0959	0.2736	0.3782	0.4394
	200	-0.0288	-0.0110	-0.0814	0.0217	0.0392	0.0755	0.2367	0.3395	0.3937
	500	-0.0173	-0.0103	-0.0527	0.0146	0.0305	0.0508	0.1922	0.3375	0.3337
	1000	-0.0137	-0.0084	-0.0296	0.0087	0.0236	0.0354	0.1466	0.2974	0.2850
MSALDE	50	-0.0876	-0.0546	-0.3317	0.0638	0.0740	0.3293	0.4247	0.5390	0.8593
	100	-0.0740	-0.0535	-0.1621	0.0422	0.0596	0.1872	0.3373	0.5314	0.6540
	200	-0.0589	-0.0522	-0.0812	0.0318	0.0611	0.1131	0.2943	0.5086	0.5318
	500	-0.0458	-0.0375	-0.0408	0.0217	0.0524	0.0783	0.2427	0.4922	0.4525
	1000	-0.0306	-0.0144	-0.0108	0.0126	0.0368	0.0453	0.1796	0.3964	0.3506

表 4: $\lambda = 0.6$、 $p_1 = 0.3$ 和 $p_2 = 0.2$中的模拟结果

		Bias			MSE			MRE		
估计量	n	$\hat{\lambda}$	$\hat{p}_1$	$\hat{p}_2$	$\hat{\lambda}$	$\hat{p}_1$	$\hat{p}_2$	$\hat{\lambda}$	$\hat{p}_1$	$\hat{p}_2$
MLE	50	0.1098	0.0340	0.1071	0.0647	0.0243	0.0620	0.3208	0.4098	0.9359
	100	0.0404	0.0038	0.0484	0.0336	0.0189	0.0336	0.2377	0.3827	0.7089
	200	0.0110	-0.0011	0.0050	0.0230	0.0148	0.0196	0.1972	0.3287	0.5569
	500	-0.0041	-0.0047	-0.0141	0.0127	0.0105	0.0118	0.1456	0.2716	0.4443
	1000	-0.002	-0.003	-0.0031	0.0055	0.0048	0.0059	0.0969	0.1821	0.3132
LSE	50	0.0450	0.0323	-0.0771	0.1165	0.0581	0.2139	0.4481	0.5733	1.9004
	100	0.0176	0.0093	-0.0602	0.0754	0.0418	0.1257	0.3591	0.5382	1.4345
	200	0.0181	0.0217	-0.0820	0.0563	0.0329	0.0616	0.3121	0.4902	0.9838
	500	-0.0053	0.0045	-0.0669	0.0329	0.0202	0.0265	0.2477	0.4000	0.6508
	1000	-0.0056	-0.0002	-0.0317	0.0170	0.0115	0.0085	0.1782	0.2995	0.3765
WLSE	50	-0.0417	-0.0475	-0.0075	0.0778	0.0334	0.1620	0.3782	0.4911	1.6246
	100	-0.0368	-0.0364	-0.0245	0.0547	0.0315	0.0814	0.3099	0.4875	1.1433
	200	-0.0115	-0.0088	-0.0330	0.0368	0.0234	0.0350	0.2504	0.4218	0.7422
	500	-0.0108	-0.0066	-0.0264	0.0177	0.0138	0.0158	0.1789	0.3226	0.5017
	1000	-0.0055	-0.0037	-0.0111	0.0086	0.0072	0.0069	0.1247	0.2316	0.3354
ADE	50	0.0199	-0.0215	0.0617	0.0668	0.0336	0.1216	0.3382	0.5014	1.3324
	100	-0.0255	-0.0381	0.0105	0.0446	0.0277	0.0690	0.2805	0.4684	1.0297
	200	-0.0107	-0.0111	-0.0220	0.0315	0.0208	0.0322	0.2327	0.3994	0.7100
	500	-0.0127	-0.0097	-0.0219	0.0168	0.0133	0.0154	0.1743	0.3163	0.4963
	1000	-0.0073	-0.0058	-0.0092	0.0084	0.0071	0.0068	0.1232	0.2291	0.3322
CvME	50	0.1134	0.0235	0.0759	0.1145	0.0584	0.1729	0.4288	0.5783	1.6924
	100	0.0484	0.0056	0.0037	0.0752	0.0419	0.1150	0.3527	0.5370	1.3690
	200	0.0341	0.0196	-0.0457	0.0545	0.0327	0.0539	0.3031	0.4873	0.9240
	500	0.0001	0.0040	-0.0558	0.0324	0.0200	0.0255	0.2448	0.3977	0.6344
	1000	-0.0031	-0.0007	-0.0263	0.0167	0.0114	0.0083	0.1768	0.2984	0.3709
MPSE	50	-0.1164	-0.0455	-0.1610	0.0717	0.0262	0.1832	0.3758	0.4530	1.4599
	100	-0.1280	-0.0761	-0.1132	0.0568	0.0242	0.0721	0.3315	0.4483	1.0265
	200	-0.0950	-0.0621	-0.0648	0.0390	0.0210	0.0301	0.2645	0.3989	0.6808
	500	-0.0566	-0.0381	-0.0366	0.0204	0.0141	0.0130	0.1822	0.3125	0.4600
	1000	-0.0307	-0.0239	-0.0044	0.0080	0.0066	0.0058	0.1141	0.2072	0.3068
TADE	50	-0.0268	-0.0413	0.0233	0.0561	0.0322	0.1066	0.3207	0.5061	1.2465
	100	-0.0371	-0.0410	-0.0052	0.0437	0.0255	0.0580	0.2795	0.4538	0.9305
	200	-0.0365	-0.0288	-0.0277	0.0307	0.0208	0.0289	0.2327	0.3978	0.6663
	500	-0.0222	-0.0155	-0.0264	0.0168	0.0128	0.0138	0.1710	0.3060	0.4767
	1000	-0.0092	-0.0073	-0.0076	0.0071	0.0059	0.0060	0.1096	0.2016	0.3150
MSADE	50	-0.0404	-0.0025	-0.0760	0.0492	0.0323	0.1075	0.2982	0.4616	1.3072
	100	-0.0581	-0.0343	-0.0401	0.0363	0.0238	0.0646	0.2583	0.4217	1.0053
	200	-0.0472	-0.0317	-0.0329	0.0294	0.0209	0.0392	0.2309	0.3936	0.7724
	500	-0.0280	-0.0176	-0.0304	0.0178	0.0151	0.0210	0.1768	0.3252	0.5727
	1000	-0.0228	-0.0180	-0.0058	0.0092	0.0077	0.0085	0.1242	0.2281	0.3698
MSALDE	50	-0.0728	-0.0224	-0.1349	0.0697	0.0365	0.1467	0.3672	0.5174	1.5429
	100	-0.0970	-0.0635	-0.0812	0.0527	0.0297	0.0821	0.3152	0.4940	1.1565
	200	-0.0830	-0.0532	-0.0657	0.0405	0.0267	0.0460	0.2741	0.4610	0.8558
	500	-0.0452	-0.0293	-0.0405	0.0217	0.0164	0.0197	0.1897	0.3427	0.5615
	1000	-0.0351	-0.0273	-0.0059	0.0106	0.0086	0.0076	0.1310	0.2368	0.3474

表 5： $\lambda = 2$、 $p_1 = 0.2$ 和 $p_2 = 0.4$ 中的模拟结果

		Bias			MSE			MRE		
估计量	n	$\hat{\lambda}$	$\hat{p}_1$	$\hat{p}_2$	$\hat{\lambda}$	$\hat{p}_1$	$\hat{p}_2$	$\hat{\lambda}$	$\hat{p}_1$	$\hat{p}_2$
MLE	50	0.3739	0.0849	-0.0092	0.5916	0.0279	0.0682	0.3066	0.6328	0.5579
	100	0.2538	0.0714	-0.0598	0.4427	0.0252	0.0500	0.2684	0.6194	0.4746
	200	0.1603	0.0513	-0.0706	0.3391	0.0208	0.0411	0.2320	0.5703	0.4262
	500	0.0809	0.0334	-0.0654	0.2728	0.0161	0.0232	0.2089	0.5053	0.3044
	1000	0.0679	0.0252	-0.0429	0.1440	0.0087	0.0100	0.1505	0.3669	0.1982
LSE	50	0.2185	0.0803	-0.1574	1.2412	0.0623	0.2830	0.4263	0.8045	1.0584
	100	0.2043	0.0645	-0.1153	0.8197	0.0427	0.1469	0.3518	0.6961	0.7636
	200	0.1600	0.0601	-0.1365	0.6762	0.0374	0.1150	0.3227	0.6945	0.6657
	500	0.1341	0.0528	-0.1197	0.5249	0.0280	0.0757	0.2809	0.6138	0.5034
	1000	0.1445	0.0403	-0.0562	0.2723	0.0165	0.0196	0.2026	0.4824	0.2789
WLSE	50	-0.0138	0.0300	-0.1280	0.8810	0.0328	0.2221	0.3707	0.5816	0.9652
	100	0.0819	0.0433	-0.1097	0.6464	0.0287	0.1197	0.3169	0.5999	0.7078
	200	0.1006	0.0437	-0.1027	0.4807	0.0264	0.0748	0.2750	0.6152	0.5624
	500	0.0703	0.0317	-0.0769	0.3521	0.0208	0.0369	0.2307	0.5480	0.3764
	1000	0.0635	0.0237	-0.0463	0.1817	0.0113	0.0144	0.1679	0.4178	0.2374
ADE	50	0.1077	0.0339	-0.0496	0.6554	0.0285	0.1483	0.3175	0.5847	0.7773
	100	0.0713	0.0341	-0.0851	0.5225	0.0246	0.1048	0.2895	0.5810	0.6553
	200	0.0968	0.0399	-0.0906	0.4217	0.0239	0.0688	0.2586	0.5962	0.5375
	500	0.0513	0.0277	-0.0775	0.3405	0.0198	0.0379	0.2275	0.5422	0.3764
	1000	0.0609	0.0225	-0.0443	0.1739	0.0108	0.0139	0.1641	0.4090	0.2321
CvME	50	0.3957	0.0633	-0.0264	1.3051	0.0589	0.2246	0.4308	0.8068	0.9437
	100	0.3181	0.0632	-0.0553	0.8453	0.0419	0.1288	0.3550	0.7006	0.7086
	200	0.2017	0.0544	-0.0999	0.6622	0.0366	0.0971	0.3196	0.6887	0.6241
	500	0.1525	0.0526	-0.1113	0.5289	0.0276	0.0755	0.2821	0.6089	0.4974
	1000	0.1658	0.0424	-0.0500	0.2705	0.0164	0.0185	0.2018	0.4788	0.2714
MPSE	50	-0.5210	0.0142	-0.4051	0.8229	0.0165	0.4023	0.3785	0.4820	1.2314
	100	-0.3548	0.0002	-0.2645	0.6410	0.0176	0.1715	0.3365	0.5406	0.8481
	200	-0.2902	-0.0137	-0.1899	0.5168	0.0177	0.0965	0.2952	0.5660	0.6305
	500	-0.2358	-0.0209	-0.1266	0.4067	0.0165	0.0463	0.2605	0.5411	0.4237
	1000	-0.1580	-0.0177	-0.0719	0.2383	0.0108	0.0173	0.1945	0.4311	0.2520
TADE	50	-0.0654	0.0141	-0.0991	0.5646	0.0218	0.1713	0.3021	0.5547	0.8243
	100	-0.0328	0.0229	-0.1151	0.4629	0.0228	0.1014	0.2770	0.5810	0.6521
	200	-0.0241	0.0177	-0.1016	0.3794	0.0209	0.0673	0.2444	0.5799	0.5269
	500	-0.0286	0.0132	-0.0847	0.3148	0.0174	0.0365	0.2252	0.5375	0.3689
	1000	3×10^{-5}	0.0132	-0.0581	0.1892	0.0106	0.0144	0.1730	0.4183	0.2358
MSADE	50	-0.1474	0.0307	-0.1295	0.1748	0.0186	0.1480	0.1364	0.4697	0.7401
	100	-0.0891	0.0192	-0.0855	0.1405	0.0167	0.0938	0.1187	0.4569	0.6069
	200	-0.0839	0.0071	-0.0732	0.1464	0.0135	0.0583	0.1220	0.4203	0.4879
	500	-0.0588	0.0028	-0.0533	0.1317	0.0099	0.0287	0.1234	0.3744	0.3417
	1000	-0.0378	0.0025	-0.0368	0.0919	0.0067	0.0135	0.1036	0.3079	0.2315
MSALDE	50	-0.3717	0.0242	-0.3079	0.6407	0.0240	0.2884	0.3251	0.5221	1.0745
	100	-0.2395	0.0164	-0.2321	0.5815	0.0264	0.1710	0.3151	0.6082	0.8341
	200	-0.2253	-0.0055	-0.1653	0.4640	0.0202	0.0973	0.2749	0.5792	0.6325
	500	-0.1577	-0.0068	-0.1130	0.3512	0.0172	0.0455	0.2402	0.5417	0.4201
	1000	-0.1008	-0.0073	-0.0602	0.1893	0.0102	0.0163	0.1736	0.4106	0.2515

- 表 2 （$\lambda = 1.5$、 $p_1 = 0.5$、 $p_2 = 0.3$）的结果表明，随着样本量增加，所有估计量的表现均得到系统性改善，偏差、均方误差和平均相对误差均有所下降。总体而言，最大似然估计表现令人满意，并且在大样本下变得非常高效；然而，若干稳健估计量也展现出具有竞争力甚至更高的准确性，尤其是在较小样本量下。其中，MSADE 估计量表现突出，在所有参数下始终保持较低偏差和稳定的均方误差值。该

绝对偏差估计、加权最小二乘估计和 TADE 估计量同样表现均衡且可靠，在小样本情形下优于最小二乘估计。另一方面，最小二乘估计和 MSALDE 产生了更高的偏差和更大的平均相对误差，反映出较弱的有限样本表现，而最大乘积间距估计的表现中等，但仍逊于 MSADE 和绝对偏差估计。总体而言，尽管最大似然估计会随着 n 增加而变得非常高效，但稳健MSADE估计量在小样本量和中等样本量下能够提供更加稳定且准确的估计。

- 表3 给出了设定 $\lambda = 0.5$、 $p_1 = 0.4$和 $p_2 = 0.5$下的模拟结果，表明随着样本量增加，所有估计量的表现均稳步提升，具体体现为偏差、均方误差（MSE）和平均相对误差（MRE）持续下降。在各种竞争方法中，MSADE表现最为出色，在所有参数下均实现了相对较小的偏差以及最低的MSE和MRE，尤其是在中等和大样本量时。ADE、WLSE和TADE的估计结果也稳定可靠，在小样本量时往往优于MLE。尽管样本量增加后MLE的竞争力逐渐增强，但在小样本量时其偏差和MSE较高。相比之下，LSE、MPSE和MSALDE的有限样本表现较弱，偏差较大，且MSE和MRE显著偏高，尤其是在估计 p_2时。

- 表4给出了基于 $\lambda = 0.6$、 $p_1 = 0.3$和 $p_2 = 0.2$ 的模拟结果。结果表明，随着样本量增加，所有估计量的表现均有所改善，偏差、MSE和MRE均显著下降。在各种竞争方法中，MSADE的结果始终较为出色，在所有参数下均表现出相对较小的偏差和稳定的MSE，尤其是在中等和大样本量时。ADE、WLSE和TADE的表现也较为可靠，在小样本量时往往优于MLE。尽管随着 n 增加，MLE的准确性逐渐提高，但在小样本量时其偏差和MSE仍相对较高，尤其是在估计 p_2时。另一方面，LSE、MPSE和MSALDE的偏差往往较大，MSE和MRE也较高，表明其有限样本表现较弱。总体而言，研究结果凸显了MSADE估计量在该参数设定下的稳健性和效率。

- 表5 展示了设置 $\lambda = 2$、$p_1 = 0.2$、$p_2 = 0.4$，结果表明，随着样本量增加，所有估计量的表现均有所改善，偏差、均方误差（MSE）和平均相对误差（MRE）值均随之降低。在所考察的方法中，MSADE 的总体表现最佳，在所有参数和样本量下都能稳定地取得较低的偏差和均方误差，体现出较强的稳健性和效率。ADE 和 WLSE 的表现也较为可靠，通常优于经典的最大似然估计（MLE），尤其是在样本量较小时。虽然随着样本量增加，MLE 的表现逐渐具有竞争力，但在小样本量下，其偏差和均方误差相对较高。另一方面，MPSE 和 MSALDE 的有限样本表现较差，表现为偏差较大，且均方误差和平均相对误差值相对较高。总体而言，研究结果表明，在该模拟场景下，MSADE 是最有效的估计量。

- 所有考虑情形下的模拟结果一致表明，随着样本量增加，所有估计量的表现均有所改善，偏差、均方误差（MSE）和平均相对误差（MRE）均有所降低。在这些估计量中，MSADE方法表现出最强的稳健性和效率，在所有参数上始终保持较低偏差和稳定的均方误差值，尤其是在中等和大样本量下。绝对偏差估计（ADE）、加权最小二乘估计（WLSE）和TADE也表现可靠且均衡，在小样本量下往往优于最大似然估计（MLE）。MLE本身在大样本下效率很高，但在小样本下往往表现出较大的偏差和平均相对误差，尤其对于 p_2这类参数。相比之下，最小二乘估计（LSE）、最大乘积间距估计（MPSE）和MSALDE的有限样本表现通常较弱，偏差更大，均方误差和平均相对误差也更高。总体而言，对于寻求在小至中等样本量下进行稳健估计的实践者，我们建议所有参数均采用MSADE，而ADE、WLSE和TADE则是可行的替代方案。对于非常大的样本，MLE具有竞争力的效率，可放心使用。

6 真实数据分析

为展示CLRBTE分布的实用性，本节给出三个真实世界数据示例。我们还将其拟合结果与若干竞争分布进行比较，包括指数分布、变换指数分布（TE） [5], 以及变换广义瑞利分布（TGR） [12] 。因此，我们采用以下七种不同的选择标准：Cramér–von Mises统计量（CvM）、Anderson–Darling统计量（AD）、Kolmogorov–Smirnov统计量（KS）、赤池信息准则（AIC）以及相应的p值。数据集拟合模型的概率密度函数（PDF）见表6。

表6：拟合到真实世界数据集的概率密度函数列表

分布	PDF	参数范围
E	$f_E(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$	$\lambda > 0$
TE	$f_{TE}(x;\ \lambda,\theta) = (1+\theta)\lambda e^{-\lambda x} - 2\theta(1-e^{-\lambda x})\lambda e^{-\lambda x}$	$\lambda > 0,\ -1 < \theta < 1$
TGR	$f_{TGR}\ (x;\ \lambda,\beta,\theta) = 2\lambda\beta^2 x e^{-(\beta x)^2}\left(1-e^{-(\beta x)^2}\right)^{\lambda-1}\left[1+\theta-2\theta\left(1-e^{-(\beta x)^2}\right)^{\lambda}\right]$	$\lambda,\beta > 0,\ -1 < \theta < 1$

6.1 生存时间数据

在本小节中，我们分析一组广为人知的右偏生存时间样本（单位：天），数据来自确诊为急性髓性白血病的患者，最初发表于 [9]。生存时间数据集如下：65, 156, 100, 134, 16, 108, 121, 4, 39, 143, 56, 26, 22, 1, 1, 5, 65, 56, 65, 17, 7, 16, 22, 3, 4, 2, 3, 8, 4, 3, 30, 4, 43。

表8 展示了拟合模型中各参数的最大似然估计值及其对应的标准误，而表7 给出了生存时间数据的选择标准。拟合的累积分布函数图和概率密度函数图分别见图4 和5 。

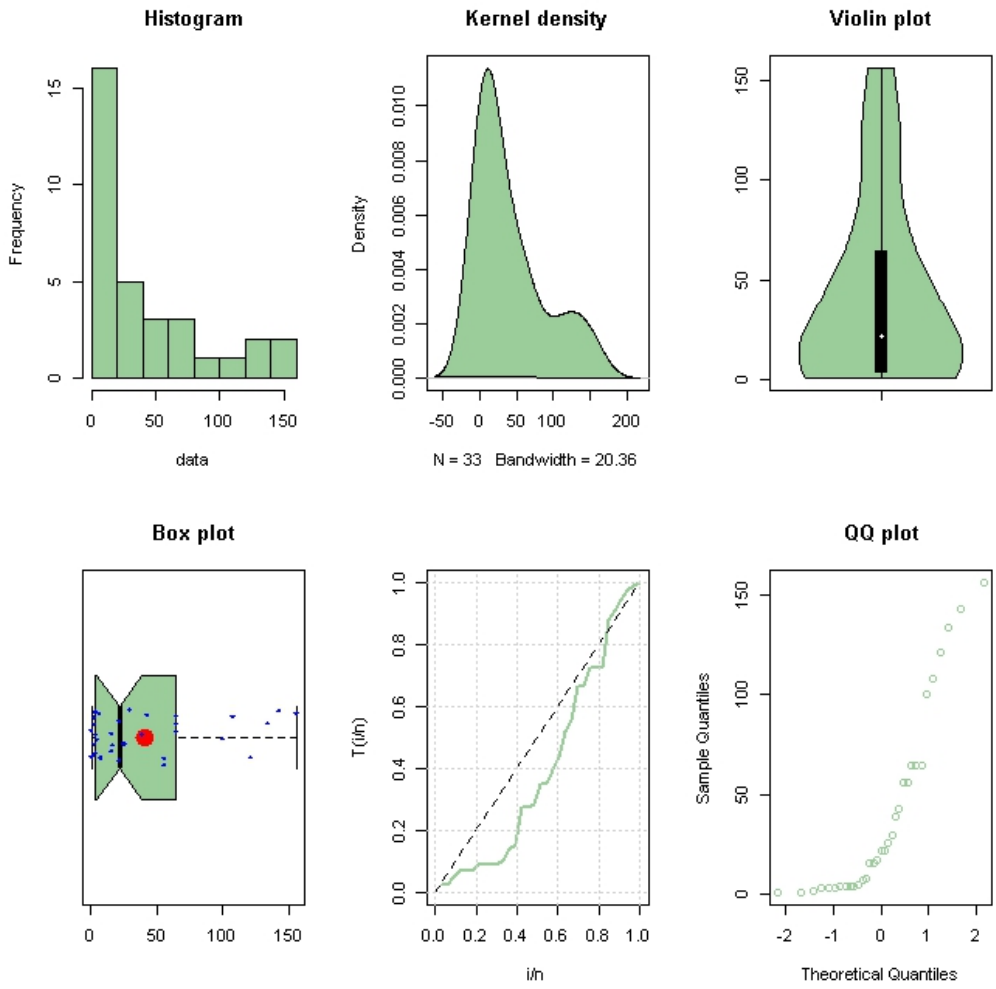

图3：生存时间数据的非参数图

图3 展示了用于生存时间数据的多种非参数图形方法。数据分布呈现出明显的偏度，大多数观测值集中在较低水平。核密度图和小提琴图显示出多峰特征，表明数据中存在各种子结构。Q-Q图明显偏离参考线，表明数据不满足正态性；然而，箱线图也证实了离群值的存在。

表7：生存时间数据的比较统计量

分布	AIC	KS	AD	CvM	p值(柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫检验)	p值（安德森-达林检验）	p值（CvM）
CLRBTE	312.4142	0.1044	0.4992	0.0643	0.8646	0.7464	0.7901
TE	313.7042	0.2028	1.7879	0.2542	0.1325	0.1208	0.1832
E	312.9003	0.2182	2.3066	0.3250	0.0863	0.0631	0.1148
TGR	312.8599	0.1318	0.6735	0.1003	0.6156	0.5801	0.5862

表 8：生存时间数据参数的最大似然估计值及标准误

分布	$\hat{\lambda}$	$\hat{p_1}$	$\hat{p_2}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\beta}$	SE($\hat{\lambda}$)	SE($\hat{p_1}$)	SE($\hat{p_2}$)	SE($\hat{\theta}$)	SE($\hat{\beta}$)
CLRBTE	0.0174	0.6369	0.0878	-	-	0.0055	0.3458	0.6688	-	-
TE	0.0206	-	-	0.3704	-	0.0057	-	-	0.3617	-
E	0.0245	-	-	-	-	0.0043	-	-	-	-
TGR	0.3066	-	-	0.4216	0.0089	0.0608	-	-	0.4719	0.0025

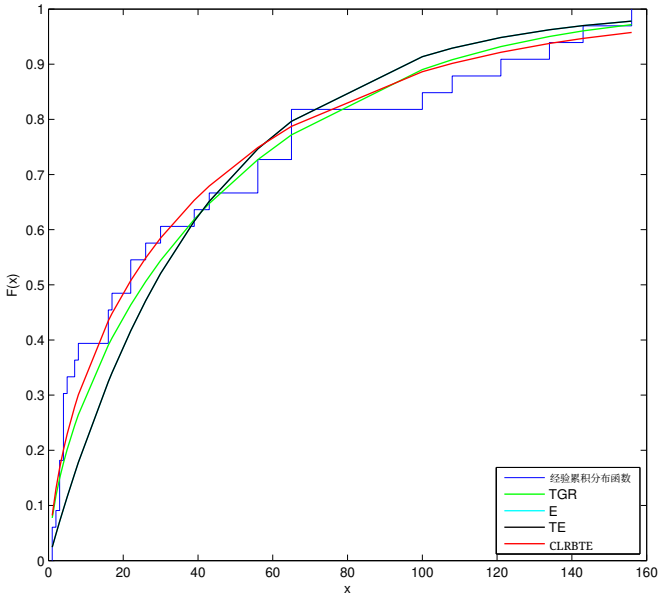

图4：生存时间数据的拟合累积分布函数

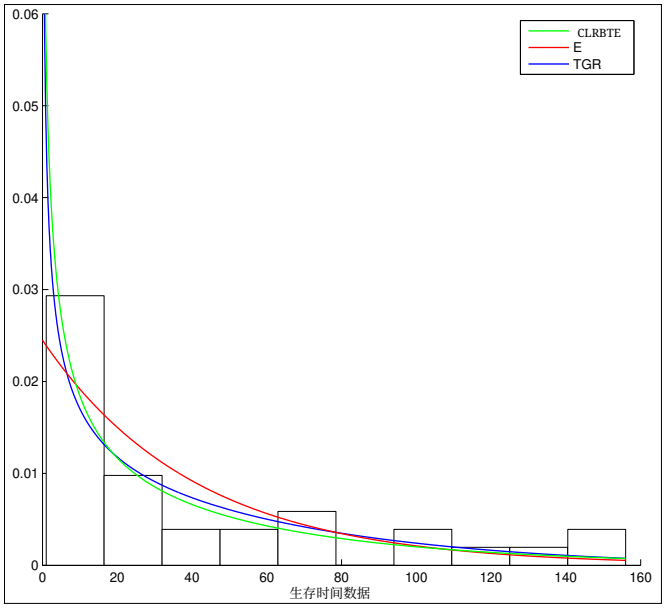

图5：生存时间数据的拟合概率密度函数

根据表中列出的所有选择标准7，我们确定 CLRBTE 分布是所有模型中对生存时间数据集拟合效果最佳的模型。从图4 和5 可以明显看出，与生存时间数据集最接近的模型是 CLRBTE 分布。

6.2 失效时间数据

在本小节中，我们分析 [13], 提供的数据集，该数据集表示 20 个组件的失效时间。失效时间数据如下：0.0003, 0.0298, 0.1648, 0.3529, 0.4044, 0.5712, 0.5808, 0.7607, 0.8188, 1.1296, 1.2228, 1.2773, 1.9115, 2.2333, 2.3791, 3.0916, 3.4999, 3.7744, 7.4339, 13.6866。

表 9 给出了选择标准，而表 10 给出了失效时间数据的最大似然估计值及其标准误。此外，图 7 和 8 分别展示了拟合的累积分布函数图和概率密度函数图。

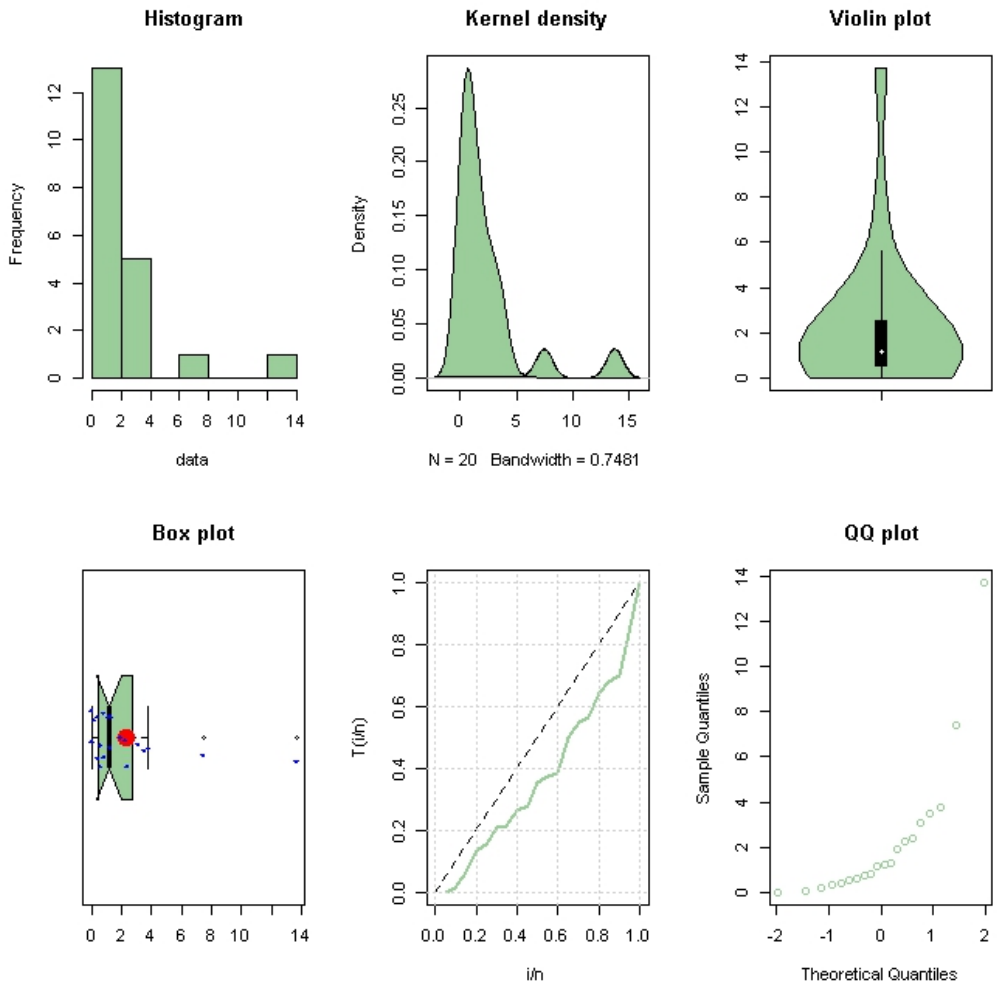

图6：失效时间数据的非参数图

失效时间数据的非参数汇总结果如图 6所示。从图 6可以看出，失效数据集呈现明显的右偏分布。密度估计显示一个主峰以及若干次级波动，这与潜在混合分布的特征一致。

表9：失效时间数据的比较统计量

分布	AIC	KS	AD	CvM	p值(柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫检验)	p值（安德森-达林检验）	p值（CvM）
CLRBTE	74.2783	0.1126	0.3306	0.0345	0.9371	0.9126	0.9627
TE	75.1337	0.1241	0.6187	0.0463	0.8810	0.6283	0.9032
E	74.7239	0.1691	0.9941	0.1104	0.5597	0.3593	0.5401
TGR	73.6468	0.1274	0.3710	0.0545	0.8619	0.8756	0.8540

表10：失效时间数据的参数最大似然估计值和标准误

分布	$\hat{\lambda}$	$\hat{p_1}$	$\hat{p_2}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\beta}$	SE($\hat{\lambda}$)	SE($\hat{p_1}$)	SE($\hat{p_2}$)	SE($\hat{\theta}$)	SE($\hat{\beta}$)
CLRBTE	0.2098	0.2510	0.5475	-	-	0.2231	0.6935	0.6300	-	-
TE	0.3213	-	-	0.6236	-	0.1115	-	-	0.4071	-
E	0.4413	-	-	-	-	0.0987	-	-	-	-
TGR	0.2717	-	-	0.7501	0.1099	0.0578	-	-	0.4221	0.0483

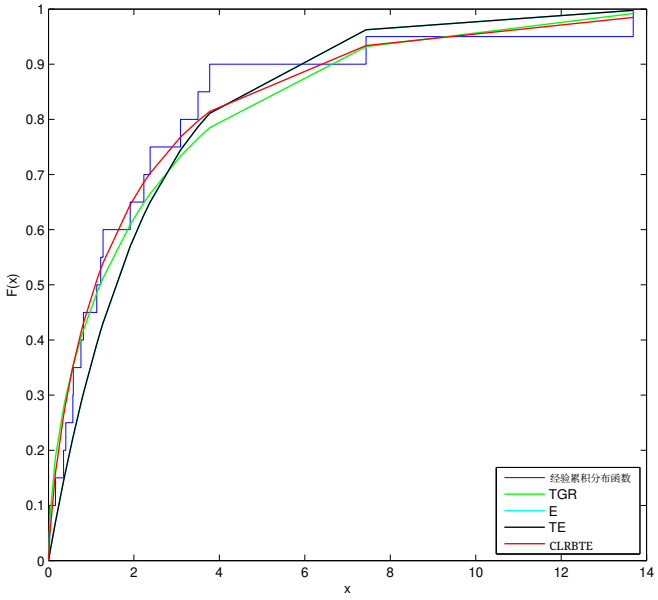

图7：失效时间数据的拟合累积分布函数

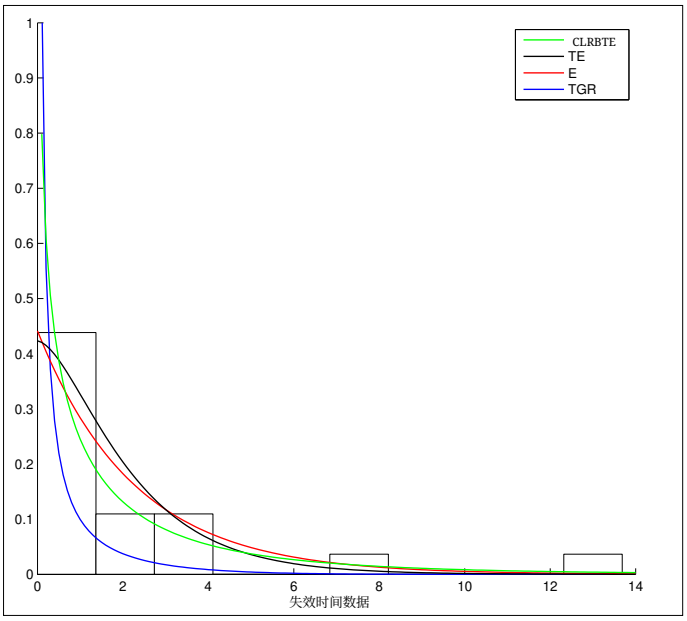

图8：失效时间数据的拟合的概率密度函数

从图 7 和 8中，我们观察到，拟合效果最佳的模型是用于失效时间数据的CLRBTE分布 et.

7 结论

通过本研究，我们将一种基于前三个下记录值分布的新分布族引入现有文献。我们还详细考察了所提出分布族中基于指数分布的一个特例。我们介绍了 CLRBTE 分布的一些统计性质，包括点估计、模拟研究及其在实际数据中的应用。我们提出了九种不同的点估计量。我们设计了一项蒙特卡罗模拟研究，在四种不同的参数设定下，针对不同样本量并进行 5000 次迭代，根据偏差、均方误差和平均相对误差比较这些估计量的表现。模拟研究结果表明，在估计 CLRBTE 分布的参数时，MSADE 是最大似然估计的一个良好替代方法。随后，在两项实际数据分析中，根据七种不同的比较准则，CLRBTE 分布对两个数据集的拟合均优于潜在竞争分布 E、TE 和 TGR。未来研究可为所提出的分布族提出新的成员。

经费支持本文未获得经费支持。**数据可用性**参考文献列表中包含公开可用的数据集。

利益冲突不适用。

参考文献

[1] Ahmad, A., Ahmad, S., 和 Ahmed, A. (2014). 变换逆瑞利分布：逆瑞利分布的一种推广。数学理论与建模, 4(7):90–98.

[2] Alrweili, H. (2025). 基于记录值的变换 Burr X 模型的统计推断与数据分析。《开放数学》, 23(1):20240121.[3] Arnold, B. C., Balakrishnan, N., 和 Nagaraja, H. N. (2008). 《次序统计量入门》。SIAM.[4] Arshad, M., Khetan, M., Kumar, V., 和 Pathak, A. K. (2024). 具有递增、递减和浴盆形失效率的基于记录值的变换广义线性指数分布。《统计学通信——模拟与计算》, 53(7):3489–3513.[5] Aryal, G. R. 和 Tsokos, C. P. (2011). 变换 Weibull 分布：Weibull 概率分布的一种推广。《欧洲纯粹与应用数学杂志》, 4(2):89–102.[6] Balakrishnan, N. 和 He, M. (2021). 基于记录值的变换分布族。《统计科学：理论与应用进展——向 *Barry C. Arnold* 致敬》, pages 3–24.[7] Cheng, R. 和 Amin, N. (1983). 具有平移原点的连续单变量分布参数估计。《皇家统计学会杂志：*B*辑（方法论）》, 45(3):394–403.[8] Choi, K. 和 Bulgren, W. G. (1968). 分布混合的估计程序。《皇家统计学会杂志：*B*辑（方法论）》, 30(3):444–460.[9] Feigl, P. 和 Zelen, M. (1965). 利用伴随信息估计指数生存概率。《生物统计学》, pages 826–838.[10] Granzotto, D., Louzada, F., 和 Balakrishnan, N. (2017). 三次秩变换分布：推断问题与应用。《统计计算与模拟杂志》, 87(14):2760–2778.[11] Mahmoud, M. 和 Mandouh, R. (2013). 关于变换 Fréchet 分布。《应用科学研究杂志》, 9(10):5553–5561.[12] Merovci, F. (2014). 变换广义 Rayleigh 分布。《统计应用与概率杂志》, 3(1):9.[13] Murthy, D. P., Xie, M., 和 Jiang, R. (2004). *Weibull* 模型。John Wiley & Sons.[14] Nocedal, J. 和 Wright, S. (2006). 数值优化。Springer Science & Business Media, 纽约，第2版.[15] R 核心团队 (2024). *R*：统计计算语言与环境。R 统计计算基金会，维也纳，奥地利.[16] Ranneby, B. (1984). 最大间距法：一种与最大似然法相关的估计方法。《斯堪的纳维亚统计学杂志》, pages 93–112.[17] Sakthivel, K. 和 Nandhini, V. (2022). 基于记录值的变换幂 Lomax 分布：性质及其在可靠性中的应用。《可靠性：理论与应用》, 17(4 (71)):574–592.[18] Saraçoğlu, B. 和 Tanış, C. (2018). 一种新的统计分布：三次秩变换 Kumaraswamy 分布及其性质。《斯里兰卡国家科学基金会杂志》, 46(4).[19]Shaw, W. 和 Buckley, I. (2009). 概率分布的炼金术：超越 Gram–Charlier 展开，以及由秩变换映射导出的偏斜峰态正态分布。*arXiv* 预印本 *arXiv:0901.0434*.[20] Swain, J. J., Venkatraman, S., 和 Wilson, J. R. (1988). Johnson 变换系统中分布函数的最小二乘估计。《统计计算与模拟杂志》, 29(4):271–297.

[21] Tanış, C. (2021年). 变换下记录型幂函数分布。《科学与艺术杂志》, 21(4):951–960.[22] Tanış, C. (2022年). 变换下记录型逆瑞利分布：估计、特征与应用。《数学研究》, 71(2):777–802.[23] Tanış, C. (2024 年). 一种新的林德利分布：在新冠肺炎患者数据中的应用。《软计算》, 28(4):2863–2874.[24] Tanış, C. (2025年). 基于三次秩记录的变换分布族：应用与性质。《统计学通讯：理论与方法》, pages 1–21.[25] Tanış, C. and Saraçoğlu, B. (2022a). 三次秩变换逆瑞利分布：性质与应用。《*Sigma*工程与自然科学杂志》, 40(2):421–432.[26] Tanış, C. and Saraçoğlu, B. (2022b). 基于威布尔分布的 Balakrishnan 和 He 记录变换模型。《统计学通信——模拟与计算》, 51(8):4204–4224.[27] Tanış, C. and Saraçoğlu, B. (2023). 三次秩变换广义龚珀茨分布：性质与应用。《应用统计学杂志》, 50(1):195–213.[28] Tanış, C., Saraçoğlu, B., Kuş, C., and Pekgör, A. (2020). 变换互补指数幂分布：性质与应用。《共和国科学杂志》, 41(2):419–432.[29] Tanış, C., Saraçoğlu, B., Kuş, C., Pekgör, A., and Karakaya, K. (2021). 基于 I 型删失数据的变换下记录型弗雷歇分布寿命回归分析。《统计理论与应用杂志》, 20(1):86–96.[30] Torabi, H. (2008年). 一种使用间距进行估计和假设检验的通用方法。《统计理论与应用杂志》, 8(2):163–168.