arXiv:2601.01607v1 [cs.GT] 4 Jan 2026

多件商品销售中最优机制的存在性：一个初等证明*

Sergiu Hart† Noam Nisan‡

2026年1月6日

摘要

我们给出了一个初等证明：只要估值分布的期望有限，多参数环境中就存在收益最大化机制。

1 引言

考虑一个基本设定：在贝叶斯设定下，单个卖方向单个买方出售多种商品，且卖方只知道买方估值的概率分布。最大化卖方基于该分布所获期望收益的最优机制是什么？与已被彻底解决的单商品情形 [Mye81], 不同，由于问题具有“多参数”性质，这实际上是一个难题。例如，参见 [BCKW10, CHMS10, DW11, Tha04, MM88, MV06, HN12, HN13, DDT13, DDT15, HR15, BGN17],等众多文献。

*初稿：2024年6月。

†耶路撒冷希伯来大学（费德曼理性研究中心、经济系和数学系）。电子邮件：hart@huji.ac.il网站：http://www.ma.huji.ac.il/hart

‡耶路撒冷希伯来大学（费德曼理性研究中心和计算机科学与工程学院）。本研究得到以色列科学基金会资助（基金编号：505/23）。电子邮件：noam@cs.huji.ac.il 网站：http://www.cs.huji.ac.il/~noam

本文探讨一个更基础的问题：最优机制是否存在？（另一种可能是，机制能够提取越来越高的收益，却始终无法达到最大的极限收益。）拥有这样的收益最大化机制，可以让我们简化各种论证，并省去那些以令人厌烦的“设 $\varepsilon > 0$，并设 μ 是一个至少能从 X 中提取 $\textsc{Rev}(X) - \varepsilon$ 收益的机制”开头的构造。

下面的例子表明，即使在单个商品的情形下，最优机制也不一定总是存在。假设该商品的估值由随机变量 X 给出，对每个 $t \geq 0$ 都有 $\mathbb{P}[X \geq t] = 1/(t+1)$（即概率密度为 $1/(t+1)^2$）。因此，固定价格 p 所能获得的收益为 $p \cdot \mathbb{P}[X \geq p] = p/(p+1)$，所以，根据 [Mye81],，最优收益为 $\textsc{Rev}(X) = \sup_{p \geq 0} p/(p+1) = 1$，但不存在有限价格 p，，因此不存在能够实现收益 1 的机制（机制是固定价格机制的凸组合）。[1]

对于多种商品，[DDT15] 的精巧但复杂的对偶分析表明：当估值有界，且概率分布具有可微并拥有有界导数的连续概率密度时，最优机制是存在的。

在本文中，我们在随机估值仅满足有限期望（即，可积）这一极弱条件下，为最优机制的存在性提供了一个简单的初等证明。

证明策略正如人们所预期的那样：证明机制的“极限”本身也是一个机制。问题在于如何恰当地定义这一极限。直接考察分配和支付的极限似乎并不能奏效。正如我们将要展示的，有效的方法是考察买方收益函数的（逐点）极限。

我们采用以下相当一般的形式化表述来陈述结果。记 $\Gamma \subset \mathbb{R}_+^k$ 为买方可能获得的“分配”集合，其中 Γ 可以是任意紧致（有界且闭）的非负 k 维

[1] 该示例的离散版本：对于每个整数 $n \geq 0$，令 $\mathbb{P}[X \geq n] = 1/(n+1)$，即 $\mathbb{P}[X = n] = 1/((n+1)(n+2))$。

向量。[2] 买方估值由另一个非负 k 维向量 $x \in \mathbb{R}_+^k$ 给出，它为每种可能的分配 $g \in \Gamma$ 赋予一个实数值 $g \cdot x = \sum_{i=1}^{k} g_i x_i$。这种形式化表述直接刻画了具有加性估值以及单位需求的 k 商品机制，也抽象地刻画了具有 k 种选择的实现，既适用于确定性机制，也适用于一般的（随机化）机制；见表1。大多数其他设定（例如组合估值）都很容易归约到上述两种情形之一，其中 k 是相应的参数数量（对于组合拍卖，k 随商品数量呈指数增长）。

设定	**确定性机制**	**随机化机制**
一种商品	$\Gamma = \{0, 1\}$	$\Gamma = [0, 1]$
k 件商品，采用加性估值	$\Gamma = \{0, 1\}^k$	$\Gamma = [0, 1]^k$
k 件商品，采用单位需求	$\Gamma = \{\mathbf{0}, e^1, ..., e^k\}$	$\Gamma = \{g \in [0, 1]^k : \sum_i g_i \leq 1\}$
使用 k 个选项实现	$\Gamma = \{e^1, ..., e^k\}$	$\Gamma = \{g \in [0, 1]^k : \sum_i g_i = 1\}$

表1：Γ的一些选择。我们用 e^i 表示方向为 i的单位向量，并用$\mathbf{0}$ 表示全零向量。

在此设定中，一个机制 μ 由两个函数构成：分配函数 $q : \mathbb{R}_+^k \to \Gamma$，以及支付函数 $s : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}$。我们要求机制同时满足激励相容（激励相容），即对于每个 x 和 y，若 $\mathbb{R}_+^k$，则 $q(x) \cdot x - s(x) \geq q(y) \cdot x - s(y)$；并且满足个体理性（个体理性），即对于每个 x，若 $\mathbb{R}_+^k$.，则$q(x) \cdot x - s(x) \geq 0$

我们考虑这样一个贝叶斯环境：买方的估值由取值于 $\mathbb{R}_+^k$ 的随机变量 X 给出；卖方只知道 X 的分布（我们将 X 称为随机估值）。机制μ从 X中获得的收益是期望支付，即 $R(\mu; X) := \mathbb{E}[s(X)],$；而从 X中可获得的最优收益为 $\textsc{Rev}_\Gamma(X) := \sup_\mu R(\mu; X)$,

[2]我们将 $\mathbb{R}_+$ 记作 $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x : x \geq 0\}$。

其中，上确界取遍所有（激励相容且个体理性）的机制 μ。现在可以陈述我们的定理了。

定理1 对于任意紧致的可能分配集合 Γ，以及任意具有有限期望的 k商品随机估值 X，都存在收益最大化机制 μ，即 $R(\mu;\ X) = \textsc{Rev}_\Gamma(X)$。

因此（根据表1），在可加情形和单位需求情形下，对于 k 件商品，均可达到 $\textsc{Rev}$；确定性机制的收益 $\textsc{DRev}$也同样如此。对于捆绑销售收益 $\textsc{BRev}$和分别销售收益 $\textsc{SRev}$，这可由单商品情形推出。[3]在附录中，我们将展示如何利用我们的构造，证明其他机制子类也存在：单调机制和分配单调机制。

2 模型

令 $k \geq 1$ 为维数。估值的定义域是 $\mathbb{R}^k_+$，即 $\mathbb{R}^k$ 的非负正交象限，而分配集合是一个非空紧集 $\Gamma \subset \mathbb{R}^k_+$（例如单位立方体、单位单纯形或它们的顶点）。[4] 令 γ :=最大值$_{g\in\Gamma} \|g\|$.

2.1 机制

一个（直接） Γ-机制 μ 由两个函数组成：分配函数q : $\mathbb{R}^k_+ \to \Gamma$ 和支付函数 s : $\mathbb{R}^k_+ \to \mathbb{R}$。如果机制 μ 满足激励相容 （激励相容），则称其为

$$q(x) \cdot x - s(x) \geq q(y) \cdot x - s(y)$$

对于每个 x 和 y，其中 $\mathbb{R}^k_+$；并且它是个体理性（个体理性），如果

$$q(x) \cdot x - s(x) \geq 0$$

[3]对于 $\textsc{BRev}$，取 $\Gamma = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ 即可得出这一结论，其中$\mathbf{1}$ 表示全 $\mathbf{1}$ 向量。[4]分配 g 和估值 x 属于对偶 $\mathbb{R}^k$ 空间，且都方便地赋予标准欧几里得范数（这里不需要精确的界，因此没有像 [HN25] 那样使用更合适的范数）。

对于每个 x ，其中 $\mathbb{R}_{+}^{k}$. 。因此，当买方的估值（或类型）为 x，时，他的收益为

$$b(x) := q(x) \cdot x - s(x), \tag{1}$$

而该机制的收益（或收益额）为 $s(x)$。个体理性（IR）要求

$$b(x) \geq 0$$

对每个 $x \in \mathbb{R}_{+}^{k}$，激励相容（IC）则要求

$$b(x) = \max_{z \in \mathbb{R}_{+}^{k}} [q(z) \cdot x - s(z)] \tag{2}$$

对每个 $x \in \mathbb{R}_{+}^{k}$. 此后，我们将机制记作[5] $\mu = (q, \ s, \ b)$。

2.2 收益

一个随机估值 X 是一个取值于 $\mathbb{R}_{+}^{k}$. 的随机变量。机制 $\mu = (q, \ s, \ b)$从 X 中获取的收益为 $R(\mu; X) := \mathbb{E}[s(X)]$, , 而从 X 中所能获取的最优收益为

$$\textsc{Rev}_{\Gamma}(X) := \sup R(\mu; X),$$

其中，上确界取遍所有 IC 和 IR Γ-机制 μ。

在最大化收益时，只需考虑满足无正向转移（NPT）性质的激励相容且个体理性机制： $s(x) \geq 0$对每个 x都成立。事实上，如果最低支付（即 $s(0)$，根据 0 处的激励相容性）为负，那么将所有支付增加 $|s(0)|$ ，既能保持激励相容性和个体理性，又能提高收益。此外，由于 $b(0) = -s(0)$，对于个体理性机制，NPT 等价于 $s(0) = 0$，进而等价于 $b(0) = 0$ （参见[HN12]中的命题 6）。

令 $\mathcal{M}_{\Gamma}$ 表示所有激励相容、个体理性且满足 NPT Γ的机制所构成的集合。

[5]虽然 b 完全由 q 和 s 决定，但为了便于陈述下文内容，将 b 也纳入 μ 中会更方便（而不是说“一个具有买方收益函数b的机制 μ”）。

2.3 买方收益函数

为了避免处理[6] $\mathbb{R}^k_+$边界上的无关紧要的技术问题，将买方收益函数 b 延拓到 $\mathbb{R}^k_+$的一个开邻域中，事实上延拓到整个空间 $\mathbb{R}^k$ （参见[HR15]的附录），会比较方便，具体如下：

$$b(x) := \sup_{z\in\mathbb{R}^k_+} [q(z)\cdot x - s(z)] \tag{3}$$

对于每个 $x \in \mathbb{R}^k$ （即通过扩展（2））。所得函数 b 对每个 $x \in \mathbb{R}^k$ 都有良好定义且为有限值，因为对于每个 $z \in \mathbb{R}^k_+$，函数 $q(z)\cdot x - s(z)$ 关于 x 是 γ-Lipschitz 的（回顾 $\gamma = \max_{g\in\Gamma} \|g\|$），因此这些函数的上确界 b 也是如此：对于每个 x，$y \in \mathbb{R}^k$ 都有 $|b(x) - b(y)| \leq \gamma \|x - y\|$。下文中，$b$ 始终表示这个扩展函数 b：由（3）给出的 $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$。

现在回顾凸函数的一些基本概念（参见 [Roc70],第 23–25 节；关于收敛结果，尤其参见其中的定理 24.5、24.6 和 25.6）。设 f： $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 是定义在$\mathbb{R}^k$ 上的实凸函数（即 dom $f = \mathbb{R}^k$）。若向量 $g \in \mathbb{R}^k$ 满足对所有 $y \in \mathbb{R}^k$，均有 $f(y) - f(x) \geq g\cdot(y - x)$，则称其为 f 在 $x \in \mathbb{R}^k$处的次梯度。 f在 x处的次梯度集合，记作 $\partial f(x)$，是一个非空的凸紧集。当 b 在 x处可微（几乎处处成立）时，唯一的次梯度就是梯度，即 $\partial b(x) = \{\nabla b(x)\}$；令 D 表示b 可微的点集。 f 在 $x \in \mathbb{R}^k$ 处沿方向$y \in \mathbb{R}^k$的方向导数为 $f'(x; y) := \lim_{\delta\to 0^+}(f(x + \delta y) - f(x))/\delta$。该导数总是存在，并且$f'(x; y) = \max\{g\cdot y\colon g \in \partial f(x)\}$；令 $\partial f(x)_y := \{g \in \partial f(x)\colon g\cdot y = f'(x; y)\}$ 表示最大化元集合。设 $x_n \to x$；若 g_n 是 f 在 x_n 处的次梯度，即 $g_n \in \partial f(x_n)$，且 $g_n \to g$，则 g是 f在 x处的次梯度，即 $g \in \partial f(x)$；此外，若 $x_n \to x$ 来自方向 y，即 $(x_n - x)/\|x_n - x\| \to y$，则次梯度 g 在方向 y 上是最大的，即 $g \in \partial f(x)_y$。最后，次梯度集合 $\partial b(x)$是梯度序列 $\nabla b(x_n)$ 所有极限点的闭凸包，其中 x_n 是 D 中收敛到x的一个序列。

[6]例如，在边界点处，次梯度的坐标可以为（任意大的）负值。

令 $\mathcal{B}_\Gamma$ 表示所有满足 $b(0) = 0$且次梯度属于 Γ的凸函数 $b : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 所构成的集合；这意味着对每个 x ，在 $\mathbb{R}^k$ 处都存在一个属于 Γ的次梯度，即 $\partial b(x) \cap \Gamma \neq \emptyset$。由于 Γ 是紧集，只需要求对每个 $x \in \mathbb{R}^k$ ，只要 b在该点可微，即$x \in D$，就有 $\nabla b(x) \in \Gamma$ 。事实上，取 D 中的点列 x_n ，使其收敛到 x；梯度 $\nabla b(x_n)$都属于紧集 Γ，因此序列 $\nabla b(x_n)$的任一极限点——它是极限点 x处的次梯度——也属于[7]Γ。此外，取 $x_n \in D$ 使其从方向y收敛到 x ——例如，取 D 中的 x_n ，使其与 $x+(1/n)y$的距离小于 $1/n^2$ ——即可得到，对任意 x 以及 $\mathbb{R}^k$中的 y ，都有 $\partial b(x)_y \cap \Gamma \neq \emptyset$ 。最后，不等式$b(y) \geq b(x) + g \cdot (y - x)$，结合 $g \in \partial b(x) \cap \Gamma$ ，可得 $b(x) - b(y) \leq \gamma \|x - y\|$，因此 $\mathcal{B}_\Gamma$ 中的每个函数 b 都是 γ-Lipschitz；再结合 $b(0) = 0$，可知

$$|b(x)| \leq \gamma \, \|x\| \tag{4}$$

对每个 x ，属于 $\mathbb{R}^k$.

2.4 买方收益函数与机制

以下是一个经典结果（参见 [Roc85], [HN12]），现将其改述为适用于一般 Γ-机制的形式。

命题 2 设 $\mu = (q, s, b)$ 是一个 Γ-机制。那么， μ 属于 $\mathcal{M}_\Gamma$ ，当且仅当函数 b 属于 $\mathcal{B}_\Gamma$ ，并且对于每个 $x \in \mathbb{R}^k_+$，向量 $q(x) \in \Gamma$ 是 b 在 x 处的一个次梯度，即 $q(x) \in \partial b(x) \cap \Gamma$。

证明。若 μ 属于 $\mathcal{M}_\Gamma$ ，则 b 是凸函数（因为它是仿射函数的上确界），且满足 $b(0) = 0$ （由个体理性和 NPT）。对于每个 $x \in \mathbb{R}^k_+$ ，向量 $q(x) \in \Gamma$ 是 b 在 x处的次梯度，因为对于每个 $y \in \mathbb{R}^k$ ，我们有$b(y) \geq q(x) \cdot y - s(x) = b(x) + q(x) \cdot (y - x)$（由激励相容）。对于 x 中不属于 $\mathbb{R}^k_+$ 的情形，由于 Γ 是紧致的，存在 $(g, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}$ 属于 $\{(q(z) \; s(z))$ 的闭包 : $z \in \mathbb{R}^k_+\}$ （即 μ的“菜单”），使得 $b(x) = g \cdot x - t$，于是如上所述，

[7]当集合 Γ 还是凸集时，所有 次梯度都属于 Γ，即 $\partial b(x) \subseteq \Gamma$ 对每个 $x \in \mathbb{R}^k$ 均成立（根据 [Roc70]中的定理 25.6）。

$b(y) \geq g \cdot y - t = b(x) + g \cdot (y - x)$，因此 $g \in \Gamma$ 是 b 在x处的次梯度。因此，对每个 $x \in \mathbb{R}^k$，都有 $\partial b(x) \cap \Gamma \neq \emptyset$，故 $b \in \mathcal{B}_\Gamma$。

反之，若 $b \in \mathcal{B}_\Gamma$，则对每个 $x \in \mathbb{R}^k_+$，选取 $q(x) \in \partial b(x) \cap \Gamma \neq \emptyset$，并令 $s(x) := q(x) \cdot x - b(x)$；此时 IR 成立，因为对任意 $x \in \mathbb{R}^k_+$，都有 $b(x) \geq b(0) + q(0) \cdot (x - 0) \geq 0$（利用 $q(0) \in \partial b(0)$、$b(0) = 0$ 以及 $q(0) \in \Gamma \subset \mathbb{R}^k_+$）；IC 成立，因为对任意 x、$y \in \mathbb{R}^k_+$，都有 $q(y) \cdot x - s(y) = b(y) + q(y) \cdot (x - y) \leq b(x)$（该不等式是因为 $q(y) \in \partial b(y)$）；NPT 成立，因为 $b(0) =$ ■。

接下来，我们看看支付如何由买方收益函数决定（见 [HR15]）。

命题 3 设 $b \in \mathcal{B}_\Gamma$。对于 $\mathcal{M}_\Gamma$ 中的每个 $\mu = (q, s, b)$，我们都有 $s(x) \leq b'(x; x) - b(x)$，对每个 $x \in \mathbb{R}^k_+$ 均成立；并且存在一个机制 $\mu^* = (q^*, s^*, b)$ 属于 $\mathcal{M}_\Gamma$，满足 $s^*(x) = b'(x; x) - b(x)$，对每个 $x \in \mathbb{R}^k_+$ 均成立。

证明。由于根据命题 2 有 $q(x) \in \partial b(x)$，我们得到 $s(x) = q(x) \cdot x - b(x) \leq b'(x; x) - b(x)$。在命题 2 的证明中由 b 构造 μ 时，我们还可以选择使 $q^*(x)$ 在 x 方向上达到最大，即对于每个 $x \in \mathbb{R}^k_+$，有 $q^*(x) \in \partial b(x)_x \cap \Gamma \neq \emptyset$；于是 $q^*(x) \cdot x = b'(x; x)$，因此 $s^*(x) := q^*(x) \cdot x - b(x) = b'(x; x) - b(x)$。 ■

命题 3 的机制 μ^* 被称为卖方有利 机制[HR15], ，它能够使卖方从所有具有相同买方收益函数 b的机制中获得最高支付（这相当于买方在无差异时作出有利于卖方的选择）；在最大化收益时，卖方有利机制是唯一需要考虑的机制。因此，$\textsc{Rev}_\Gamma(X) = \sup \mathbb{E}[b'(X; X) - b(X)]$, 其中，上确界取遍所有$b \in \mathcal{B}_\Gamma$。

3 证明

证明首先要说明，买方收益函数集合相对于逐点收敛是序列紧致的（见下文命题

4），其次要说明，收益关于这种收敛是上半连续的（见下文命题 5，该命题用到了估值[8]的可积性）。

命题 4 设 b_n，对于 $n = 1, 2, \ldots$，是 $\mathcal{B}_\Gamma$. 中的一个函数序列。那么存在一个子序列 n'，不失一般性地记原函数序列为 n，使得 b_n 逐点收敛到极限函数 b，即 $\lim_{n\to\infty} b_n(x) = b(x)$ 对每个 $x \in \mathbb{R}^k$ 都成立，且函数 b 属于 $\mathcal{B}_\Gamma$。

证明。对每个 x，序列 $(b_n(x))_{n\geq 1}$ 有界（由 $\gamma \|x\|$ 给出；见式（4））， 因此 [Roc70] 的定理 10.9 可得结论。[9] 根据 [Roc70], 中的定理 24.5，集合 $\partial b_n(x)$ 收敛到集合 $\partial b(x)$，因此 $\partial b_n(x) \cap \Gamma \neq \emptyset$ 蕴含$\partial b(x) \cap \Gamma \neq \emptyset$（因为 Γ 是紧致的）。结合 $b(0) = \lim_n b_n(0) = 0$，我们得到 $b \in \mathcal{B}_\Gamma$.

■

命题 5 设对于 $n = 1$、2、……， $\mu_n =$（q_n、 s_n、 b_n）以及 $\mu =$（q、 s、 b） 都是 $\mathcal{M}_\Gamma$ 中的机制。若 b_n 逐点收敛于 b，且 μ 对卖方有利，则

$$\limsup_{n\to\infty} s_n(x) \leq s(x)$$

对于每个 x，从而

$$\limsup_{n\to\infty} R(\mu_n; X) \leq R(\mu; X)$$

对于每个具有有限期望的随机估值 X 。

证明。对于 $\mathbb{R}^k_+$ 中的每个 x，我们有

$$\limsup_{n\to\infty} s_n(x) \leq \limsup_{n\to\infty} [b'_n(x; x) - b_n(x)] \leq b'(x; x) - b(x) = s(x)$$

（第一个不等式由命题 3 得出，第二个不等式是因为根据 [Roc70], 中的定理 24.5，$\limsup_n b'_n(x; x) \leq b'(x; x)$，最后一个等式则是因为 μ 对卖方有利）。

[8]正如引言中的例子所示，否则最优机制未必存在。[9]构造是标准的（参见赫利选择定理和 Arzel`a–Ascoli 定理；对于估值的有界定义域，后者已足够）：取一个稠密点集，对这些点我们可以得到一列收敛的子序列，然后使用“对角”子序列，并应用连续性。

接下来,

$$0 \le s_n(x) \le q_n(x) \cdot x \le \|q_n(x)\| \, \|x\| \le \gamma \, \|x\|$$

（前两个不等式由 NPT 和个体理性得出）对每个 x in $\mathbb{R}^k_+$ and $n \ge 1$ 都成立，因此，对于可积的 X，序列 $s_n(X)$ 由可积函数 $\gamma \, \|X\|$ 控制。因此,

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} R(\mu_n; X) &= \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[s_n(X)\right] \\ &\le \mathbb{E}\left[\limsup_{n\to\infty} s_n(X)\right] \le \mathbb{E}\left[s(X)\right] = R(\mu; X), \end{aligned}$$

其中第一个不等式是将 Fatou引理应用于非负函数序列 $\gamma \, \|X\| - s_n(X)$ 得出的。 ■

这就证明了我们的结论:

定理1的证明。设 $\mu_n = (q_n, s_n, b_n)$（$n \ge 1$）是 $\mathcal{M}_\Gamma$ 中的机制序列，使得 $R(\mu_n; X) \to_n \mathrm{REV}_\Gamma(X)$；因此，根据命题 2，$b_n \in \mathcal{B}_\Gamma$。接着，命题 4 给出 $b \in \mathcal{B}_\Gamma$ 和一个子序列 n'；不失一般性，我们将其视为原序列 n，使得 b_n 逐点收敛到 b。接下来，命题 3 给出一个卖方有利机制$\mu = (q, s, b)$，它属于 $\mathcal{M}_\Gamma$，且对每个 x in $\mathbb{R}^k_+$.，都有 $s(x) = b'(x; x) - b(x)$。最后，根据命题 5，$R(\mu; X) \ge \lim_n R(\mu_n; X) = \mathrm{REV}_\Gamma(X)$；由于$\mu$属于 $\mathcal{M}_\Gamma$，这里取等号。

■

A 附录：机制的子类

存在性结果能否推广到机制子类？如我们所见，当该子类对应于某个分配的紧集 Γ 时，答案显然是肯定的（例如确定性机制就是如此，其中 $\Gamma = \{0, 1\}^k$）。不过，我们上述的证明适用于任何在买方收益函数逐点收敛下封闭的机制子类；也就是说，只要命题 5 中存在一个“极限”机制 μ，且它与机制序列 μ_n属于同一子类即可。

我们在此给出两个有趣子类的结果：单调机制和分配单调机制（见 [HR15、BHN22]）。

A.1 单调机制

如果对于每个 $y \geq x$，都有 $s(y) \geq s(x)$，则机制 $\mu = (q, s, b)$ 是单调的。令 $\text{MonRev}_\Gamma(X)$ 表示从X 中通过单调的 Γ-机制可提取的最大收益。结果如下：

定理6 对于任意可能分配的紧集 Γ，以及任何具有有限期望的 k 商品随机估值 X，都存在一个单调收益最大化机制 μ，即 $R(\mu; X) = \text{MonRev}_\Gamma(X)$。

同样，该结果适用于加性估值设定和单位需求设定，适用于一般的（随机化）机制，也适用于确定性机制。与第3节中的证明一样，这里的证明使用以下附加结果。

命题7 设 $\mu_n = (q_n, s_n, b_n)$（$n = 1, 2, \ldots\ldots$）以及 $\mu = (q, s, b)$ 是 $\mathcal{M}_\Gamma$ 中的Γ-机制。若所有 μ_n 均为单调的，b_n 逐点收敛至 b，且 μ 是卖方有利的，则 μ 也具有单调性。

证明。设 $y \geq x$ 是 $\mathbb{R}^k_+$中的两点；我们需要证明 $s(y) \geq s(x)$。

(i) 首先假设 x 属于 D（b 可微的点构成的稠密集），因此 $q(x) = \nabla b(x)$。由 [Roc70], 中的定理 24.5 可得$q_n(x) \to_n q(x)$，因此 $s_n(x) = q_n(x) \cdot x - b_n(x) \to_n q(x) \cdot x - b(x) = s(x)$。现在，对每个 n 都有 $s_n(y) \geq s_n(x)$（因为 μ_n 是单调的），因此根据命题 4可知 $s(y) \geq \limsup_n s_n(y) \geq \lim_n s_n(x) = s(x)$。

(ii) 对于一般的$x \in \mathbb{R}^k_+$（不一定属于 D），我们按如下方式进行。取 x^m 为 D 中的一列点，使得 $x^m \geq x$ 和 $x^m \to_m x$ 来自方向 x；于是 $q(x^m) = \nabla b(x^m) \to_m \partial b(x)_x$。由于对于每个$g \in \partial b(x)_x$，都有 $g \cdot x = b'(x; x)$，因此 $s(x^m) = q(x^m) \cdot x^m - b(x^m) \to_m b'(x; x) - b(x) = s(x)$。令 $y^m := y + x^m - x$；则 $y^m \to_m y$且 $y^m \geq x^m \in D$，因此由上面的(i)可得 $s(y^m) \geq s(x^m)$。函数 s是上半连续的（因为 b' 是

上半连续的，且 b 连续；参见 [Roc70]中的定理 10.1和推论 24.5.1），因此 $s(y) \geq$ 上极限$_m\, s(y^m) \geq$ 极限$_m\, s(x^m) = s(x)$。

因此，在两种情况下，$s(y) \geq s(x)$，证明完毕。 ■

我们注意到，当极限 μ 不具有卖方有利性时，它未必是单调的（只需在某处以“错误的方式”打破平局即可）。

A.2 分配单调机制

如果对于每个 $y \geq x$，都有 $q(y) \geq q(x)$，那么机制 $\mu = (q, s, b)$ 就是分配单调的。令 $\mathrm{AMONREV}_\Gamma(X)$ 表示从 X 中通过分配单调的 Γ 机制所能获得的最大收益。

定理 8 对于每个可能分配的紧集 Γ，以及每个期望有限的 k 商品随机估值 X，都存在一个分配单调的收益最大化机制 μ，即 $R(\mu; X) = \mathrm{AMONREV}_\Gamma(X)$。

证明中我们将用到：

命题 9 设 $\mu_n = (q_n, s_n, b_n)$、$n = 1,2,\ldots\ldots$以及 $\mu = (q, s, b)$ 是 Γ 在 $\mathcal{M}_\Gamma$ 中的机制。若所有 μ_n 均为分配单调，b_n 逐点收敛到 b，且 μ对平局有利（即既对卖方有利，也对买方有利），那么 μ 也具有分配单调性。

证明。在 [BHN22]（定理 C、命题 4.1 和附录 A-6）中，已经证明，对于偏向平局的机制，μ是分配单调的，当且仅当 b 是在 $\mathbb{R}^k_+$. 上的超模函数。取极限时，超模不等式显然仍然成立：若 $b_n \to b$ 逐点收敛，且对每个 n，b_n 都是超模函数，那么 b也是超模函数。对于超模函数，在每个点都存在一个逐坐标最大次梯度 $q^*(x)$，它必定属于Γ（只需取 x^m 中沿方向 (1，1，……，1) 收敛于 x 的点 D 即可看出），因此，对这个 b而言，使用q^*的唯一偏向平局机制是分配单调的，并且属于 $\mathcal{M}_\Gamma$。

■

参考文献

[BCKW10]Patrick Briest、Shuchi Chawla、Robert Kleinberg和S. Matthew Weinberg。《随机分配定价》。载于*SODA*，第585–597页，2010年。[BGN17] Moshe Babaioff、Yannai A. Gonczarowski和Noam Nisan。《收入近似的菜单规模复杂度》。载于第*49*届*ACM SIGACT*计算理论研讨会论文集，STOC 2017，第869–877页，2017年。[BHN22] Ran Ben Moshe、Sergiu Hart和Noam Nisan。销售多种商品的单调机制。*arXiv:2210.17150*，2022年。[CHMS10] Shuchi Chawla、Jason D. Hartline、David L. Malec和Balasubramanian Sivan。《多参数机制设计与顺序挂牌定价》。载于*STOC*，第311–320页，2010年。[DDT13] Constantinos Daskalakis、Alan Deckelbaum和Christos Tzamos。《通过最优传输进行机制设计》。载于第十四届*ACM*电子商务会议论文集，*EC 2013*，费城，宾夕法尼亚州，美国，*2013*年*6*月*16*日至*20*日，第269–286页，2013年。[DDT15] Constantinos Daskalakis、Alan Deckelbaum和Christos Tzamos。《多商品垄断者的强对偶性》。载于第十六届*ACM*经济学与计算会议论文集，EC 2015，第449–450页，2015年。——期刊版本：《计量经济学》，85(3):735–767，2017年。[DW11] Constantinos Daskalakis和S. Matthew Weinberg。《论最优多维机制设计》。计算复杂性电子研讨会（*ECCC*），18:170，2011年。[HN12] Sergiu Hart和Noam Nisan。《多物品条件下的近似收益最大化》。载于*ACM*电子商务会议

《商业》，EC ’12，第 656 页，2012 年。- 期刊版：《经济理论杂志》，172：313–347，2017 年。[HN13] Sergiu Hart 和 Noam Nisan。拍卖的菜单规模复杂度。载于*ACM*电子商务会议，EC ’13，第 565 页，2013 年。- 期刊版：销售多种相关商品：收益最大化与菜单规模复杂度。《经济理论杂志》，183：991–1029，2019 年。[HN25] Sergiu Hart 和 Noam Nisan。收益连续性的根源。*arXiv:2507.15735*，2025 年。[HR15] Sergiu Hart 和 Philip J. Reny。多种商品的最大收益：非单调性及其他观察。《理论经济学》，10(3)：893–922，2015 年。[MM88] R. Preston McAfee 和 John McMillan。多维激励相容与机制设计。《经济理论杂志》，46(2)：335–354，1988 年。[MV06] Alejandro M. Manelli 和 Daniel R. Vincent。捆绑销售作为多商品垄断者的最优销售机制。《经济理论杂志》，127(1)：1–35，2006 年。[Mye81] Roger B. Myerson。最优拍卖设计。《运筹学数学》，6(1)：58–73，1981 年。[Roc70] R. Tyrrell Rockafellar。《凸分析》。普林斯顿大学出版社，1970 年。[Roc85] Jean-Claude Rochet。税收原理与多时刻哈密顿–雅可比方程。《数理经济学杂志》，14：113–128，1985 年。[Tha04] John Thanassoulis。替代品议价。《经济理论杂志》，117(2)：217–245，2004 年。