arXiv:2601.01585v1 [math.NA] 4 Jan 2026

具有稳健后验误差估计的统一平衡通量恢复框架

CUIYU HE*

摘要。我们提出平衡平均残差法（EARM），这是一种适用于广泛有限元离散的统一平衡通量恢复框架，用于椭圆界面问题。该方法适用于二维和三维情形以及任意多项式阶数，并可构造计算高效的恢复通量。我们针对不连续伽辽金（DG）和协调有限元离散分别发展了 EARM。对于 DG 方法，EARM 可直接应用，并能得到显式恢复通量，该通量与当前先进的守恒通量重构一致。

对于协调离散，我们进一步提出正交零空间消除 EARM（ON-EARM），通过将修正通量限制在无散零空间的正交补中来确保唯一性。我们证明了局部守恒性，并针对二维情形下的恢复通量建立了稳健的后验误差估计子，其稳健性是相对于扩散系数的跳跃而言的。二维和三维数值结果验证了理论结论。

关键词。EARM、ON-EARM、自适应网格细化；平衡通量恢复；后验误差估计。

AMS 学科分类。65N3065N50

1. 引言。对于有限元（FE）解而言，准确且局部守恒的恢复通量（也称为平衡通量）在许多应用中发挥着核心作用，包括后验误差估计 [1, 11, 33, 9, 24, 13, 16]、自适应网格细化的关键组成部分，以及非均质介质中的相容输运 [29], 和多孔介质中的速度重构 [22, 34, 5, 19], 等。

本文聚焦于椭圆界面问题的平衡通量恢复及其相关的后验误差估计，并允许扩散系数存在较大的跳跃。平衡估计子因能够保证有限元解的协调误差具有可靠性而备受关注：具体而言，对于协调误差，平衡后验误差估计子的可靠性常数等于 1。这一性质使此类估计子尤其适用于粗网格和细网格上的离散化误差控制。

对于协调有限元近似，平衡后验误差估计的数学基础是 Prager–Synge恒等式 [31], ，该恒等式适用于 $H^1(\Omega)$-协调近似。文献 [16] 建立了适用于二维和三维分片 $H^1(\Omega)$（可能不连续）有限元近似的广义 Prager–Synge 恒等式。在该文中，误差被分解为协调分量和非协调分量，而协调部分保证可由一个平衡误差估计量界定，该估计量由数值通量与恢复得到的平衡通量之差的能量范数给出。

本文提出了一种统一的平衡通量恢复框架，适用于广泛的有限元方法。该方法适用于二维和三维情形，且适用于任意多项式阶数。受篇幅限制，我们仅讨论二维和

*佐治亚大学数学系，佐治亚州雅典（cuiyu.he@uga.edu）。

三维中的协调方法和间断伽辽金（DG）方法。在 DG 情形下，恢复通量与当前最先进的局部守恒通量重构一致。

在 EARM 中，恢复通量由两个部分构成：一个是根据离散有限元解显式得到的平均数值通量，另一个是修正通量。修正通量通过求解一个变分问题计算得到，其右端项由与平均数值通量相关的残差算子给出。因此，我们将此方法称为平衡平均残差法（EARM），以区别于 [3]提出的经典平衡残差法。

需要注意的是，用于求解修正通量的 EARM 背后的变分问题存在无穷多个解，因为其零空间恰好是无散通量空间。我们的目标是找出并求解一个既满足平衡条件、精度又足够高的通量解，以保证后验误差分析具有稳健的局部效率，同时计算成本也较低。

众所周知，间断伽辽金（DG）方法能够自然地保证局部平衡。关于椭圆问题中线性和高阶 DG 单元显式守恒通量重构的早期研究，参见 [1, 23] 及其中的参考文献。值得注意的是，针对 DG 解的一种显而易见的 EARM 解，自然与 [1] 和 [23] 中针对线性及任意阶 DG 有限元解的结果一致。

许多研究者研究了协调有限元方法（FEM）的守恒通量恢复方法；例如，参见 [25, 20, 28, 21, 3, 2, 26, 32, 8, 11, 10,33, 17, 6, 29, 13, 24]。单位分解（POU）技术常用于实现局部化，尤其是在缺乏显式构造技术的情况下。

利用单位分解论证，Ladev`eze 和 Leguillon [25] 开创了一种局部过程，将平衡通量的构造转化为基于顶点补丁的局部问题。对于二维泊松方程的连续线性有限元近似，文献 [8, 11]显式构造了最低阶 Raviart–Thomas 空间中的平衡通量。然而，若不引入约束最小化步骤（参见 [17]），这种显式构造无法得到针对扩散系数跳跃具有鲁棒性的后验误差估计子。每个顶点补丁上的约束最小化问题，可以先计算平衡通量，再施加无散度修正来解决。关于这一方向的近期进展，请参见 [13]及其中的参考文献。

在 [24], 中，提出了一种统一方法，同样基于POU技术。该方法需要在与每个网格顶点相关联的顶点补丁上求解局部混合问题。相比之下， [26, 29] 中的方法通过求解定义在富集分片常数DG空间上的全局问题来计算守恒通量。

[3] （第6.4章）的平衡残差法也通过单位分解（POU）局部化，为协调有限元法构造守恒通量。该方法并非直接求解通量，而是先计算其矩，从而自然地将构造局部化到星形补丁区域。然而，与每个内部顶点（以及某些边界顶点）相关联的局部星形补丁问题具有一维核空间。为消除这种不确定性，需要施加额外的约束条件，而所得的受约束局部问题通常通过拉格朗日乘子形式求解。最后，根据计算得到的矩组装全局通量。

原则上，基于单位分解的局部化可统一应用于广泛的有限元方法，因为它不依赖于底层基函数的任何特殊结构。然而在实践中，这种方法主要用于连续伽辽金（CG）

离散化，因为间断伽辽金（DG）方法有更简单的恢复过程可用。因此，基于单位分解的构造通常相对复杂，因为它们需要求解星形补丁局部问题，而这些问题要么带有约束 [17] ， [24]要么采用混合公式。

关于超越基于单位分解（POU）方法的局部化方法，请参阅 [6], ，该文研究了二维泊松问题。文中针对二维中的连续、非协调和间断伽辽金方法提出了一种统一的混合公式。通过以不精确的高斯–洛巴托求积替代精确的面积分，该构造可以实现局部化，从而为一系列有限元离散提供守恒通量。然而，将这一方法扩展到三维协调情形并非易事：二维中施加于骨架空间的约束条件在三维中没有明显的对应形式，而且四面体网格上也没有合适的高斯–洛巴托型求积规则。

本文提出正交零空间消除平衡平均残差法（ON-EARM），该方法无需基于单位分解（POU）的局部化。为确保唯一性，我们将修正通量限制在无散零空间的正交补中，从而消除零空间。我们证明，由DG函数的面跳跃生成的空间包含于该正交补中，由此得到适定且解唯一的变分公式。

由此得到的空间约束变分问题形成一个全局线性系统，其未知量仅限于面自由度；因此，该系统的维数远小于原始偏微分方程离散所产生的线性系统。在最低阶（零阶）DG情形下，所得通量与 [26, 29] 中的构造一致。

值得注意的是，对于二维中的线性元和高阶元，可按照 [6] ，用非精确的高斯–洛巴托求积替代精确的面积分，从而将全局变分公式局部化。在这种情况下，所得恢复通量与 [6] 中的通量一致，并且可以完全显式地计算，如 [18] 所示。

与二维情形不同，二维中高斯–洛巴托求积可实现完全局部化的构造，而在三维四面体网格上并不存在类似的高斯–洛巴托型求积公式。虽然存在采用顶点求值的四面体求积公式，但其多项式精确度较低，不适用于实现类似的局部化和精度。这一限制仅适用于四面体：在六面体网格上，张量积高斯–洛巴托公式仍具有顶点求值和高精确度，因而能够实现完全局部化。本文不分析这些局部化的三维变体；二维情形见 [6], ，而相应的六面体分析很可能也可沿类似思路开展。

平衡型后验误差估计子的特点是，对于协调误差，其可靠性常数恰好等于 1。在本文中，我们在所提出的 EARM/ON-EARM 框架内保留了这一性质。此外，在二维情形下，我们为与 ON-EARM 相关的误差指示子建立了稳健效率界；这里的稳健性是指该界不依赖于扩散系数的跳跃。综合这些结果，我们提出了一个完全可靠且稳健的后验误差估计框架，适用于椭圆界面问题的自适应有限元方法。

在数值方面，我们在一组具有代表性的奇异基准问题上测试该方法，这些问题体现了

自适应网格加密过程。

在二维中，我们考虑 Kellogg 界面问题和 L 形区域问题，并报告多项式次数为 $k = 1$、2、3 时的结果。在三维中，我们研究具有顶点奇异性的 L 形区域，同样考察 k =1、2、3。所有这些例子都涉及强解奇异性，旨在评估该方法在具有挑战性的条件下的稳健性。我们观察到，在所有测试案例中，该方法均达到最优表现，部分情况下甚至呈现超收敛行为。

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们介绍模型问题和相关符号。在第 3 节和第 4 节中，我们分别将 EARM 应用于间断 Galerkin 和协调离散，并表明所得重构能够恢复若干现有的先进局部守恒通量。在第 5 节中，我们证明相关后验误差估计子的可靠性；而第 6 节则用于效率分析，包括对系数跳跃的稳健性。最后，数值结果见第 7 节。

2. 模型问题。设 Ω 是 $\mathbb{R}^d, d = 2,3$ 中具有 Lipschitz 边界 $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ 的有界多边形区域，其中 $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$。为简单起见，假设 $\text{meas}_{d-1}(\Gamma_D) \neq 0$。考虑扩散问题：

$$-\nabla \cdot (A\nabla u) = f \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{2.1}$$

满足边界条件

$$u = 0 \ \text{ on } \Gamma_D \quad \text{and} \quad -A\nabla u \cdot \mathbf{n} = g \ \text{ on } \Gamma_N,$$

其中，$\nabla\cdot$ 和 ∇ 分别是散度算子和梯度算子；$\mathbf{n}$ 是边界的外向单位法向量；$f \in H^{-1}(\Omega)$ 和 $g \in H^{-1/2}(\Gamma_N)$ 是给定的标量值函数；扩散系数 $A(x)$ 是对称、正定的分片常数满张量。

本文采用 Sobolev 空间的标准记号和定义。令

$$H^1_D(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \,:\, v = 0 \text{ on } \Gamma_D \right\}.$$

于是，(2.1) 的相应变分问题是求 $u \in H^1_D(\Omega)$，使得

$$a(u, v) := (A\nabla u, \nabla v) = (f, v)_\Omega - \langle g, v\rangle_{\Gamma_N}, \quad \forall\, v \in H^1_D(\Omega), \tag{2.2}$$

其中，$(\cdot,\cdot)_\omega$ 是区域 ω 上的 L^2 内积。从此以后，当 ω =Ω 时，省略下标 ω 。

2.1. 符号。设 $\mathcal{T}_h = \{K\}$ 是 Ω 的一个正则有限元剖分，并用 h_K 表示单元 K 的直径。用 $\mathcal{T}_h$ 表示三角剖分中所有面的集合

$$\mathcal{E} := \mathcal{E}_I \cup \mathcal{E}_D \cup \mathcal{E}_N,$$

其中，$\mathcal{E}_I$ 是内部单元面的集合，$\mathcal{E}_D$ 和 $\mathcal{E}_N$ 分别是属于相应 Γ_D 和 Γ_N的边界面集合。对于每个 $F \in \mathcal{E}$，记 h_F 为 F 的长度，并记$\mathbf{n}_F$ 为垂直于 F的单位法向量。设 K_F^+ 和 K_F^- 是共享公共面 $F \in \mathcal{E}_I$ 的两个单元，且 K_F^- 的单位外法向量与$\mathbf{n}_F$重合。当 $F \in \mathcal{E}_D \cup \mathcal{E}_N$时，$\mathbf{n}_F$是$\Omega$的单位外法向量，并记 K_F^- 为具有面 F的单元。这里需要注意，面这一术语指的是网格的 $d-1$ 维实体。在二维中，面等价于边；在三维中，它等价于面。我们还记 $\mathcal{N}$ 为所有顶点的集合，记 $\mathcal{N}_I \subset \mathcal{N}$ 为内部顶点的集合。

对于每个 $K \in \mathcal{T}_h(F \in \mathcal{E})$，令 $\mathbb{P}_k(K)(\mathbb{P}_k(F))$表示 $K(F)$上次数不超过 k的多项式空间。对于每个 $K \in \mathcal{T}_h$，我们在$\mathcal{E}_K$ 上定义符号函数 $\mathrm{sign}_K(F)$：$=\{F:\ F \in \mathcal{E},$ 以及 $F \subset \partial K\}$:

$$\mathrm{sign}_K(F) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{n}_F = \mathbf{n}_K|_F, \\ -1 & \text{if } \mathbf{n}_F = -\mathbf{n}_K|_F. \end{cases}$$

3. EARM及其在DG有限元法中的应用。本节介绍EARM，并将其应用于DG有限元方法。所得的DG解的平衡通量在某些特殊情形下可还原现有的先进构造，同时采用修正权重以确保稳健性。

定义

$$DG(\mathcal{T}_h, k) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in \mathbb{P}_k(K), \quad \forall\ K \in \mathcal{T}_h\}.$$

记关于 $\mathcal{T}_h$ 的 $H(\mathrm{div};\Omega)$协调Raviart-Thomas (RT) k 阶空间为

$$RT(\mathcal{T}_h, k) = \{\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega) : \boldsymbol{\tau}|_K \in RT(K,k),\ \forall\, K \in \mathcal{T}_h\},$$

其中 $RT(K,k) = \mathbb{P}_k(K)^d + \boldsymbol{x}\,\mathbb{P}_k(K)$。另记

$$RT_f(\mathcal{T}_h, k) = \{\boldsymbol{\tau} \in RT(\mathcal{T}_h, k) : \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = f_k \,\mathrm{in}\,\Omega \text{ and } \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_F = g_{k,F} \,\mathrm{on}\, F \in \mathcal{E}_N\},$$

其中 f_k 是 L^2 从 f 到 $DG(\mathcal{T}_h, k)$的投影，而$g_{k,F}$ 是 L^2 从$g|_F$ 到 $\mathbb{P}_k(F)$的投影。

对于每个 $F \in \mathcal{E}_I$，我们定义以下权重：$\omega_F^{\pm} = \dfrac{\alpha_F^{\mp}}{\alpha_F^- + \alpha_F^+}$ 其中 $\alpha_F^{\pm} = \lambda(A|_{K_F^{\pm}})$，

而 $\lambda(M)$ 是矩阵 M 的最大特征值。我们还定义以下加权平均和跳跃算子：

$$\{v\}_w^F = \begin{cases} w_F^+ v_F^+ + w_F^- v_F^-, & F \in \mathcal{E}_I, \\ v, & F \in \mathcal{E}_D \cup \mathcal{E}_N, \end{cases} \quad \{v\}_F^w = \begin{cases} w_F^- v_F^+ + w_F^+ v_F^-, & F \in \mathcal{E}_I, \\ 0, & F \in \mathcal{E}_D \cup \mathcal{E}_N, \end{cases}$$

$$[\![v]\!]|_F = \begin{cases} v|_F^- - v|_F^+, & \forall\, F \in \mathcal{E}_I, \\ v|_F^-, & \forall\, F \in \mathcal{E}_D \cup \mathcal{E}_N. \end{cases}$$

上面定义的加权平均对于确保误差估计对 A 的跳跃具有鲁棒性是必要的，参见 [15]。容易证明，对于任意$F \in \mathcal{E}_I$,

$$w_F^{\pm}\sqrt{\alpha_F^{\pm}} \le \sqrt{\alpha_{F,min}}, \quad \frac{\omega_F^+}{\sqrt{\alpha_F^-}} \le \sqrt{\frac{1}{\alpha_{F,max}}}, \quad \text{and} \quad \frac{\omega_F^-}{\sqrt{\alpha_F^+}} \le \sqrt{\frac{1}{\alpha_{F,max}}}, \tag{3.1}$$

其中 $\alpha_{F,\ min} = \min(\alpha_F^+,\ \alpha_F^-)$，且 $\alpha_{F,\ max} = \max(\alpha_F^+,\ \alpha_F^-)$。

我们还将使用以下常用恒等式：

$$[\![uv]\!]_F = \{v\}_F^w\,[\![u]\!]_F + \{u\}_w^F\,[\![v]\!]_F, \quad \forall F \in \mathcal{E}. \tag{3.2}$$

我们首先给出（2.1）的DG变分公式：求 $u \in V^{1+\epsilon}(\mathcal{T}_h)$，使得$\epsilon > 0$ 并且

$$V^s(\mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega), v|_K \in H^s(K) \text{ and } \nabla \cdot A\nabla v \in L^2(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

使得

$$a_{dg}(u,\, v) = (f,\, v) - \langle g, v\rangle_{\Gamma_N}\,, \quad \forall\, v \in V^{1+\epsilon}(\mathcal{T}_h), \tag{3.3}$$

其中

$$\begin{aligned} a_{dg}(u,v) = (A\nabla_h u, \nabla_h v) &+ \sum_{F\in\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_N}\int_F \gamma\frac{\alpha_{F,min}}{h_F}[\![u]\!][\![v]\!]\,ds \\ &- \sum_{F\in\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_N}\int_F \{A\nabla u\cdot\mathbf{n}_F\}_w^F[\![v]\!]ds + \delta\sum_{F\in\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_N}\int_F \{A\nabla v\cdot\mathbf{n}_F\}_w^F[\![u]\!]ds. \end{aligned} \tag{3.4}$$

这里， ∇_h 是逐单元定义的离散梯度算子， γ 是一个正常数， δ 是取值为 1、0 或 -1 的常数。

DG 解是求 $u_k^{dg} \in DG(\mathcal{T}_h,\ k)$，使得

$$a_{dg}(u_k^{dg},\, v) = (f,\, v)_\Omega - \langle g, v\rangle_{\Gamma_N} \quad \forall\, v \in DG(\mathcal{T}_h, k). \tag{3.5}$$

注意，数值通量 $-A\nabla u_k^{dg}$ 不一定属于空间$H(\mathrm{div};\Omega)$。在 EARM 的第一步中，我们为任意 $u_h \in DG(\mathcal{T}_h,\ k)$ 定义一个泛函:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s : u_h \in DG(\mathcal{T}_h, k) \to \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s(u_h) \in RT(\mathcal{T}_h, s), \quad 0 \le s \le k,$$

使得

$$\int_F \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s(u_h)\cdot\mathbf{n}_F\phi\,ds = \begin{cases} -\int_F \{A\nabla u_h\cdot\mathbf{n}_F\}_w^F\phi\,ds & \forall F\in\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_N, \\ \int g\phi\,ds, & \forall F\in\mathcal{E}_N, \end{cases} \quad \forall\phi\in\mathbb{P}_s(F). \tag{3.6}$$

并且当 $s \ge 1$ 时，还满足

$$(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s(u_h), \boldsymbol{\psi})_K = -(A\nabla u_h, \boldsymbol{\psi})_K, \quad \forall K\in\mathcal{T}_h, \forall\boldsymbol{\psi}\in\mathbb{P}_{s-1}(K)^d. \tag{3.7}$$

由于恢复通量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s(u_h)$ 在各面上使用平均通量，我们将其称为 u_h 的 平均数值通量 。

为简单起见，我们假设 $g|_F = g_{k-1,F}$。由于 $\{A\nabla u_k^{cg}\cdot\mathbf{n}_F\}_w^F \in \mathbb{P}_{k-1}(F)$，容易看出，当 $s \ge k-1$ 时，有

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s(u_h)\cdot\mathbf{n}_F = \begin{cases} -\{A\nabla u_h\cdot\mathbf{n}_F\}_w^F & \forall F\in\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_N, \\ g, & \forall F\in\mathcal{E}_N. \end{cases} \tag{3.8}$$

然而，我们注意到，加权平均通量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s^{dg} := \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s(u_k^{dg}) \in H(\mathrm{div};\Omega)$ 不一定是局部守恒的。

在 EARM 的第二步中，我们旨在寻找一个修正通量 $\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta} \in RT(\mathcal{T}_h, s)$，使得

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_s^{dg} := \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s^{dg} + \boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta} \in RT_f(\mathcal{T}_h, s). \tag{3.9}$$

定义任意有限元解 u_h 的平均残差算子：

$$r_s(v) = \sum_K r_{s,K}(v), \quad \text{where } r_{s,K}(v) := (f - \nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s(u_h), v)_K. \tag{3.10}$$

我们的目标是为 u_h 求出满足以下条件的 $\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta} \in RT(\mathcal{T}_h, s)$:

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta}, v) = r_s(v) \quad \forall v \in DG(\mathcal{T}_h, s). \tag{3.11}$$

现在我们着手为 DG有限元解求 $\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta} \in RT(\mathcal{T}_h, s$。$u_k^{dg}$ 根据分部积分、$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s^{dg}$的定义以及(3.5)，对于任意 $v \in \mathbb{P}_s(K)$，有

$$\begin{aligned} r_s(v) &= (f, v)_K + (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s^{dg}, \nabla v)_K - < \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s^{dg} \cdot \mathbf{n}_K, v >_{\partial K} \\ &= (f, v)_K - (A\nabla u_k^{dg}, \nabla v)_K + \sum_{F \in \mathcal{E}_K \setminus \mathcal{E}_N} \int_F \{A\nabla u_k^{dg} \cdot \mathbf{n}_F\}_w^F [\![v]\!] ds - \sum_{F \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_N} \langle g, v \rangle_F \\ &= \sum_{F \in \mathcal{E}_K \setminus \mathcal{E}_N} \int_F \gamma \frac{\alpha_{F,min}}{h_F} [\![u_k^{dg}]\!][\![v]\!] \, ds + \delta \sum_{F \in \mathcal{E}_K \setminus \mathcal{E}_N} \int_F \{A\nabla v \cdot \mathbf{n}_F\}_w^F [\![u_k^{dg}]\!] ds. \end{aligned} \tag{3.12}$$

另一方面，由(3.11) 以及分部积分，还可得到

$$r_s(v) = r_{s,K}(v) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta}, v)_K = -(\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta}, \nabla v)_K + \sum_{F \in \mathcal{E}_K} \int_F \boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta} \cdot \mathbf{n}_F [\![v]\!] ds. \tag{3.13}$$

由(3.12) 和（3.13），自然地令两者匹配，并定义 $\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta} \in RT(\mathcal{T}_h, s)$，使得

$$\int_F \boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta} \cdot \mathbf{n}_F \phi \, ds = \begin{cases} \gamma \frac{\alpha_{F,min}}{h_F} \int_F [\![u_k^{dg}]\!] \phi \, ds, & \forall F \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_N, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_k(F). \\ 0, & \forall F \in \mathcal{E}_N, \end{cases} \tag{3.14}$$

并且，当 $s \geq 1$,

$$(\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta}, \boldsymbol{\psi})_K = -\delta \sum_{F \in \mathcal{E}_K \setminus \mathcal{E}_N} \int_F \{A\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n}_F\}_w^F [\![u_k^{dg}]\!] ds. \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbb{P}_{s-1}(K)^d. \tag{3.15}$$

LEMMA 3.1. 恢复通量 $\hat{}\boldsymbol{\sigma}_s^{dg}$ 定义于(3.9)，其中 $\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta}$定义于(3.14)-(3.15) 属于 $RT(\mathcal{T}_h, s)$，对任意$(0 \leq s \leq k)$均成立。此外，它局部守恒，并满足$\hat{}\boldsymbol{\sigma}_s^{dg} \in RT_f(\mathcal{T}_h, s)$。

证明。 首先 $\hat{}\boldsymbol{\sigma}_s^{dg} \in RT(\mathcal{T}_h, s)$ 是显然的。为证明 $\hat{}\boldsymbol{\sigma}_s^{dg} \in RT_f(\mathcal{T}_h, s)$，由(3.9)、分部积分、 $\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta}$ 的定义、(3.12) 和(3.10)，对任意$v \in DG(K, s)$，有:

$$\begin{aligned} &(\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_s^{dg}, v)_K = (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s^{dg}, v)_K + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta}, v)_K \\ =&(\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s^{dg}, v)_K - (\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta}, \nabla v)_K + \sum_{F \in \mathcal{E}_K} < \boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta} \cdot \mathbf{n}_F, [\![v]\!] >_F \\ =&(\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s^{dg}, v)_K + \sum_{F \in \mathcal{E}_K \setminus \mathcal{E}_N} \delta \int_F \{A\nabla v \cdot \mathbf{n}_F\}_w^F [\![u_k^{dg}]\!] ds + \sum_{F \in \mathcal{E}_K \setminus \mathcal{E}_N} \gamma \frac{\alpha_{F,min}}{h_F} \int_F [\![u_k^{dg}]\!][\![v]\!] \, ds \\ =&(\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s^{dg}, v)_K + r_s(v) = (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s^{dg}, v)_K + (f - \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s^{dg}, v)_K = (f, v)_K. \end{aligned}$$

至此，引理得证。 ∎

此处的恢复通量与 [1, 23] 中为 $s = k$ 引入的恢复通量类似，但权重经过了修改。

由于 $r_s(v)$ 是 (3.10)右端基于加权平均的残差，我们将该方法称为 平衡平均残差法（*EARM*），以区别于 [3] 中介绍的经典平衡残差法。

3.1. EARM 算法。下面给出 EARM 的伪算法。定义

$RT_f(\mathcal{T}_h,\ s',\ s) = \{\boldsymbol{\tau} \in RT(\mathcal{T}_h,\ s')\colon\ \Pi_s(\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}) = f_s$在 Ω 中，且 $\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}_F = g_{s,\ F}$在 $F \in \mathcal{E}_N\}$. 上

此处， Π_s 表示 L^2-正交投影到空间 DG（$\mathcal{T}_h$，s）上。我们在算法3.1中总结了 EARM 的伪算法。

算法3.1 EARM 的伪代码

1: **输入：**有限元解 $u_h \in DG$（$\mathcal{T}_h$，k）。2: 步骤 1：通过(3.6)–(3.7)计算加权平均通量：

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}(u_h) \in RT(\mathcal{T}_h, k-1) \quad \text{or} \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s(u_h), \quad 0 \le s \le k-1.$$

3: 步骤 2：求解修正通量： $\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta} \in RT(\mathcal{T}_h,\ s)$，使得

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta}, v)_K = r_s(v) \quad \forall v \in DG(\mathcal{T}_h, s), \tag{3.16}$$

其中 $r_s(v) = (f - \nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s(u_h)\ v)_K$。

4: 步骤 3：求得平衡通量：

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}(u_h) + \boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta} \in RT_f(\mathcal{T}_h, max(s, k-1), s),$$

or

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s(u_h) + \boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta} \in RT_f(\mathcal{T}_h, s, s).$$

4. 协调有限元方法的 ON-EARM。定义 k 阶（$k \ge 1$）协调有限元空间如下：

$$CG(\mathcal{T}_h, k) = \{v \in H^1(\Omega)\ :\ v|_K \in \mathbb{P}_k(K), \quad \forall\ K \in \mathcal{T}_h\}$$

and

$$CG_{0,\Gamma_D}(\mathcal{T}_h, k) = H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega) \cap CG(\mathcal{T}_h, k).$$

阶数为 k 的协调有限元解是求取 $u_k^{cg} \in CG_{0,\Gamma_D}(\mathcal{T}_h, k)$，使得

$$(A\nabla u_k^{cg}, \nabla v)_\Omega = (f, v)_\Omega - \langle g, v\rangle_{\Gamma_N}, \quad \forall\, v \in CG_{0,\Gamma_D}(\mathcal{T}_h, k). \tag{4.1}$$

对于 (3.16) 中的 u_k^{cg}，计算修正通量所需的处理比 DG 情形更为谨慎。与协调情形一样，局部守恒通量没有直接的闭式表达式。

我们首先检查变分问题的相容性。注意，对任意 $v \in CG_{0,\Gamma_D}(\mathcal{T}_h, k-1)$，根据 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{cg} := \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}(u_k^{cg})$ 的定义以及分部积分，有

$$r(v) := (f, v) - (\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{cg}, v) = (f, v) - (A\nabla u_k^{cg}, \nabla v) - < g, v >_{\Gamma_N} = 0. \tag{4.2}$$

具体而言，对于任意 $v \in CG_{0,\ \Gamma_D}(\mathcal{T}_h,\ s)\ s \le k-1$，且 $\mathrm{supp}(v) = K$ 对于任意 $K \in \mathcal{T}_h$，我们还有 $r(v) = 0$. 残差问题 (3.16) 因此应满足

$$0 = r(v) = (\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta}, v)_K = -(\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta}, \nabla v)_K = 0. \tag{4.3}$$

为确保 (4.3)中的相容性，自然需要对 $\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta}$的内部自由度施加以下限制:

$$(\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta}, \boldsymbol{\psi})_K = 0 \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbb{P}_{s-1}(K)^d \quad \text{when } s \geq 1. \tag{4.4}$$

定义 $s \geq 1$的空间,

$$\mathring{RT}(\mathcal{T}_h, s) = \left\{ \boldsymbol{\tau} \in RT(\mathcal{T}_h, s) : (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\psi})_K = 0 \, \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbb{P}_{s-1}(K)^d, \ K \in \mathcal{T}_h, \ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_F = 0, \ F \in \mathcal{E}_N \right\}.$$

在 $s = 0$ 的情况下，我们令 $RT(\mathcal{T}_h, 0) = RT(\mathcal{T}_h, 0)$。于是，(3.16) 转化为求 $\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta} \in \mathring{RT}(\mathcal{T}_h, s)$ 使得

$$\sum_{F \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_N} \int_F \boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta} \cdot \mathbf{n}_F [\![v]\!] ds = r(v) \quad \forall v \in DG(\mathcal{T}_h, s). \tag{4.5}$$

对于 (4.5)，我们有以下相容性结果。

LEMMA 4.1. 令 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\tau}_h, v) := \sum \langle \boldsymbol{\tau}_h \cdot \mathbf{n}_F, [\![v]\!] \rangle_F$ 为定义在$F \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_N$上的双线性型

$\boldsymbol{\tau}_h \in RT(\mathcal{T}_h, s) \times DG(\mathcal{T}_h, s)$ $0 \leq s \leq k-1$. 有

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\tau}_h, v) = r(v) = 0, \quad \forall v \in CG_{0,\Gamma_D}(\mathcal{T}_h, s). \tag{4.6}$$

其中 $r(v) = (f - \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{cg}, v)_{\Omega}$。

证明。 证明显而易见。 □

4.1. 的零空间消除 $\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta}$。 注意，(4.5) 由于无散空间的核，存在无穷多个解。本小节将推导一种恢复方法，以消除零空间，并将修正通量限制在无散零空间的正交补中。

将.....中的无散空间记为 $\mathring{RT}(\mathcal{T}_h, s)$ 因此

$$\mathring{RT}^0(\mathcal{T}_h, s) = \{ \boldsymbol{\tau} \in \mathring{RT}(\mathcal{T}_h, s) : \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \}.$$

另以 $\mathring{RT}^0(\mathcal{T}_h, s)^{\perp}$ 表示无散空间$\mathring{RT}^0(\mathcal{T}_h, s)$ 的正交补。

现在，对任意 $w \in DG(\mathcal{T}_h, \mathring{RT}\ \mathcal{T}_h\ s$ s $s \to w \in$),

定义一个映射 $\mathbf{S}:\ w \in DG(\mathcal{T}_h,\ )\ \mathbf{S}(\ )\ (,\ )$, 使得

$$\mathbf{S}(w) \cdot \mathbf{n}_F|_F = A_F h_F^{-1} [\![w]\!]|_F \quad \forall F \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_N, \tag{4.7}$$

其中，当 $F \in \mathcal{E}_I$ 时， $A_F = \min(\alpha_F^+, \ \alpha_F^-)$; 当 $F \in \mathcal{E}_D$ 时， $A_F = \alpha_F^-$。

LEMMA 4.2. 以下关系成立:

$$\{ \mathbf{S}(w) : w \in DG(\mathcal{T}_h, s) \} \subset \mathring{RT}^0(\mathcal{T}_h, s)^{\perp}.$$

证明。 我们首先注意到，对于任意 $\boldsymbol{\tau}_h \in \mathring{RT}^0(\mathcal{T}_h, s)$，均有

$$0 = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_h, v)_{\mathcal{T}_h} \Leftrightarrow \sum_{F \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_N} \langle \boldsymbol{\tau}_h \cdot \mathbf{n}_F, [\![v]\!] \rangle_F = \mathcal{A}(\boldsymbol{\tau}_h, v) = 0 \quad \forall v \in DG(\mathcal{T}_h, s). \tag{4.8}$$

因此，当且仅当 $\boldsymbol{\tau}_h \in \mathring{RT}^0(\mathcal{T}_h, s)^\perp$

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\tau}_h, v) = 0 \quad \forall v \in DG(\mathcal{T}_h, s) \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_h \equiv 0. \tag{4.9}$$

因此，要证明 $\mathbf{S}(w) \in \mathring{RT}^0(\mathcal{T}_h, s)^\perp$，只需证明 $\mathbf{S}(w)$ 对所有 $w \in DG(\mathcal{T}_h, s)$ 满足

$$\mathcal{A}(\mathbf{S}(w), v) = 0 \quad \forall v \in DG(\mathcal{T}_h, s), \tag{4.10}$$

立即得到

$$\mathcal{A}(\mathbf{S}(w), w) = 0, \tag{4.11}$$

即，$\|A_F^{1/2} h_F^{-1/2} [\![w]\!]\|_{\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_N} = 0$，因此，$\|\mathbf{S}(w) \cdot \mathbf{n}_F\|_{\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_N} \equiv 0$。引理的证明至此完成。 ∎

根据 引理 4.2，我们通过将通量限制在 $\mathring{RT}^0(\mathcal{T}_h, s)^\perp$ 空间中来重新表述问题 (4.5) 如下：求 $u_s^\Delta \in DG(\mathcal{T}_h, s)$ 使得

$$\mathcal{A}([\![u_s^\Delta]\!], [\![v]\!]) = r(v) \quad \forall\, v \in DG(\mathcal{T}_h, s), \tag{4.12}$$

其中

$$\mathcal{A}([\![u_s^\Delta]\!], [\![v]\!]) := \sum_{F\in\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_N} \int_F A_F h_F^{-1} [\![u_s^\Delta]\!][\![v]\!]\, ds.$$

注意，公式中仅使用了面 $\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_N$ 上 $[\![u_s^\Delta]\!]$ 的信息。我们进一步为任意 $s \geq 1$ 定义商空间：

$$DG^0(\mathcal{T}_h, s) = \{v \in DG(\mathcal{T}_h, s) : v|F = 0 \forall F \in \mathcal{E}_N\}/\{v \in CG(\mathcal{T}_h, s)\}.$$

这里我们使用 A/B 表示 A 模 B 的商空间。(4.12) 于是等价于求 $u_s^\Delta \in DG^0(\mathcal{T}_h, s)$，使得

$$\mathcal{A}([\![u_s^\Delta]\!], [\![v]\!])_F = r(v) \quad \forall\, v \in DG^0(\mathcal{T}_h, s). \tag{4.13}$$

(4.13)的一个特点是其适定性，这得益于采用相同的试探空间和检验空间，以及在 $DG^0(\mathcal{T}_h, s)$ 空间中的连续性和强制性。

LEMMA 4.3. (4.13) 存在唯一解 $u_s^\Delta \in DG^0(\mathcal{T}_h, s)$，对所有整数 $0 \leq s \leq k-1$。

证明。首先，双线性型 $\mathcal{A}([\![u_s^\Delta]\!], [\![v]\!])_F$ 在 $DG^0(\mathcal{T}_h, s)$ 空间中关于以下范数具有连续性和强制性：

$$|\!|\!| v |\!|\!| = \sqrt{\sum_{F\in\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_N} h_F^{-1} \|A_F^{1/2} [\![v]\!]\|_F^2}. \tag{4.14}$$

于是，根据 Lax–Milgram定理，(4.13) 对所有 $0 \leq s \leq k-1$均存在唯一解。 ∎

备注 4.4. 当 $s = 0$，我们的方法与其中恢复的平衡通量一致 [29]。尽管 (4.13) 的解是唯一的，但它构成一个全局问题。不过，该全局问题的自由度数量远少于原问题，因为它仅包含限制在面自由度上的未知量。

此外，在二维中，对于 $1 \le s \le k-1$，我们可以采用与其中相同的技术将其局部化 [6]，方法是将精确积分 $\int_F A_F h_F^{-1} [\![u_s^\Delta]\!][\![v]\!]\, ds$ 替换为不精确的高斯-洛巴托求积。在二维中采用高斯-洛巴托求积时，我们的恢复通量与其中的通量一致 [6]。此外，如其中所示，恢复通量可以完全显式地计算 [18]。

LEMMA 4.5. 定义某个 $0 \le s \le k-1$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h^{cg} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{cg} + \boldsymbol{\sigma}_s^\Delta, \tag{4.15}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}_s^\Delta = \mathbf{S}(u_s^\Delta)$ 其中 u_s^Δ是方程 (4.13) 的解。于是 $\hat{}\boldsymbol{\sigma}_h^{cg} \in RT(\mathcal{T}_h, k-1, s)$满足

$$(\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h^{cg}, v) = (f, v) \quad \forall v \in DG(\mathcal{T}_h, s). \tag{4.16}$$

证明。只需证明 (4.16) 对任意 $v \in \mathbb{P}_s(K) \subset DG(\mathcal{T}_h, s)$。根据定义、分部积分以及 (4.13)

$$\begin{aligned}
&(\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h^{cg}, v)_K = (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{cg}, v)_K + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s^\Delta, v)_K \\
&= (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{cg}, v)_K + (\boldsymbol{\sigma}_s^\Delta, \nabla v)_K + (\boldsymbol{\sigma}_s^\Delta \cdot \mathbf{n}_F, [\![v]\!])_{\partial K} \\
&= (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{cg}, v)_K + \sum_{F \in \mathcal{E}_K \setminus \mathcal{E}_N} (A_F h_F^{-1} [\![u_s^\Delta]\!], [\![v]\!])_F = (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{cg}, v)_K + r(v) \\
&= (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{cg}, v)_K + (f, v)_K - (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{cg}, v)_K = (f, v)_K.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

引理的证明至此完成。 ∎

LEMMA 4.6. 定义某个 $0 \le s \le k-1$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_s^{cg} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s^{cg} + \boldsymbol{\sigma}_s^\Delta, \tag{4.18}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}_s^\Delta = \mathbf{S}(u_s^\Delta)$ 其中 u_s^Δ是(4.13)的解。于是$\hat{}\boldsymbol{\sigma}_s^{cg} \in RT_f(\mathcal{T}_h, s)$满足

$$(\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_s^{cg}, v) = (f, v) \quad \forall v \in DG(\mathcal{T}_h, s). \tag{4.19}$$

证明。(4.19) 可用与引理 4.5 类似的方法证明，并利用以下事实：

$$(\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_s^{cg}, v)_K = (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{cg}, v)_K \quad \forall v \in DG(\mathcal{T}_h, s).$$ ∎

5. 自动全局可靠性。我们首先引用 [16]中证明的以下可靠性结果。

THEOREM 5.1. 设 $u \in H_D^1(\Omega)$ 为(2.1)的解。在二维和三维中，对所有 $w \in H^1(\mathcal{T}_h)$，有

$$\|A^{1/2}\nabla_h(u-w)\|^2 = \inf_{\boldsymbol{\tau} \in \Sigma_f(\Omega)} \|A^{-1/2}\boldsymbol{\tau} + A^{1/2}\nabla_h w\|^2 + \inf_{v \in H_D^1(\Omega)} \|A^{1/2}\nabla_h(v-w)\|^2.$$

其中

$$\Sigma_f(\Omega) = \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div}; \Omega) : \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = f \text{ in } \Omega \text{ and } \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = g \text{ on } \Gamma_N \Big\}.$$

根据定理和推论 3.5， [16], 为间断有限元解构造平衡后验误差估计子的问题可归结为

恢复一个属于 $\Sigma_f(\Omega)$ 的平衡通量，并恢复一个属于 $H^1(\Omega)$ 的势函数，或一个属于 $H(\mathrm{curl};\Omega)$ 的无旋向量值函数。本文重点关注平衡通量恢复。我们注意到，$\inf_{\boldsymbol{\tau}\in\Sigma_f(\Omega)}\|A^{-1/2}\boldsymbol{\tau}+A^{1/2}\nabla_h w\|^2$ 通常称为 w 的协调误差

.

注意，在我们的情况下，恢复通量属于 $RT_f(\mathcal{T}_h,\ s)$ 或 $RT_f(\mathcal{T}_h,\ k-1,\ s)$，但通常不属于 $\Sigma_f(\Omega)$。我们可以进行调整，并得到如下类似于 定理 5.1 的可靠性结果，只是在右侧增加了一个振荡项，

$$\begin{aligned}\|A^{1/2}\nabla_h(u-u_k^{cg})\|^2 \le{}& \|A^{-1/2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h+A^{1/2}\nabla_h u_k^{cg}\|^2\\ &+\inf_{v\in H_D^1(\Omega)}\|A^{1/2}\nabla_h(v-u_k^{cg})\|^2+c\|f-f_s\|_\Omega^2.\end{aligned}\tag{5.1}$$

当 $f|_K$ 对所有 $K\in\mathcal{T}_h$光滑时，这个附加的振荡项是高阶的。在计算中通常会忽略它。

我们将协调误差的局部指标定义为

$$\eta_{\sigma,K}=\|A^{-1/2}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h-\boldsymbol{\sigma}_h)\|_K\tag{5.2}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}_h=-A\nabla u_h$ 是与有限元解u_h 相对应的数值通量，而 $\hat{}\boldsymbol{\sigma}_h$ 是基于 $\boldsymbol{\sigma}_h$的恢复平衡通量。全局估计量随后定义为

$$\eta_\sigma=\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\eta_{\sigma,K}^2\right)^{1/2}=\|A^{-1/2}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h-\boldsymbol{\sigma}_h)\|_{0,\Omega},\tag{5.3}$$

其中，$\hat{}\boldsymbol{\sigma}_h$ 是基于 u_h的恢复平衡通量。

6. 稳健效率。本节证明，对于(5.2) 中定义的误差指标，在将其应用于协调有限元解 u_k^{cg} 时，由引理 4.5得到的恢复通量 $\hat{}\boldsymbol{\sigma}_h=\hat{}\boldsymbol{\sigma}_h^{cg}$ 具有稳健效率。对于 $\hat{}\boldsymbol{\sigma}_s^{cg}$、$0\le s\le k-1$ 的其他情形，可以用类似方法处理。这里，稳健性是指效率常数与扩散系数的跳跃无关 $A(x)$。

关于由间断 Galerkin 解构造的恢复通量，请参见 [1, 23, 16, 3]。

为简便起见，我们假设扩散系数 $A(x)$ 是分片常数函数，且对于所有 $F\in\mathcal{E}_I$，$A_F^-\le A_F^+$。从此处起，我们用 $a\lesssim b$ 表示：对于某个与网格尺寸及 A 的跳跃无关的通用常数，$a\le Cb$。

为简便起见，我们将分析限制在二维情形。为证明协调情形下的效率常数与 $A(x)$ 的跳跃无关，按照惯例，我们假设对于所有 $K\in\mathcal{T}_h$，系数分布 A_K 局部准单调 [30], ；这一条件略弱于 [7] 中的假设 2.7。该假设已在相关文献中采用，对于严格的理论证明仍然至关重要。然而，数值实验和实际应用表明，计算中并不需要这一假设，因为即使该条件未被严格满足，该方法仍能可靠地运行，例如参见 [14]。

为方便读者，我们重新陈述准单调性的定义。Le t ω_z 是所有以 z 为顶点的单元的并集。对于任意 $z\in\mathcal{N}$，令

$$\hat{\omega}_z=\{K\in\omega_z\ :\ A_K=\max_{K'\in\omega_z}A_{K'}\}.$$

DEFINITION 6.1. 给定一个顶点 $z \in \mathcal{N}$，若系数 A_K,$K \in \omega_z$ 的分布关于顶点 z 是拟单调的，则称其为拟单调；如果存在 ω_z 的一个子集 $\tilde{\omega}_{K,z,qm}$，使得 $\tilde{\omega}_{K,z,qm}$ 中单元的并集是一个利普希茨区域，并且

- 若 $z \in \mathcal{N}\backslash\mathcal{N}_D$，则 $\{K\} \cup \hat{}\omega_z \subset \tilde{\omega}_{K,z,qm}$ 且 $A_K \leq A_{K'}\ \forall K' \in \tilde{\omega}_{K,z,qm}$;
- 若 $z \in \mathcal{N}_D$，则 $K \in \tilde{\omega}_{K,z,qm}$，$\partial\tilde{\omega}_{K,z,qm} \cap \Gamma_D \neq \emptyset$，且 $A_K \leq A_{K'}\ \forall K' \in \omega_{K,z,qm}$。

系数 A_K, $K \in \mathcal{T}$ 的分布称为局部拟单调，如果它相对于每个顶点 $z \in \mathcal{N}$ 都是拟单调的。

对于函数 $v \in DG(\mathcal{T}_h, s)$，我们选择采用经典的拉格朗日基函数。对于函数 $v \in DG^0(\mathcal{T}_h, s)$，由于只需要 $[\![v]\!]|_{\mathcal{E}\backslash\mathcal{E}_N}$，从此以后，我们假设 v 满足以下条件。

1. v的内部自由度为零，即 $v(\boldsymbol{x}_{i,K}) = 0, i = 1, \cdots, m_s$。 2. 对于空间 $P_k(F)$，令 $\{\boldsymbol{x}_{i,F}\}_{i=1}^{s-1}(s \geq 1)$ 为 F 上除顶点 $\boldsymbol{x}_{s,F}$ 和 $\boldsymbol{x}_{e,F}$ 之外所有拉格朗日点的集合。对于每个 $F \in \mathcal{E}_I$ 和 $\boldsymbol{x}_{i,F} \in F$，令 $v|_{K_F^+}(\boldsymbol{x}_{i,F}) = 0$。 3. 对于每个 $z \in \mathcal{N}$，我们将 K_z 记为 $\hat{}w_z$ 中的一个元素，并令 $v|_{K_z}(z) = 0$。 4. 当 $F \in \mathcal{E}_N$ 时，我们简单地令 $v|_F \equiv 0$。

不难证明，在上述四类约束下，任意函数$v \in DG^0(\mathcal{T}_h, s)$ 都由此唯一确定。

LEMMA 6.2（ $DG^0(\mathcal{T}_h, s)$中的唯一性）。令 $u, v \in DG^0(\mathcal{T}_h, s)$ 满足上述假设。如果

$$[\![u]\!] = [\![v]\!] \quad on\ \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_N,$$

then

$$u \equiv v \quad in\ \Omega.$$

证明。令 $w := u - v \in DG^0(\mathcal{T}_h, s)$。根据关于 $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_N$ 和$u|_F = v|_F \equiv 0$ 的假设 $[\![u]\!] = [\![v]\!]$，对 $F \in \mathcal{E}_N$，有

$$[\![w]\!] = 0 \quad \text{on } \mathcal{E}.$$

因此，$w \in CG(\mathcal{T}_h, s)$，且 $w = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上。

此外，根据假设1，w 在所有内部自由度处均为零。根据假设2，w 在所有内部面拉格朗日点处均为零，但顶点处除外。最后，根据假设3，w 在所有顶点自由度处均为零。因此，w 的所有自由度均为零，从而

$$w \equiv 0.$$

□

因此，$u \equiv v$。引理得证。

我们首先证明以下引理。

LEMMA 6.3. 对于任意 $v \in DG^0(\mathcal{T}_h, s)$，有

$$\|A^{1/2}\nabla v\|_{\mathcal{T}_h} \leq C \sum_{F \in \mathcal{E}\backslash\mathcal{E}_N} h_F^{-1/2} A_F^{1/2} \|[\![v]\!]\|_F. \tag{6.1}$$

其中，常数 C 与网格以及系数 A的跳跃无关(x) ，

证明。对于任意 $K \in \mathcal{T}_h$，我们首先有

$$\|\nabla v\|_K \lesssim \sum_{z \in \mathcal{N}_K} |v_K(z)| + \sum_{F \in \mathcal{E}_K} \sum_{i=1}^{s-1} |v_K(\boldsymbol{x}_{i,F})|. \tag{6.2}$$

固定任意 $z \in \mathcal{N}_K$。如果 $K = K_z$，则有 $v_K(z) = 0$。如果 $K \neq K_z$，应用三角形等式和 v 的性质可得

$$|v_K(z)| \leq \sum_{F \subset \tilde{\omega}_{K,z,qm} \cap \mathcal{E}_z} |[\![v]\!]_F(z)|. \tag{6.3}$$

这里我们选择 $\tilde{\omega}_{K,\ z,\ qm}$ 为开集，因此 $\tilde{\omega}_{K,\ z,\ qm} \cap \mathcal{E}_z$ 不包含两条边界边 $\partial_{\tilde{\omega}_{K,\ z,\ qm}} \cap \mathcal{E}_z$。由于 $A(x)$ 沿着 $\tilde{\omega}_{K,\ z,\ qm}$单调，我们有

$$A_K^{1/2}|v_K(z)| \leq \sum_{F \subset \tilde{\omega}_{K,z,qm} \cap \mathcal{E}_z} A_F^{1/2}|[\![v]\!]_F(z)|. \tag{6.4}$$

最后，对于任意 $\boldsymbol{x}_{i,\ F}$, $i = 1,\ \cdots,\ s-1$ 以及 $F \in \mathcal{E}_K$，我们有

$$A_K^{1/2}|v_K(\boldsymbol{x}_{i,F})| = \begin{cases} 0 & \text{if } K = K_F^+ \\ A_K^{1/2}|[\![v]\!]_F(\boldsymbol{x}_{i,F})| & \text{if } K = K_F^- \end{cases} \leq A_F^{1/2}|[\![v]\!]_F(\boldsymbol{x}_{i,F})|. \tag{6.5}$$

回顾一下，我们假设 $A_F^- \leq A_F^+$。结合 (6.2)–(6.5)，对于任意 $K \in \mathcal{T}_h$,

$$\begin{aligned} \|A^{1/2}\nabla v\|_K &\lesssim \sum_{z \in \mathcal{N}_K} \sum_{F \in \mathcal{E}_z} A_F^{1/2}|[\![v]\!]_F(z) + \sum_{F \in \mathcal{E}_K} \sum_{i=1}^{s-1} A_F^{1/2}|[\![v]\!]_F(\boldsymbol{x}_{i,F})| \\ &\lesssim \sum_{z \in \mathcal{N}_K} \sum_{F \in \mathcal{E}_z} A_F^{1/2} h_F^{-1/2} \|[\![v]\!]\|_F. \end{aligned} \tag{6.6}$$

因此，(6.1)。引理得证。 □

LEMMA 6.4. 设 $u_s^\Delta \in DG^0(\mathcal{T}_h,\ s)$ 为 (4.13)的解。我们有关于 $\|\!|u_s^\Delta|\!\|$的如下估计：

$$\|\!|u_s^\Delta|\!\| \leq C\|A^{1/2}\nabla(u - u_k^{cg})\| + \operatorname{osc}(f), \tag{6.7}$$

其中常数 C 与网格尺寸以及 A（x）的系数跳跃无关。

证明。 首先，我们注意到

$$\|\!|u_s^\Delta|\!\| = \sup_{v \in DG^0(\mathcal{T}_h,s), \|\!|v|\!\|=1} \mathcal{A}(u_s^\Delta, v) = \sup_{v \in DG^0(\mathcal{T}_h,s), \|\!|v|\!\|=1} r(v). \tag{6.8}$$

应用分部积分、 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{cg}$ 和（3.2）的定义，我们有

$$\begin{aligned} r(v) &= (f - \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{cg}, v)_\Omega = (f, v)_\Omega + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left((\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{cg}, \nabla v)_K - < \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{cg} \cdot \mathbf{n}_K, v >_{\partial K} \right) \\ &= (f, v)_\Omega - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (A\nabla u_k^{cg}, \nabla v)_K + \sum_{F \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_N} < \{A\nabla u_k^{cg} \cdot \mathbf{n}_F\}_w^F, [\![v]\!]) >_F \\ &= (f + \nabla \cdot A\nabla u_k^{cg}, v)_\Omega - \sum_{F \in \mathcal{E}_I} < ([\![A\nabla u_k^{cg} \cdot \mathbf{n}_F]\!], \{v\}_F^w) >_F \end{aligned}$$

根据三角不等式和柯西-施瓦茨不等式，以及(3.1)，对于任意$F \in \mathcal{E}_I$，我们有

$$\begin{aligned} &< [\![A\nabla u_k^{cg} \cdot \mathbf{n}_F]\!], \{v\}_F^w >_F \lesssim \|[\![A\nabla u_k^{cg} \cdot \mathbf{n}_F]\!]\|_F (\omega_F^+ \|v_{K_F^-}\|_F + \omega_F^- \|v_{K_F^+}\|_F) \\ &\lesssim \|A_{F,max}^{-1/2} [\![A\nabla u_k^{cg} \cdot \mathbf{n}_F]\!]\|_F (\|(A^{1/2}v)_{K_F^-}\|_F + \|(A^{1/2}v)_{K_F^+}\|_F). \end{aligned} \tag{6.9}$$

采用与引理 6.3 的证明中类似的技巧，我们可以得到以下界

$$(\|(A^{1/2}v)_{K_F^-}\|_F + \|(A^{1/2}v)_{K_F^+}\|_F) \lesssim \sum_{z\in\mathcal{N}_F}\sum_{F\in\mathcal{E}_z} A_F^{1/2}\|[\![v]\!]\|_F, \tag{6.10}$$

and

$$\|A^{1/2}v\|_K \lesssim \sum_{z\in\mathcal{N}_K}\sum_{F\in\mathcal{E}_z} A_F^{1/2}h_F^{1/2}\|[\![v]\!]\|_F \tag{6.11}$$

最后，应用 (6.8)–(6.11) 和柯西-施瓦茨不等式，并利用 $|\!|\!|v|\!|\!| = 1$，可得

$$\begin{aligned} r(v) &\le \sqrt{\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2\|A^{-1/2}(f+\nabla\cdot A\nabla u_k^{cg})\|_K^2}\sqrt{\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^{-2}\|A^{1/2}v\|_K^2} \\ &+ \sqrt{\sum_{F\in\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_N} h_F A_{F,max}^{-1}\|[\![A\nabla u_k^{cg}\cdot\mathbf{n}_F]\!]\|_F^2}\sqrt{\sum_{F\in\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_N} h_F^{-1}(\|A^{1/2}v_{K_F^-}\|_F^2 + \|A^{1/2}v_{K_F^+}\|_F^2)} \\ &\lesssim \sqrt{\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2\|A^{-1/2}(f+\nabla\cdot A\nabla u_k^{cg})\|_K^2 + \sum_{F\in\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_N}\frac{h_F}{A_{F,max}}\|[\![A\nabla u_k^{cg}\cdot\mathbf{n}_F]\!]\|_F^2}\ |\!|\!|v|\!|\!|. \end{aligned}$$

根据经典效率结果，我们还可得

$$h_K\|A^{-1/2}(f+\nabla\cdot A\nabla u_k^{cg})\|_K \lesssim \|A^{1/2}\nabla(u-u_k^{cg})\|_{\omega_K} + \mathrm{osc}(f) \tag{6.12}$$

and

$$\|A_{F,max}^{-1/2}[\![A\nabla u_k^{cg}\cdot\mathbf{n}_F]\!]\|_F \lesssim \|A^{1/2}\nabla(u-u_k^{cg})\|_{\omega_F} + \mathrm{osc}(f) \tag{6.13}$$

其中 ω_K 和 ω_F 分别是 K 和 F的某个局部邻域；且所涉及的常数与 A的跳跃无关。综合以上结果可得 (6.7)。引理得证。

□

THEOREM 6.5. 回顾局部误差指示子

$$\eta_{\sigma,K} = \|A^{-1/2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h^{cg} + A^{1/2}\nabla u_k^{cg}\|_K \tag{6.14}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h^{cg}$ 定义见引理 4.5。于是有如下全局效率界：

$$\eta_\sigma \le C\|A^{1/2}\nabla(u-u_k^{cg})\|_{\mathcal{T}_h} + osc(f), \tag{6.15}$$

其中，该常数与网格和系数 $A(x)$ 的跳跃无关。

证明。 首先，应用三角不等式，

$$\begin{aligned} \eta_{\sigma,K} &= \|A^{-1/2}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h^{cg} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{cg})\|_K + \|A^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{cg} + A^{1/2}\nabla u_k^{cg}\|_K \\ &= \|A^{-1/2}\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta}\|_K + \|A^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{cg} + A^{1/2}\nabla u_k^{cg}\|_K. \end{aligned} \tag{6.16}$$

为了界定第二项，我们首先根据范数等价，(3.1)，(3.8)以及(6.13)，

$$\begin{aligned} \|A^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{cg} + A^{1/2}\nabla u_k^{cg}\|_K &\lesssim \sum_{F\in\mathcal{E}_K} h_F^{1/2}\|A_K^{-1/2}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}^{cg} + A_K\nabla u_k^{cg})\cdot\mathbf{n}_F\|_F \\ &\lesssim \sum_{F\in\mathcal{E}_K} h_F^{1/2}\|A_{F,max}^{-1/2}[\![A\nabla u_k^{cg}]\!]\cdot\mathbf{n}_F\|_F \lesssim \sum_{F\in\mathcal{E}_K}\|A^{1/2}\nabla(u-u_k^{cg})\|_{\omega_F} + \mathrm{osc}(f). \end{aligned} \tag{6.17}$$

因此，只需证明

$$\|A^{-1/2}\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta}\|_{\mathcal{T}_h} \leq C\|A^{1/2}\nabla(u-u_k^{cg})\|_{\mathcal{T}_h} + \operatorname{osc}(f). \tag{6.18}$$

根据 $\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta}$，(4.7)的定义，对每个 $K \in \mathcal{T}_h$,

$$\begin{aligned}\|A^{-1/2}\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta}\|_K &\lesssim \sum_{F\in\mathcal{E}_K} h_F^{1/2}\|A_K^{-1/2}\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta}\cdot\mathbf{n}_F\|_F \leq \sum_{F\in\mathcal{E}_K} h_F^{1/2}\|A_K^{-1/2}\mathbf{S}(u_s^{\Delta})\cdot\mathbf{n}_F\|_F \\ &\leq \sum_{F\in\mathcal{E}_K} h_F^{-1/2}\|A_K^{-1/2}A_F[\![u_s^{\Delta}]\!]\|_F \leq \sum_{F\in\mathcal{E}_K} h_F^{-1/2}\|A_F^{1/2}[\![u_s^{\Delta}]\!]\|_F.\end{aligned} \tag{6.19}$$

结合(6.7)，可知

$$\|A^{-1/2}\boldsymbol{\sigma}_s^{\Delta}\|_{\mathcal{T}_h} \lesssim |\!|\!|u_s^{\Delta}|\!|\!| \leq C\|A^{1/2}\nabla(u-u_k^{cg})\|_{\mathcal{T}_h} + \operatorname{osc}(f). \tag{6.20}$$

□

定理的证明至此完成。

7. 数值实验。本节报告二维 Kellogg 界面问题 [12] 和 L 形基准问题的数值结果，这些问题均采用协调有限元方法离散。在三维情形下，我们考虑具有顶点奇异性的正则化 Fichera 角点问题。所有情形下，我们测试多项式次数 $k = 1$，2，3，并为恢复通量设置 $s = k - 1$。

我们采用如下标准自适应加密循环:

$$\text{Solve} \to \text{Estimate} \to \text{Mark} \to \text{Refine} \to .$$

在每次迭代中，我们计算协调有限元解，评估局部误差指示子，并标记待加密的单元。标记时，我们采用参数为 $\theta \in$ 的 D¨orfler 整体准则（0，1）。我们按 η_K^2 降序排列单元，并标记满足以下条件的最小单元集 $\mathcal{M}$：

$$\sum_{K\in\mathcal{M}} \eta_K^2 \;\geq\; \theta \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \eta_K^2.$$

随后对标记的单元进行加密，并重复这一过程，直到满足停止准则。

所有数值实现均在 FEniCSx [4]，中完成。该框架为组装变分形式并求解由此得到的离散系统提供了高效且可复现的有限元编程环境。

EXAMPLE 7.1（Kellogg 问题）。设 $\Omega = (-1,\ 1)^2$ 且

$$u(r,\theta) = r^{\beta}\mu(\theta)$$

在原点的极坐标中，

$$\mu(\theta) = \begin{cases} \cos((\pi/2-\sigma)\beta)\cdot\cos((\theta-\pi/2+\rho)\beta) & if \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \\ \cos(\rho\beta)\cdot\cos((\theta-\pi+\sigma)\beta) & if \quad \pi/2 \leq \theta \leq \pi, \\ \cos(\sigma\beta)\cdot\cos((\theta-\pi-\rho)\beta) & if \quad \pi \leq \theta \leq 3\pi/2, \\ \cos((\pi/2-\rho)\beta)\cdot\cos((\theta-3\pi/2-\sigma)\beta) & if \quad 3\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

其中 σ 和 ρ 均为数。函数 $u(r,\theta)$ 满足（2.1）中的扩散方程，其中 $A=\alpha I$, $\Gamma_N=\emptyset$, $f=0$，且

$$\alpha=\begin{cases} R & in\ (0,1)^2\cup(-1,0)^2, \\ 1 & in\ \Omega\setminus([0,1]^2\cup[-1,0]^2). \end{cases}$$

在该测试问题中，我们选择 $\beta=0.1$，其对应于

$$R\approx 161.4476387975881,\quad \rho=\frac{\pi}{4},\quad and\quad \sigma\approx -14.92256510455152.$$

注意，解 $u(r,\theta)$ 对于某些 $\epsilon>0$ 仅属于 $H^{1+\beta-\epsilon}(\Omega)$，因此当 β 较小时，它在原点处非常奇异。这表明加密应主要集中在原点附近。

对于 Kellogg 问题，我们取 $\theta=0.3$，并在相对误差低于 1% 时停止自适应循环。对于 $k=1,2,3$，最终自适应网格如图 1所示，真实误差和全局估计量 的收敛情况见图 2。所有情况下，加密都集中在解具有奇异性的原点附近。每个次数均实现了最优收敛。作为参考，我们给出了预期收敛率 $N^{-k/2}$ 以及真实误差的计算收敛率。真实误差的计算收敛率通过 Matlab 中的 `polyfit`获得，该函数在双对数尺度下对误差数据进行最小二乘拟合，以提取渐近斜率。所有情况下，计算得到的收敛率均与最优收敛率一致；估计量也呈现出相同的最优行为

平均效率指数分别为 $k=$1.3726、3.6363 和 6.5877。

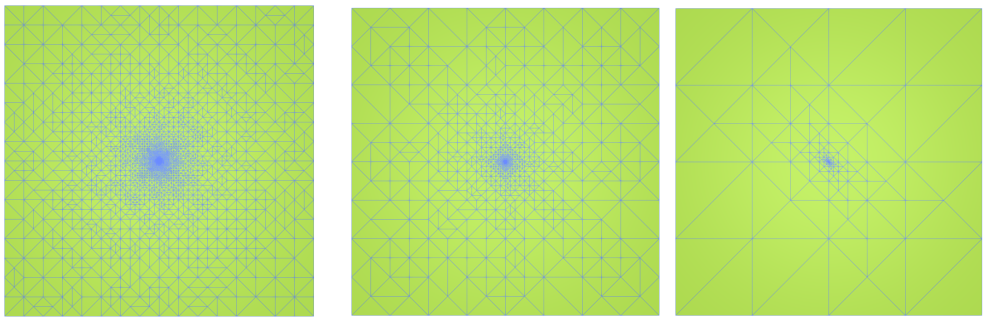

图 1：例 7.1 1,2,3 的最终自适应网格

Example 7.2（L 形区域问题）。在本例中，我们测试以下问题：

$$u(r,\theta)=r^{2/3}\sin(2\theta/3),\quad \theta\in[0,\,3\pi/2]$$

在 L 形区域 $\Omega=(-1,1)^2\setminus[0,1]\times[-1,0]$。注意，该函数满足（2.1），其中 $A(x)=I$ 且 $f=0$。

对于 L 形问题，我们设定 $\theta=0.2$，并采用与例 7.1相同的停止准则，即相对误差低于 1% 时停止。最终自适应网格如图 3所示。对于所有测试的次数，加密都集中在

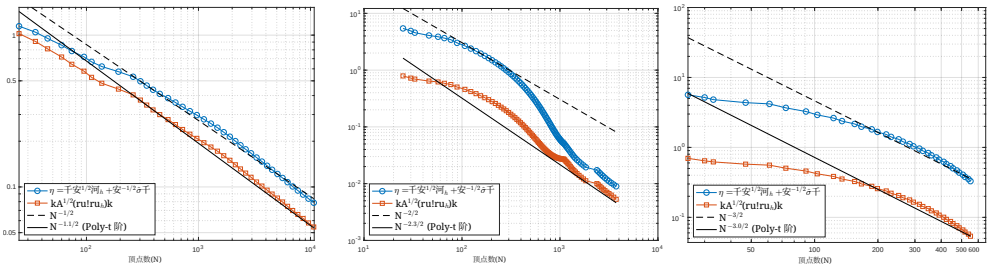

图2：例 7.1 自适应误差收敛结果（对应 $k=1$、2、3

再入角附近，该处的解具有奇异性，而其他区域的网格则保持较粗。误差收敛结果见图 4。在此例中，我们观察到了超收敛现象：对于 $k=2$，真实误差和估计量的观测阶均接近 10；而对于 $k=3$，观测阶约为 12。

我们强调，在整个自适应过程中，该估计量始终保持可靠，并紧密跟踪真实误差。对于 $k=1$、2、3，效率指数分别为 1.12、1.79 和 2.25。

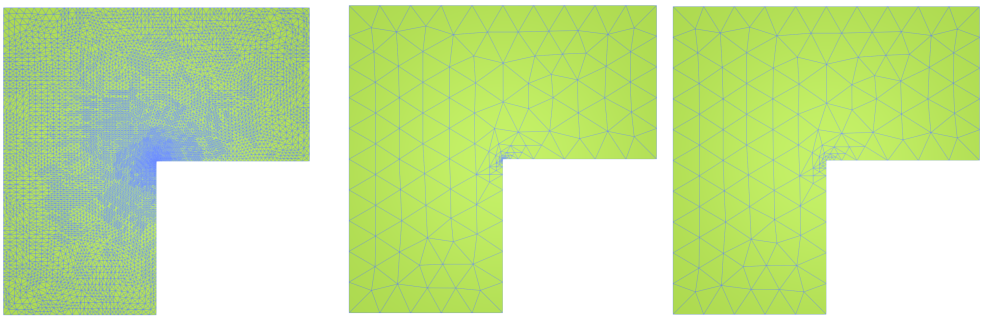

图3：例 7.2 对应 $k=1$、2、3 的最终自适应网格

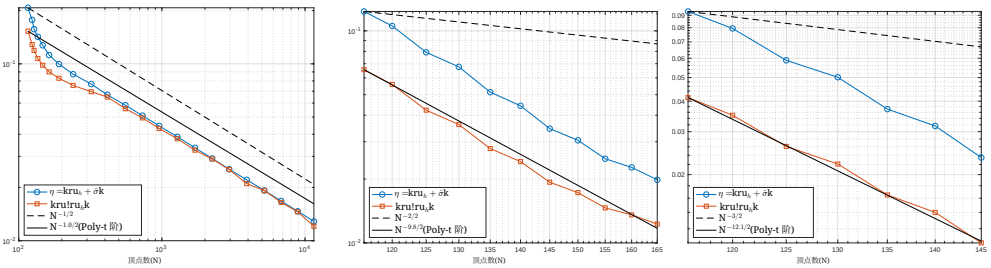

图4：例 7.2 自适应误差收敛结果（对应 $k=1$、2、3

Example 7.3（具有顶点奇异性的正则化 Fichera 角）。*Fichera* 角问题 *[27]* 是二维 L 形

区域。我们考虑其上的泊松方程

$$\Omega = (-1,1)^3 \setminus [0,1)^3,$$

即去掉一个八分体的立方体。为正则化原点处的顶点奇异性，我们使用精确解

$$u(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2+\varepsilon}\right)^q, \quad q = 1/2, \tag{7.1}$$

其中， $\varepsilon > 0$ 是一个较小的正则化参数，我们取 $\varepsilon = 10^{-6}$。

对于三维问题，我们引入一个较小的正则化参数，以避免右端函数 f 中出现除零问题。具体而言， f 与正则化后的精确解保持一致，其定义见（7.1）。我们取 $\theta = 0.15$ ，其中 $k = 1$，3 且 $\theta = 0.3$ ，其中 $k = 2$。对于 $k = 3$，当单元数量达到最大值 4500 时，终止自适应循环，此时相对误差为 1.73%。对于 $k = 1$，当单元数量超过 5×10^5 时，循环停止，此时相对误差为 3.06%。对于 $k = 2$，当相对误差降至 1% 以下时，终止加密。

最终自适应网格如图5所示。与二维结果一致，加密集中在顶点奇异性附近。误差收敛历史见图6。对于 $k = 2$ 和 $k = 3$，真实误差和估计量的收敛率均略高于最优收敛率。对于 $k = 1$，真实误差呈现出预期的最优收敛，而估计量的收敛率则略低，表明效率指数在所有迭代中并非完全一致。估计量收敛率略低，可能受到奇异点附近极细网格上的数值效应（例如求解器容差）的影响；当离散化误差与这些误差相当时，尤为如此。

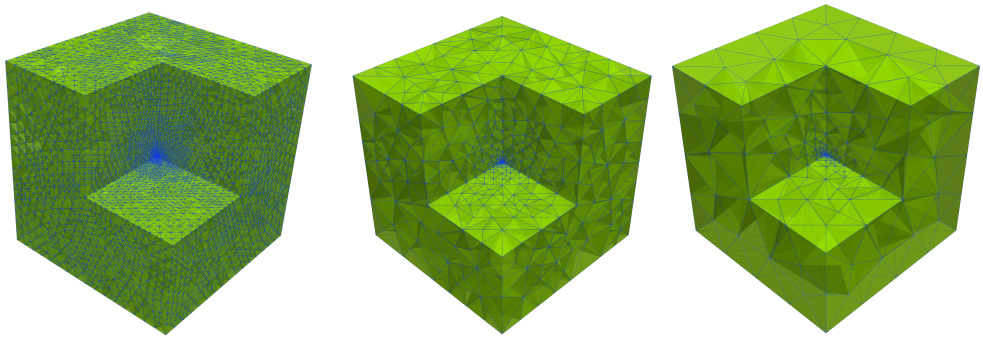

图5：例7.3 的最终自适应网格： $k = 1$，2，3

效率指数分别为 $k = 1$，2，3 对应的 2.93、5.95 和 6.09。

参考文献

[1] M. Ainsworth,*imation* *A posteriori error estimation for discontinuous galerkin finite element approx-* 45 2007 1777 1798 ,SIAM 数值分析杂志, ( ), 第 – 页。

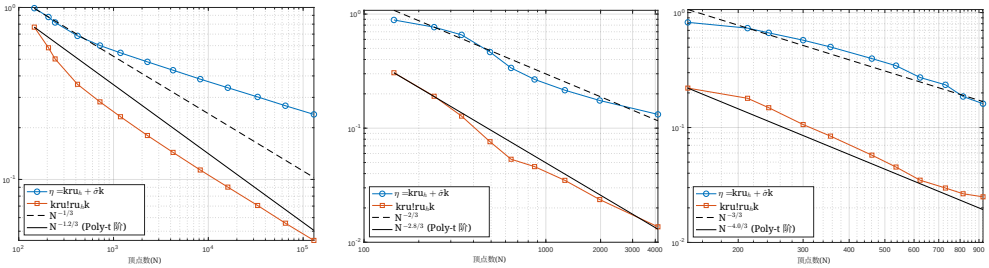

图 6： 例7.3 自适应误差收敛结果： $k = 1,\ 2,\ 3$

[2] M. Ainsworth and J. T. Oden, *A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods* 65 1993 23 50 , 数值数学, ( ), pp. – .

[3] M. Ainsworth and J. T. Oden, *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*, 第 37 卷, John Wiley & Sons, 2000. [4] I. A. Baratta, J. P. Dean J. S. Dokken M. Habera J. HALE C. N. Richardson M. E. , , , , , , , , , Rognes M. W. Scroggs N. Sime and G. N. Wells *Dolfinx: the next generation fenics problem solving environment* 2023 , ( ). [5] P. Bastian, *A fully-coupled discontinuous galerkin method for two-phase flow in porous media with discontinuous capillary pressure* 18 2014 779 796 , 计算地球科学, ( ), pp. – . [6] R. Becker, D. Capatina, and R. Luce, *Local flux reconstructions for standard finite element methods on triangular meshes* 54 2016 2684 , SIAM 数值分析杂志, ( ), pp. – 2706. [7] C. Bernardi and R. Verfürth, *Adaptive finite element methods for elliptic equations with non-smooth coefficients* 85 2000 579 608 , 数值数学, ( ), pp. – .

[8] D. Braess, *Finite elements: Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics*, 剑桥大学出版社, 2007. [9] D. Braess, T. Fraunholz, and R. H. Hoppe, *An equilibrated a posteriori error estimator for the interior penalty discontinuous galerkin method*, SIAM 数值分析杂志, 52 (2014), pp. 2121–2136.

[10] D. Braess, V. Pillwein, and J. Schöberl, *Equilibrated residual error estimates are p-robust*, 计算机方法与应用力学和工程, 198 (2009), pp. 1189–1197. [11] D. Braess and J. Schöberl, *Equilibrated residual error estimator for edge elements*, 计算数学, 77 (2008), pp. 651–672.

[12] R. Bruce Kellogg, *On the poisson equation with intersecting interfaces*, 应用分析, 4 (1974), pp. 101–129.

[13] D. Cai, Z. Cai, and S. Zhang, *Robust equilibrated a posteriori error estimator for higher order finite element approximations to diffusion problems*, 数值数学, 144 (2020), pp. 1–21. [14] Z. Cai, C. He, and S. Zhang, *Improved zz a posteriori error estimators for diffusion problems:Conforming linear elements*, 计算机方法与应用力学和工程, 313 (2017), pp. 433–449. [15] Z. Cai, C. He, and S. Zhang, *Residual-based a posteriori error estimate for interface problems: nonconforming linear elements* 86 2017 617 636 , 计算数学, ( ), pp. – .

[16] Z. Cai, C. He, and S. Zhang, *Generalized prager-synge identity and robust equilibrated error estimators for discontinuous elements*, 计算与应用数学杂志, (2021), p. 113673. [17] Z. Cai and S. Zhang, *Robust equilibrated residual error estimator for diffusion problems: Conforming elements* 50 2012 151 170 , SIAM 数值分析杂志, ( ), pp. – . [18] D. Capatina, A. Gouasmi, and C. He, *Robust flux reconstruction and a posteriori error analysis for an elliptic problem with discontinuous coefficients*, 科学计算杂志, 98 (2024), p. 28. [19] D. Capatina, R. Luce, H. El-Otmany, and N. Barrau, *Nitsche's extended finite element method for a fracture model in porous media* 95 2016 2224 , 应用分析, ( ), pp. – 2242. [20] L. Demkowicz and M. Swierczek, *An adaptive finite element method for a class of variational inequalities*, 载于《意大利-波兰连续介质力学研讨会论文集》, 博洛尼亚, 1987 年。

[21] P. Destuynder and B. Métivet, *Explicit error bounds in a conforming finite element method*, 计算数学, 68 (1999), 第 1379–1396 页。[22] A. Ern, I. Mozolevski, and L. Schuh, *Accurate velocity reconstruction for discontinuousgalerkin approximations of two-phase porous media flows*, 数学报告, 347 (2009), 第 551–554 页。[23] A. Ern, S. Nicaise, and M. Vohralík, *An accurate h (div) flux reconstruction for discon-tinuous galerkin approximations of elliptic problems*, 数学报告, 345 (2007), 第 709–712 页。[24] A. Ern and M. Vohralík, *Polynomial-degree-robust a posteriori estimates in a unified settingfor conforming, nonconforming, discontinuous galerkin, and mixed discretizations*, SIAM 数值分析杂志, 53 (2015), 第 1058–1081 页。

[25] P. Ladeveze and D. Leguillon, *Error estimate procedure in the finite element method and applications* 20 1983 485 509 , SIAM 数值分析杂志, ( ), 第 – 页。[26] M. G. Larson and A. J. Niklasson, *A conservative flux for the continuous galerkin method based on discontinuous enrichment* 41 2004 65 76 , 计算, ( ), 第 – 页。

[27] W. F. Mitchell, *Performance of hp-adaptive strategies for 3d elliptic problems*, (2016)。[28] J. T. Oden, L. Demkowicz, W. Rachowicz, and T. A. Westermann, *Toward a universal hp adaptive finite element strategy part 2. a posteriori error estimation* , , 计算机方法与应用力学和工程, 77 (1989), 第 113–180 页。[29] L. H. Odsæter, M. F. Wheeler, T. Kvamsdal, and M. G. Larson, *Postprocessing of non-conservative flux for compatibility with transport in heterogeneous media*, 计算机方法与应用力学和工程, 315 (2017), 第 799–830 页。[30] M. Petzoldt, *A posteriori error estimators for elliptic equations with discontinuous coefficients* 16 2002 47 75 , 计算数学进展, ( ), 第 – 页。

[31] W. Prager and J. L. Synge, *Approximations in elasticity based on the concept of function space* 5 1947 241 269 , 应用数学季刊, ( ), 第 – 页。

[32] T. Vejchodskỳ, *Guaranteed and locally computable a posteriori error estimate*, IMA 数值分析杂志, 26 (2006), 第 525–540 页。[33] R. Verfürth, *A note on constant-free a posteriori error estimates*, SIAM 数值分析杂志 , 47 (2009), 第 3180–3194 页。[34] M. Vohralík and M. F. Wheeler, *A posteriori error estimates stopping criteria and adaptivity for two-phase flows* 17 2013 789 812 , , , 计算地球科学, ( ), 第 – 页。