arXiv:2601.01610v1 [math.NT] 4 Jan 2026

二维局部域上的GL_n 赫克代数

XUECAI MA

摘要。利用 $\mathbb{R}((X))$-测度，我们为 F 二维局部域上的 $\mathrm{GL}_n(F)$定义并研究某些 $\mathbb{C}((X))$值函数。特别地，我们为这类适当的函数定义卷积积，由此定义 $\mathrm{GL}_n(F)$的赫克代数。随后，我们定义 $\mathrm{GL}_n(F)$的可测 $\mathbb{C}((X))$表示，并证明函数空间是此类表示的候选对象。

1. 引言

n维域这一概念最初由 Ihara 和 Parshin 于20世纪70年代提出，旨在将经典的阿代尔形式主义推广到 n维概形。研究代数群在0维和1维局部域上的表示是一个重要课题。由于有限域和局部域具有良好的性质，例如局部域是拓扑域，人们对它们的表示已有诸多了解。然而，对于二维局部域上的代数群，人们对其表示知之甚少。

在其论文中 [Kap01], Kapranov研究了 Γ约化群的中心扩张 G 在二维局部域 $F = K((t))$上，其中 K 是一个一维局部域。他选择了一个适当的子群 $\Delta_1 \subset \Gamma$，使得赫克对应的纤维是局部紧空间，可以在其上定义不变测度，因此他可以通过对这些测度积分来定义赫克算子。他证明，这样的赫克代数 $H(\Gamma,\ \Delta_1)$ 同构于与 G 相关的双仿射Hecke代数。此后，Gaitsgory和Kazhdan为Kapranov的思想提供了一个范畴化框架。他们研究了pro-向量空间中的表示，详情参见 [GK04、GK05、GK06] ，更多示例参见 [BK06]。

在他们的论文 [BK11], 中，Braverman和Kazhdan考虑了子群 $\widetilde{G^+{}_{\mathrm{aff}}}$，它属于 G_{aff}，其中 G_{aff} 是 G_m 与 G 对 $G((t))$ 的中心扩张的半直积。他们证明， $G_{\mathrm{aff}}(\mathcal{O})$ 在 $G^+{}_{\mathrm{aff}}$ 中的任意双陪集都有良好定义，并在适当的空间 $G_{\mathrm{aff}}(\mathcal{O})$ 上诱导出代数结构，其中的函数对 $G^+{}_{\mathrm{aff}}(K)$ 双边不变。他们将其称为 G_{aff}的球Hecke代数。在 [BKP16], 中，作者利用 $W_X = W \ltimes X$（Weyl群与Tits锥的半直积）来刻画双陪集 $I \backslash G^+{}_{\mathrm{aff}} / I$。通过研究Tits锥 X的组合性质，他们定义了 G_{aff}的伊wahori-Hecke代数。

另一方面，Fesenko 构造了一种 $\mathbb{R}((X))$测度，可用于二维局部域 [Fes03], 上的调和分析。H. Kim 和 K. H. Lee 利用 Cartan分解定义了SL_2 [KL04]的球Hecke代数的生成元和关系。特别是，他们利用 $\mathbb{R}((X))$测度证明了 Satake同构。另请参见 [Lee10]

关键词与短语：高维局部域、赫克代数。1

关于在二维局部域上构造 SL_2 的伊wahori-Hecke代数。

本文通过使用 Fesenko 的$\mathrm{GL}_n(F)$ 上的F 二维局部域的 $\mathbb{R}((x))$-测度以及 Morrow 关于 [Mor08] 上积分的工作，给出了二维局部域上$\mathrm{GL}_n(F)$的赫克代数的一种新构造。具体而言，我们定义了一个适当的函数空间 $f:\ \mathrm{GL}_n(F)\ \to \mathbb{C}((X))$，并证明该空间中存在定义良好的卷积积。我们定义并研究了一类称为可测表示的表示。典型例子就是我们所定义的函数空间。

现在我们介绍本文的结构。在第 2 节中，我们首先回顾二维局部域上的 Fesenko$\mathbb{R}((X))$-测度。随后，我们介绍二维局部域上 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的积分。我们定义一个空间 $\mathcal{L}^M(\mathrm{GL}_n(F))$，由满足某些条件的函数 $f:\mathrm{GL}_n(F)\ \to \mathbb{C}((X))$ 组成。我们在 $\mathcal{L}^H(\mathrm{GL}_n(F))$ 上定义卷积积，使 $\mathcal{L}^M(\mathrm{GL}_n(F))$ 成为一个结合代数，称为 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的赫克代数。在第 3 节中，我们定义 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的可测表示，并证明函数空间 $\mathcal{L}^M\mathrm{GL}_n(F)$ 是一个可测表示。由此，我们建立了 Hecke模与可测表示之间的关系。

致谢。 作者感谢 Ivan Fesenko 对本研究的支持，以及就本文相关主题进行的讨论。作者还感谢 Kye-Huan Lee 富有帮助的讨论。本研究得到西湖大学项目资助：207010146022301、207010145609901，以及杭州博士后日常经费资助。

2. $\mathrm{GL}_n(F)$ 上的积分

零维局部域是有限域。对于 $n \geq 1$， n维局部域是一个完备离散赋值域，其剩余域是一个（$n-1$）维局部域。一维局部域是 $\mathbb{R}$、 $\mathbb{C}$、 $\mathbb{F}_q$（t）中的一种，即 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张。二维局部域的例子包括 $\mathbb{F}_q$（t_1）（t_2）、 K（t）（其中 K 是局部非阿基米德域），以及 E（t）在局部阿基米德域 E 上的有限扩张。参见 [FK00]，以了解有关高维局部域的更多介绍。

设 F 是一个 n 维局部域。则存在一列整数环

$$F \supset \mathcal{O}_F = \mathcal{O}_F^{(1)} \supset \mathcal{O}_F^{(2)} \supset \cdots \supset \mathcal{O}_F^{(n)},$$

其中 $\mathcal{O}_F^{(i)}$ 称为 F 的秩 i 整数环。假设我们有一列 n 个局部参数 $t_1,\ \cdots,\ t_n \in F$，则存在同构

$$F = \mathcal{O}_F^{(n)}[t_1^{-1}, \cdots, t_n^{-1}],\ \text{and}\ F^\times \cong (\mathcal{O}_F^{(n)})^\times \times t_1^{\mathbb{Z}} \times \cdots \times t_n^{\mathbb{Z}}.$$

例2.1。 对于二维局部域 $\mathbb{Q}_p((t))$，我们有 $\mathcal{O}_F^{(1)} = \mathbb{Q}_p[[t]]$ 和 $\mathcal{O}_F^{(2)} = \mathbb{Z}_p + t_2\mathbb{Q}_p[[t_2]]$。局部参数可取为 $t_1 = p$、 $t_2 = t$。

研究局部域的一种方法是利用其拓扑。但在高维局部域中，拓扑方法不像在一维情形中那样成功。设 $F = K((t))$ 是一个等特征二维局部域。根据 [Par84]，，我们可以通过将 F 的基本邻域定义为如下形式，来在0上定义一个拓扑：

$$\sum_i U_i t^i := \left\{ \sum_i a_i t^i \in F | a_i \in U_i \text{ for all } i \right\},$$

其中 $\{U_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ 是0 的开邻域，且 $U_i = K$ 对所有 $i \gg 0$均成立。任意其他点 $a \in F$ 的基本开邻域为 $a+U$，其中 U_i 是0的基本邻域。我们知道一维局部域是拓扑域。但 $K((t))$ 不是拓扑域，因为乘法和求逆运算不连续。此外， $K((t))$ 不是局部紧空间，因此其上不存在哈勒测度。混合特征二维局部域的拓扑定义见 [Fes01]。

2.1. **二维局部域的测度与积分**。在以下内容中，我们设 F 为一个二维局部域，其第一剩余域为 E，第二剩余域为 F_q，秩一整数环为 $\mathcal{O}$，秩二整数环为 O，局部参数为 t_1， t_2。

设 $\mathcal{A}$ 为由特征集合 $\{\alpha + t_2^i t_1^j O\}$ 生成的最小环。 $\mathcal{A}$ 的元素可写成有限个互不相交集合 A_n 的并，其中每个 A_n 都是一个特征集合与有限个特征集合之并的差集。

命题 2.2。([Fes03]) 存在唯一的测度 μ定义在 F 上，取值于$\mathbb{R}((X))$，它是平移不变且有限可加的，并满足

$$\mu(t_2^i t_1^j O) = q^{-j} X^i.$$

例 2.3. 我们有 $\mu(O) = 1$ 和 $\mu(t_2^i p^{-1}(S)) = X^i \mu_E(S)$，其中 μ_E 是 E 上的归一化哈尔测度，满足 $\mu_E(\mathcal{O}_E) = 1$ ，且 S 是 E的一个紧开子集。

我们称一个和

$$\sum_n \sum_i a_{i,n} X^i$$

是绝对收敛的，如果

(1) 存在一个 i_0 ，使得 $a_{i,n} = 0$ 对所有 $i \le i_0$ 和所有 n都成立；(2) 对每个 i ，级数 $\sum_n a_{i,n}$ 在 $\mathbb{C}$中绝对收敛。

注 2.4. F 上的测度具有如下可加性：假设$\{A_n\}$是 $\mathcal{A}$中的可数个两两不相交集合，满足 $\bigcup A_n \in \mathcal{A}$，且 $\sum \mu(A_n)$在 $\mathbb{C}((X))$中绝对收敛，则有 $\mu(\bigcup A_n) = \sum \mu(A_n)$。

有了 F的测度后，我们可以定义积分。考虑函数$f : F \to \mathbb{C}((X))$。

(1) 对于任意 $A \in \mathcal{A}$，我们考虑函数 $\mathbf{char}_A$ ，并定义

$$\int_F \mathrm{char}_A = \mu(A).$$

(2) 对于函数 f，可以写成 $\sum c_n \mathbf{char}_{A_n} + \sum a_i \mathbf{char}_{\{p_i\}}$，其中 $\{A_n\}$是 $\mathcal{A}$ 中可数个互不相交的可测集， $c_n \in \mathbb{C}((X))$ 满足 $\sum c_n \mu(A_n)$ 在 $\mathbb{C}((X))$ 中绝对收敛，而 $\{p_1, \cdots, p_m\}$ 是有限个点的集合。我们定义

$$\int_F (\sum c_n \mathrm{char}_{A_n} + \sum_{i=1}^{k} a_i \mathrm{char}_{\{p_i\}}) d\mu = \sum c_n \mu(A_n).$$

由于 $\mathcal{A}$ 包含 $a + t_2^j p^{-1}(S)$，因此 S 是 E中的紧开子集。我们有

$$\int_F \mathrm{char}_{a+t_2^j p^{-1}(S)} d\mu = \mu_E(S) X^j.$$

如果我们假设系数 $c_k \in \mathbb{C}$。那么

$$\int_F \sum_k c_k \mathrm{char}_{a+t_2^i t_1^{j_k} O} d\mu = \left(\sum c_k q^{-j_k}\right) X^i = \left(\int_E \sum c_k \mathrm{char}^E_{t_1^{j_k} O_E} d\mu_E\right) X^i = \left(\int_E f d\mu_E\right) X^i,$$

对于某个可积函数 f 定义在 E上的积分 F 也可以通过以下步骤定义，详见 [Mor10]。

(1) 首先，我们用 $\mathcal{L}(E)$ 表示 E 上的局部常值可积函数空间。(2) 对于 $g \in \mathcal{L}(E)$, $a \in F$, $i \in \mathbb{Z}$，我们在 F 上定义一个函数

$$g^{a,i}(x) = \begin{cases} g(\overline{(x-a)t_2^{-i}}) & x \in a + t_2^i \mathcal{O} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(3) F 上的简单函数是一个取值于 $\mathbb{C}((X))$ 的函数，其形式为

$$x \mapsto g^{a,i}(x) X^j$$

对于某个 $g \in \mathcal{L}(E)$, $a \in F$, i, $j \in \mathbb{Z}$。

(4) 令 $\mathcal{L}(F)$ 表示由简单函数张成的所有取值于 $\mathbb{C}((X))$ 的函数所构成的空间。

（5）对于简单函数，我们定义

$$\int_F g^{a,i}(x) dx = \left(\int_E g(u) du\right) X^i,$$

并将其推广到 $\mathcal{L}(F)$ 中的所有函数。

2.2. **乘积空间上的积分** F^n。我们首先回顾[Mor08]的方法。我们首先考虑在 F^n 上的积分。重积分的重要性质是富比尼性质：对于函数

$$f : F^n \to \mathbb{C}((X)),$$

并且对于 $\{1, \cdots, n\}$ 的每个排列 σ，表达式

$$\int^F \cdots \int^F f(x_1, \cdots, x_n) dx_{\sigma(1)} \cdot dx_{\sigma(n)}$$

都有定义，且其值不依赖于 σ。

（1）令 $\mathcal{L}(E^n)$ 表示由富比尼函数 f: $E^n \to \mathbb{C}$ 构成的函数空间。（2）对于每个 $g \in \mathcal{L}(E^n)$，以及每个 $a = (a_1, \ldots\ldots, a_n) \in F^n$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_n) \in \mathbb{Z}^n$。平移分式理想的乘积为

$$a + t_2^\gamma \mathcal{O}_F^n = \prod a_i + t_2^{\gamma_i} \mathcal{O}_F \quad \in F^n.$$

我们在 $\mathrm{GL}_n(F)$ 上定义一个函数

$$g^{a,\gamma}(x) = \begin{cases} g(\overline{(x-a)t_2^{-\gamma}}) & x \in a + t_2^\gamma \mathcal{O}_F^n \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

（3）对于上文定义的函数 $g^{a,\ \gamma}$，我们定义一个积分

$$\int_{F^n} g^{a,\gamma}(x) dx = \left(\int_{E^n} g d\mu_{E^n}\right) X^{\sum_{i=1}^n \gamma_i}.$$

（4）复值函数 f： $E^N \to \mathbb{C}$ 称为 GL-富比尼函数，当且仅当对所有 $\tau \in \mathrm{GL}_n(F)$, $f \circ \tau$ 都是富比尼的。令 $\mathcal{L}(F^n, \mathrm{GL}_n)$表示由以下函数张成的取值于 $\mathbb{C}((X))$空间的函数: $\mathrm{GL}_n(F) \to \mathbb{C}((X))$

$$g^{a,\gamma} \circ \tau, \quad \tau \in \mathrm{GL}_n(F), a \in F^n, \gamma \in \mathbb{Z}^n.$$

定理 *2.5. ([Mor08,* 定理 *3.4])* $\mathcal{L}(F^n, GL_n)$ 中的每个函数在 F^n 上都满足富比尼定理。若 $f \in \mathcal{L}(F^n, GL_n)$ $a \in F^n, \tau \in GL_n(F)$，则函数 $x \mapsto f(x+a)$ 和 $x \mapsto f(\tau x)$ 也属于 $\mathcal{L}(F^n, GL_n)$，并且重积分由下式给出

$$\int_{F^n} f(x+a)dx = \int_{F^n} f(x)dx,$$

$$\int_{F^n} f(\tau x)dx = |\det \tau|^{-1} \int_{F^n} f(x)dx.$$

2.3. **关于$\mathrm{GL}_n(F)$的积分**。现在我们考虑 $\mathrm{GL}_n(F)$ 上的积分。令T: $F^{n^2} \to M_n(F)$ 为从向量空间 F^{n^2}到元素取自 F 的 $n \times n$ 矩阵所构成的向量空间的同构。令 $\mathcal{L}(M_n(F))$ 表示由 $\mathbb{C}((X))$ 取值的函数 f 所构成的空间，使得 $f \circ T$属于 $\mathcal{L}(F^{n^2}, \mathrm{GL}_n)$，并定义

$$\int_{M_n(F)} f(x)dx = \int_{F^{n^2}} f \circ T(x)dx.$$

令 $\mathcal{L}(G_n(F))$ 表示 $\mathrm{GL}_n(F)$ 上取值于 $\mathbb{C}((X))$ 的函数 ϕ 空间，其中这些函数满足 $\tau \mapsto \phi(\tau)|\det \tau|^{-n}$ 可延拓为 $\mathcal{L}(M_n(F))$ 上的函数。 ϕ 在 $\mathrm{GL}_n(F)$ 上的积分定义为

$$\int_{GL_n(F)} \phi(\tau)d\tau = \int_{M_n(F)} \phi(x)|\det(x)|^{-n}dx.$$

命题 2.6. 上述定义的积分具有以下性质:

(1) $GL_n(F)$ 上的积分定义良好，这意味着若 $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(M_n(F))$ 在限制到 $GL_n(F)$ 后相等，则 $f_1 = f_2$。 *(2)* 假设 $\phi \in \mathcal{L}(GL_n(F))$ 且 $\sigma \in GL_n(F)$，则 $\tau \mapsto \phi(\tau\sigma)$ 和$\tau \mapsto \phi(\tau\sigma)$ 也属于 $\mathcal{L}(GL_n(F))$，并且

$$\int_{\mathrm{GL}_n(F)} \phi(\sigma\tau)d\tau = \int_{\mathrm{GL}_n(F)} f(\tau)d\tau = \int_{\mathrm{GL}_n(F)} \phi(\tau\sigma)d\tau.$$

(3) 假设 g 是 $\mathrm{GL}_n(E)$ 上取复数值的施瓦茨–布吕阿函数，满足

$$f(x) = \begin{cases} g(x)|\det x|^{-n} & x \in \mathrm{GL}_n(E) \\ 0 & \det x = 0 \end{cases}$$

在 $M_n(E)$ 上是 GL-富比尼。我们定义 $g^0 : \mathrm{GL}_n(F) \to \mathbb{C}((X))$ 如下:

$$g^0(x) = \begin{cases} g(\overline{x}) & x \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}). \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

那么 g^0 属于 $\mathcal{L}(GL_n(F))$，并且

$$\int_{\mathrm{GL}_n(F)} g^0(\tau)d\tau = \int_{\mathrm{GL}_n(E)} g(u)du.$$

证明。这些结论由[Mor08、注记 4.3、命题 4.4、命题 4.8]得出。□

注记2.7。利用这些定义 [Mor08], , 我们得到

$$\sum c_k \prod_{i=1}^{n} \mu(a_i^k + t_2^{\gamma_i^k} t_1^{\delta_i^k} O^n) = \sum c_k \prod_{i=1}^{n} t_1^{-\delta_i^k} X^{\gamma_i^k} = \sum c_k \left((\prod \mu_E(t_1^{\delta_i^k} O_E)) X^{\sum \gamma_i^k} \right).$$

于是我们有

$$\sum c_k \prod_{i=1}^{n} \mu(a_i^k + t_2^{\gamma_i^k} t_1^{e_i^k} O^n) = \sum c_k \left((\int_{E^n} f_k d\mu_{E^n}) X^{\sum_i \gamma_i^k} \right).$$

与一维情形类似， F^n 的一个特 distinguished 集具有如下形式

$$\prod_{i=1}^{n} a_i + t_2^{\gamma_i} t_1^{\delta_i} O, \quad a_i \in F, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{Z},$$

其测度为 $\mu(\prod_{i=1}^n a_i + t_2^{\gamma_i} t_1^{\delta_i} O) = \prod_{i=1}^n \mu(a_i + t_2^{\gamma_i} t_1^{\delta_i} O) = \prod_{i=1}^n q^{-\delta_i} X^{\gamma_i}$。令 $\mathcal{A}_{F^n}^{\mathrm{dist}}$ 为特 distinguished 集的集合，并令 $\mathcal{A}_{F^n}$ 为由特 distinguished 集生成的最小环。那么对于有限多个两两不相交的子集 $A_k \in \mathcal{A}_{F^n}$，我们有 $\sum c_k A_k = \sum c_k \mu(A_k)$。

注记2.8。定义$\mathrm{GL}_n(F)$的特 distinguished 集并非易事，因为通常$\mathrm{GL}_n(F)$上的测度应为 |行列式$x|^{-n} d_{M_n(F)} x$，但行列式通常不是常数。在某些特殊情形下已有一些结果，例如，关于 [Wal19] 对$\mathrm{GL}_2(F)$的可测子集的描述，参见。

引理 2.9. 对于任意的 a、$b \in F$、γ、$\delta \in \mathbb{Z}$，我们考虑两个子集$a + t_2^{\gamma}\mathcal{O}$和$b + t_2^{\delta}\mathcal{O}$。它们的交集子集要么为空，要么也具有$c + t_2^{\epsilon}\mathcal{O}$的形式。

证明. 我们不妨设 $a \notin t_2^{\gamma}\mathcal{O}$ 和 $b \notin t_2^{\delta}\mathcal{O}$，否则令 a 或 b 等于 0。分以下几种情况：

(1) $\gamma = \delta$。若 $a = b$，则 $(a + t_2^{\gamma}\mathcal{O}) \cap (b + t_2^{\delta}\mathcal{O}) = a + t_2^{\gamma}\mathcal{O} = b + t_2^{\delta}\mathcal{O}$；若 $a \neq b$，则 $a + t_2^{\gamma}\mathcal{O} \cap a + t_2^{\gamma}\mathcal{O} = \emptyset$。(2) $\gamma > \delta$。若 $a = b$，则 $(a + t_2^{\gamma}\mathcal{O}) \cap (b + t_2^{\delta}\mathcal{O}) = a + t_2^{\gamma}\mathcal{O}$；若 $a \neq b$，则 $(a + t_2^{\gamma}\mathcal{O}) \cap (a + t_2^{\gamma}\mathcal{O}) = \emptyset$。(3) $\gamma < \delta$。若 $a = b$，则 $(a + t_2^{\gamma}\mathcal{O}) \cap (b + t_2^{\delta}\mathcal{O}) = b + t_2^{\delta}\mathcal{O}^n$；若 $a \neq b$，则 $(a + t_2^{\gamma}\mathcal{O}) \cap (a + t_2^{\gamma}\mathcal{O}) = \emptyset$。

于是我们得到该引理。 □

引理 2.10. 设 $\tau \in \mathrm{GL}_n(F)$。那么，对于任意形如 $A + t_2^{\Gamma}\mathcal{O}^n = \prod_{1 \le i \le n}($ $a_i + t_2^{\gamma_i}\mathcal{O})$ 的集合， $\tau(\prod_{1 \le i \le n}(a_i + t_2^{\gamma_i}\mathcal{O}))$ 也具有这种形式。

证明。 这个引理可由以下两个结果证明：

(1) 对任意 $g \in F$和 $a + t_2^{\gamma}\mathcal{O}$， $g(a + t_2^{\gamma}\mathcal{O})$ 也具有 $a' + t_2^{\gamma'}\mathcal{O}$ 的形式。为证明这一点，我们可以假设 $g = \sum_{i=i_0}^{\infty} a_i t_2^i, a_{i_0} \in E^*$，那么 $g(a + t_2^{\gamma}\mathcal{O}) = ga + t_2^{i_0+\gamma}\mathcal{O}$，这是因为 ($a_{i_0} + \sum_{i=i_0+1} a_i t_2^{i-i_0}$) 是 $\mathcal{O} = E((t))$ 中的一个单位。(2) 对任意两个子集 $a + t_2^{\gamma}\mathcal{O}$ 和 $b + t_2^{\delta}\mathcal{O}$，它们的和 $(a + t_2^{\gamma}\mathcal{O}) + (b + t_2^{\delta}\mathcal{O})$ 也具有 $c + t_2^{\varepsilon}\mathcal{O}$ 的形式。分以下几种情况：(a) 若 $\gamma = \delta$，则 $(a + t_2^{\gamma}\mathcal{O}) + (b + t_2^{\delta}\mathcal{O}) = a + b + t_2^{\gamma}\mathcal{O} = a + b + t_2^{\delta}\mathcal{O}$。(b) 若 $\gamma > \delta$，则 $(a + t_2^{\gamma}\mathcal{O}) + (b + t_2^{\delta}\mathcal{O}) = (a + b + t_2^{\delta}\mathcal{O})$。

(c) f $\gamma < \delta$, then $(a + t_2^{\gamma}\mathcal{O}) + (b + t_2^{\delta}\mathcal{O}) = (a + b + t_2^{\gamma}\mathcal{O})$.

□

引理 2.11。 对于 $\mathrm{GL}_n(F)$ 中任意两个具有 $\tau(\prod_{1\le i\le n}(a_i+t_2^{\gamma_i}\mathcal{O}))$ 形式的子集，$\tau \in \mathrm{GL}_n(F)$，它们的交集要么为空，要么也具有 $\prod c_i + t_2^{\epsilon_i}\mathcal{O}$ 的形式。

证明。 我们首先假设 $\tau = I_n$。对于形如 $\prod_{1\le i\le n}(a_i + t_2^{\gamma_i}\mathcal{O})$ 和$\prod_{1\le i\le n}(b_i + t_2^{\delta_i}\mathcal{O})$ 的两个子集，它们的交集为

(1) 若存在 i 使得 $a_i + t_2^{\gamma_i} \cap b_i + t_2^{\delta_i} = \emptyset$，则为空；(2) $\prod_{1\le i\le n} c_i + t_2^{\epsilon_i}\mathcal{O}$，其中 $(c_i + t_2^{\epsilon_i}\mathcal{O})$ 来自引理 2.9。

因此，当 τ 为 I_n 时，引理成立。对于一般的 $\tau_a(\prod_{1\le i\le n}(a_i + t_2^{\gamma_i}\mathcal{O}))$ 和$\tau_b(\prod_{1\le i\le n}(b_i + t_2^{\delta_i}\mathcal{O})$，它们也可以写成 $\prod_{1\le i\le n}(d_i + t_2^{\zeta_i}\mathcal{O})$ 的形式。根据 $\tau = I_n$ 情形，我们得到所需结论。□

引理 2.12. 对于 $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(F^n, \mathrm{GL}_n(F))$，有 $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{L}(F^n, \mathrm{GL}_n(F))$。

证明。 根据引理 2.10 和线性性质，我们可以假设 $f_1 = g^{A_1,\Gamma_1}, f_2 = g^{A_2,\Gamma_2}$。根据引理 2.11，我们有 $\mathrm{supp} f_1 \cap \mathrm{supp} f_2 = \emptyset$ 或 $\mathrm{supp} f_1 \cap \mathrm{supp} f_2 = A + t_2^{\Gamma}\mathcal{O}^n = \prod_{1\le i\le n} a_i + t_2^{\gamma_i}\mathcal{O}$。若 $\mathrm{supp} f_1 \cap \mathrm{supp} f_2 = \emptyset$，则 $f_1.f_2 = 0$。若 $\mathrm{supp} f_1 \cap \mathrm{supp} f_2 = A + t_2^{\Gamma}\mathcal{O}^n$，则有

(1) $g_1^{A_1,\Gamma_1}|_{\mathrm{supp} f_1 \cap \mathrm{supp} f_2} = h_1^{A,\Gamma}$, where $h_1(x) = g_1(x + \overline{(A_1 - A)t_2^{-\Gamma}})$ and
(2) $g_2^{A_2,\Gamma_2}|_{\mathrm{supp} f_1 \cap \mathrm{supp} f_2} = h_2^{A,\Gamma}$, where $h_2(x) = g_1(x + \overline{(A_2 - A)t_2^{-\Gamma}})$.

于是得到 $f_1 \cdot f_2 = (h_1 \cdot h_2)^{A,\Gamma}$。 □

推论 2.13. 对于 $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(M_n(F))$，有 $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{L}(M_n(F))$。

2.4. 上的可积函数的卷积积 $\mathrm{GL}_n(F)$。 对于任意$g: \mathrm{GL}_n(E) \to \mathbb{C}$, $A \in \mathrm{GL}_n(F)$ $\Gamma = (\Gamma_{i,\ j})_{1\le i,\ j\le n} \in M_n(\mathbb{Z}_+)$。令 $t_2^{\Gamma}M_n(\mathcal{O})$ 表示由矩阵 $(t^{\Gamma_{i\ 2}\ j}x_{i,\ j})_{1\le i,\ j\le n}$, $x_{ij} \in \mathcal{O}$ 构成的集合，我们定义函数 $g^{A,\ \Gamma}: \mathrm{GL}_n(F) \to \mathbb{C}((X))$ 为

$$g^{A,\Gamma}(x) = \begin{cases} g\left(\overline{(A^{-1}x - I_n)t_2^{-\Gamma}}\right) & x \in A(I_n + t_2^{\Gamma}M_n(\mathcal{O})), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

并定义

$$g^{0,0}(x) = \begin{cases} g(\overline{x}) & x \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定义 2.14。 设 V 是 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的一个子集，若 char_V 属于 $\mathcal{L}(\mathrm{GL}_n(F))$，即 $\mathrm{char}_V|\det x|^{-n}$ 可延拓为 $\mathcal{L}(M_n(F))$ 中的一个函数，则称 V 为可测子集。

引理 2.15。 设 g 是 $\mathrm{GL}_n(E)$ 上的一个函数，使得

$$f(x) = \begin{cases} g(x)|\det x|^{-n} & x \in \mathrm{GL}_n(E) \\ 0 & \det x = 0 \end{cases}$$

在 $M_n(E)$ 上是 GL-富比尼。对于任意满足 $A(I_n + t_2^{\Gamma}M_n(\mathcal{O}))$ 为可测子集的 $A \in \mathrm{GL}_n(F)$ $\Gamma \in M_n(\mathbb{Z}_+)$，我们有 $,^{\Gamma} \in \mathcal{L}(\mathrm{GL}_n(F))$。

证明。由于 $\int_{\mathrm{GL}_n(F)}$ 是平移不变的，只需对 $g^{0,\Gamma}$证明该命题。我们有

$$g^{0,\Gamma}(x)=\begin{cases} g(\overline{(x-I_n)t_2^{-\Gamma}}) & x\in I_n+t_2^{\Gamma}M_n(\mathcal{O}),\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

为了证明它属于 $\mathcal{L}(\mathrm{GL}_n(F))$，必须有 $g^{A,\Gamma}(x)|\det x|^{-n}$ 可延拓为 $\mathcal{L}(M_n(F))$ 中的一个函数。我们已经知道 $g^{0,\Gamma}$ 属于 $\mathcal{L}(M_n(F))$，且 $\mathrm{char}_{\mathrm{supp}_{g^{0,\Gamma}}}|\det x|^{-n}$ 也属于 $\mathcal{L}(M_n(F))$。于是由推论 2.13 可得该引理。

□

定义 2.16。我们用 $\mathcal{L}^M(\mathrm{GL}_nF)$ 表示 $\mathcal{L}(\mathrm{GL}_n(F))$ 的 $\mathbb{C}((X))$-子空间，该子空间由以下函数生成：$f:\mathrm{GL}_n(F)\to\mathbb{C}((X))$，以及 $g^{0,0}$ 和

$$g^{A,\Gamma},\quad A\in\mathrm{GL}_n(F),\Gamma=(\Gamma_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in M_n(\mathbb{Z}_+),$$

满足

(1) g 是 $\mathrm{GL}_n(E)$ 上取复数值的 Bruhat-Schwartz 函数；(2) $f(x)=\begin{cases} g(x)|\det x|^{-n} & x\in\mathrm{GL}_n(E)\\ 0 & \det x=0\end{cases}$ 在 $M_n(E)$ 上是 GL-富比尼的；(3) $g^{A,\Gamma}$ 的支集是一个可测子集。

注 2.17。这里的上标 M 表示可测。具有形式$g^{A,\Gamma},A\in\mathrm{GL}_n(F)$ $\Gamma\in M_n(\mathbb{Z}_+)$且满足上述条件的函数称为 $\mathcal{L}^M(\mathrm{GL}_n(F))$中的基本函数。显然，$\mathcal{L}^M(\mathrm{GL}_n(F))$是$\mathcal{L}(\mathrm{GL}_n(F))$的子空间。由于 Bruhat-Schwartz 函数是局部常值函数，因此 $\mathcal{L}^M(\mathrm{GL}_n(F))$由 char_V生成，其中 V是 $\mathrm{GL}_n(F)$的可测子集。令V_1,V_2为 $\mathrm{GL}_n(F)$的两个可测子集，则有 $\mathrm{char}_{V_1}|\det x|^{-n},\mathrm{char}_{V_2}|\det x|^{-n}\in\mathcal{L}(M_n(F))$。根据 $\mathcal{L}(M_n(F))$的定义，$\mathrm{char}_{V_1}|\det x|^{-n}$具有形式$\sum a_i\mathrm{char}_{U_i}$，其中 U_i是 $M_n(F)$的互不相交的可测子集；$\mathrm{char}_{V_2}|\det x|^{-n}$具有形式 $\sum b_i\mathrm{char}_{W_i}$，其中 W_i是 $M_n(F)$的互不相交的可测子集。我们还注意到，$\mathrm{char}_{V_2}=\mathrm{char}_{\cup W_i}\in\mathcal{L}(M_n(F))$。于是得到

$$\mathrm{char}_{V_1\cap V_2}|\det x|^{-n}=\mathrm{char}_{V_1}\mathrm{char}_{V_2}|\det x|^{-n}=(\sum a_i\mathrm{char}_{U_i})\mathrm{char}_{\cup W_i}\in\mathcal{L}(M_n(F)).$$

由引理 2.13 可知，$\mathrm{GL}_n(F)$ 中两个可测子集的交集仍是一个可测子集。

定义 2.18. 对于每个 $f_1,f_2\in\mathcal{L}^M(\mathrm{GL}_n(F))$，我们将 f_1 and f_2 的卷积积定义为

$$f_1*f_2(y):=\int_{\mathrm{GL}_n(F)}f_1(yg^{-1})f_2(g)dg.$$

引理 2.19. 对于任意两个基本函数 $g^{A,\Gamma}$ 和 $g^{B,\Delta}$，其乘积

$$g_1^{A,\Gamma}\cdot g_2^{B,\Delta}$$

也是一个基本函数。

证明。我们有 $\mathrm{supp}g^{A,\Gamma}=A(I_n+t_2^{\Gamma}M_n(\mathcal{O}))\subset\mathrm{GL}_n(F)\subset M_n(F)$，且 $\mathrm{supp}g^{B,\Delta}=B(I_n+t_2^{\Delta}M_n(\mathcal{O}))\subset\mathrm{GL}_n(F)\subset M_n(F)$。应用该同构

$$T^{-1}:M_n(F)\to F^{n^2},$$

我们发现 $T^{-1}(A(I_n+t_2^{\Gamma}M_n(\mathcal{O})))$ 具有 $\tau_A(T^{-1}(I_n)+T^{-1}(t_2^{\Gamma})\mathcal{O}^{n^2}) \subset F^{n^2}$ 的形式， $B(I_n+t_2^{\Delta}M_n(\mathcal{O}))$ 也类似。我们可以将 $g^{A,\Gamma}_1$ 和 $g^{B,\Delta}_2$ 视为定义在 $M_n(F)$ 上的函数。根据这些集合的交集性质（引理 2.11），并应用函子T，我们得到 $\mathrm{supp}g^{A,\Gamma}_1 \cap \mathrm{supp}g^{B,\Delta}_2 = C + t_2^{\Upsilon}M_n(\mathcal{O})$。此外，由引理 2.12 可得 $g^{A,\Gamma}_1 \cdot g^{B,\Delta}_2 = h'^{C,\Upsilon}$，其中 h' 是定义在 $\mathrm{GL}_n(E)$ 上的复值 Bruhat-Schwartz 函数，使得

$$x \mapsto \begin{cases} h'(x)|\det x|^{-n} & x \in \mathrm{GL}_n(E) \\ 0 & \det x = 0 \end{cases}$$

是 GL-富比尼于 $M_n(E)$，而 $h'^{C,\Upsilon}$ 定义为

$$h'^{C,\Upsilon}(x) = \begin{cases} g\left(\overline{(x-C)t_2^{-\Upsilon}}\right) & x \in C + t_2^{\Upsilon}M_n(\mathcal{O}), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们注意到，这与一般的提升函数 $g^{A,\Gamma}$ 不同： $GL_n(F) \to \mathcal{C}(X)$ 的支集是 $A(I_n + t_2^{\Gamma}M_n(\mathcal{O}))$。因此，我们只需证明 $C+t_2^{\Upsilon}M_n(\mathcal{O}) = C(I_n+t_2^{\Upsilon}C^{-1}M_n(\mathcal{O}))$ 可以写成 $D(I_n+t_2^{\Theta}M_n(\mathcal{O}))$。这很容易，只需注意根据我们的条件， $t_2^{\Gamma}A$， $t_2^{\Delta}B \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$，且 $C+t_2^{\Upsilon}M_n(\mathcal{O}) \subset A(I_n + t_2^{\Gamma}M_n(\mathcal{O})) \cap B(I_n + t_2^{\Delta}M_n(\mathcal{O}))$，因此 $t_2^{\Upsilon}C^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$。

显然，乘积是一个 Bruhat–Schwartz 函数，并且根据注 2.17，乘积的支集仍是一个可测子集。□

引理 2.20. 对于任意两个基本函数 $g^{A,\Gamma}_1, g^{B,\Delta}_2$，以及固定的 $y \in \mathrm{GL}_n(F)$，其乘积

$$g_1^{A,\Gamma}(yx^{-1}) \cdot g_2^{B,\Delta}(x)$$

也是一个变量为 x 的基本函数。并且函数 $g^{A,\Gamma}_1(yx^{-1})$ 可以写成 $h^{A,\Gamma}_1(y^{-1}x)$。

证明。 由于 Bruhat-Schwartz 函数是具有紧支集的局部常值函数，我们可以假设 $g_1 = \mathrm{char}_{V_1}, g_2 = \mathrm{char}_{V_2} : \mathrm{GL}_n(E) \to \mathbb{C}$, V_1, V_2 是 $\mathrm{GL}_n(E)$ 的紧子集。令 $p : \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}) \to \mathrm{GL}_n(E)$ 为投影映射。于是我们有

$$g_1^{A,\Gamma}(yx^{-1}) = \mathrm{char}_{U_1}, U_1 = \left\{x \in \mathrm{GL}_n(F) | x^{-1} \in y^{-1}A(I_n + t_2^{\Gamma}p^{-1}(V_1)\right\}$$

$$g_2^{B,\Delta}(x) = \mathrm{char}_{U_2}, U_2 = \left\{x \in \mathrm{GL}_n(F) | x \in B(I_n + t_2^{\Delta}p^{-1}(V_2))\right\}.$$

对于满足 $x^{-1} = y^{-1}A(I_n+t_2^{\Gamma}M)$ 的 $x \in \mathrm{GL}_n(F)$，其中 $M \in M_n(\mathcal{O})$ $p(M) \in V_1$。我们得到 $x = yA^{-1}(I_n - t_2^{\Gamma}M + (t_2^{\Gamma}M)^2 + \cdots) = yA^{-1}(I_n + t_2^{\Gamma}(-M + t_2^{\Gamma}M + \cdots)$。注意到 $\Gamma_i, _j > 0$，于是 $p(-M + t_2^{\Gamma}M + (t_2^{\Gamma}M)^2 = \cdots) = p(-M)$。因此$x \in yA^{-1}(I_n + t_2^{\Gamma}p^{-1}(-V_1))$。故 $U_1 \subset yA^{-1}(I_n + t_2^{\Gamma}p^{-1}(-V_1))$。此外，对任意$z \in yA^{-1}(I_n + t_2^{\Gamma}p^{-1}(-V_1))$，由同样的讨论可得 $z^{-1} \in y^{-1}A(I_n + t_2^{\Gamma}p^{-1}(-V_1))$。因此 $yA^{-1}(I_n + t_2^{\Gamma}p^{-1}(-V_1)) \subset U_1$，因为 $z = (z^{-1})^{-1}$。于是我们有$g^{A,\Gamma}_1(yx^{-1}) = (\mathrm{char}_{V_1})^{A,\Gamma} = (\mathrm{char}_{-V_1})^{A^{-1},\Gamma}(y^{-1}x) = h^{A^{-1},\Gamma}_1(y^{-1}x)$。

因此， $g^{A,\Gamma}_1(yx^{-1})$ 也是以 x 为变量的基本函数。于是由引理 2.19 可得该引理。

□

命题 2.21。 对于任意两个函数 $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^M(\mathrm{GL}_n(F))$， $f_1 * f_2 \in \mathcal{L}^M(\mathrm{GL}_n(F))$.

证明。我们不妨设 $f_1 = g^{A_1,\Gamma_1}, f_2 = g^{A_2,\Gamma_2}$。于是有 $g^{A_1,\Gamma_1}(yx^{-1})g^{A_2,\Gamma_2}(x)$ 属于 $\mathcal{L}^M(\mathrm{GL}_n(F))$，且 $\mathrm{char}_{f_2}|\det x|^{-n}$ 也属于 $\mathcal{L}^M(\mathrm{GL}_n(F))$。我们计算卷积积:

$$\begin{aligned} f_1 * f_2(y): &= \int_{\mathrm{GL}_n(F)} f_1(yx^{-1})f_2(x)dx = \int_{M_n(F)} f_1(yx^{-1})f_2(x)|\det x|^{-n}dx \\ &= \int_{M_n(F)} g_1^{A_1,\Gamma_1}(yx^{-1})g_2^{A_2,\Gamma}(x)\left(\sum a_w g_w^{A_w,\Gamma_w}(x)\right)dx \\ &= \sum a_w \int_{M_n(F)} g_1^{A_1,\Gamma_1}(yx^{-1})g_w'^{A'_w,\Gamma'_w}(x)dx, \end{aligned}$$

其中，最后一个等号成立，是因为两个基本函数的乘积仍是基本函数。为了使积分 $\int_{M_n(F)} g^{A_1,\Gamma_1}(yx^{-1})g_w'^{A'_w,\Gamma'_k}(x)$ 不等于 0，必须有 $y \in A_1(I_n + t_2^{\Gamma_1})A'_w(I_n + t_2^{\Gamma'_w}) = C_w(I_n + t_2^{\Delta_w}M_n(\mathcal{O}))$。

$$f_1 * f_2(y) = \sum a_w \mathrm{char}_{C_w(I_n+t_2^{\Delta_w}M_n(\mathcal{O}))} \int_{M_n(F)} \left(g_1^{A_1,\Gamma_1}(yx^{-1}))(g_w'^{A'_w,\Gamma'_w}(x))\right)dx.$$

$$= \sum a_w \mathrm{char}_{C_w(I_n+t_2^{\Delta_w}M_n(\mathcal{O}))} \int_{M_n(F)} \left(h_1^{A_1^{-1},\Gamma_1}(y^{-1}x))(g_w'^{A'_w,\Gamma'_w}(x))\right)dx.$$

以下假设 $y \in C_w(I_n + t_2^{\Delta_w}M_n(\mathcal{O}))$。容易发现，对于 $\mathrm{GL}_n(F)$ 上的简单函数 $g^{A,\Gamma}$，$g^{A,\Gamma}\circ T(x)$ 是 F^{n^2} 上的简单函数 $g^{a,\gamma}: F^{n^2} \to \mathbb{C}((x))$，其中 $a = (a_1, \cdots, a_{n^2}) \in F^{n^2}$ 且 $\gamma \in \mathbb{Z}^{n^2}$。回顾一下，$T: F^{n^2} \to M_n(F)$ 是一个同构，因此 $T^{-1}: M_n(F) \to F^{n^2}$ 也是一个同构。

我们断言，对于任意两个简单函数 $h^{T^{-1}A^{-1},T^{-1}(A_1^{-1}t_2^{\Gamma_1})1}$，$g_w'^{T^{-1}(A'_w)\,T^{-1}(A'_w t_2^{\Gamma'_w})}: F^{n^2} \to \mathbb{C}((X))$ $\tau \in \mathrm{GL}(F^{n^2})$，$\tau \in A_1(I_n + t_2^{\Gamma_1})A'_w(I_n + t_2^{\Gamma'_w})$，如果该积分

$$\int_{F^{n^2}} h_1^{T^{-1}(A^{-1}),T^{-1}(A_1^{-1}t_2^{\Gamma_1})}(\tau^{-1}x)\cdot g_w'^{T^{-1}(A'_w),T^{-1}(A'_w t_2^{\Gamma'_w})}(x)dx$$

非零，那么它不依赖于 τ。

为证明这一断言，我们可以假设 $h_1 = \mathrm{char}_{K_1}$，$g'_w = \mathrm{char}_{K_2}$，其中 $K_1, K_2 \subset E^{n^2}$ 是可测子集。设 $V_1 = (T^{-1}(A_1^{-1}) + T^{-1}(A_1^{-1})t^{T^{-1}(\Gamma_1)}{}_2 \quad p^{-1}(K_1))$，$V_2 = (T^{-1}(A'_w) + T^{-1}(A'_w)t^{T^{-1}(\Gamma'_w)}{}_2 \quad p^{-1}(K_2))$，其中 $p: \mathcal{O}^{n^2} \to E^{n^2}$ 是投影映射，则

$$\int_{F^{n^2}} \mathrm{char}_{V_g}(\tau^{-1}x)\mathrm{char}_{V_h}(x)dx = \int_{F^{n^2}} \mathrm{char}_{\tau V_g}(x)\mathrm{char}_{V_h}(x)dx.$$

因为对于某个 M，$N \in M_n(\mathcal{O})$，我们有 $\tau = A_1(I_n + t_2^{\Gamma}M)A'_w(I_n + t_2^{\Gamma'_w}N)$。通过考察 t_2 的层级，我们得到

$$T(\tau V_1) = A_1(I_n+t_2^{\Gamma_1}M)A'_w(I_n+t_2^{\Gamma'_w}N)A_1^{-1}(I_n+t_2^{\Gamma_1}T(p^{-1}K_1)) = A'_w(I_n+t_2^{\Gamma_1}T(p^{-1}(K_1))),$$

$$T(V_2) = A'_w(I_n + t_2^{\Gamma'_w}T(p^{-1}K_2)).$$

那么 $\int_{F^{n^2}} \mathrm{char}^{\tau V_g}(x)\mathrm{char}^{V_h}(x)dx = \mu(\tau V_g \cap V_h) = (\int_{E^2} \mathrm{char}^{K_g}\mathrm{char}^{K_h})X^{\sum \Upsilon_{ij}}$，其中 $\Upsilon \in M_n(\mathbb{Z}_+)$ 仅取决于 A'_w，Γ'_{w° $\square$

定理2.22。 空间$\mathcal{L}^M(\mathrm{GL}_n(F))$上存在一个 $\mathbb{C}((X))$-结合代数结构，我们将相应的代数记为 $\mathcal{H}$，并称其为$\mathrm{GL}_n(F)$的赫克代数。

证明。 我们已经证明卷积积是良定义的。根据定义，加法是 $\mathbb{C}((X))$-线性的。我们只需验证卷积积满足结合律。对于 $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{L}_M(G(F))$。我们有 $f_1 * (f_2 * f_3)(y) =$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathrm{GL}_n(F)} f_1(yg^{-1}) \left(\int_{G(F)} f_2(gh^{-1}) f_3(h) dh \right) dg \\
&= \int_{F^{n^2}} f_1 \circ T_a(yg^{-1}) \left(\int_{F^{n^2}} f_2 \circ T_b(gh^{-1}) f_3 \circ T_b(h) |\det T_b h|^{-n} dh \right) |\det T_a g|^{-n} dg \\
&= \int_{F^{2n^2}} f_1 \circ T_a(yg^{-1}) f_2 \circ T_b(gh^{-1}) f_3 \circ T_b(h) |\det T_b h|^{-n} |\det T_a g|^{-n} dh dg
\end{aligned}
$$

根据积分的富比尼性质，我们可以交换积分次序。

$$
\begin{aligned}
&= \int_{F^{n^2}} \left(\int_{F^{n^2}} f_1 \circ T_a(yg^{-1}) f_2 \circ T_a(gh^{-1}) |\det T_a g|^{-n} dg \right) f_3 \circ T_b(h) |\det T_b h|^{-n} dh \\
&= \int_{F^{n^2}} \left(\int_{F^{n^2}} f_1 \circ T(yg^{-1}) f_2 \circ T(gh^{-1}) |\det Tg|^{-n} dg \right) f_3 \circ T(h) |\det Th|^{-n} dh \\
&= \int_{F^{n^2}} \left(\int_{F^{n^2}} f_1 \circ T(yh^{-1}(gh^{-1})^{-1}) f_2 \circ T(gh^{-1}) |\det Tg|^{-n} d(gh^{-1}) \right) f_3 \circ T(h) |\det Th|^{-n} dh \\
&= \int_{F^{n^2}} \left((f_1 * f_2) \circ T(yh^{-1}) \right) f_3 \circ T(h) |\det Th|^{-n} dh \\
&= (f_1 * f_2) * f_3(y).
\end{aligned}
$$

□

3. GL$_n(F)$的可测表示

3.1. GL$_n$ 在二维局部域上的可测表示(F)。

定义3.1. $G(F)$ 的可测 $\mathbb{C}((X))$-表示是一个对 (V, π)，其中 V 是一个 $\mathbb{C}((X))$-向量空间，并且

$$\pi : \mathrm{GL}_n(F) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}((X))}(V).$$

使得对于每个 $v \in V$，Stab_v 都是 G 的可测子群。

给定一个表示 $\pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$，对于 $f \in \mathcal{H}$，可得到一个线性映射

$$
\begin{aligned}
\pi(f) : \quad & V \to V \\
& v \mapsto \int_{\mathrm{GL}_n(F)} f(g)\pi(g) \cdot v dg.
\end{aligned}
$$

我们得到一个作用

$$\mathcal{H} \times V \to V.$$

引理3.2. 作用 $\mathcal{H} \times V \to V$ 是代数作用。

证明。我们有

$$\begin{aligned}
\pi(f_1 * f_2)\cdot v &= \int_{\mathrm{GL}_n(F)} \left(\int_{\mathrm{GL}_n(F)} f_1(gh^{-1}) f_2(h) dh \right) \pi(g)\cdot v dg \\
&= \int_{\mathrm{GL}_n(F)} \left(\int_{\mathrm{GL}_n(F)} f_1(g') f_2(h) dh \right) \pi(g'h)\cdot v d(g'h) \\
&= \int_{\mathrm{GL}_n(F)} \left(\int_{\mathrm{GL}_n(F)} f_1(g') \pi(g') f_2(h) \pi(h)\cdot v dh \right) dg'h \\
&= \int_{\mathrm{GL}_n(F)} f_1(g') \pi(g') \left(\int_{\mathrm{GL}_n(F)} f_2(h) \pi(h)\cdot v dh \right) dg'h \\
&= \int_{\mathrm{GL}_n(F)} f_1(gh^{-1}) \pi(gh^{-1}) \left(\int_{\mathrm{GL}_n(F)} f_2(h) \pi(h)\cdot v dh \right) dg \\
&= \pi(f_1)(\pi(f_2)\cdot v),
\end{aligned}$$

其中最后一个等式来自积分的平移性质。 □

3.2. **函数空间上的表示**。假设我们有一个 $\mathcal{L}^M(\mathrm{GL}_n(F))$-模 V，如何得到一个可测表示? 我们首先考虑 $\mathrm{GL}_n(F)$ 在 $\mathcal{L}^M(\mathrm{GL}_n(F))$ 上的作用，即

$$(h\cdot f)(x) = f(h^{-1}x).$$

这定义了 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的一个表示:

$$\begin{aligned}
\mathrm{GL}_n(F)\times \mathcal{L}^M(\mathrm{GL}_n(F)) &\to \mathcal{L}^M(\mathrm{GL}_n(F)) \\
(h, f) &\mapsto h\cdot f.
\end{aligned}$$

命题3.3。 $\mathcal{L}^M(\mathrm{GL}_n(F))$ 是 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的一个可测表示。

证明。由二维积分的平移不变性质，我们有 $f(h^{-1}x)$ 属于 $\mathcal{L}^M(\mathrm{GL}_n(F))$。为了证明它是一个可测表示，我们需要证明 Stab_f 是 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的可测子群。由于 $\mathcal{L}^M(\mathrm{GL}_n(F))$ 由 $g^{A,\Gamma}$ 生成，其中 g 是 $\mathrm{GL}_n(E)$ 上的 Bruhat-Schwartz函数。我们可以设 $g = \mathrm{char}^{\mathrm{GL}_n(E)\,K}$ 是 $\mathrm{GL}_n(E)$ 的一个紧子集的特征函数，且 $f = g^{A,\Gamma}$。于是有

$$g^{A,\Gamma} = \mathrm{char}_V, \quad V = \left\{ x\in \mathrm{GL}_n(F) | x\in A(I_n + t_2^{\Gamma} p^{-1}(K)) \right\},$$
$$g^{A,\Gamma}(h^{-1}x) = \mathrm{char}_U, \quad U = \left\{ x\in \mathrm{GL}_n(F) | h^{-1}x\in A(I_n + t_2^{\Gamma} p^{-1}(K)) \right\}.$$

根据 f 的假设,

$$\mathrm{Stab}_f = \left\{ h\in \mathrm{GL}_n(F) | V = U \right\}.$$

由于我们有 $\Gamma_{i,\ j} > 0$，因此得到

$$\mathrm{Stab}_f = \mathrm{Stab}_A \cap \mathrm{Stab}_{p^{-1}K}.$$

由于 K 是 $\mathrm{GL}_n(E)$ 的紧子集，对于每个 $y\in K$，我们都有一个紧开邻域 $K_y y\subset K$，其中 K_y 是 $\mathrm{GL}_n(E)$ 的紧开子群。于是

$$\{K_y y | y\in K\}$$

是 K 的开覆盖，因此它有一个有限子覆盖 $\{K_1y_1,\cdots,K_sy_s\}$。令

$$H=\cap_{1\leq i\leq s}K_i.$$

于是， K 在左侧保持 H 不变。我们声称， $p^{-1}(K)$在左侧保持 $p^{-1}(H)$不变。

对于 $w\in p^{-1}H$ 和 $z\in p^{-1}(K)$，我们有

$$p(wz)=p(w)p(z)\subset K,$$

因此 $wz\subset p^{-1}(K)$。另一方面，我们有 $\mathrm{Stab}_A=I_n$。因此我们得到

(1) $\mathrm{Stab}_f=\{I_n\}$ if $A\neq I_n$, and
(2) $\mathrm{Stab}_f=I_n+t_2^{\Gamma}p^{-1}(H)$ if $A=I_n$.

我们有 I_n 是一个零测度子群，并且

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{GL}_n(F)}\mathrm{char}_{I_n+t_2^{\Gamma}p^{-1}(H)}dx &= \int_{M_n(F)}\mathrm{char}_{I_n+t_2^{\Gamma}p^{-1}(H)}|\det x|^{-n}dx\\ &= \int_{M_n(F)}(\mathrm{char}_H)^{0,0}(x)dx.\end{aligned}$$

我们有 $I_n+t_2^{\Gamma}p^{-1}H$是 GL$_n(F)$ 的一个可测子集。显然，它是 GL$_n(F)$ 的一个子群，因此它是一个可测子群。□

引理 3.4。每个元素 $f\in\mathcal{L}^H(\mathrm{GL}_n(F))$都属于某个可测子群 M *of* $\mathrm{GL}_n(F)$中的 $\mathcal{L}^H(\mathrm{GL}_n(F)//M)$。

证明。我们不妨设 $f=g^{0,\Gamma}$，否则可取 $M=I_n$。由于 g 是 GL$_n(E)$ 上的 Bruhat-Schwartz 函数，我们不妨设 $g=\mathrm{char}^{\mathrm{GL}_n(E)\ K}$，其中 $K\subset$ 是 GL$_n(E)$ 的一个紧开子集。与前一个引理类似，对每个 $y\subset K$，我们都可以选择一个 GL$_n(E)$ 的紧开子群 $K_y\subset$，使得 $yK_y\subset K$。我们有

$$\{yK_y|y\in K\}$$

是 K 的一个开覆盖，它有一个有限子覆盖 $\{y_1K_1,\cdots,y_sK_s\}$。令

$$H_r=\cap_{1\leq i\leq s}K_i.$$

那么， K 是右 H_r-不变的。类似地，我们可以找到 H_l，使得 K 是左 H_l不变的。令

$$H=H_r\cap H_l,$$

我们看到， K是双边H-不变的。令 $M=I_n+t_2^{\Gamma}p^{-1}(H)$，我们声称 $f=g^{0,\Gamma}$是双边M-不变的。假设 $w_1=I_n+t_2^{\Gamma}h_1$， $w_2=I_n+t_2^{\Gamma}h_2\in I_n+t_2^{\Gamma}p^{-1}(H)$ $z=I_n+t_2^{\Gamma}k\in I_0+t_2^{\Gamma}p^{-1}(K)$，那么我们有

$$w_1zw_2=(I_n+t_2^{\Gamma}h_2)(I_n+t_2^{\Gamma}h_2)(I_n+t_2^{\Gamma}h_2)\in I_n+t_2^{\Gamma}p^{-1}(K).$$

我们有

$$g^{0,\Gamma}(x)=\mathrm{char}_V,\quad V=\left\{x\in\mathrm{GL}_n(F)|x\in(I_n+t_2^{\Gamma}p^{-1}(K))\right\},$$

由于 V是双边 M-不变的，我们得到 $f\in\mathcal{L}^M(\mathrm{GL}_n(F)//M)$。 □

注记 3.5。由于 $\mathcal{L}^M(\mathrm{GL}_n(F))$由 $g^{A,\Gamma}$生成，其中 g是紧支集函数（因此是局部常值函数）。于是，对于一个 $f\in\mathcal{L}^M(GL_n(F)//M)$，我们有

$$f=\sum f(g_i)\mathrm{Id}_{Mg_iM}.$$

我们注意到，通常这个和包含无限多个项。

参考文献

[BK06] Alexander Braverman 和 David Kazhdan. 二维局部域上的赫克代数的一些例子. 名古屋数学杂志, 183:57–84, 2006. [BK11] Alexander Braverman 和 David Kazhdan. 仿射 Kac–Moody 群的球 Hecke代数 I. 数学年刊, 页码 1603–1642, 2011.[BKP16] Alexander Braverman、David Kazhdan 和 Manish M Patnaik. p-adic loop 群的 Iwahori–Hecke代数. 数学新进展, 204(2):347–442, 2016. [Fes01] Ivan Borisovich Fesenko. 高维局部域的序列拓扑与 Milnor K群的商. 代数与分析, 13(3):198–221, 2001. [Fes03] Ivan Fesenko. 算术概形上的分析. I. Doc. Math, 页码 261–284, 2003. [FK00] Ivan Fesenko 和 Masato Kurihara. 高维局部域导论. 数学研究所，华威大学，英国考文垂，2000.[GK04] Dennis Gaitsgory 和 David Kazhdan. 二维局部域上的代数群表示. 几何与泛函分析 GAFA, 14(3):535–574, 2004. [GK05] Dennis Gaitsgory 和 David Kazhdan. 二维局部域上的代数群：某些诱导表示的不可约性. Journal of Differential Geometry, 70(1):113–128, 2005. [GK06] Dennis Gaitsgory 和 David Kazhdan. 二维局部域上的代数群：若干进一步的构造. 载于《李理论研究：献给 A. Joseph 六十寿辰》，页码 97–130. 施普林格，2006.[Kap01] Mikhail Kapranov. 双仿射 Hecke代数与二维局部域. 美国数学会杂志, 14(1):239–262, 2001. [KL04] Henry H Kim 和 Kyu-Hwan Lee. 二维局部域上的 SL_2 的球 Hecke代数. 美国数学杂志, 126(6):1381–1399, 2004. [Lee10] Kyu-Hwan Lee. 二维局部域上的 SL_2 的 Iwahori–Hecke代数. 加拿大数学杂志, 62(6):1310–1324, 2010. [Mor08] Matthew Morrow. 乘积空间上的积分以及局部域上的赋值域的 GL_n . 数论与物理通讯, 2(3):563–592, 2008. [Mor10] Matthew Morrow. 局部域上的赋值域上的积分. 东京数学杂志, 33(1):235–281, 2010. [Par84] Alexey Nikolaevich Parshin. 局部类域论. 斯捷克洛夫数学研究所学报, 165:143–170, 1984.[Wal19] Raven Waller. 二维局部域上的 GL_2 的测度与积分. 纽约数学杂志, 25:396–422, 2019.

西湖高等研究院，中华人民共和国浙江省杭州市 310024 ， 西湖大学理论科学研究院，中华人民共和国浙江省杭州市 310030电子邮箱： maxuecai@westlake.edu.cn