arXiv:2601.01591v1 [math.OC] 4 Jan 2026

椭圆型偏微分方程优化问题

G. BUTTAZZO, J. CASADO-DÍAZ, F. MAESTRE

谨以此文献给 *Gioconda Moscariello*，祝贺她七十岁生日

摘要。本文研究由椭圆偏微分方程支配的一些最优控制问题。解即为状态变量，而控制变量则根据具体情况，分别为偏微分方程的系数、势或右端项。代价泛函为积分型泛函，同时涉及状态变量和控制变量。

关键词： 形状优化、最优系数、最优势函数、正则性、最优控制问题、bang-bang性质。
2020年数学主题分类： 49Q10, 49J45, 35B65, 35R05, 49K20。

1. 引言

本文研究由椭圆偏微分方程支配的最优控制问题；状态变量是相应的解，而对于控制变量，我们分析以下三种不同情形。在所有情形中，代价泛函均为积分型，并且可能同时依赖于状态变量和控制变量。边界条件取狄利克雷型；在框架中作适当调整后，也可以考虑其他类型的边界条件。

我们在此用一个统一的框架概述我们在一系列论文中得到的结果（参见 [6], [7], [8]），证明和细节均请参阅这些论文。

- 我们考虑的第一种情形是控制出现在偏微分方程的系数中；更确切地说，状态方程具有如下形式

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\big(a(x)\nabla u\big) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

这里，Ω 是给定的有界开子集 $\mathbb{R}^d$，右端项 f 是预先给定的；控制变量是系数 a。可容许控制集取如下形式

$$\mathcal{A} = \left\{ \int_\Omega \psi(a)\,dx \le 1 \right\} \tag{1.2}$$

且代价泛函为

$$J(u,a) = \int_\Omega j(u,a)\,dx.$$

日期：2026年1月6日。

于是，最优控制问题为

$$\min\big\{J(u,a)\ :\ (u,a)\ \text{satisfy}\ (1.1),\ a\in\mathcal{A}\big\}. \tag{1.3}$$

在第2节中，我们概述了这一情形下已知的结果，这些结果主要是在 [7], 中获得的，读者也可以在那里找到相关参考文献。

• 第二种情形将在第3节中加以说明，其中控制变量是一个势 $V(x)$，偏微分方程的形式为

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

在这种情形下，可容许控制集的形式为

$$\mathcal{V} = \left\{ \int_\Omega \psi(V)\,dx \le 1 \right\}$$

代价泛函为

$$J(u,V) = \int_\Omega j(u,V)\,dx.$$

因此，在第二种情形下，最优控制问题为

$$\min\big\{J(u,V)\ :\ (u,V)\ \text{satisfy}\ (1.4),\ V\in\mathcal{V}\big\}.$$

•第4节中讨论的最后一种情形是，控制变量为右端项 f。偏微分方程的形式为

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.5}$$

且可容许控制集为

$$\mathcal{F} = \left\{ \int_\Omega \psi(f)\,dx \le 1 \right\}.$$

因此，在这种情况下，我们所处理的最优控制问题为

$$\min\big\{J(u,f)\ :\ (u,f)\ \text{satisfy}\ (1.5),\ f\in\mathcal{F}\big\}.$$

2. 最优系数

本节考虑优化问题（1.3）。

2.1. 最优柔量的情形。我们从一个特别有趣的最小柔量问题开始，其中需要最小化的代价泛函为

$$C(a) = \int_\Omega f(x)u_a\,dx,$$

作为偏微分方程 (1.1) 的解 u_a 。最小柔度问题对于构建优化机械结构至关重要；在这类问题中，人们希望利用预先确定数量的材料，在给定力场作用下实现最大刚度。

对 a 施加约束的一种更简单的方法是将问题写成如下形式

$$\min\left\{ C(a) + \lambda \int_\Omega \psi(a)\,dx\ :\ a\ge 0 \right\}, \tag{2.1}$$

其中 $\lambda > 0$ 起到拉格朗日乘子的作用，而 ψ 是一个凸下半连续函数。用 ψ 替换 $\lambda\psi$ 后，我们也可以假设 $\lambda = 1$。

假设 a 属于 $L^\infty(\Omega)$，并且是一致椭圆的，以确保 (1.1) 的解存在，将 (1.1) 两边乘以 u 并进行分部积分，我们得到

$$C(a) = -2E(a),$$

其中 $E(a)$ 是能量

$$E(a) = \inf\left\{ \int_\Omega \Big[\frac{1}{2}a(x)|\nabla u|^2 - f(x)u\Big]\, dx \ : \ u \in H_0^1(\Omega)\right\}.$$

因此，最优控制问题 (2.1) 等价于最大化问题

$$\max\left\{2E(a) - \int_\Omega \psi(a)\, dx \ : \ a \geq 0\right\},$$

随后可将其写成 max/min 形式

$$\max_{a\geq 0} \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} \int_\Omega \Big[a(x)|\nabla u|^2 - 2f(x)u - \psi(a)\Big]\, dx.$$

在某些情况下，我们必须处理奇异的右端项 f （例如集中力，.....）；此时，假设 f 是符号测度会比较方便，并用 $C_c^\infty(\Omega)$ 替代 Sobole夫空间 $H_0^1(\Omega)$。需要注意的是，对于某些系数 a，可能有 $C(a) = +\infty$；例如，当右端项 f 集中在维数小于$d-1$ 的集合上，且系数 a 为正常数时，就会出现这种情况。然而，由于我们寻求的是柔顺度 $C(a)$ 的最小化，因此这些“奇异”情形不在我们的讨论范围内，因为对于使 $C(a) = +\infty$ 的系数 a，该优化问题并不相关。此时能量 $E(a)$ 采取如下形式

$$E(a) = \inf\left\{ \int_\Omega \Big[\frac{1}{2}a(x)|\nabla u|^2\Big]\, dx - \int_\Omega u\, df \ : \ u \in C_c^\infty(\Omega)\right\}$$

上述最大/最小问题变为

$$\max_{a\geq 0} \inf_{u\in C_c^\infty(\Omega)} \left\{ \int_\Omega \Big[a(x)|\nabla u|^2 - \psi(a)\Big]\, dx - 2\int_\Omega u\, df\right\}. \tag{2.2}$$

在这种表述中，由于竞争函数 u 是光滑的，系数 a 也可以是一个（非负）测度；特别是在惩罚函数 ψ 具有线性增长时，这一点十分重要。这样一来，支撑于低维集合上的薄结构也成为可容许的。对于非负测度 μ，能量泛函具有如下形式

$$E(\mu) = \inf\left\{ \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2\, d\mu - \int_\Omega u\, df \ : \ u \in C_c^\infty(\Omega)\right\}$$

最大/最小问题变为

$$\max_{\mu\geq 0} \inf_{u\in C_c^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|^2 d\mu - \int \psi(\mu) - 2\int_\Omega u\, df.$$

项 $\int \psi(\mu)$应理解为关于测度的积分泛函，

$$\int_\Omega \psi\big(\mu^a(x)\big)\,dx + \psi^\infty(1)\,\mu^s(\overline{\Omega}) \tag{2.3}$$

其中，$\mu = \mu^a\,dx + \mu^s$ 是相对于勒贝格测度将 μ 分解为绝对连续部分和奇异部分，而 ψ^∞ 是与 ψ相关的衰退函数。

我们首先考虑这样的情形：式 (1.2) 中的函数 ψ 是超线性的，即

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{\psi(s)}{s} = +\infty; \tag{2.4}$$

在这种情况下，众所周知，系数 a 必须是 $L^1(\Omega)$ 中的函数。

定理 2.1。 在超线性假设(2.4)下，最大/最小问题(2.2) 有一个解 $a_{opt} \in L^1(\Omega)$，前提是右端项 f 满足$E(a) > -\infty$，至少对于一个系数 $a \in L^1(\Omega)$而言。

*Pr*呃。 证明请参见 [7] 。值得注意的是，泛函

$$a \mapsto \inf_{u\in C_c^\infty(\Omega)} \int_\Omega \Big[a(x)|\nabla u|^2 - \psi(a)\Big]\,dx - 2\int_\Omega u\,df$$

对于弱 $L^1(\Omega)$ 收敛，它是凹且上半连续的，因为它是凹且上半连续泛函的下确界。紧性来自著名的德拉瓦莱普桑定理。□

当 ψ 仅呈线性增长时：

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{\psi(s)}{s} = k > 0 \tag{2.5}$$

情况则更为微妙。事实上，在这种情况下，需要使用 $\int_\Omega \psi(\mu)$ 的定义 (2.3)。关于此情形的更多细节，请参阅 [9]；这一情形与最优传输理论密切相关，正如 [4] 和 [3] 首先指出的那样。然而，通过类似于定理 2.1 的论证，仍存在一个最优系数 a_{opt}，但它属于更大的类别 $\mathcal{M}(\Omega)$，即 Ω 上的非负测度，如下文所述（证明见 [7]，其证明方法与上述定理 2.1 类似）。

定理 2.2。 在线性增长假设 (2.5)下，泛函 $E(a)$在类别 $\mathcal{M}(\Omega)$中存在一个最大化解 a_{opt}，前提是右端项 f 满足：对于至少一个系数 $a \in \mathcal{M}(\Omega)$，有 $E(a) > -\infty$。

现在，我们的目标是通过某个合适的辅助变分问题来刻画最优系数 a_{opt}。由于关于变量 u 的凸性以及关于变量 a 的凹性，极小极大理论中的一个著名结果（例如参见 [14] 和 [16]）允许我们交换 inf 和 sup 的顺序，从而得到如下初始问题

$$\inf_{u\in C_c^\infty(\Omega)} \sup_{a\ge 0} \int_\Omega \Big(a(x)|\nabla u|^2 - \psi(a)\Big)\,dx - 2\int u\,df.$$

现在可以轻松求得关于 a 的上确界：

$$\sup_{a\ge 0} \int_\Omega \Big(a(x)|\nabla u|^2 - \psi(a)\Big)\,dx - 2\int u\,df = \int_\Omega \psi^*\big(|\nabla u|^2\big)\,dx - 2\int u\,df,$$

其中， ψ^* 是 ψ的勒让德-芬切尔共轭函数。于是，辅助变分问题为

$$\inf_{u\in C_c^\infty(\Omega)} \int_\Omega \psi^*\big(|\nabla u|^2\big)\,dx - 2\int u\,df.$$

根据勒让德-芬切尔共轭的定义，我们得到

$$\psi^*(t) \geq t - \psi(1) \qquad \text{for every } t$$

由此不难看出，至少当 $f \in H^{-1}(\Omega)$ 时，上述辅助变分问题存在一个解 $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$。此外，若 ψ 在 $\mathbb{R}^+$ 上严格递增，则函数 $s \mapsto \psi^*(s^2)$ 严格凸，因此 $\bar{u}$ 唯一。现在可以通过最优性条件求得最优系数 a_{opt}

$$a_{opt}|\nabla \bar{u}|^2 = \psi(a_{opt}) + \psi^*(|\nabla \bar{u}|^2).$$

例 2.3。设 $\psi(s) = s^p/p$，其中 $p > 1$，并假设 $f \in W^{-1,\,2p/(p+1)}(\Omega)$。根据定理 2.1，存在一个（唯一的）最优系数 $a_{opt} \in L^1(\Omega)$，它实际上属于 $L^p(\Omega)$。可通过辅助变分问题求得：

$$\inf\left\{ \int_\Omega \frac{p-1}{p}|\nabla u|^{2p/(p-1)}\,dx - 2\int u\,df \;:\; u \in W_0^{1,2p/(p-1)}(\Omega)\right\}.$$

或等价地，由非线性偏微分方程给出

$$-\Delta_{2p/(p-1)} u = \frac{2p}{p-1} f, \qquad u \in W_0^{1,2p/(p-1)}(\Omega),$$

其唯一解 $\bar{u}$ 给出了最优系数 $a_{opt}(x) = |\nabla \bar{u}(x)|^{2/(p-1)}$。例如，若 Ω 是单位球，且 $f = 1$ 我们得到（见图1）

$$\bar{u}(x) = \frac{p+1}{2p\,d^{(p-1)/(p+1)}}\big(1 - |x|^{2p/(p+1)}\big), \qquad a_{opt}(x) = \frac{|x|^{2/(p+1)}}{d^{2/(p+1)}}.$$

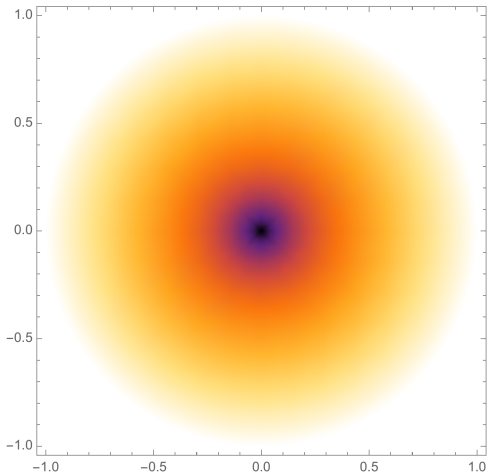

图1. 当 $d = 2$ 时的最优系数，Ω 为单位圆盘，$p = 2$，$f = 1$。

当 $p < d/(d-2)$ 测度属于 $W^{-1,\,2p/(p+1)}(\Omega)$ 时；取 $f = \delta_0$ 原点处的单位狄拉克质量，且 Ω 为单位球，我们得到

$$\bar{u}(x) = A_p(1 - |x|^{(2p-dp+d)/(p+1)}), \qquad a_{opt}(x) = B_p|x|^{-2(d-1)/(p+1)}$$

其中 A_p，B_p 是可显式计算的适当正定常数。例如，在二维情形 $d = 2$ 中，我们得到（见图 2）

$$A_p = \frac{p+1}{2}(2\pi)^{(1-p)/(1+p)}, \qquad B_p = (2\pi)^{-2/(1+p)}.$$

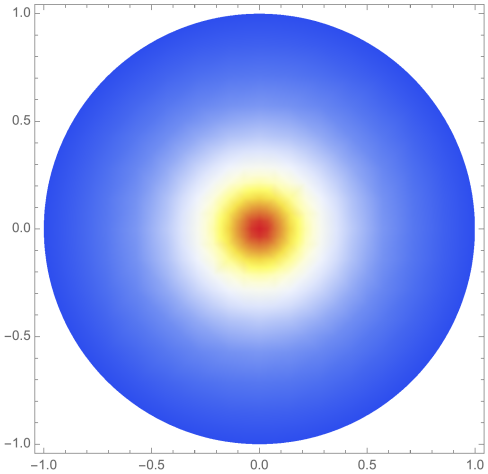

图 2. 当 $d = 2$ 时的最优系数，Ω 为单位圆盘，$p = 2$，$f = \delta_0$。

例 2.4。取

$$\psi(s) = \begin{cases} s & \text{if } \alpha \le s \le \beta \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

当 $0 < \alpha < \beta$ 时，我们有如下辅助变分问题

$$\min\left\{ \int_\Omega \left[\left(|\nabla u|^2 - 1\right)\left(\beta 1_{\{|\nabla u|>1\}} + \alpha 1_{\{|\nabla u|<1\}}\right) - 2f(x)u \right] dx \;:\; u \in H_0^1(\Omega) \right\},$$

其唯一解 $\bar{u}$ 给出了最优系数 $a_{opt} \in L^\infty(\Omega)$。文献 [10]（另见 [11]）已证明，当 Ω 属于 $C^{1,\,1}$ 类且 $f \in L^2(\Omega)$ 时，$\bar{u}$ 属于 $H^2(\Omega)$，而 $\nabla a_{opt} \cdot \nabla \bar{u}$ 属于 $L^2(\Omega)$。

2.2. 一般情形。对于一般形式的最优控制问题

$$\min_{a \ge 0} \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \int_\Omega \big(j(x,u) + \psi(a)\big)\, dx \;:\; u \text{ solves (1.1)} \right\}, \tag{2.6}$$

最优系数 a_{opt} 可能不存在，而解仅在松弛意义下存在。关于解 a_{opt} 不存在的反例可在 [18], 中找到，其中

$$\psi(s) = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha \le s \le \beta \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $0 < \alpha < \beta$，并且

$$j(x, s) = |s - u_0(x)|^2$$

对于一个适当的函数 u_0。另一个反例如 [7]所示。

最优系数不存在的原因在于与 (2.6) 相关的松弛问题的形式。关于这个问题，人们围绕 G-收敛这一概念进行了大量研究；该概念由 De Giorgi 和 Spagnolo 在[15]中提出：如果对于每个 $f \in L^2(\Omega)$，偏微分方程的解 u_n $a_n(x)$（其中函数取值介于 α 和 β 之间）都

$$-\operatorname{div}\left(a_n \nabla u_n\right) = f, \qquad u_n \in H_0^1(\Omega)$$

在 $L^2(\Omega)$ 中收敛到偏微分方程的解 u

$$-\operatorname{div}\left(A \nabla u\right) = f, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

因此，最优控制问题 (2.6) 的松弛形式与 G-闭包 $\mathcal{A}$ 的刻画密切相关，其中 $\mathcal{A}$ 是可容许系数$a(x)$的集合。Murat 和 Tartar 在 [19], [20] 中给出了完整的答案（关于二维情形，另见 [1], 和 [17] ）。他们证明，上述 G-闭包$\mathcal{A}$ 由所有满足以下条件的对称 $d \times d$ 矩阵 $A(x)$构成：其特征值 $\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \cdots \leq \lambda_d(x)$ 介于 α 和 β 之间，并且满足某个适当的 $t \in [0, 1]$（依赖于 x）所给出的以下 $d + 2$ 不等式：

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{1 \leq i \leq d} \frac{1}{\lambda_i - \alpha} \leq \frac{1}{\nu_t - \alpha} + \frac{d-1}{\mu_t - \alpha} \\ \displaystyle\sum_{1 \leq i \leq d} \frac{1}{\beta - \lambda_i} \leq \frac{1}{\beta - \nu_t} + \frac{d-1}{\beta - \mu_t} \\ \nu_t \leq \lambda_i \leq \mu_t \qquad i = 1, \ldots, d, \end{cases} \tag{2.7}$$

μ_t 分别是 α 和 β的算术平均值与调和平均值，即

$$\mu_t = t\alpha + (1-t)\beta, \qquad \nu_t = \left(\frac{t}{\alpha} + \frac{1-t}{\beta}\right)^{-1}.$$

例如，当 $d = 2$时，上述集合由对称的 2×2 矩阵$A(x)$构成，其特征值 $\lambda_1(x)$和 $\lambda_2(x)$介于 α 与 β 之间，并满足不等式

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \lambda_1(x)} \leq \lambda_2(x) \leq \alpha + \beta - \frac{\alpha\beta}{\lambda_1(x)}\,.$$

图3展示了 $d = 2$、 $\alpha = 1$、 $\beta = 2$的情形。

注2.5。 对于一般函数 $\psi(x,\ a)$，松弛的显式形式 n

$$\Psi(A) = \inf_{a_n \to_G A} \liminf_n \int_\Omega \psi(x, a_n)\, dx$$

尚未知。 $\psi(x,\ a) = g(x)a$ 已在 [12] 和 [13]中得到研究；例如，在 $g(x)$为常数 γ 且系数 a受限于两个正定常数 α 和 β之间这一特殊情形下，记 $\lambda_{max}(A)$为

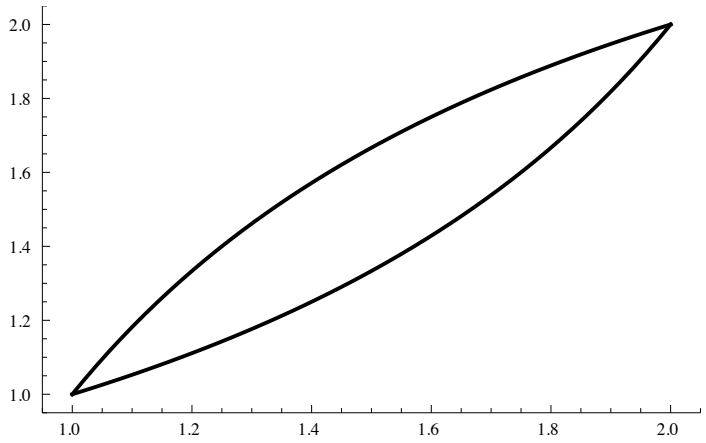

图 3. 在平面 $(\lambda_1,\ \lambda_2)$ 中的可达矩阵，其中 $d = 2$,$\alpha = 1$, $\beta = 2$。

$d \times d$ 对称矩阵 A的最大特征值，松弛 $\Psi(A)$由下式给出

$$\Psi(A) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \gamma\lambda_{max}\big(A(x)\big)\,dx & \text{if } A \in \overline{\mathcal{A}} \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $\overline{\mathcal{A}}$ 是上述描述的 G-闭包。

例 2.6. 对于 $\Omega = (0,\ 1)^2$，我们取

$$j(x,s) = s, \qquad f(x_1,x_2) = x_1^2,$$

$$\psi(s) = \begin{cases} s & \text{if } 5 \le s \le 10 \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

我们对该问题的松弛形式进行数值求解，寻找一个最优解 A_{opt}，其特征值满足 (2.7)。

图 4 左侧展示了计算得到的最优矩阵 A_{opt} 的最优第一特征值，右侧展示了比值 λ_2/λ_1。值得注意的是，存在正测度区域，其中 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，因此 A_{opt} 是一个松弛解。

3. 最优势函数

本节将探讨一类优化问题，其特征是对如下形式的泛函进行最小化

$$\min \int_\Omega \big[j(x,u) + \psi(V)\big]\,dx, \tag{3.1}$$

其由状态方程控制

$$\begin{cases} -\Delta u + Vu = f & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{3.2}$$

其中，与上一节一样，Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个有界开子集，而右端项为 $f \in L^2(\Omega)$。被积函数 $j(x,u)$ 表示状态变量的贡献

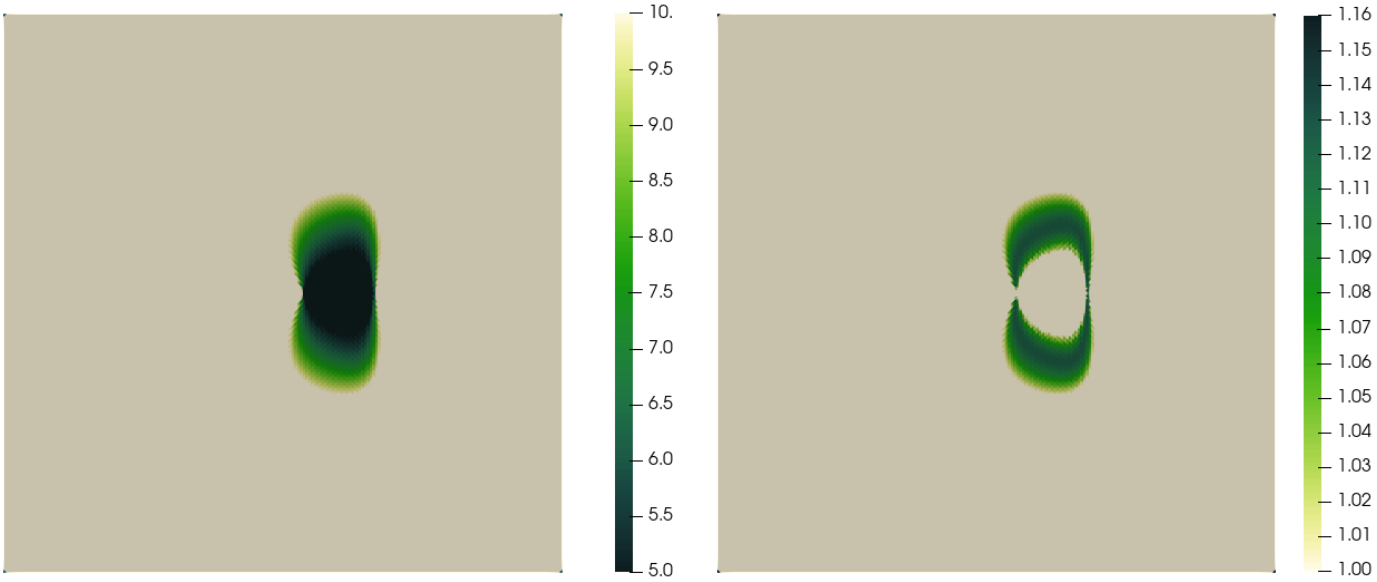

图 4。左：最优第一特征值。右：比值 λ_2/λ_1。

，而 $\psi(V)$ 则刻画与控制变量 V 相关的代价；在此语境中， V 是势函数，并假设其在 Ω 上几乎处处非负。

我们进一步假设， ψ 在无穷远处具有超线性增长。根据德拉瓦莱普桑定理，这一增长条件确保任何成本有限的可行势 V 都必须属于空间 $L^1(\Omega)$。

同样地，柔顺性情形对应于选择 $j(x,\ u) = f(x)u$，由于对方程（3.2）进行分部积分后，可以将问题化为如下变分形式，因此该情形尤其简单：

$$\min\Big\{-2\mathcal{E}(V)+\Psi(V)\ :\ V\in L^1(\Omega),\ V\geq 0\Big\}, \tag{3.3}$$

其中，泛函 $\mathcal{E}$ 和 Ψ 定义为

$$\Psi(V)=\int_\Omega \psi(V)\,dx$$

$$\mathcal{E}(V)=\min\left\{\int_\Omega\left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2+\frac{1}{2}Vu^2-f(x)u\right]dx\ :\ u\in H_0^1(\Omega)\right\}.$$

在这一特定情形下，可以利用问题的变分结构完全消去控制变量 V，从而将原始最优控制问题化为一个更简单的辅助变分问题。更准确地说，可以仅用状态变量 u对最小化（3.3）进行重新表述，如下：

$$\min\left\{\int_\Omega\left[|\nabla u|^2+\psi^*(u^2)-2f(x)u\right]\,dx\ :\ u\in H_0^1(\Omega)\right\}, \tag{3.4}$$

其中， ψ^* 表示函数 ψ的勒让德-芬切尔变换。我们注意到，变分问题（3.4）的唯一极小化子 $\bar{u}$ 可被刻画为

半线性椭圆边值问题的解

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = f \quad \text{in } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

其中，函数 g 定义为

$$g(s) = s(\psi^*)'(s^2).$$

现在可以通过以下公式，根据最优状态 $\bar{u}$求出最优控制 V_{opt}

$$V_{opt} = (\psi^*)'(\bar{u}^2).$$

然而，值得注意的是，这种基于消去控制变量的约化技巧，仅适用于代价泛函中的被积函数$j(x,\ u)$与柔顺性情形相关的情况。在一般情形下，若 $j(x,\ u)$是状态的任意函数，则无法再进行这种消去。此时，分析必须依赖最优性系统，该系统通常需要引入伴随状态变量，并求解相应的伴随偏微分方程，同时与原状态方程耦合。

尽管存在这些复杂性，可以证明，带有状态方程(3.2)的原最优控制问题(3.1)至少存在一个解对$(\bar{u},\ V_{opt})$。这一结果已在 [6], 中得到，我们在下文给出存在性定理。

定理 3.1。 设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个有界开集， $j : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是关于第一个分量可测、关于第二个分量下半连续的被积函数，并满足增长条件

$$a(x) - c|s|^2 \le j(x, s)$$

对适当的 $c \ge 0$ 和 $a \in L^1(\Omega)$，且 $\psi : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ 是一个凸的下半连续函数，满足 $\mathrm{dom}(\psi) \subset [0, \infty)$，并满足超线性条件

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{\psi(s)}{s} = +\infty$$

成立。那么，对每个 $f \in H^{-1}(\Omega)$，问题(3.1) 至少有一个解 $V_{opt} \in L^1(\Omega)$。

在 [6] 中也研究了解的性质。特别是，在对数据和被积函数作出适当假设的条件下，证明量$V_{opt}\bar{u}v$ 属于有界变差函数空间 $BV(\Omega)$，其中 v 表示伴随方程 (3.5) 的解。这意味着一个重要结论：最优控制 V_{opt} 在集合 $\{\bar{u}v = 0\}$之外局部 BV 。因此，退化集 $\{\bar{u}v = 0\}$在决定最优控制中奇异性的结构方面发挥着核心作用。

更准确地说，在 [6] 中得到了以下最优性必要条件。

定理 3.2。 假设右端项 f 属于 $W^{-1,\ r}(\Omega)$ 且满足 $r > d$，并且被积函数 $j(x, \cdot)$ 属于 $C^1(\mathbb{R})$ 类，且满足

$$j(\cdot, 0) \in L^1(\Omega), \qquad \max_{|s|\le M} |\partial_s j(\cdot, s)| \in L^{r/2}(\Omega) \quad \forall\, M > 0.$$

那么，若 V_{opt} 是问题 (3.1)的一个最优控制， $\bar{u}$ 是对应的状态函数，也是(3.2)的解，而 v 是伴随状态，也是下列问题的解

$$\begin{cases} -\Delta v + V_{opt} v = \partial_s j(x, \bar{u}) & in\ \Omega \\ v = 0 & on\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

我们有最优性条件

$$\begin{cases} V_{opt} \in L^\infty(\Omega) \\ \bar{u}v \in \partial\psi(V_{opt}) \\ h_-(\bar{u}v) \le V_{opt} \le h(\bar{u}v), \end{cases} \tag{3.6}$$

其中， $h:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是函数

$$h(t) = \max\big\{ s \in \mathrm{dom}(\psi)\ :\ t \in \partial\psi(s) \big\}. \tag{3.7}$$

注 3.3. 由（3.6）以及椭圆方程的正则性结果，我们推得：如果（3.7）中的函数 h 以及函数 j 和 f 满足某些正则性假设，则最优控制 V_{opt} 具有更高的正则性。我们回顾一下，

$$\begin{cases} h \text{ is continuous } \iff \psi \text{ is strictly convex} \\ h \text{ is Lipschitz continuous } \iff \inf\limits_{\substack{s_1, s_2 \in \mathrm{dom}(\psi) \\ s_1 < s_2}} \dfrac{d_-\psi(s_2) - d_+\psi(s_1)}{s_2 - s_1} > 0, \end{cases}$$

其中，函数 $d_+\psi$ 和 $d_-\psi$ 定义为

$$\begin{cases} d_+\psi(s) := \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \dfrac{\psi(s+\varepsilon) - \psi(s)}{\varepsilon} \in (-\infty, \infty] \\ d_-\psi(s) := \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \dfrac{\psi(s) - \psi(s-\varepsilon)}{\varepsilon} \in [-\infty, \infty) \end{cases}$$

最优控制 V_{opt} 的 BV正则性可由以下结果推出（见 [6]）。

定理3.4。 除定理*3.1*中的条件外，我们还假设Ω属于 $C^{1,1}$类，函数 $g(t) := t\,h(t)$ 关于 t 非递减，并且对每个 $M > 0$

$$\max_{|s| \le M} |\nabla_x \partial_s j(\cdot, s)| \in L^q(\Omega), \qquad \max_{|s| \le M} |\partial^2_{ss} j(\cdot, s)| \in L^1(\Omega),$$

with

$$q \ge \frac{2d}{d+1} \ \ if\ 1 \le d \le 2, \qquad q > \frac{d}{2} \ \ if\ d \ge 3.$$

那么，对每个 $f \in BV(\Omega) \cap L^q(\Omega)$，我们有

$$\bar{u}, v \in W^{2,q}(\Omega), \qquad \bar{u}v V_{opt} \in BV(\Omega),$$

其中 $\bar{u}$、 v 分别是(3.2) 和(3.5)的解。

注3.5。 在定理3.4的假设下，函数 $\bar{u}$ 和 v 连续，因此，集合 K：$= \{\bar{u}v = 0\}$ 是 Ω 的闭子集，并包含边界 $\partial\Omega$。由于 $\bar{u}v V_{opt}$ 属于 $BV(\overline{\Omega})$，因此可证明 V_{opt} 属于 $BV_{loc}(\Omega \setminus K)$。

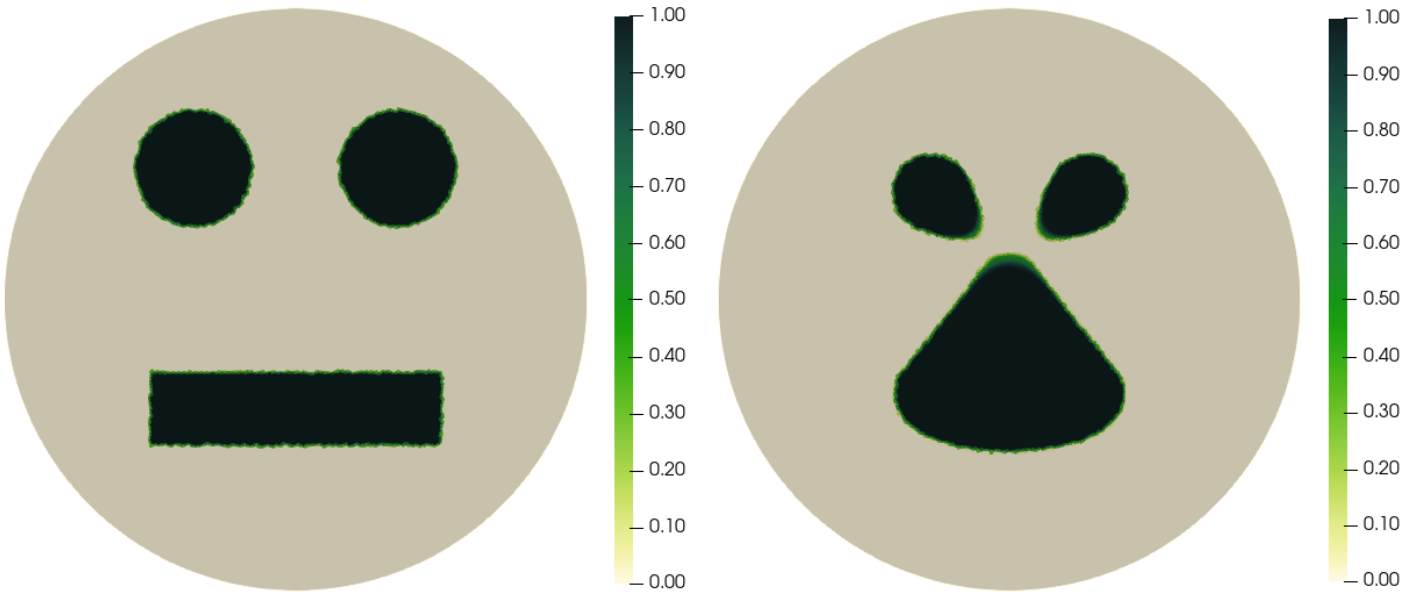

图5。左：右端函数 f。右：计算得到的最优势函数。

注3.6。 我们注意到，在对函数 ψ 所作的一般假设下，最优势 V_{opt} 不具有更高的正则性。例如，当函数 ψ 具有如下形式时

$$\psi(s) = \begin{cases} s & \text{if } s \in [\alpha, \beta] \qquad (\text{with } 0 \le \alpha < \beta) \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

最优控制 V_{opt} 属于*bang-bang* 型，即

$$\hat{m} = \alpha + (\beta - \alpha)1_E$$

对于某个合适的集合 E，根据定理3.4，该集合具有有限周长。在 [6] 中可以找到若干数值模拟，展示了该集合 E 以上在各种情形下的行为。

例 3.7。 为了对注3.6进行数值验证，我们考虑问题 (3.1)-(3.2)，其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为单位球，

$$j(x,s) = s, \qquad \psi(s) = \infty 1_{(-\infty,\alpha)\cup(\beta,+\infty)} + ks1_{[\alpha,\beta]},$$

and

$$f(x_1,x_2) = 1_{\omega_1}(x_1,x_2) + 1_{\omega_2}(x_1,x_2) + 1_{\omega_3}(x_1,x_2).$$

其中，$\omega_i = B(c_i,\ r)$、$i = 1$，2 是半径为 $r = 0.2$ 的小球，其中心分别为 c_1 =(0.35，0.45)、c_2 =(−0.35，0.45)，ω_3 为矩形 $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, -0.25]$，见图5左侧。取 $\alpha = 0$、$\beta = 1$ 和 $k = 0.00225$，图5右侧展示了计算得到的开关型最优势函数。

4. 最优源

本节讨论有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 上泊松方程的最优控制问题，并满足齐次狄利克雷边界条件。控制变量为源项 f，其受容许类 $\mathcal{F}$约束。状态方程为

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{4.1}$$

其中， u_f 表示给定 f时的唯一弱解。目标是最小化以下形式的代价泛函

$$J(f) = \int_\Omega j(x, u_f, f)\, dx, \tag{4.2}$$

满足约束 $f \in \mathcal{F}$，其中容许类 $\mathcal{F}$ 定义为

$$\mathcal{F} = \left\{ \int_\Omega \psi(f)\, dx \le m \right\},$$

对于凸的下半连续函数 ψ： $\mathbb{R} \to [0, \infty]$ ，使得

$$\begin{cases} \operatorname{int}(D(\psi)) \neq \emptyset \ \text{ with } D(\psi) = \{ s \in \mathbb{R} : \ \psi(s) < \infty \} \\ \lim\limits_{|s| \to +\infty} \psi(s) = +\infty. \end{cases}$$

于是，优化问题可写为

$$\min \left\{ \int_\Omega j(x, u_f, f)\, dx \ : \ \int_\Omega \psi(f)\, dx \le m \right\}. \tag{4.3}$$

一个尤为有趣的情形是，当 $\psi(s) = +\infty$ 在区间 $[\alpha, \beta]$之外；在这种情况下，最优控制可能呈现*bang-bang* 行为，仅取值 α 和 β，也就是说

$$f = \beta 1_E + \alpha 1_{\Omega \setminus E}$$

对于某个可测集 $E \subset \Omega$。此时，问题就转化为一个形状优化问题，其中 E 作为控制变量。

我们的目标是分析最优源 f_{opt} 的正则性；在 bang-bang 解的情况下，这将进一步带来上述最优集合 E 的正则性。所有细节以及展示这些现象并提供最优构型示例的一些数值模拟，请参阅文章 [8] 。

关于最优解的一个初步存在性结果适用于函数 ψ 满足超线性增长条件的情形

$$\lim_{|s| \to +\infty} \frac{\psi(s)}{|s|} = +\infty. \tag{4.4}$$

我们还假设，泛函 (4.2) 关于弱 $L^1(\Omega)$ 拓扑是下半连续的；例如，假设被积函数 $j(x, \cdot, \cdot)$ 对于几乎处处的 x 关于其自变量是下半连续的，并且 $j(x, s, \cdot)$ 对于几乎处处的 x 及任意 s 都是凸的，即可保证这一点（例如参见 [5]）。

定理 4.1。 假设泛函 (4.2)关于弱 $L^1(\Omega)$ 拓扑是下半连续的，被积函数 $j(x,s,z)$ 满足增长条件

$$-c|s|^p - a(x) \le j(x,s,z), \qquad with\ c>0,\ a\in L^1(\Omega),\ p<d/(d-2),$$

且函数 ψ 满足超线性增长条件 (4.4)。那么，优化问题 (4.3) 至少存在一个解 $f_{opt}\in L^1(\Omega)$。

当函数 ψ 仅具有线性增长时：

$$c|s| - a \le \psi(s) \qquad \text{for some constants } c>0,\ a\in\mathbb{R}, \tag{4.5}$$

情况就更为复杂，因为最优解可能是测度，而积分 $\int_\Omega \psi(f)$ 必须按测度的意义来解释，即：

$$\int_\Omega \psi(f) = \int_\Omega \psi\big(f^a(x)\big)\,dx + c^+(\psi)\int df^s_+ - c^-(\psi)\int df^s_- \tag{4.6}$$

其中，$f = f^a dx + f^s$ 是测度 f 分解为绝对连续部分和奇异部分的拉东-尼科迪姆分解，f_+ 和 f_- 分别表示 f 的正部分和负部分，而 $c^-(\psi)$ 和 $c^+(\psi)$ 是 ψ 的衰退极限，定义如下：

$$c^-(\psi) = \lim_{s\to-\infty}\frac{\psi(s)}{s} \qquad c^+(\psi) = \lim_{s\to+\infty}\frac{\psi(s)}{s}\,.$$

众所周知（见 [5]），形如 (4.6) 的泛函关于测度的弱*收敛是下半连续的。

泛函 J 在 (4.2) 中关于测度的弱*收敛的下半连续性，在此情形下需要更具体的假设（更一般的情形请参见 [2]）。这里我们假设被积函数 $j(x,\ s,\ z)$ 可分解为如下形式

$$j(x,s,z) = A(x,s) + B(x,z),$$

其中，函数 A 和 B 满足以下性质：

- 对几乎处处的 $x\in\Omega$，函数 $A(x,\ \cdot)$ 是下半连续的；- 我们有

$$A(x,s) \ge -c|s|^p + a(x)$$

对于适当的 $c>0, p<d/(d-2),\ a\in L^1(\Omega)$；

- 对几乎处处的，函数 $B(x,\ \cdot)$ 是凸且下半连续的 $x\in\Omega$；
- 衰退函数

$$B^\infty(x,z) = \lim_{t\to+\infty}\frac{B(x,tz)}{t}$$

关于两个变量（$x,\ z$）都是下半连续的；

- 我们有

$$B(x,z) \ge a_0(x)z + a_1(x)$$

对于适当函数 $a_0\in C_0(\Omega)$ 和 $a_1\in L^1(\Omega)$。

上述假设足以保证泛函(4.2)关于测度的弱*收敛具有下半连续性，并且我们有如下存在性结果。

定理 4.2. 假设泛函 (4.2) 满足上述关于测度的弱*收敛下的下半连续性条件，且被积函数 j 满足增长条件

$$-c|s|^p - a(x) \le j(x,s,z), \qquad for\ some\ c>0,\ a\in L^1(\Omega),\ p<d/(d-2),$$

并且函数 ψ 具有线性增长(4.5)。那么，优化问题(4.3) 至少存在一个最优解 f_{opt}，它是一个全变差有限的测度。

定理 4.1 和 4.2 已经阐明了解的存在性相关问题，现在我们可以考察问题的任意解都必须满足的必要最优性条件。为此，引入预解算子 $\mathcal{R}$很有帮助，它在接下来的分析中起着核心作用。算子 $\mathcal{R}$ 定义为：对每个函数 f ，将其关联到偏微分方程 (4.1) 的唯一解 u 。众所周知，算子 $\mathcal{R}$ 是自伴的。

我们首先分析函数 ψ 具有超线性增长的情形，如条件 (4.4) 所述。

定理 4.3。 假设最优控制问题 (4.3) 的代价泛函定义中出现的被积函数 j 满足以下增长条件：

$$|j(x,s,z)| \le a(x) + c|s|^p, \qquad with\ c>0,\ a\in L^1(\Omega),\ p<d/(d-2).$$

此外，我们假设函数 ψ 满足 (4.4) 中给出的超线性增长条件。并且假设，对于几乎处处的 $x\in\Omega$ ，以及所有的 $(s,z)\in\mathbb{R}^2$，偏导数 $\partial_s j(x,s,z)$ 和 $\partial_z j(x,s,z)$ 存在并满足以下不等式：

$$\begin{cases} |\partial_s j(x,s,z)| \le b(x) + \gamma\big(|s|^\sigma + |z|^\tau\big) \\ |\partial_z j(x,s,z)| \le \gamma, \end{cases}$$

其中 $\gamma>0, b\in L^q(\Omega)$ ，且 $q>d/2, \sigma<2/(d-2)$，以及 $\tau<2/d$。

那么，若 f_{opt} 是问题 (4.3) 的一个最优解，则存在一个非负标量 $\lambda\ge 0$ ，使得令

$$w := \mathcal{R}\big(\partial_s j(x,\mathcal{R}(f_{opt}),f_{opt})\big) + \partial_z j(x,\mathcal{R}(f_{opt}),f_{opt}),$$

以下两种情况之一成立：

- 若 $\lambda=0$，则

$$\begin{cases} w\ge 0\ \ a.e.\ in\ \Omega\ \ if\ \sup\big(\mathrm{dom}(\psi)\big)=+\infty \\ w\le 0\ \ a.e.\ in\ \Omega\ \ if\ \inf\big(\mathrm{dom}(\psi)\big)=-\infty \\ f_{opt}=\min\big(\mathrm{dom}(\psi)\big)\ \ a.e.\ in\ \big\{w>0\big\} \\ f_{opt}=\max\big(\mathrm{dom}(\psi)\big)\ \ a.e.\ in\ \big\{w<0\big\}. \end{cases}$$

- 如果 $\lambda>0$，那么 $\int_\Omega \psi(f_{opt})dx = m$ 并且

$$\psi\big(f_{opt}\big) + \psi^*\big(-\frac{w}{\lambda}\big) = -\frac{w f_{opt}}{\lambda} \qquad a.e.\ in\ \Omega.$$

此外，如果函数 $j(x,\cdot,\cdot)$ 对几乎处处的 $x\in\Omega$ 都是凸的，那么上述条件不仅是最优性的必要条件，也是充分条件。

当函数 ψ 具有线性增长时，如条件 (4.5) 所述，我们有类似的结果。

定理 4.4. 假设函数 ψ 具有线性增长，且被积函数 j 仅依赖于(x, s) ，而不依赖于 z，并满足增长条件

$$|j(x,s)| \le a(x) + c|s|^p, \qquad with\ c>0,\ a \in L^1(\Omega),\ p < d/(d-2).$$

我们还假设，对于几乎处处的 $x \in \Omega$ 以及每个 $s \in \mathbb{R}$，偏导数$\partial_s j(x, s)$ 存在且满足

$$|\partial_s j(x,s)| \le b(x) + \gamma|s|^\sigma,$$

其中仍有 $\gamma > 0$, $b \in L^q(\Omega)$ 以及 $q > d/2$, $\sigma < 2/(d-2)$。

那么，与上文一样，若 f_{opt} 是问题(4.3)的一个最优解，则存在一个非负标量 $\lambda \ge 0$ ，令

$$w := \mathcal{R}\big(\partial_s j(x, \mathcal{R}(f_{opt}))\big) + \partial_z j(x, \mathcal{R}(f_{opt})),$$

以下两种情况之一成立：

- 如果 $\lambda = 0$，那么

$$\begin{cases} w \ge 0\ \ a.e.\ \ in\ \Omega\ \ if\ \ \sup\big(\mathrm{dom}(\psi)\big) = +\infty \\ w \le 0\ \ a.e.\ \ in\ \Omega\ \ if\ \ \inf\big(\mathrm{dom}(\psi)\big) = -\infty \\ f^a_{opt} = \min\big(\mathrm{dom}(\psi)\big)\ \ a.e.\ \ in\ \big\{w > 0\big\} \\ f^a_{opt} = \max\big(\mathrm{dom}(\psi)\big)\ \ a.e.\ \ in\ \big\{w < 0\big\} \\ \mathrm{supp}(f^s_{opt}) \subset \{w = 0\}. \end{cases}$$

- 如果 $\lambda > 0$，那么 $\int_\Omega \psi(f_{opt}) = m$ 且

$$\begin{cases} \psi\big(f^a_{opt}\big) + \psi^*\big(-\dfrac{w}{\lambda}\big) = -\dfrac{w f^a_{opt}}{\lambda}\ \ a.e.\ \ in\ \Omega \\ -\lambda c^+(\psi) \le w \le -\lambda c^-(\psi)\ \ a.e.\ \ in\ \Omega \\ \mathrm{supp}(f^s_{opt,+}) \subset \big\{w + \lambda c^+(\psi)) = 0\big\} \\ \mathrm{supp}(f^s_{opt,-}) \subset \big\{w + \lambda c^-(\psi)) = 0\big\}. \end{cases}$$

再次，如果函数 $j(x, \cdot)$ 对于几乎处处的 $x \in \Omega$ 都是凸的，那么上述条件不仅是最优性的必要条件，而且也是充分条件。

例 4.5。取

$$j(u) = -\frac{u^2}{2}, \qquad \psi(s) = \frac{s^2}{2}.$$

于是，优化问题为

$$\max\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega u_f^2\,dx\ :\ \int_\Omega f^2 dx \le 2m\right\}. \tag{4.7}$$

由定理 4.3，最优性必要条件给出：对于适当的 $\lambda > 0$和 $w = -\mathcal{R}\big(\mathcal{R}(f)\big)$

$$w = -\lambda f\ \ \text{in } \Omega, \quad \int_\Omega f^2 dx = 2m.$$

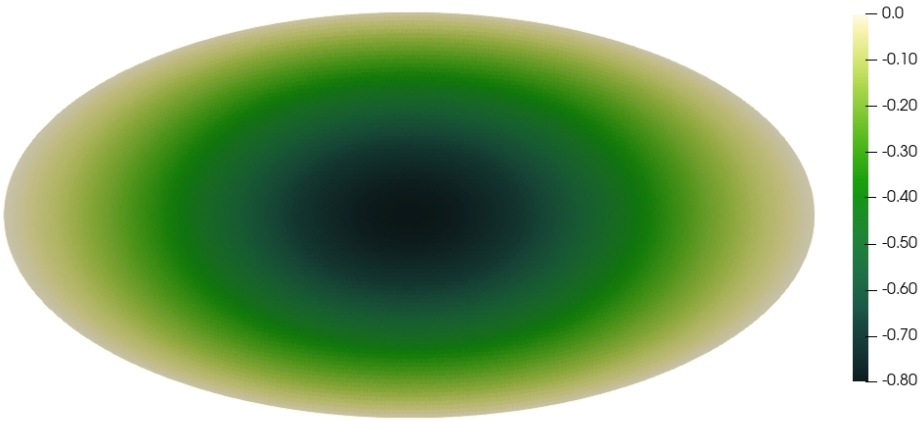

图6。最优源项。

因此， f 求解以下四阶偏微分方程的特征值问题

$$\begin{cases} \Delta^2 f = f/\lambda & \text{in } \Omega \\ f = \Delta f = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

或者等价地，它是拉普拉斯算子特征值问题的一个解

$$\begin{cases} -\Delta f = f/\sqrt{\lambda} & \text{in } \Omega \\ f = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

由于这意味着 $u_f = \sqrt{\lambda} f$, 我们也有

$$\int_\Omega u_f^2 dx = \lambda \int_\Omega f^2 dx = 2\lambda m.$$

因此， $1/\sqrt{\lambda}$ 与具有齐次狄利克雷条件的拉普拉斯算子的较小特征值一致。记该特征值为 μ_1 ，取 ϕ为具有单位 L^2 范数的唯一正特征向量，则我们已经证明

$$\lambda = 1/\mu_1^2, \quad f = \pm\sqrt{2m}\phi.$$

对于 $m = 1/2$ 且 $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 4x_2^2 \le 4\}$ 我们在图6中展示了问题（4.7）计算得到的最优源项及其相应的 $\lambda = 0.0785912$。

关于最优源项的正则性 f_{opt}，目前尚无一般性结果；有关这一问题的讨论，请参见 [6]。此处我们仅考虑对源项施加约束的柔顺度泛函这一特殊情形：

$$\min \left\{ \int_\Omega f\mathcal{R}(f)\, dx \ : \ \int_\Omega f\, dx \ge m, \ f(x) \in [\alpha, \beta] \right\}, \tag{4.8}$$

其中 $0 \le \alpha < \beta$ 以及 $\alpha|\Omega| < m < \beta|\Omega|$。应用定理 4.3 可得，最优解 f_{opt} 为 bang-bang 型，即

$$f_{opt} = \alpha 1_E + \beta 1_{\Omega\setminus E} \qquad \text{with } E = \{\mathcal{R}(f_{opt}) < s\}, \tag{4.9}$$

对于某个正数 s，该正数必须选取为使积分约束$\int_\Omega f\,dx \geq m$ 达到饱和。因此，函数 $u = \mathcal{R}(f_{opt})$ 满足偏微分方程

$$\begin{cases} -\Delta u = \beta 1_{\{u<s\}} + \alpha 1_{\{u>s\}} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

现在我们可以应用 [6] 的定理 3.5，得到以下结果。

定理 4.6。 最小化问题 (4.8)的最优解 f_{opt} 属于$BV(\Omega)$，因此上文 (4.9) 中的最优集合 E 具有有限周长。

当定义域 Ω 为凸集时，在某些情况下，我们可以得到最优右端项 f_{opt} 更好的正则性。回到带有 $\alpha = 0$ 的柔顺性情形 (4.8)，并假设 Ω 为凸集。上文已看到，最优右端项 f_{opt} 属于 $BV(\Omega)$，且为 bang-bang 型：$f_{opt} = 1_E$，其中 $E = \{w < s\}$，对某个适当的 s，使得 $|E| = m$，其中 w 是偏微分方程的解

$$\begin{cases} -\Delta w = 1_{\{w<s\}} & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

[8] 中的结果如下。

定理 4.7。 上述最优集合 $E = \{w < s\}$ 是凸的，且属于 C^1类 .

致谢。 GB 的研究工作属于项目 2017TEXA3H“梯度流、最优输运与度量测度结构”的一部分，该项目由意大利研究与大学部资助。GB 是意大利高等数学国家研究所（INdAM）数学分析、概率论及其应用国家研究组（GNAMPA）的成员。JCD 和 FM 的研究工作属于西班牙政府西班牙科学、创新与大学部 的 FEDER 项目 PID2023-149186NB-I00 的一部分。

参考文献

[1] *G. Allaire*：《通过均匀化方法进行形状优化》。*Appl. Math. Sci. 146, Springer-Verlag，纽约，2002*。[2] *G. Bouchitté，G. Buttazzo*：《定义在测度上的非凸泛函的新下半连续性结果》。*Nonlinear Anal., 15 (1990), 679–692*。[3] *G. Bouchitté，G. Buttazzo*：《通过蒙日-康托罗维奇方程刻画最优形状与质量》。*J. Eur. Math. Soc., 3 (2001), 139–168*。[4] *G. Bouchitté，G. Buttazzo，P. Seppecher*：《通过蒙日-康托罗维奇方程求解形状优化问题》。*C. R. Acad. Sci. Paris, 324-I (1997), 1185–1191*。[5] *G. Buttazzo*：《变分法中的半连续性、松弛与积分表示》。*Pitman Res. Notes Math. Ser. 207，Longman，哈洛（1989）*。[6] *G. Buttazzo，J. Casado-Díaz，F. Maestre*：《椭圆方程控制问题中最优势函数的正则性》。*Adv. Calc. Var., 17 (4) (2024), 1341–1364*。[7]*G. Buttazzo，J. Casado-Díaz，F. Maestre*：《椭圆偏微分方程的最优系数》。*J. Convex Anal.,*（即将发表），预印本见 *https://arxiv.org* 和 *https://cvgmt.sns.it*。[8] *G. Buttazzo，J. Casado-Díaz，F. Maestre*：《椭圆偏微分方程的最优源项》。预印本见 *https://arxiv.org* 和 *https://cvgmt.sns.it*。

[9] *G. Buttazzo，M.S. Gelli，D. Lučić*：《具有凸成本的质量优化问题》。*SIAM J. Math. Anal., 55 (5) (2023), 5617–5642*。[10] *J. Casado-Díaz*：《使能量最小化的两种复合材料最优设计的一些光滑性结果》。*Calc. Var. Partial Differential Equations, 53 (2015), 649–673*。[11] *J. Casado-Díaz*：《两种各向同性材料的最优混合物的光滑性：柔顺度与特征值问题》。*SIAM J. Cont. Optim., 53 (2015), 2319–2349*。[12] *E. Cabib*：《两相导体的松弛控制问题》。*Ann. Univ. Ferrara, 33 (1987), 207–218*。[13] *E. Cabib，G. Dal Maso*：《结构设计中的一类最优问题》。*J. Optimization Theory Appl., 56 (1988), 39–65*。[14] *F.H. Clarke*：《变分法中利普希茨函数的多重积分》。*Proc. Amer. Math. Soc., 64 (1977), 260–264*。[15] *E. De Giorgi，S. Spagnolo*：《关于二阶椭圆算子能量积分的收敛性》。*Boll. Un. Mat. Ital., 8 (4) (1973), 391–411*。[16] *I. Ekeland*：《博弈论》。*Presses Univ. France，巴黎，1974*。[17] *K.A. Lurie，A.V. Cherkaev*：《各向同性材料二元混合物电导率的精确估计》。*Proc. Royal Soc. Edinburgh, 104 A (1986), 21–38*。[18] *F. Murat*：《控制作用于系数时若干问题的反例》。*Ann. Mat. Pura Appl., 112 (1977), 49–68*。[19] *F. Murat，L. Tartar*：《最优性条件与均匀化》。载于《非线性变分问题》论文集，*Res. Notes in Math. 127，Pitman*，伦敦，（*1985*），*1–8*。[20] *L. Tartar*：《均匀化系数的精细估计》。载于《恩尼奥·德·乔治研讨会》论文集，*Res. Notes in Math. 125，Pitman*，伦敦，（*1985*），*168–187*。

Giuseppe Buttazzo：比萨大学数学系，
Largo B. Pontecorvo 5，56127 比萨，意大利
giuseppe.buttazzo@unipi.it
http://www.dm.unipi.it/pages/buttazzo/

Juan Casado-Díaz：塞维利亚大学微分方程与数值分析系，Tarfia街 s/n，
41012 塞维利亚，西班牙 jcasadod@us.es
https://prisma.us.es/investigador/724

Faustino Maestre：塞维利亚大学微分方程与数值分析系，Tarfia街 s/n，
41012 塞维利亚，西班牙 fmaestre@us.es
https://prisma.us.es/investigador/2406