arXiv:2601.01623v1 [math.DG] 4 Jan 2026

线性体积增长 Ricci 平坦流形渐近极限的唯一性 II

Zetian Yan 和 Xingyu Zhu

Abstract. 我们将非塌缩 Ricci 平坦流形的渐近极限唯一性与一个渐近于布塞曼函数的调和函数的存在性联系起来，其中这些流形具有线性体积增长。

与 Colding–Minicozzi 在欧几里得体积增长情形下的工作类似，假设存在这样的调和函数且一个渐近极限光滑，我们证明了渐近极限的唯一性，并通过与该调和函数相关的单调量建立了定量的多项式收敛速率。

反过来，对于具有非负 Ricci 曲率的开流形，我们证明渐近极限的唯一性意味着所需调和函数的存在，而无需假设截面光滑。

Contents

1. 引言 1

第一部分：渐近极限的唯一性 7

2. 唯一性的证明 3. 单调量 $\mathcal{A}$及其近似 $\mathcal{E}$4. $\mathcal{E}$的性质 5. $\mathcal{A}'$的衰减 7 14 18 26

第二部分：线性增长调和函数的存在性 27

6. 线性增长调和函数的存在性 27 参考文献 32

1. 引言

1.1. 动机与主要结果陈述。对于具有 $\mathrm{Ric}_g \geq 0$ 的黎曼 n-流形 (M, g)，Bishop–Gromov 体积比较定理断言，对于任意点 $p \in M$，体积商

$$r^{-n}\,\mathrm{Vol}_g(B_r(p)) \tag{1.1}$$

关于半径 r 单调非增。如果 (1.1) 在 $r \to \infty$ 时的极限（记为 V_M）为正，则称 M 具有欧几里得体积增长。这是具有非负 Ricci 曲率的流形所能达到的最大体积增长。根据 Gromov 预紧性定理，对于任意度量缩放序列 $(M,\ r_i^{-2}g,\ p)$，其中 $r_i \to \infty$，都存在一个子序列收敛

2020 *Mathematics Subject Classification.* 53C21,53C25.*Key words and phrases.* Ricci 平坦、线性体积增长、单调性、唯一性、渐近极限。

在 Gromov–Hausdorff 意义下收敛到一个测地度量空间（X，$\mathsf{d}\ x$），称为 M的渐近锥。当 M 具有欧几里得体积增长时，Cheeger–Colding [CC97] 证明了每个（X，d）都是度量锥。证明的关键在于，在重标度度量 $r_i^{-2}g$下，单调量 (1.1) 在 $i \to \infty$ 时趋近于 V_M。一般而言，渐近锥（X，d）可能取决于缩放序列 r_i的选择。已有多个例子表明，M 可能具有非唯一渐近锥 [Per97, CC97,CN13]。如果将 $\mathrm{Ric}_g \geq 0$加强为 $\mathrm{Ric}_g = 0$，也就是说，如果（M，g）是 Ricci平坦流形，那么便可以运用几何偏微分方程的方法。在这种情况下，渐近锥的唯一性已得到广泛研究 [CT94, CM14, HO25]。特别是，Colding–Minicozzi [CM14] 证明了一项重要结果：如果一个渐近锥是光滑的，那么它就是唯一的。[CM14] 中的关键观察是：如果在[Col12] 中构造的 (1.1) 的平滑版本在 $r \to \infty$ 时足够快地收敛到其极限，那么唯一性便随之成立；而 Ricci 平坦性则提供了足够的解析方法（例如 Łojasiewicz–Simon 不等式），以获得该平滑版本 (1.1) 所需的衰减率。

另一方面，对最大体积增长的研究促使人们研究最小体积增长。Calabi 和 Yau 分别证明，对于完备的非紧致黎曼 n-流形（M，g）且 $\mathrm{Ric}_g \geq 0$，最小体积增长阶为线性；例如参见[Yau76]。若流形（M，g）存在某个（因而任意）基点 $x \in M$，且

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}_g(B_r(x))}{r} < \infty. \tag{1.2}$$

此外，若 M 满足 $\inf_{x\in M} \mathrm{Vol}_g(B_1(x)) > 0$，我们称其为非塌缩。注意，若（$M, g$）具有欧几里得体积增长，则由（1.1）的单调性可知，它自动是非塌缩的。Sormani 开创了对具有线性增长的流形的研究 [Sor98,Sor00a,Sor00b]。在此情形下，相比重标度序列，研究平移序列更有意义。Gromov 预紧性定理意味着，任意发散平移序列（M, g, p_i），即对于任意固定的 $p \in M$，都有 $\mathsf{d}_g(p_i, p) \to \infty$，均存在一个收敛子序列，在带基点Gromov–Hausdorff意义下（简称 pGH）收敛到一个 Ricci极限空间（$X, \mathsf{d}\ x$），称为 M 的渐近极限。文献 [Zhu25, 定理 1.2] 证明了，若（M, g）是非塌缩的且具有线性体积增长，则其渐近极限是度量圆柱，即形如 $\mathbb{R} \times N$ 并赋予乘积度量的度量空间，其中 N 是紧致度量空间（事实上，它是一个非塌缩的 RCD$(0, n-1)$ 空间）。度量圆柱结构与欧几里得体积增长情形下由（1.1）关联的度量锥结构一样，都与一个由布塞曼函数定义的单调量相关联。

设 $\gamma\colon [0,\infty) \to M$ 为一条射线。与 γ 相关的布塞曼函数 b_γ 定义为

$$b_\gamma := \lim_{t\to\infty} \big(t - \mathsf{d}_g(x, \gamma(t))\big).$$

Sormani [Sor98引理 20] 证明了，当 M 具有线性体积增长时，体积商

$$\frac{\mathrm{Vol}_g\big(\{0 \leq b_\gamma \leq t\}\big)}{t}$$

以及表面积

$$\mathcal{H}^{n-1}\big(\{b_\gamma = t\}\big) \tag{1.3}$$

对于 $t \geq 0$单调非减，并且它们在 $t \to \infty$ 处的极限存在、有限且相同。我们将这一共同极限记为 V_∞。结合 [Sor00a、定理 34]以及 [Zhu25、命题 35], ，渐近极限中的度量圆柱结构取决于这样一个事实：单调量 (1.3) 沿着发散平移序列 V_∞ 收敛到 $p_i \to \infty$。

上述讨论揭示了这样一种密切的类比：在欧几里得体积增长情形下，渐近锥的度量锥结构与在线性体积增长情形下，渐近极限的度量圆柱结构相类似。因此，很自然会预期，为唯一性缩放极限而发展出的理论可以扩展到平移极限。与渐近锥的情形一样，极限圆柱可能取决于平移序列 $\{p_i\}$ 的选择。一般而言，仅假设非负 Ricci 曲率时，渐近极限不必具有唯一性，而反例的构造与锥形情形中的构造相似；例如参见 [Sor98、例 27]和 [Zhu25、定理 51]。

在我们先前的工作中 [YZ25]，，我们将 Cheeger–Tian 的方法 [CT94] 推广到线性体积增长情形。这些方法源自 Simon 对极小曲面切锥唯一性的研究 [Sim83]以及 Allard–Almgren 的研究 [AA81]。在那项工作中，我们不得不施加额外的技术假设，包括曲率积分界、截面上 Ricci 平坦度量的可积性 N 以及 N 上 Lichnerowicz 拉普拉斯算子的非负性。

本文的主要目标是建立关于线性体积增长的 Ricci 平坦流形的渐近极限唯一性及其收敛速率的结果，与 [CM14] 中关于渐近锥的相应结果相呼应。在此过程中，我们得以去除上述技术假设。不过，我们也将引入一项新的技术假设。

在 [Col12]，中，对于具有欧几里得体积增长的（M， g），利用格林距离函数 $b := G^{\frac{1}{2-n}}$ 构造了单调量（1.1）的平滑版本，其中 G 表示 M 的格林函数。与此相反，具有线性体积增长的流形是抛物型的，因此不存在正格林函数。因此，为了至少在（M， g）的一个端上构造单调量（1.3）的平滑版本，我们要求在该端上定义一个调和函数 u，且该函数与布塞曼函数渐近。

一般而言，这种函数 u的存在性尚不为人所知，因此我们将其存在作为一项技术性假设。尽管如此，我们将证明，如果渐近极限唯一，那么即使不假设截面 N光滑，这样的调和函数 u 也存在。

定理 1.1（无穷远处的唯一性）。 设 (M, g) 为具有线性体积增长的非塌缩 *Ricci* 平坦流形。固定一条射线 γ，并令 b_γ 表示与之对应的布塞曼函数。假设以下条件成立。

(1) 一个渐近极限是光滑的，即存在一个序列 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$，满足 $t_i \to \infty$，使得

$$(M, g, \gamma(t_i)) \xrightarrow{\text{pGH}} (\overline{N} := \mathbb{R} \times N,\, dt^2 + g_N,\, (0, x)), \tag{1.4}$$

其中 (N, g_N) 是一个光滑闭 *Ricci* 平坦流形。

(2) 存在一个定义在端 $\{b_\gamma \geq 0\}$ 上的调和函数 u，它渐近于 b_γ；也就是说，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $R_0 \geq 0$，使得

$$|u(x) - b_\gamma(x)| < \varepsilon \quad \textit{for all } x \in \{b_\gamma \geq R_0\}.$$

˜于是，(M, g) 的渐近极限是唯一的。此外，存在常数 $C \geq 1$ 和 $\beta > 0$，使得对所有充分大的 $t > 0$，*Gromov–Hausdorff* 距离满足如下衰减估计

$$\mathrm{d}_{\mathrm{GH}}\big([0,2] \times N,\ \{t \leq u \leq t+2\}\big) \leq C\, t^{-\tilde{\beta}}.$$

事实上，唯一性源于定理 1.1 的一个有效版本，其陈述如下 s.

˜**定理 1.2** (有效唯一性)。 在定理 *1.1* 的条件下，存在常数 ε、δ、$\beta > 0$和 $C > 1$，使得以下结论成立。若 $\mathcal{A}(t) := \int_{\{u=t\}} |\nabla u|\, dV_g$ 满足

$$\mathcal{A}(t_1 - C) - \mathcal{A}(t_2 + C) < \varepsilon$$

对于某个 $1 < t_1 \ll t_2$，并且若对每个 $t \in [t_1 - C, t_1 + C]$ 都有

$$\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}\big([0,2] \times N,\ \{t \le u \le t+2\}\big) < \delta, \tag{1.5}$$

那么：

E.1 对每个 $t \in [t_1, t_2]$,

$$\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}\big([0,2] \times N,\ \{t \le u \le t+2\}\big) < 4\delta.$$

E.2 存在一个度量圆柱 $\mathbb{R} \times N_0$，使得对每个 $t \in [t_1, t_2]$,

$$\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}\big([0,2] \times N_0,\ \{t \le u \le t+2\}\big) \le C\,(t - t_1)^{-\tilde{\beta}}.$$

最后，我们证明，在渐近极限唯一的假设下，存在一个定义在某个端上的调和函数，该函数渐近于布塞曼函数。这一存在性定理受到 Ding [Din04]的工作启发。

定理 1.3（渐近于布塞曼函数的调和函数的存在性）。设 (M, g) 是一个具有线性体积增长且非塌缩的开流形，并且 $\mathrm{Ric}_g \ge 0$。进一步假设 M 的渐近极限唯一，即存在一个度量圆柱 $N = \mathbb{R} \times N$，其中 N 是一个非塌缩的$\mathrm{RCD}(0, n-1)$ 空间，使得对任意平移序列 $\{p_i\}$，都有

$$(M, g, p_i) \xrightarrow{\mathrm{pGH}} (\overline{N},\ (0, x)).$$

那么，存在一个定义在 M 的某个端上的调和函数 u，该函数渐近于布塞曼函数。

注 1.4. 回到 Ricci 平坦情形，结合定理 1.1 和定理 1.3，我们推知：若一个开 Ricci 平坦流形具有唯一的、同维数的光滑圆柱型渐近极限（因而具有线性体积增长），则收敛到该极限的最小速率是多项式级的。这类流形的例子见于各种情形。例如，存在渐近圆柱型 Calabi–Yau 流形 [HHN15], 特别是在复维数3 [CHNP13], 渐近圆柱型 G_2-流形 [Nor08], 以及 ALH 瞬子 [Hei12, BM11]。然而，所有已知的这类例子，其截面都是可积的，且截面上的 Lichnerowicz 拉普拉斯算子非负。根据 [YZ25], ，我们证明，对于上述例子，存在一种规范，使得收敛到渐近极限的速率实际上是指数级的。目前尚不清楚是否存在渐近极限的最优收敛速率为多项式级的例子。这个问题与具有完整全纯群的闭 Ricci 平坦流形是否存在密切相关。

1.2. **证明概述：单调性与唯一性**。我们概述一种单调量的构造，并解释它如何导出渐近极限的唯一性。设 (M, g) 是一个具有线性体积增长的开非塌缩 Ricci平坦流形，如定理 1.1 所述。

首先，渐近极限的唯一性意味着，对于任意序列 $(M,\ g,\ p_i)$，若 $p_i \to \infty$，则其带基点的 Gromov–Hausdorff 极限（如果存在）与发散序列 $\{p_i\}$ 的选取无关。根据定理 1.1 陈述中已经采用的约化，只需考虑位于同一条固定射线上的序列 $\{p_i\}$；参见 γZhu25，定理 1。6]。Sormani [Sor00a，备注 44] 指出，如果单调量 (1.3) 随 $t \to \infty$充分快地收敛，那么 $(M,\ g)$ 渐近于唯一的度量圆柱。然而，量 (1.3) 仅为 Lipschitz 连续，这使得提取定量收敛速率颇为困难。

为克服这一困难，我们首先利用定义在 M 的端上的调和函数 u 对 (1.3) 进行光滑化。考虑 u 的水平集的加权面积：

$$\mathcal{S}(t) := \int_{\{u=t\}} |\nabla u| \, dA_g.$$

第3.2节中的直接计算表明 $\mathcal{S}'(t) = 0$，因此

$$\mathcal{S}(t) = \lim_{t\to\infty} \mathcal{S}(t) = \lim_{i\to\infty} \mathcal{S}(t_i) = \mathrm{Vol}_{g_N}(N) = \lim_{t\to\infty} \mathcal{H}^{n-1}\big(\{b_\gamma = t\}\big),$$

其中，最后一个等号由 [Zhu25的命题 3 得出。8]因此， $\mathcal{S}(t)$ 为大 t时单调量 (1.3) 提供了一个光滑近似。

L^2的构造表明，我们可以考虑相对于加权面积 $|\nabla u| \, dA_g$的 u水平集上的 L^2-范数。于是我们定义

$$\mathcal{A}(t) := \int_{\{u=t\}} |\nabla u|^3 \, dA_g.$$

在第3.1节中，我们将证明 $\mathcal{A}(t)$是单调非增的。此外， $\mathcal{A}(t)$满足一个与 (1.3) 类似的性质：若 $\mathcal{A}(t)$ 收敛得足够快，则可得出所需的渐近极限唯一性。我们概述这一性质的主要步骤，该性质蕴含了我们的主定理。

令 Φ_t 表示区域 $\{t \le u \le t+2\}$ 与其“最近圆柱” $\mathbb{R}\times N_t$中的管状邻域 $[0,2]\times N_t$之间的带基点的 Gromov–Hausdorff 距离。在引理 2.2 中，我们证明唯一性可由以下可求和条件推出

$$\sum_j \Phi_{t+j} < \infty,$$

其中 t 将在证明中确定。由柯西–施瓦茨不等式，这又可由下式推出

$$\sum_j \Phi_{t+j}^2 \, j^{2\sigma} < \infty, \ \text{for some } \sigma > 1/2. \tag{1.6}$$

为证明 (1.6)，我们首先在区域 $\{t+j-1 \le u \le t+j+3\}$上用 Hess u 的 L^2范数估计 Φ_{t+j}；见第2.3节。这一步依赖于截面的光滑性以及 (M,g) 的 Ricci平坦性。另一方面，直接计算表明，上面出现的 L^2范数恰好等于

$$\mathcal{A}'(t+j+3) - \mathcal{A}'(t+j-1);$$

详细计算见第3.1节。因此，(1.6) 由下式推出

$$\sum_j \big(\mathcal{A}'(t+j+3) - \mathcal{A}'(t+j-1)\big) \, j^{2\sigma} < \infty. \tag{1.7}$$

使用 [CM14 中引理2所采用的计算技巧，73], 估计 (1.7) 可由 $-\mathcal{A}'$ 具有以下形式的衰减界推出

$$-\mathcal{A}'(t) \le C\, t^{-\beta} \tag{1.8}$$

其中 $\beta > 0$，且对所有充分大的 $t \gg 1$均成立。最后，这一衰减估计是以下 Łojasiewicz–Simon 不等式的结果

$$\big(-\mathcal{A}'(t)\big)^{2-\alpha} \le C\big(\mathcal{A}'(t+3) - \mathcal{A}'(t-1)\big), \tag{1.9}$$

对于某个 $\alpha \in (0,\ 1)$。

为了证明 $-\mathcal{A}'$ 的 Łojasiewicz–Simon 不等式，我们用加权 Einstein–Hilbert 泛函近似 $\mathcal{A}'$

$$\mathcal{E}(g,w) := \int_N R_g\, w\, dV_g, \tag{1.10}$$

它依赖于光滑截面 N 上的黎曼度量 g 以及一个相对于黎曼体积测度的正权函数 w 。这里 R_g 表示 g的标量曲率。要求数对（g， w）满足加权体积约束保持为常数，即对 $\mathcal{E}$ 的变分取自

$$\mathcal{G}_1 = \left\{ (g,w) \in \mathcal{G} \;\middle|\; \int_N w\, dA_g = \mathrm{Vol}_{g_N}(N) \right\}. \tag{1.11}$$

当 i 充分大且 t 接近 t_i时，水平集 $\{u = t\}$ 与光滑截面 N微分同胚，且 $\{u = t\}$上的诱导黎曼度量 g_t接近 g_N。我们将看到，由 $\mathcal{S}$（t）的恒定性，$(g_N, 1) \in \mathcal{G}_1$ 且$(g_t, |\nabla u|) \in \mathcal{G}_1$。泛函 $\mathcal{E}$的构造受到CM14第 3]节中 $\mathcal{R}$-泛函的启发；有关这一选择的详细讨论，见第3.2节。

泛函 $\mathcal{E}$： $\mathcal{G}_1 \to \mathbb{R}$ 满足以下性质：

(R.1) $\mathcal{E}(g_N, 1) = \lim_{t\to\infty} \mathcal{A}'(t) = 0$。(R.2) 当限制在 $\mathcal{G}_1$ 上时，$(g_N, 1)$ 是 $\mathcal{E}$ 的一个临界点。(R.3) 泛函 $\mathcal{E}$ 满足 Łojasiewicz–Simon 不等式：存在 $\alpha \in \in (0,1)$，使得

$$|\mathcal{E}(g,w)|^{2-\alpha} \le |\nabla_1 \mathcal{E}(g,w)|^2,$$

对所有充分接近 $(g_N, 1)$ 的 (g, w)，其中 $\nabla_1 \mathcal{E}$ 表示限制在 $\mathcal{G}_1$ 上的 $\mathcal{E}$ 的梯度。

(R.4)
$$|\nabla_1 \mathcal{E}(g_t, |\nabla u|)|^2 \le C \int_{\{t-1\le u\le t+3\}} |\operatorname{Hess} u|^2\, dV_g.$$

(R.5)
$$|\mathcal{A}'(t) - \mathcal{E}(g_t, |\nabla u|)| \le C\, h_{[t-1,t+3]}.$$

粗略地说，(R.1) 和 (R.2) 表明 $\mathcal{E}$ 在无穷远处逼近 $\mathcal{A}'$ 。性质 (R.4) 和 (R.5) 进一步表明，当 $(g_t, |\nabla u|)$ 充分接近 $(g_N, 1)$ 时， $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{A}'$ 在定量意义下等价，并且可以视为 (R.1) 和 (R.2) 的定量强化。最后，(R.3) 中的 Łojasiewicz–Simon 不等式提供了推导衰减估计的关键机制。

我们将第1部分安排如下。在下一节，即第 2 节中，我们将给出上文概述的定理 1.1 及其有效版本定理 1.2 的详细证明，并假设估计式 (1.8) 成立。单调量 $\mathcal{A}$与近似泛函 $\mathcal{E}$ 的构造将在第3节中介绍。性质 (R.1)-(R.5) 的验证将在第 4 节中进行，主要沿用 [CM14]的方法。最后，第 5 节将给出 (1.8) 和 (1.9) 的精确表述，并基于 $\mathcal{E}$的性质证明它们。

1.3. **证明概要：线性增长调和函数的存在性**。 我们概述在定理 1.3 的假设下线性增长调和函数存在性的证明。与 [Din04], 中的主要思想相同，我们将极限圆柱上的调和函数$N = \mathbb{R} \times N$平移 M回来。不妨设（M， g）只有一个端。若（M， g）有两个端，则它必定分裂为一个度量圆柱，此时问题是平凡的。我们假设读者了解 RCD 空间上的微积分；相关内容见 [AH18、DPG18、Gig14], , 因为本文的另一部分不需要 RCD 理论。

首先，如引理 2.2 所示，渐近极限的唯一性意味着平移序列满足柯西型判据。特别地，对于任意 $\varepsilon > 0$ 和任意 $L > 0$，存在$R_0 = R_0(\varepsilon)$，其与 L 无关，使得对于所有 $R \geq R_0$,

$$\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}\big((\mathcal{T}_{[R,R+L]}, \gamma_R), ([0,L] \times N, (0,x))\big) < \varepsilon. \tag{1.12}$$

这里我们采用记号

$$\mathcal{T}_{a,b} := \{x \in M \mid a \leq b_\gamma(x) \leq b\}, \qquad \gamma_t := \gamma(t).$$

由此可知，固定的度量圆柱 $\mathbb{R} \times N$ 可对任意长的管状邻域提供一致的基点 Gromov–Hausdorff 控制。

在极限圆柱 $\mathbb{R} \times N$ 上，令 r 表示 $\mathbb{R}$ 坐标，它是调和的。固定 $L > 0$。由定理 6.1 可知，对于任意发散序列 $R_i \to \infty$，存在定义在 $\mathcal{T}_{[R_i,R_i+L]}$ 上的调和函数 $u_{i,\,L}$，使得将其与式 (1.12) 中的 Gromov–Hausdorff 逼近映射复合后，函数 $u_{i,\,L}$ 在 $H^{1,2}$ 中强收敛至 $(0,\ L)$ 上的 r。证明依赖于 $[0,L] \times N$ 上第一个狄利克雷特征值为正以及等式 $H^{1,\ 2}_{0} = \widehat{H}^{1,\ 2}_{0}$；这两点均在定理 6.1 中得到验证。

为了排除退化为常数的情形并获得一致的增长控制，我们使用三圆不等式，即定理 6.3。通过反证法（另见 [YZ25，定理 5。5]），结合一致近似 (1.12)，可知该不等式在小的 Gromov–Hausdorff 扰动下保持稳定。因此，当 i 足够大时，管状邻域 $\{u_{i,L}\}$ 上的调和函数$\mathcal{T}_{[R_i,R_i+L]}$ 满足相同的三圆不等式，且常数与 i 和 L 无关。

利用上述构造的函数 $u_{i,\,L}$ 以及一致的三圆不等式，我们在端 $\{b_\gamma \geq R_0\}$ 的紧子集上得到一致的局部 $H^{1,\,2}$ 和 $C^{0,\,\alpha}$ 界。通过对角线论证和椭圆正则性，某个子序列局部光滑收敛到一个调和函数

$$u : \{b_\gamma \geq R_0\} \to \mathbb{R}.$$

根据构造，在越来越大的管状邻域上，函数$u_{i,\,L}$ 接近坐标函数r 在 $\mathbb{R}\times N$上。此外，根据 [Zhu25], ，在尖点 Gromov–Hausdorff 收敛下，布塞曼函数 b_γ 收敛到 r。因此，取极限可得

$$|u - b_\gamma| \longrightarrow 0 \quad \text{as } b_\gamma \to \infty,$$

这表明 u具有线性增长，且渐近于 b_γ。

致谢。作者感谢 Jian Wang、Guofang Wei 和 Ruobing Zhang 对本研究的关注，并感谢 Yifan Chen 和 Junsheng Zhang 提供参考文献 [Hei12]。Z.Y. 获得 AMS–Simons 旅行资助。X.Z. 获得 AMS–Simons 旅行资助。

第1. 部分 渐近极限的唯一性

2. Proving uniqueness

本节中，我们证明定理 1.1；若干分析细节将在后续各节中验证。

设 (M^n, g) 是一个具有非负 Ricci 曲率和线性体积增长的开非塌缩 n-流形。令 $\gamma\colon [0,\infty) \to M$ 是 M 中的一条射线，并令 b_γ 表示其对应的布塞曼函数。我们假设存在一个调和函数

$$u\colon \{b_\gamma \geq 0\} \to \mathbb{R}$$

在 C^0 意义下与 b_γ 渐近：对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $R_0 \geq 0$ 使得

$$|u(x) - b_\gamma(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in \{b_\gamma \geq R_0\}. \tag{2.1}$$

虽然并非必要，但假设

$$M \setminus \{b_\gamma \geq 0\} \neq \emptyset.$$

否则， u 在全局上有定义且为调和函数。根据 Sormani 的一项结果 [Sor00b], 线性增长调和函数 u 将诱导一个分裂，此时 M 其自身就是一个度量圆柱。

2.1. **唯一性的判别准则**。本节给出一个用于判定渐近极限唯一性的柯西判别准则，即引理 2.2。首先，我们需要借助调和函数 u构造一个优选的 Gromov–Hausdorff 近似。这将有助于我们计算带基点的 Gromov–Hausdorff 距离。给定 $\varepsilon > 0$，结合 (2.1) 中与 b_γ 的接近性，以及 u 为调和函数这一事实，标准论证（参见 [Che01]）表明，当 i 足够大时， $u - t_i$ 是 ε-几乎分裂函数，定义在 $\{t_i \leq u \leq t_i + 2\}$上，即

(1) $\sup_{\{t_i \leq u \leq t_i+2\}} |\nabla u| \leq 1 + C(n)\varepsilon$ ，其中某个常数 $C(n) > 0$;

(2) $\fint_{\{t_i \leq u \leq t_i+2\}} ||\nabla u|^2 - 1| \leq \varepsilon$; (3) $\fint_{\{t_i \leq u \leq t_i+2\}} |\operatorname{Hess} u|^2 \leq \varepsilon$。

在陈述上述几乎分裂性质时，为方便起见，我们使用了 u 的水平集。容易看出， $\{t_i \leq u \leq t_i + 2\}$ 与以 $\gamma(t_i)$为中心的球可比；当 M 非塌缩且具有线性体积增长时，这是因为此时 $\{t_i \leq u \leq t_i + 2\}$ 的直径一致有界。参见 [CM97, （2.6）—（2.11）]。

注释 2.1。由于 $u - t_i$ 是一个几乎分裂函数，其水平集可用于构造 $\{t_i \leq u \leq t_i + 2\}$ 与 $[0, 2] \times N$ 之间的 Gromov–Hausdorff 逼近，并将 γ 映到 $[0, 2] \times \{x\}$ 的（一个小邻域）中，其中 $x \in N$见 [Zhu25, 命题 2。11], 并将相应的水平集 $\{u = t\}$ 映到 $\{t - t_i\} \times N$的（一个小邻域）中，见 [Sor00a, 注释 30]。

按照 [CM14引理 2 中关于渐近锥的唯一性的判据，56], 我们给出一个类似的渐近极限唯一性判据；另见 Sormani 使用布塞曼函数给出的另一个判据 [Sor00a, 注 43]。

从现在起，我们记

$$T_{[a,b]} := \{\, a \leq u \leq b \,\}$$

由水平集 $\{u = a\}$ 和 $\{u = b\}$ 界定的闭管。我们考虑管状邻域 $T_{[t,t+2]}$ 以及一个标记点 $x_t \in \gamma \cap \{u = t\}$; 该点取为射线 γ 与水平集 $\{u = t\}$ 的一个交点。

令 Φ_t 为 $T_{[t,t+2]}$ 与某个度量圆柱中相应管状邻域之间的带基点 Gromov–Hausdorff 距离的下确界。

$$\Phi_t := \inf\{\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}((T_{[t,t+2]}, x_t), ([0, 2] \times N, (0, x))) \mid \overline{N} = \mathbb{R} \times N \text{ a metric cylinder}\}$$

因此，给定 $\varepsilon > 0$，若 $\Phi_t < \epsilon$，则存在一个满足以下条件的圆柱 $N_t = N_t \times \mathbb{R}$:

$$\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}((T_{[t,t+2]} \subseteq M, x_t), ([0, 2] \times N_t \subseteq \overline{N}_t, (0, x))) < \varepsilon.$$

我们有

引理 2.2。 如果对于某个 t $\sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{t+j} < \infty$，那么 M 有唯一的渐近极限。

证明。 不失一般性，在证明中取 $t = 0$ 。只需证明序列$\{\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}(T_{[j,j+1]}, T_{[j+1,j+2]})\}_{j=1}^{\infty}$ 是柯西序列。我们用 Φ_j 估计 $\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}(T_{[j,j+1]}, T_{[j+1,j+2]})$。首先注意，存在一个圆柱 $N_j = \mathbb{R} \times N_j$， 使得

$$\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}(T_{[j,j+2]} \subseteq M, [0, 2] \times N_j \subseteq \overline{N}_j) \leq 2\Phi_j.$$

那么，两个子管状邻域 $T_{[j,j+1]}$ 和 $T_{[j+1,j+2]}$ 也都以 $\overline{N}_j$ 作为最接近的度量圆柱的候选。这里，我们使用通过 u定义的优选 GH 逼近，如注释 2.1 中所述。若有必要，在 N_t 中进行平移后，将 GH 逼近限制到这些子管状邻域上，便可得出

$$\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}(T_{[j,j+1]}, [0,1]\times N_j) \le 2\Phi_j, \quad \mathsf{d}_{\mathrm{GH}}(T_{[j+1,j+2]}, [0,1]\times N_j) \le 2\Phi_j.$$

总之，我们有 $\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}(T_{[j,j+1]},\ T_{[j+1,j+2]}) \le 4\Phi_j$。证明完毕 . □

2.2. C^1 **Hess的界以及到管状邻域的距离**。现在我们证明端上调和替代的 Hessian 满足以下 C^1 界。

定理 2.3. 设 $\{t_i\}$ 为 (1.4) 中的序列。存在 $\delta > 0$，使得对于任意 $\delta \in (0,\ \delta)$，$L > 0$，$i \in \mathbb{N}^+$，如果

$$\forall t \in [t_i, t_i + L], \mathsf{d}_{\mathrm{GH}}\big((T_{[t,t+2]}, x_t), ([0,2]\times N, (0,x))\big) < \delta. \tag{2.2}$$

那么存在常数 $C(g_N)$，其仅取决于极限圆柱 $\mathbb{R}\times N$ 的几何性质，特别是其维数和曲率界 N，使得对于任意 $t \in [t_i, t_i + L]$,

$$\|\operatorname{Hess} u\|^2_{C^1(\{u=t\})} \le C(g_N) \int_{T_{[t-1,\,t+3]}} |\operatorname{Hess} u|^2\, dV_g \tag{2.3}$$

证明。通过直接计算，我们知道

$$\Delta|\operatorname{Hess} u|^2 = \operatorname{div}\left(2\langle \nabla \operatorname{Hess} u, \operatorname{Hess} u\rangle\right) = 2\left(\langle \Delta \operatorname{Hess} u, \operatorname{Hess} u\rangle + |\nabla \operatorname{Hess} u|^2\right).$$

根据 [CM14，引理 4，3], 我们有

$$\Delta \operatorname{Hess} u = \operatorname{Hess}(\Delta u) - 2\operatorname{Rm}\circ \operatorname{Hess} u = -2\operatorname{Rm}\circ \operatorname{Hess} u,$$

其中 $\operatorname{Rm}\circ(\operatorname{Hess} u)$ 表示曲率张量与对称 2-张量的自然缩并。注意，根据 Anderson [And90], 在 Ricci 平坦且满足非塌缩条件时，序列˜管状邻域的 $\{T_{[t_i,t_i+L]}\}$ 收敛到 $[0,L]\times N$ 在 C^∞ 意义下。因此，存在 $\delta > 0$ 使得只要 (2.2) 成立，Rm 就一致有界，进而我们有

$$\Delta|\operatorname{Hess} u|^2 \ge 2|\nabla \operatorname{Hess} u|^2 - C(g_N)|\operatorname{Hess} u|^2, \tag{2.4}$$

其中常数 $C(g_N)$ 仅依赖于度量 g_N，与 i 无关。因此，我们可以基于 (2.4) 应用 De Giorgi–Nash–Moser 迭代，从而得到

$$\|\operatorname{Hess} u\|^2_{C^0(\{u=t\})} \le C(g_N) \int_{T_{[t-1,t+3]}} |\operatorname{Hess} u|^2\, dV_g, \quad \forall t \in T_{[t_i,t_i+L]}. \tag{2.5}$$

此外，由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned} 0 = \int \operatorname{div}\left(\eta^2 \nabla |\operatorname{Hess} u|^2\right) &\ge \int \eta^2 \left(2|\nabla \operatorname{Hess} u|^2 - C(g_N)|\operatorname{Hess} u|^2\right) \\ &\quad - 4\int \eta|\nabla\eta||\operatorname{Hess} u||\nabla \operatorname{Hess} u| \\ &\ge \int \eta^2 |\nabla \operatorname{Hess} u|^2 - C_1\eta^2|\operatorname{Hess} u|^2 \\ &\quad - C_2 \int |\nabla\eta|^2 |\operatorname{Hess} u|^2. \end{aligned}$$

这里的常数 C_1 与 C_2 无关，i也同样如此。

由于我们在管状邻域 $T_{[t,t+2]}$上工作，可以选取一个截断函数 η，其紧支集包含于 $T_{[t-1,t+3]}$，并且在 $T_{[t,t+2]}$ 和 $|\nabla\eta| \le 4$上满足 $\eta = 1$。由此得到

$$\int_{T_{[t,t+2]}} |\nabla \operatorname{Hess} u|^2 dV_g \le C \int_{T_{[t-1,t+3]}} |\operatorname{Hess} u|^2 dV_g. \tag{2.6}$$

与上文类似，由 (2.6) 可得恒等式

$$\begin{aligned} \Delta|\nabla \operatorname{Hess} u|^2 &\ge 2|\operatorname{Hess}\operatorname{Hess} u|^2 - C(g_N)|\nabla \operatorname{Hess} u|^2 + 2\langle \nabla \operatorname{Hess} u, \nabla\Delta \operatorname{Hess} u\rangle \\ &= 2|\operatorname{Hess}\operatorname{Hess} u|^2 - C(g_N)|\nabla \operatorname{Hess} u|^2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

以及德乔治–纳什–莫瑟迭代，我们得到对所有 $t \in T_{[t_i,t_i+L]}$

$$\|\nabla \operatorname{Hess} u\|^2_{C^0(\{u=t\})} \le C(g_N) \int_{T_{[t-1,t+3]}} |\operatorname{Hess} u|^2 dV_g. \tag{2.8}$$

最后，结合 (2.5) 和 (2.8)，我们得到所需的 C^1 估计。 □

2.3. **控制** **通过 Hessian 估计控制到管状邻域的 Gromov–Hausdorff 距离**。为方便起见，我们 set

$$h_{[a,b]} = \int_{\{a\le u\le b\}} |\operatorname{Hess} u|^2 dV_g$$

并假设误差 $h_{[a,b]}$ 非常小。事实上，通过选择 $h_{[a,b]}$ 足够大， a可以任意小。b 本着 [CM14], 对 (1.4) 中的收敛序列 $(M^n, g, \gamma(t_i))$ 的相同思路，我们将控制其最近圆柱中到管状邻域的距离：

命题 2.4。 在定理 *2.3* 的假设下，存在常数 $C = C(g_N, L) > 0\mathbb{R} \times N_i$，使得对于任意 $t \in [t_i, t_i + L]$, 都有

$$\Phi_t \le C \left(\int_{\{t-1\le u\le t+3\}} |\operatorname{Hess} u|^2 dV_g \right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明。 注意，由 $\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ 生成的流给出了管状邻域 $T_{[t,t+2]}$ 与乘积空间 $[0, 2] \times u^{-1}(t)$ 之间的微分同胚。令 g_t 表示水平集 $u^{-1}(t)$ 上的诱导度量。现在我们证明， $T_{[t,t+2]}$ 上的度量与乘积度量 C^0 接近

$$dr^2 + g_t$$

在 $[0, L] \times u^{-1}(t)$ 上，这意味着它与圆柱 $(\mathbb{R} \times u^{-1}(t)\ du^2 + g_t)$ 的 Gromov–Hausdorff 接近性，进而推出 Φ_t 的上界。我们将此圆柱记为 $\mathbb{R} \times N_i$。

Not意到，定理 2.3 给出了 Hessian 的逐点估计：对所有 $t \in T_{[t_i,t_i+L]}$ ，

$$|\operatorname{Hess} u|(x) + |\nabla|\nabla u||(x) \le C\sqrt{h_{T_{[t-1,t+3]}}}, \quad u(x) = t, \tag{2.9}$$

其中我们使用了 $\nabla|\nabla u|^2 = 2\text{Hess } u(\nabla u, \cdot)$ 以及梯度 $|\nabla u|$ 的一致上界。下文中，一致常数 C 在不同公式中可能有所不同，但它们在与定理 2.3 相同的意义下均不依赖于 i。

令 p 为 $u^{-1}(t)$ 中的任意一点，并令 $\{e_k\}$ 为 g_{t_i} 在 p 处的标准正交标架。我们可以沿着流线延拓标架 $\{e_k\}_{k=1}^{n-1}$，并保持括号关系：

$$\left[e_k, \frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right] = 0.$$

此外，尽管扩展向量场不再是标准正交的，但它们与 u 的水平集相切，并且满足

$$(g(e_k,e_j))' = \mathcal{L}_{\frac{\nabla u}{|\nabla u|}}(g(e_i,e_j)) = \left(\mathcal{L}_{\frac{\nabla u}{|\nabla u|}} g\right)(e_i,e_j) = \frac{2\,\mathrm{Hess}\,u(e_k,e_j)}{|\nabla u|}. \tag{2.10}$$

这里的微分 $'$ 是沿着上述流进行的。由 (2.10) 立即可知，对于 $k=1,\ \cdots,\ n-1$,

$$-\frac{2|\,\mathrm{Hess}\,u|}{|\nabla u|} g(e_k,e_k) \le (g(e_k,e_k))' \le \frac{2|\,\mathrm{Hess}\,u|}{|\nabla u|} g(e_k,e_k).$$

将此与 (2.9) 结合可得，对于所有 $t \in T_{[t_i,t_i+L]}$

$$\begin{aligned} |g(e_k,e_k)-1| &\le \max\left\{\exp^{CL\sqrt{h_{T_{[t-1,t+3]}}}} - 1, 1-\exp^{-CL\sqrt{h_{T_{[t-1,t+3]}}}}\right\} \\ &\le CL\sqrt{h_{T_{[t-1,t+3]}}}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

这里我们使用了泰勒展开以及 $\sqrt{h_{T_{[t-1,t+3]}}}$ 的小量性。 ———

类似地，对于 $k,\ j \in \{1,\cdots,n-1\}, k \ne j$，我们有

$$-\frac{2|\,\mathrm{Hess}\,u|}{|\nabla u|}\sqrt{g(e_k,e_k)}\sqrt{g(e_j,e_j)} \le (g(e_k,e_j))' \le \frac{2|\,\mathrm{Hess}\,u|}{|\nabla u|}\sqrt{g(e_k,e_k)}\sqrt{g(e_j,e_j)}.$$

结合 (2.11) 中的估计可得，对于所有 $t \in T_{[t_i,t_i+L]}$

$$|g(e_k,e_j)| \le CL\sqrt{h_{T_{[t-1,t+3]}}}. \tag{2.12}$$

这里的常数 C 依赖于 $h_{T_{[t-1,t+3]}}$ 的一致上界。由于 $h_{T_{[t-1,t+3]}}$ 一致地足够小，我们可以假设 C 依赖于 δ。

由 (2.11) 和 (2.12)，对 $p \in N$ 取上确界，得到：

$$\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}(T_{[t,t+2]}, [0,2]\times N_i) \le C\left(\int_{\{t-1\le u\le t+3\}} |\mathrm{Hess}\,u|^2\, dV_g\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.13}$$

□

2.4. 主要论证。 在本小节中，我们完成定理 1.1 和定理 1.2 的证明，并假设以下衰减估计成立：

定理 2.5。 存在 $\beta > 0$，使得对于任意固定的 $L > 0$ 和足够小的 $\delta > 0$，存在 $C := C(\delta、\ g_N) > 0$ 只要 (2.2) 成立，则对于任意 $t^* \in [t_i, t_i+L]$

$$\int_{\{u\ge t^*\}} |\mathrm{Hess}\,u|^2\, dV_g \le C(t^*-t_i)^{-\beta-1}. \tag{2.14}$$

此衰减估计将在第 5 节中证明。按照 [CM14 的思路，命题 2。65], 我们得到

~ ¯**命题 2.6。** 固定一个整数 $m_2 > m_1 \ge 2$。存在 $\beta > 0$ 和 $C > 0$ ，使得以下结论成立。设 i_0 为一个整数，使得对于某些 $L \ge m_2+2$ 和 i_0，（2.2）成立，则

$$\sum_{j=m_1}^{m_2} \Phi_{t_{i_0}+j} \le \bar{C} m_1^{-\tilde{\beta}}$$

证明。 选取 σ 使得 $1<2\sigma<1+\beta$。根据柯西–施瓦茨不等式，

$$\sum_{j=m_1}^{m_2}\Phi_{t_{i_0}+j}\le\left(\sum_{j=m_1}^{m_2}\Phi_{t_{i_0}+j}^2\,j^{2\sigma}\right)^{1/2}\left(\sum_{j=m_1}^{m_2}j^{-2\sigma}\right)^{1/2}.$$

当 $2\sigma>1$ 时，级数 $\sum_j j^{-2\sigma}$ 收敛。因此，只需对右侧的第一个因子进行估计。

应用命题 2.4，我们得到

$$\sum_{j=m_1}^{m_2}\Phi_{t_{i_0}+j}^2\,j^{2\sigma}\le C\sum_{j=m_1}^{\infty}\left(\int_{\{t_{i_0}+j-1\le u\le t_{i_0}+j+3\}}|\operatorname{Hess}u|^2\,dV_g\right)j^{2\sigma}.$$

根据定理 2.5，取 $t^*=t_{i_0}+j-1$、 $j=m_1,\ \cdots,\ m_2$，可得

$$a_j:=\int_{\{u\ge t_{i_0}+j-1\}}|\operatorname{Hess}u|^2\,dV_g\le C(t_{i_0}+j-1-t_{i_0})^{-\beta-1}\le Cj^{-\beta-1}.$$

因此，只需估计

$$\sum_{j=m_1}^{m_2}(a_j-a_{j+4})\,j^{2\sigma}.$$

现在我们可以应用 [CM14中的引理 2，73], 从而得到

$$\sum_{j=m_1}^{m_2}\Phi_{t_{i_0}+j}^2\,j^{2\sigma}\le C\sum_{j=m_1}^{m_2}(a_j-a_{j+4})\,j^{2\sigma}\le\bar{C}\,m_1^{-\tilde{\beta}},\qquad\tilde{\beta}:=-2\sigma+\beta+1>0.$$

这就是所需的估计。 □

定理 *1.1* 的证明。我们先选取常数:

(1) 固定 $\delta\in(0,\ \delta)$，使得对于任意固定的充分大的 $L\in\mathbb{N}$，我们都能找到一个充分大的指标 $i_0=i_0(L,\ \delta)$，使得(R.1)-(R.5)、命题 2.4 和定理 2.5 在管状邻域$T_{[t_{i_0},t_{i_0}+L]}$上成立。

(2) 命题 2.6 给出 C 和 β，使得对于 $m_1,\ m_2\in\mathbb{N}$ 且 $m_2>m_1\ge2$ 时，有

$$\sum_{j=m_1}^{m_2}\Phi_{t_{i_0}+j}\le\bar{C}m_1^{-\tilde{\beta}}.\tag{2.15}$$

我们选取 m_1 使得 $\bar{C}m_1^{-\beta}<\delta/100$。固定 $L\ge m_2+2$。

(3) 根据 [CC96] 中的几乎分裂定理（另见 [Xu19，定理 2.13] 的定量版本），我们固定 $\varepsilon>0$，使得若 $\mathcal{A}'(t-1)\ -\mathcal{A}'(t+3)\ >-\varepsilon$，则 $\Phi_t<\delta/100$，并且通过 u 构造的 GH 逼近，我们有

$$\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}\left(T_{[t,t+2]},([0,2]\times\{u=t\})\right)\le2\Phi_t.$$

注意，这并不是命题 2.4，因为在这里，我们并未假设在 t层级上， $\{u=t\}$ 接近于（或微分同胚于）给定光滑圆柱中的截面 N。

由于 $\delta,\ L,\ \varepsilon$ 均已固定，现在我们选择指标 $i_0(L,\ \varepsilon,\ \delta)$ 足够大，使得（2.2）对$t\in[t_{i_0},t_{i_0}+L]$ 成立，其中用 $\delta/100$ 代替 δ，并且

$$\mathcal{A}'(t_{i_0}-1)>-\varepsilon.\tag{2.16}$$

为了证明唯一性，鉴于我们的唯一性判据——引理 2.2，我们希望增大m_2，或等价地增大 L，同时保持固定的 i_0，使 (2.15) 仍然成立。一个潜在的问题是

当 $m_2 \to \infty$ $L \geq m_2 + 2 \to \infty$ 时， $i_0 \to \infty$。关键观察是，如果增大 L，同时对于相同的 i_0仍满足 (2.2)，那么由命题 2.6 可知，(2.15) 对相同的 i_0 和增大的 L 仍然成立。我们采用归纳法。首先证明恒等式 (2.15) 可以延拓到 $m_2 + 1$。

一方面， 由 $\mathcal{A}'$ 的单调性，(2.16) 意味着对任意 $t \in [t_{i_0} + L, t_{i_0} + L + 1]$

$$\mathcal{A}'(t-1) - \mathcal{A}'(t+3) > -\varepsilon.$$

由 (3) 可知

$$\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}\left(T_{[t,t+2]}, [0,2] \times \{u = t\}\right) \leq 2\Phi_t < \frac{2\delta}{100}.$$

另一方面，对于较小的管状邻域 $T_{[t,t+1]} \subseteq T_{[t_{i_0}+L, t_{i_0}+L+2]}$，我们有

$$\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}\left(T_{[t,t+1]}, [0,1] \times N\right) < \frac{\delta}{100}.$$

由三角不等式可得

$$\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}\left(T_{[t+1,t+2]}, [0,1] \times N\right) \leq \mathsf{d}_{\mathrm{GH}}(T_{[t+1,t+2]}, T_{[t,t+1]}) + \mathsf{d}_{\mathrm{GH}}(\left(T_{[t,t+1]}, [0,1] \times N\right)) < \frac{5\delta}{100}.$$

利用由 u 构造的 GH 逼近，对任意 $t \in [t_{i_0} + L, t_{i_0} + L + 1]$，我们有

$$\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}\left(T_{[t,t+2]}, [0,2] \times N\right) < \delta/100 + 5\delta/100 < \delta, \tag{2.17}$$

这进而意味着，命题 2.6 的结果对 $t \in [t_{i_0}, t_{i_0} + L + 1]$ 成立：

$$\sum_{j=m_1}^{m_2+1} \Phi_{t_{i_0}+j} \leq \overline{C} m_1^{-\tilde{\beta}} < \frac{\delta}{100}.$$

现在，我们已将 (2.15) 扩展至 m_2+1，代价是在 Gromov–Hausdorff 距离估计 (2.17) 中引入了额外误差 $5\delta/100$。接下来，我们进行归纳步骤，证明进一步扩展时该误差不会累积。

假设 (2.15) 已扩展至 $m_2 + k$，因此对所有 $t \in [t_{i_0},\, t_{i_0} + L + k]$，

$$\delta_k := \mathsf{d}_{\mathrm{GH}}\big(T_{[t,t+2]},\, [0,2] \times N\big) < \frac{\delta}{2}.$$

根据相同的推理，对于 $t \in [t_{i_0} + L + k,\, t_{i_0} + L + k + 1]$，由 (3) 和三角不等式可得

$$\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}\big(T_{[t+1,t+2]},\, [0,1] \times N\big) < 4\Phi_t + \delta_k \leq \frac{4\delta}{100} + \delta_k.$$

因此，

$$\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}\big(T_{[t,t+2]},\, [0,2] \times N\big) < \frac{5\delta}{100} + \delta_k < \delta.$$

这进而意味着，命题 2.6 的结论对所有 $t \in [t_{i_0},\, t_{i_0} + L + k + 1]$ 均成立，即

$$\sum_{j=m_1}^{m_2+k+1} \Phi_{t_{i_0}+j} \leq \overline{C}\, m_1^{-\tilde{\beta}} < \frac{\delta}{100}.$$

特别地，对于 $t \in [t_{i_0} + L + k,\, t_{i_0} + L + k + 1]$，我们有

$$\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}\big(T_{[t,t+2]},\, [0,2] \times N\big) \leq \mathsf{d}_{\mathrm{GH}}\Big(T_{[t,t+2]},\, T_{[t_{i_0}+L,\, t_{i_0}+L+2]}\Big) + \mathsf{d}_{\mathrm{GH}}\Big(T_{[t_{i_0}+L,\, t_{i_0}+L+2]},\, [0,2] \times N\Big)$$

$$\le 4\sum_{j=m_2}^{m_2+k+1}\Phi_{t_{i_0}+j}+\frac{\delta}{100}\le 4\bar{C}\,m_1^{-\tilde{\beta}}+\frac{\delta}{100}\le\frac{5\delta}{100},$$

它与 k 无关。

这样，我们看到 (2.15) 可以延伸至 $m_2=\infty$。唯一性由此得证。收敛速率估计由命题 2.4 和定理 2.5 得出。

□

证明 定理 *1.2* 的注意，在定理 1.1 的证明中，若将 (2.16) 替换为 b y

$$\mathcal{A}'(t_{i_0}-1)-\mathcal{A}'(t_{i_0}+4k-1)>-\varepsilon,$$

对于某个 $k\in\mathbb{N}^+$，那么证明仍然有效，直到将 (2.15) 延伸至 m_2+k 为止。

我们取足够小的 ε，使得 $\mathcal{A}'(t_1-C)-\mathcal{A}'(t_2+C)\ge-\varepsilon$，并取 δ 作为定理 1.1 证明中的 $\delta/100$，则定理 1.2 的第一个断言立即由定理 1.1 的证明得出，因为根据我们的假设 (1.5)，所需的 (2.2) 已成立。

此外，完全按照定理 1.1 证明中的论证，利用三角不等式可得一个有效的柯西界：对于 $t_1<t<s-1<t_2-1$,

$$\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}\big((T_{[t,t+1]},x_t),(T_{[s,s+1]},x_s)\big)\le 4\sum_{j=\lfloor t-t_1\rfloor}^{\lceil s-t_1\rceil}\Phi_j\le C\,(t-t_1)^{-\tilde{\beta}}. \tag{2.18}$$

因此，任意两个此类管状邻域之间的 Gromov–Hausdorff 距离都以所声称的速率衰减。最后，同一估计表明，Φ_t 也以所需的多项式速率衰减。

□

3. Monotone quantity $\mathcal{A}$ and its approximation $\mathcal{E}$

3.1. 单调量。在本小节中，我们利用端上的调和替代 u 定义单调量。首先介绍加权面积泛函。定义

$$\mathcal{S}(t):=\int_{\{u=t\}}|\nabla u|\,dA_g, \tag{3.1}$$

and

$$\mathcal{A}(t):=\int_{\{u=t\}}|\nabla u|^3\,dA_g. \tag{3.2}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}\mathcal{S}'(t)&=\frac{d}{dt}\int_{\{u=t\}}|\nabla u|\,dA_g\\&=\int_{\{u=t\}}\mathrm{Hess}\,u\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|},\nabla u\right)dA_g-\int_{\{u=t\}}\mathrm{Hess}\,u\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|},\nabla u\right)dA_g=0.\end{aligned}$$

因此，t 水平集 $\{u=t\}$ 上的加权面积测度 $|\nabla u|\,dA_g$ 与.....无关 t.

根据安德森收敛定理 [并且90], 管状邻域光滑收敛 $T_{[t_i,t_i+1]}$到 $[0,1]\times N$，并且沿着序列 $\{t_i\}$ 在（1.4）中，函数 u 收敛到 $\mathbb{R}$ 的坐标函数 $\mathbb{R}\times N$。特别地，$|\nabla u|\to 1$ 当 $t_i\to\infty$，且

$$\mathcal{H}^{n-1}(\{u=t_i\})\to\mathrm{Vol}_{g_N}(N).$$

因此，对所有充分大的 t（使得 u 有定义且为调和函数），

$$\mathcal{S}(t) = \int_{\{u=t\}} |\nabla u|\, dA_g = \lim_{t\to\infty} \int_{\{u=t\}} |\nabla u|\, dA_g = \lim_{i\to\infty} \int_{\{u=t_i\}} |\nabla u|\, dA_g = \mathrm{Vol}_{g_N}(N). \tag{3.3}$$

比较 [CM14, （2.18）]。用同样的推理，我们还可得到

$$\lim_{i\to\infty} \mathcal{A}(t_i) = \lim_{i\to\infty} \int_{\{u=t_i\}} |\nabla u|^3\, dA_g = \mathrm{Vol}_{g_N}(N). \tag{3.4}$$

回顾一下，对于一般的光滑函数 $f \in C^\infty(M)$，有

$$\frac{d}{dt}\int_{\{u=t\}} f\, dA_g = \int_{\{u=t\}} \left\langle \nabla f, \frac{\nabla u}{|\nabla u|^2} \right\rangle dA_g + \int_{\{u=t\}} f\, \frac{H_{\{u=t\}}}{|\nabla u|}\, dA_g,$$

其中 $H_{\{u=t\}}$ 表示水平集 $\{u = t\}$的平均曲率。代入 $f = |\nabla u|^3$ 并利用恒等式

$$H_{\{u=t\}} = -\frac{\mathrm{Hess}\, u(\nabla u, \nabla u)}{|\nabla u|^3},$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'(t) &= \int_{\{u=t\}} \left\langle \nabla |\nabla u|^3, \frac{\nabla u}{|\nabla u|^2} \right\rangle dA_g - \int_{\{u=t\}} \mathrm{Hess}\, u\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \nabla u\right) dA_g \\
&= 3\int_{\{u=t\}} \mathrm{Hess}\, u\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \nabla u\right) dA_g - \int_{\{u=t\}} \mathrm{Hess}\, u\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \nabla u\right) dA_g \\
&= \int_{\{u=t\}} \left\langle \nabla |\nabla u|^2, \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right\rangle dA_g.
\end{aligned}$$

由于 u 仅在非紧超水平集 $\{u \geq t\}$上是调和的，我们希望通过分部积分得到非紧集合 $\{u \geq t\}$上的积分，并利用调和性。然而，我们无法直接按上述方法继续，因为我们事先并不知道所得积分是否有限。为克服这一困难，我们考虑差值

$$\mathcal{A}(s) - \mathcal{A}(t) := \int_{\{u=s\}} |\nabla u|^3\, dA_g - \int_{\{u=t\}} |\nabla u|^3\, dA_g, \qquad s \geq t.$$

这使我们能够在紧区域 $\{t \leq u \leq s\}$上进行分部积分。事实上，我们计算得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'(s) - \mathcal{A}'(t) &= \int_{\{u=s\}} \left\langle \nabla |\nabla u|^2, \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right\rangle dA_g - \int_{\{u=t\}} \left\langle \nabla |\nabla u|^2, \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right\rangle dA_g \\
&= \int_{\{t\leq u\leq s\}} \Delta |\nabla u|^2\, dV_g \\
&= 2\int_{\{t\leq u\leq s\}} \Big(|\,\mathrm{Hess}\, u|^2 + \langle \nabla \Delta u, \nabla u\rangle + \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) \Big) dV_g \\
&= 2\int_{\{t\leq u\leq s\}} |\,\mathrm{Hess}\, u|^2\, dV_g \;\geq\; 0,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中在最后一步中，我们使用了 u 的调和性和 Bochner公式。因此， $\mathcal{A}'(t)$ 单调非减。

命题 3.1. 我们有

$$\mathcal{A}'(t) \le 0, \quad \forall\, t \gg 1, \tag{3.6}$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{A}'(t) = 0. \tag{3.7}$$

特别地， $\mathcal{A}$（t）</style}是单调非增的。

证明。 假设 (3.6) 不成立。由于 $\mathcal{A}'$ 是单调非减的，存在 $\bar{t}$ ，使得对所有 $t \ge \bar{t}$,

$$\mathcal{A}'(t) \ge \mathcal{A}'(\bar{t}) \ge c > 0.$$

于是对于 (1.4) 中的 t_i ，可得

$$\mathcal{A}(t_i) - \mathcal{A}(\bar{t}) = \int_{\bar{t}}^{t_i} \mathcal{A}'(\tau)\, d\tau \ge c\,(t_i - \bar{t}) \to \infty \quad \text{as } i \to \infty,$$

这与 (3.4) 矛盾，即 $\mathcal{A}(t_i) \to \mathrm{Vol}_{g_N}(N) < \infty$ 当 $i \to \infty$时成立。这就证明了 (3.6)。(3.7) 中的极限可由相同的论证得到。□

因此，利用 $\mathcal{A}$的单调性，我们可以将 (3.4) 加强为

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{A}(t) = \mathrm{Vol}_{g_N}(N). \tag{3.8}$$

注 3.2。 命题 3.1 还表明，对于任意充分大的 $t \ge 0$ （使得 u 有定义且为调和函数），

$$\int_{\{u\ge t\}} |\operatorname{Hess} u|^2\, dV_g < \infty. \tag{3.9}$$

事实上，只需令 $s \to \infty$ 见 (3.5)，并使用 (3.7) 即可得到这一结论。

此外，i 鉴于 (3.9)，我们可以继续计算 $\mathcal{A}'$ ，从而得到恒等式 s

$$\mathcal{A}'(t) = \frac{d\mathcal{A}(t)}{dt} = -2\int_{\{u\ge t\}} |\operatorname{Hess} u|^2\, dV_g \le 0, \tag{3.10}$$

and

$$\mathcal{A}''(t) = \frac{d^2\mathcal{A}(t)}{dt^2} = 2\int_{\{u=t\}} \frac{|\operatorname{Hess} u|^2}{|\nabla u|}\, dA_g \ge 0. \tag{3.11}$$

因此， $\mathcal{A}(t)$ 不仅是非增的，而且关于 t 还是凸的。

注记 3.3。 我们将本文的单调量与以下文献中引入的单调量进行比较： [CM14]。在 [CM14], 单调量

$$A(r) = r^{1-n}\int_{\{b=r\}} |\nabla b|^3, \qquad b := G^{\frac{1}{2-n}},$$

满足

$$A'(r) = -\frac{1}{2}\, r^{\,n-3}\int_{\{r\le b\}} b^{2-2n}\left|\mathrm{Hess}(b^2) - \frac{\Delta(b^2)}{n}\, g\right|^2,$$

$$A''(r) = \frac{n-3}{r}\, A'(r) + \frac{r^{\,n-3}}{2}\int_{\{b=r\}} \frac{b^{2-2n}}{|\nabla b|}\left|\mathrm{Hess}(b^2) - \frac{\Delta(b^2)}{n}\, g\right|^2.$$

.....的符号 $A''(r$无法直接确定，因此也就无法推断 $A'(r$的单调性。为克服这一困难，Colding–Minicozzi [Col12] 引入了一个辅助单调量 $Q(r)$。相比之下，在我们的情形下，二阶导数 $\mathcal{A}''(t$具有确定的符号，因此 $\mathcal{A}'(t)$

是单调的。因此，我们可以直接使用 $\mathcal{A}'$。这体现了欧几里得体积增长情形与本文所研究的线性体积增长情形之间的根本差异。

3.2. **近似泛函 $\mathcal{E}$。** 在本小节中，我们构造一个泛函 $\mathcal{E}$，该泛函近似 $\mathcal{A}'$ 在无穷远处的 $\mathcal{A}'$，旨在研究 [CM14], 中作者定义了其近似泛函 $\mathcal{R}$，它是以下两个泛函的线性组合：其中一个以单调量 $A(r)$（见注记 3.3）为模型，另一个则是加权爱因斯坦–希尔伯特泛函。之所以需要这样的线性组合，是因为 Ricci平坦锥的截面是具有正里奇曲率的爱因斯坦流形。

在 [CM14], 的记号中，极限爱因斯坦度量 $b_\infty^{-2}g_0$以及相应的权函数 b_∞，由于里奇曲率的这一正性，并不是所考虑的任何单个泛函的临界点。因此，需要适当的线性组合来得到一个泛函，使得（$b_\infty^{-2}g_0$，b_∞）成为临界点。

在我们的情形中，由于 Ricci 平坦圆柱的截面是里奇曲率消失的爱因斯坦流形，因而大大简化了问题。因此，只需将近似泛函 $\mathcal{E}$ 简单地定义为加权爱因斯坦–希尔伯特泛函

$$\mathcal{E}(g,w) := \int_N R_g\, w\, dV_g, \tag{3.12}$$

作用于由黎曼度量 g 和正权函数 w组成的一对 $(g,\ w)$。这里，R_g 表示 g的标量曲率。在我们的设定中，我们将很容易验证，由截面 N上的度量 g_N和常数权函数 1 构成的极限对 $(g_N,\ 1)$ 是 $\mathcal{E}$的临界点。

现在定义泛函 $\mathcal{E}$ 作用其上的空间 $\mathcal{G}_1$。回顾一下，g_N 是定义在 $(n-1)$ 维流形 N上的一个固定的 Ricci平坦度量。令 $\mathcal{G}$表示由一对 $(g,\ w)$ 构成的空间，其中包括一个$C^{2,\ \beta}$ 黎曼度量 g 和一个正的 $C^{2,\ \beta}$ 函数 w。我们通过将空间限制到以下子空间，施加一个常数加权体积约束

$$\mathcal{G}_1 = \left\{ (g,w) \in \mathcal{G} \;\middle|\; \int_N w\, dV_g = \mathrm{Vol}_{g_N}(N) \right\}. \tag{3.13}$$

由于沿着带基点的 Gromov–Hausdorff 收敛序列 (1.4) 有 $|\nabla u| \to 1$，我们有 $(g_N,\ 1)\ \in\mathcal{G}_1$。用 g_t 表示水平集 $\{u=t\}$ 上的诱导度量。由 (3.3) 可知，当 t 对较大的 i 足够接近 t_i 时，$(g_t,\ |\nabla u|)\ \in \mathcal{G}_1$；此时 $\{u=t\}$ 与 N 微分同胚。

切空间 $T\mathcal{G}$由成对元素（$h,\ v$）组成，其中 h是一个对称二阶张量，v是一个函数，表示沿该路径的无穷小变化

$$(g+th,\ we^{tv}). \tag{3.14}$$

我们赋予 $T\mathcal{G}$ 自然的内积

$$\langle (h_1,v_1),(h_2,v_2)\rangle_{(g,w)} = \int_N \left(\langle h_1,h_2\rangle_g + v_1v_2 \right) w\, dV_g. \tag{3.15}$$

引理 3.4。 变化 （h、 v）在 （g、 w）处与 $\mathcal{G}_1$ 相切，当且仅当

$$\int_N \left(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(h) + v \right) w\, dV_g = 0. \tag{3.16}$$

证明。这可通过求导立即得到

$$\left((we^{tv})\, dV_{g+th} \right)' = \left(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(h) + v \right) w\, dV_g.$$

□

4. Properties of $\mathcal{E}$

本节中，我们计算泛函 $\mathcal{E}$ 的一阶和二阶变分，并验证前文所述的性质 (R.1)–(R.5)。

4.1. 验证（R.1）–（R.2）：一阶变分。

命题 4.1（一阶变分）。给定单参数族 $g+th$ 和 we^{tv}，我们有

$$\mathcal{E}'(g,w)\big|_{(h,v)} = \int_N \Big\{ -\langle \mathrm{Ric}_g, h\rangle + \Big\langle h, \frac{\mathrm{Hess}\, w}{w}\Big\rangle - \mathrm{tr}(h)\frac{\Delta w}{w} + R_g\big(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(h)+v\big)\Big\} w\, dV_g. \tag{4.1}$$

证明。该公式可直接由 [CM14，命题 3。9]。 □

为计算 $\mathcal{E}$ 的梯度，我们将一阶变分表示为关于固定背景度量 $\tilde{g}$ 的内积。我们使用以下对称二阶张量配对的度量变换公式。

引理 4.2 ([CM14，引理 3。27])。设 h 和 J 是对称 2-张量，并设 g 和 $\tilde{g}$ 是黎曼度量。那么

$$\langle h, J\rangle_g = \langle h, \Psi(J)\rangle_{\tilde{g}}, \tag{4.2}$$

其中 Ψ定义为

$$[\Psi(J)]_{ij} = \tilde{g}_{ik}\, g^{kn}\, J_{nm}\, g^{m\ell}\, \tilde{g}_{\ell j}. \tag{4.3}$$

若 $g=\tilde{g}+th$，则

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Psi(J)_{ij} = J'_{ij} - h_{ip}\tilde{g}^{pn}J_{nj} - J_{im}\tilde{g}^{mp}h_{pj}. \tag{4.4}$$

因此，我们得到 $\mathcal{E}$的梯度如下表达式。

推论 4.3。 $\mathcal{E}$ 在(g, w) 处的梯度为

$$\nabla\mathcal{E} = \left(\left(\frac{R_g}{2} - \frac{\Delta w}{w}\right)\Psi(g) + \Psi\left(-\mathrm{Ric}_g + \frac{\mathrm{Hess}\, w}{w}\right),\ R_g\right) w. \tag{4.5}$$

推论 4.4。加权体积泛函的梯度

$$\mathcal{V}(g,w) := \int_N w\, dV_g$$

is

$$\nabla\mathcal{V} = \big(\tfrac{1}{2}\Psi(g),\, 1\big)\, w.$$

推论4.5。数对$(g_N$、1) 是将泛函 $\mathcal{E}$限制在 $\mathcal{G}_1$上后得到的临界点，而且

$$\mathcal{E}(g_N, 1) = \lim_{t\to\infty} \mathcal{A}'(t) = 0.$$

特别地，性质 *(R.1)* 和 *(R.2)* 成立。

证明。在 $(g_N$，**1)** 处直接计算一阶变分，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'(g_N+th, 1+tv)\big|_{t=0} &= \int_N \Big\{ -\langle \mathrm{Ric}_{g_N}, h\rangle + R_{g_N}\big(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{g_N}(h)+v\big)\Big\} dV_{g_N} \\ &= 0,\end{aligned}$$

由于 $(N,\ g_N)$ 是 Ricci平坦的。这表明 $(g_N$，**1)** 是 $\mathcal{E}$ 的临界点。 □

4.2. **验证 (R.4)-(R.5)**。在本小节中，我们验证性质 (R.4) 和 (R.5)，这些性质表明 $\mathcal{E}$ 在一阶意义上近似于 $\mathcal{A}'$。

命题 4.6. 在定理 *2.3* 的假设下，存在常数 $C = C(g_N) > 0$，与 i 无关，使得对所有 $t \in [t_i, t_i + L]$,

$$|\nabla_1 \mathcal{E}(g_t, |\nabla u|)|^2 \le C \int_{T_{[t-1,\, t+3]}} |\operatorname{Hess} u|^2 \, dV_g \tag{4.6}$$

特别地，这验证了性质（*R.4*）。

证明. 在整个证明过程中，我们用 $|\cdot|$ 表示逐点范数，用 $\|\cdot\|$ 表示 L^2 范数，并用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 L^2 内积。

回忆一下， $\mathcal{G}_1$ 是加权体积泛函 $\mathcal{V}$ 的水平集。因此，梯度 $\nabla\mathcal{E}$ 在 $T\mathcal{G}_1$ 上的投影 $\nabla_1\mathcal{E}$ 为

$$\nabla_1 \mathcal{E} = \nabla\mathcal{E} - \langle \nabla\mathcal{E}, \nabla\mathcal{V}\rangle \frac{\nabla\mathcal{V}}{\|\nabla\mathcal{V}\|^2}.$$

我们已经计算出

$$\nabla\mathcal{V} = \left(\tfrac{1}{2}\Psi(g),\, 1\right) w.$$

因此,

$$\begin{aligned}
\nabla\mathcal{E} &= \left(\left(\frac{R_g}{2} - \frac{\Delta w}{w}\right)\Psi(g) + \Psi\left(-\operatorname{Ric}_g + \frac{\operatorname{Hess} w}{w}\right),\, R_g\right) w \\
&= R_g\left(\tfrac{1}{2}\Psi(g), 1\right) w + \left(-\frac{\Delta w}{w}\Psi(g) + \Psi\left(-\operatorname{Ric}_g + \frac{\operatorname{Hess} w}{w}\right),\, 0\right) w \\
&= R_g \nabla\mathcal{V} + \left(-\frac{\Delta w}{w}\Psi(g) + \Psi\left(-\operatorname{Ric}_g + \frac{\operatorname{Hess} w}{w}\right),\, 0\right) w.
\end{aligned}$$

现在我们设定 $g = g_t$、水平集 $\{u = t\}$ 上的诱导度量以及 $w = |\nabla u|$。根据带基点的 Gromov–Hausdorff 收敛和渐近极限的光滑性，我们可以假设 g_t与背景度量 g_N 一致接近，并且当 i 充分大时， w 一致接近于 1。由于 Ψ是有界算子，且 w 一致有界，由引理 4.7 可得

$$\left|\left(-\frac{\Delta w}{w}\Psi(g) + \Psi\left(-\operatorname{Ric}_g + \frac{\operatorname{Hess} w}{w}\right),\, 0\right) w\right| \le C(g_N)\big(|\operatorname{Ric}_g| + |\operatorname{Hess} u|\big) \le C\,|\operatorname{Hess} u|_{C^1(\{u=t\})}.$$

为了估计项 $R_g\nabla\mathcal{V}$ 的投影，注意到

$$R_g\nabla\mathcal{V} - \langle R_g\nabla\mathcal{V}, \nabla\mathcal{V}\rangle \frac{\nabla\mathcal{V}}{\|\nabla\mathcal{V}\|^2} = \left(R_g - \left\langle R_g \frac{\nabla\mathcal{V}}{\|\nabla\mathcal{V}\|}, \frac{\nabla\mathcal{V}}{\|\nabla\mathcal{V}\|}\right\rangle\right)\nabla\mathcal{V}.$$

由于 $\nabla\mathcal{V}$ 一致有界，我们得到

$$\left|R_g - \frac{\int_N R_g |\nabla\mathcal{V}|^2}{\int_N |\nabla\mathcal{V}|^2}\right| \le C\big(\sup R_g - \inf R_g\big) \le C\,|\operatorname{Hess} u|.$$

将这些估　　计与定理 2.3 中的内部估计相结合，即得所需的界。 □

接下来，我们回顾与 u的水平集相关的几个几何量。首先注意， u 的水平集的第二基本形式 II 给出为

$$\mathrm{II}(e_i, e_j) := \langle \nabla_{e_i}\nu, e_j\rangle,$$

其中，$\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ 是局部切向标架，$\nu = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ 是单位法向量场。直接计算可得

$$\mathrm{II}(e_i, e_j) = \frac{\mathrm{Hess}\, u(e_i, e_j)}{|\nabla u|}.$$

因此，水平集 $\{u = t\}$ 的平均曲率为

$$H := \mathrm{II}_{ij} g_N^{ij} = \frac{1}{|\nabla u|}\big(\Delta_M u - \mathrm{Hess}\, u(\nu, \nu)\big) = -\frac{\mathrm{Hess}\, u(\nu, \nu)}{|\nabla u|}, \tag{4.7}$$

这里用到了 u 的调和性。

由于 $(M,\ g)$ 是 Ricci平坦的，高斯方程推出 $\{u = t\}$ 上的诱导度量 g_t 的标量曲率满足

$$R_{g_t} = H^2 - |\mathrm{II}|^2 = \frac{1}{|\nabla u|^2}\left(\big(\mathrm{Hess}\, u(\nu, \nu)\big)^2 - |\,\mathrm{Hess}\, u(e_i, e_j)|^2\right). \tag{4.8}$$

引理 4.7. 在定理 *2.3* 的假设下，存在常数 $C = C(g_N) > 0$，它与 i 无关，使得对所有 $t \in [t_i, t_i + L]$，水平集 $\{u = t\}$ 上诱导度量 g_t 的里奇曲率满足

$$|\,\mathrm{Ric}_{g_t}\,| \le C(g_N)\,|\,\mathrm{Hess}\, u|_{C^1(\{u=t\})}.$$

证明。令 Rm 和 Rm^T 分别表示 $(M,\ g)$ 及水平集 $\{u = t\}$ 的曲率张量。选取局部正交标架 $\{e_i\}_{i=1}^n$，使得 $e_n = \nu = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ 和 $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ 将第二基本形式 II 对角化；记相应的主曲率为 λ_i。

对于 $i \neq j$，在 $i,\ j < n$ 的条件下，高斯–科达齐方程给出

$$\mathrm{Rm}^T_{ijij} = \mathrm{Rm}_{ijij} + \lambda_i\lambda_j.$$

对 $j < n$ 求和，得到水平集在 e_i 方向上的里奇曲率：

$$\mathrm{Ric}^T_{ii} = -\,\mathrm{Rm}_{inin} + \lambda_i H - \lambda_i^2.$$

由 (4.7) 可知，在 $\{u = t\}$ 上，

$$|\lambda_i H - \lambda_i^2| \le C\,|\,\mathrm{Hess}\, u|^2,$$

这里用到了：当 i 足够大时，$|\nabla u|$ 一致地接近于 1。

剩下需要估计“径向”曲率项 Rm_{inin}。令 e 为沿 $\{u = t\}$ 的切向量场，并假设 $\nabla_{\nabla u} e = 0$。根据曲率张量的定义，

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Rm}(\nabla u, e)\nabla u, e\rangle &= \langle \nabla_e \nabla_{\nabla u}\nabla u, e\rangle - \langle \nabla_{\nabla u}\nabla_e \nabla u, e\rangle + \langle \nabla_{[\nabla u, e]}\nabla u, e\rangle \\ &= \nabla_e(\mathrm{Hess}\, u(\nabla u, e)) - \mathrm{Hess}\, u(\nabla u, \nabla_e e) - \nabla_{\nabla u}(\mathrm{Hess}\, u(e, e)) - \mathrm{Hess}\, u\big(\mathrm{Hess}\, u(e), e\big).\end{aligned}$$

因此，

$$\big|\langle \mathrm{Rm}(\nabla u, e)\nabla u, e\rangle\big| \le C\big(|\nabla\,\mathrm{Hess}\, u| + |\,\mathrm{Hess}\, u|\big),$$

其中常数 C 是一致的，因为当 i 较大时，$|\,\mathrm{Hess}\, u|$ 很小。证明完毕。 □

命题 4.8。在定理 *2.3* 的假设下，存在与 i 无关的常数 $C = C(g_N) > 0$，使得对所有 $t \in [t_i, t_i + L]$，

$$|\mathcal{A}'(t) - \mathcal{E}(g_t, |\nabla u|(t))| \le C\, h_{[t-1,\, t+3]}.$$

特别是，这验证了性质 ***(R.5)***。

证明。 根据定理 2.3 和命题 4.6，我们有

$$\mathcal{A}'(t) = \int_{\{u=t\}} \left\langle \nabla|\nabla u|^2, \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right\rangle dA_g = 2\int_{\{u=t\}} \frac{\operatorname{Hess} u(\nabla u, \nabla u)}{|\nabla u|}\, dA_g,$$
$$\big||\nabla u| - 1\big| \le C\|\operatorname{Hess} u\|_{C^1(\{u=t\})} \le C\, h_{[t-1,t+3]}.$$
$$|R_{g_t}| \le C\|\operatorname{Hess} u\|_{C^1(\{u=t\})} \le C\, h_{[t-1,t+3]}.$$

结合这些估计即可得到所需的界。 □

4.3. 二阶变分。本节其余部分将致力于为泛函 $\mathcal{E}$建立 Lojasiewicz–Simon 不等式。为此，我们需要分析限制在 $\mathcal{G}_1$上的 $\mathcal{E}$ 的投影梯度 $\nabla_1\mathcal{E}$ 的线性化 $L_{\mathcal{E}}$，这等价于计算 $\mathcal{E}$的二阶变分。

假设 $(g_N + th,\, e^{tv_t}) \in \mathcal{G}_1$ 是一个单参数变分族。那么，定义 $\mathcal{G}_1$ 的约束蕴含以下恒等式

$$\int_N \left(\tfrac{1}{2}\operatorname{tr} h + v\right) dV_{g_N} = 0,$$
$$\int_N \Big[\big(\tfrac{1}{2}\operatorname{tr} h + v\big)^2 + \tfrac{1}{2}\operatorname{tr} h' - \tfrac{1}{2}|h|^2 + 2v'\Big]\, dV_{g_N} = 0.$$

现在我们可以计算 $\mathcal{E}$的二阶变分了。

定理 4.9。 $\mathcal{E}$ 沿着$(g_N + th,\, e^{tv})$ 在 $t = 0$ 处的二阶变分为

$$\mathcal{E}'' = \int_N \Big\{ -\langle \delta^*\delta h, h\rangle + \tfrac{1}{2}\langle \nabla^*\nabla h, h\rangle + \tfrac{1}{2}\langle \operatorname{Hess}(\operatorname{tr} h), h\rangle + \langle \operatorname{Rm}\circ h, h\rangle$$
$$+ \langle h, \operatorname{Hess} v\rangle - (\operatorname{tr} h)\Delta v + (\delta^2 h - \Delta(\operatorname{tr} h))\big(\tfrac{1}{2}\operatorname{tr} h + v\big)\Big\} dV_{g_N}.$$

这里，在局部坐标中，$\langle \mathrm{Rm}\circ h, h\rangle = \mathrm{Rm}_{ikj\ell}\, h^{k\ell}h^{ij}$。

证明。 回想一下，对于一般的一对 $(g + th,\, we^{tv})$， $\mathcal{E}$ 的一阶变分为

$$\mathcal{E}' = \int_N \Big\{ -\langle \operatorname{Ric}_g, h\rangle + \left\langle h, \frac{\operatorname{Hess} w}{w}\right\rangle - (\operatorname{tr} h)\frac{\Delta w}{w} + R_g\Big(\tfrac{1}{2}\operatorname{tr} h + v\Big)\Big\} w\, dV_g. \tag{4.9}$$

令 $\bar g_t = g_N + th$ 和 $w_t = e^{tv}$，从而 $\bar g_0 = g_N$ 和 $w_0 = 1$。对 (4.9) 关于 t 求导，然后在 $t = 0$ 处取值，即得到二阶变分。为简便起见，在中间步骤中记 $\bar g := \bar g_t$ 和$w := w_t$ 。

(i) 曲率项。

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{Ric}_{\bar g}, h\rangle' &= \langle \operatorname{Ric}'_{\bar g}, h\rangle + \langle \operatorname{Ric}_{\bar g}, h'\rangle - \operatorname{Ric}_{\bar g,ij}\, h_{k\ell}h^{ik}\bar g^{j\ell} - \operatorname{Ric}_{\bar g,ij}\, h_{k\ell}\bar g^{ik}h^{j\ell}\\ &= \langle \operatorname{Ric}'_{\bar g}, h\rangle\\ &= \langle \delta^*\delta h, h\rangle - \tfrac{1}{2}\langle \nabla^*\nabla h, h\rangle - \tfrac{1}{2}\langle \operatorname{Hess}(\operatorname{tr} h), h\rangle - \operatorname{Rm}_{ikj\ell}\, h^{k\ell}h^{ij},\end{aligned}$$

其中用到了里奇张量的标准变分公式。

(ii) Hess w 和 Δw <style id="7">项。 由于 $w = e^{tv}$，我们在 $t = 0$处有

$$(\operatorname{Hess} w)' = \operatorname{Hess} v, \qquad (\Delta w)' = \Delta v.$$

因此，

$$\big\langle h, \tfrac{\operatorname{Hess} w}{w}\big\rangle' - \big((\operatorname{tr} h)\tfrac{\Delta w}{w}\big)' = \langle h, \operatorname{Hess} v\rangle - (\operatorname{tr} h)\Delta v.$$

（iii）标量曲率项。对 $R_{\bar g}\big(\frac{1}{2}\mathrm{tr}$ 求导 $h+v\big)$ 得到

$$\big(\delta^2 h-\Delta(\operatorname{tr} h)-\langle \mathrm{Ric}_{\bar g},h\rangle\big)\big(\tfrac{1}{2}\operatorname{tr} h+v\big)+R_{\bar g}\big(\tfrac{1}{2}\operatorname{tr} h'+v'\big).$$

在 $(g_N,\ 1)$ 处求值，得到

$$\big(\delta^2 h-\Delta(\operatorname{tr} h)\big)\big(\tfrac{1}{2}\operatorname{tr} h+v\big).$$

最后，由于定义 $\mathcal{G}_1$ 的约束，$(w\,dV_g)$ 的导数在 $t=0$ 处为零。合并所有项可得

$$\begin{aligned}\mathcal{E}''=\int_N\Big\{&-\langle\delta^*\delta h,h\rangle+\tfrac{1}{2}\langle\nabla^*\nabla h,h\rangle+\tfrac{1}{2}\langle\mathrm{Hess}(\operatorname{tr} h),h\rangle+\langle \mathrm{Rm}\circ h,h\rangle\\&+\langle h,\operatorname{Hess} v\rangle-(\operatorname{tr} h)\Delta v+(\delta^2 h-\Delta(\operatorname{tr} h))\big(\tfrac{1}{2}\operatorname{tr} h+v\big)\Big\}dV_{g_N},\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

现在，我们推导几类自然变分下二阶变分 $\mathcal{E}''$ 的显式公式。

(1) **横向无迹二阶变分**。假设 h 满足 $\delta h=0$ 且 $\operatorname{tr} h=0$。那么

$$\mathcal{E}''=\tfrac{1}{2}\int_N\langle\Delta_L h,h\rangle\,dV_{g_N},\tag{4.10}$$

其中 $\Delta_L h=\Delta h+2R_{ikj\ell}h^{k\ell}$ 表示 Lichnerowicz 拉普拉斯算子。这里用到了分部积分：

$$\int_N\langle h,\operatorname{Hess} v\rangle\,dV_{g_N}=-\int_N\langle\delta h,\nabla v\rangle\,dV_{g_N}=0.$$

(2) **共形二阶变分**。设

$$h=\phi\,g_N$$

在 $t=0$ 处，其中 ϕ 是某个光滑函数。则有以下恒等式：

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} h&=(n-1)\phi,\\ \delta h&=\nabla\phi,\\ \nabla(\delta h)&=\operatorname{Hess}\phi,\\ \delta^2 h&=\Delta\phi,\\ \Delta h&=(\Delta\phi)g_N.\end{aligned}\tag{4.11}$$

将 (4.11) 代入定理 4.9 并化简，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{E}''=\int_N\Big\{&-\langle\operatorname{Hess}\phi,\phi g_N\rangle+\tfrac{1}{2}\langle(\Delta\phi)g_N,\phi g_N\rangle+\tfrac{1}{2}\langle(n-1)\operatorname{Hess}\phi,\phi g_N\rangle+\phi^2R_{ikj\ell}g^{k\ell}g^{ij}\\&+\langle\phi g_N,\operatorname{Hess} v\rangle-(n-1)\phi\Delta v+\big(\Delta\phi-(n-1)\Delta\phi\big)\Big(\tfrac{n-1}{2}\phi+v\Big)\Big\}dV_{g_N}\\=&(n-2)\int_N\Big[\phi\Delta\phi-\phi\Delta v-\Delta\phi\Big(\tfrac{n-1}{2}\phi+v\Big)\Big]dV_{g_N}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

公式 (4.12) 表明，$\nabla\mathcal{E}$ 的线性化将共形变分映射到共形变分与切于微分同胚作用的变分所张成的空间中。

考虑共形路径 $(g_t,\ e^{tv}t)$，其中 $g_t' = \phi g_N$ 且 $v_t' = v$。回忆

$$\nabla\mathcal{E} = R_g\left(\tfrac{1}{2}\Psi(g), 1\right) w + \left(-\frac{\Delta w}{w}\Psi(g) + \Psi\left(-\operatorname{Ric}_g + \frac{\operatorname{Hess} w}{w}\right), 0\right) w.$$

为方便起见，定义

$$J := -\operatorname{Ric}_g + \frac{\operatorname{Hess} w}{w} - \frac{\Delta w}{w} g.$$

在 $t = 0$ 处，我们有

$$R_g = 0, \qquad J = 0, \qquad \Psi = \mathrm{id}, \qquad w = 1.$$

根据 [CM14，(5.57)、(5.58)],可得

$$(\nabla\mathcal{E})' = R_g'\left(\tfrac{1}{2} g_N, 1\right) + (J', 0).$$

对于共形变分，在 $t = 0$ 处求值得

$$\begin{aligned} R_g' &= (2-n)\Delta\phi, \\ \operatorname{Ric}' &= \tfrac{1}{2}\big((3-n)\operatorname{Hess}\phi - (\Delta\phi) g_N\big), \\ (\operatorname{Hess} e^{tv})' &= \operatorname{Hess} v, \\ (\Delta e^{tv})' &= \Delta v. \end{aligned}$$

因此，

$$J' = -\tfrac{1}{2}\big((3-n)\operatorname{Hess}\phi - (\Delta\phi) g_N\big) + \operatorname{Hess} v - (\Delta v) g_N.$$

所以，

$$(\nabla\mathcal{E})' = (2-n)\Delta\phi\left(\tfrac{1}{2} g_N, 1\right) + \left(\tfrac{n-3}{2}\operatorname{Hess}\phi + \operatorname{Hess} v, 0\right) + \left(\left(\tfrac{\Delta\phi}{2} - \Delta v\right) g_N, 0\right). \tag{4.13}$$

最后，注意到

$$\mathcal{L}_X g_N = \tfrac{n-3}{2}\operatorname{Hess}\phi + \operatorname{Hess} v, \qquad X = \tfrac{n-3}{4}\nabla\phi + \tfrac{1}{2}\nabla v.$$

因此，微分同胚分量由向量场 $\frac{n-3}{4}\nabla\phi + \frac{1}{2}\nabla v$ 生成。 —— –

4.4. 切片定理。 在本小节中，我们将回顾切片定理。在陈述结果之前，我们先引入几个记号。令 $\mathcal{D}$ 为紧致截面 N 上的 $C^{3,\beta}$ 微分同胚空间， $\mathcal{T}$ 为由对称张量与函数构成的对，其可分解为正交直和

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{D}} \oplus \mathcal{T}_1, \text{ where } \mathcal{T}_1 &:= \left\{(h, v) \in C^{2,\beta} \middle| \delta h = 0\right\} \\ \mathcal{T}_{\mathcal{D}} &:= \left\{(\mathcal{L}_V g_0, 0) \middle| V \text{ is a } C^{3,\beta} \text{ vector field}\right\}. \end{aligned}$$

我们最感兴趣的是与 $\mathcal{G}_1$ 相切的变分，以及它与 $\mathcal{T}_1$ 的交：

$$\mathcal{T}^0 = \left\{(h, v) \in C^{2,\beta} \middle| \int \left(\frac{1}{2}\operatorname{tr} h + v\right) dV_{g_0} = 0\right\}, \quad \mathcal{T}_1^0 := \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}^0.$$

为了在下一个小节研究 $L_{\mathcal{E}}$ 的 Fredholm性质，有必要进一步分解 $\mathcal{T}_1^0$:

$$\mathcal{T}_1^0 = \mathcal{T}_{tt} \oplus \mathcal{T}_\perp^0$$

其中 $\mathcal{T}_{tt}$ 表示横向无迹变分空间

$$\mathcal{T}_{tt} = \left\{(h, v) \in C^{2,\beta} \middle| \delta h = 0, \operatorname{tr} h = 0\right\},$$

其正交部分 $\mathcal{T}_1^0$定义为

$$\mathcal{T}_\perp^0 = \mathcal{T}_1 \cap \left(\mathcal{T}_c^0 + \mathcal{T}_\mathcal{D}\right), \quad \mathcal{T}_c = \left\{(\phi g_0, v) \in C^{2,\beta}\right\},$$
$$\mathcal{T}_c^0 := \mathcal{T}^0 \cap \mathcal{T}_c, \quad \mathcal{T}_{c\mathcal{D}} := \mathcal{T}_c \cap \mathcal{T}_\mathcal{D}.$$

我们以如下分解引理结束本小节。

引理 4.10 ([CM14，引理 6。25])。 任取 $h \in \mathcal{T}_1^0$，则存在 $h_{tt} \in \mathcal{T}_{tt}$， $h_c \in \mathcal{T}_c^0$，以及$h_\mathcal{D} \in \mathcal{T}_\mathcal{D}$ 使得

$$h = h_{tt} + h_c + h_\mathcal{D}.$$

反过来，任取 $h_c \in \mathcal{T}_c^0$，则存在 $h_\mathcal{D} \in \mathcal{T}_\mathcal{D}$ 使得 $h_c + h_\mathcal{D} \in \mathcal{T}_1^0$。

4.5. 验证（R.3）： Łojasiewicz–Simon 不等式。现在我们已准备好在本小节中验证（R.3）。下面的命题描述了 $L_\mathcal{E}$ 在子空间 $\mathcal{T}_c^0$、 $\mathcal{T}_{tt}$、 $\mathcal{T}_\mathcal{D}$和 $\mathcal{T}_\perp^0$上的作用。

命题 4.11。 $\mathcal{E}$ 的线性化 $L_\mathcal{E}$ 具有以下性质：
(1) $L_\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{T}_c^0 := \mathcal{T}_c \cap \mathcal{T}^0$ 上的限制是 *Fredholm*。*(2)* $L_\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{T}_{tt}$ 上的限制是 *Fredholm*。*(3)* $L_\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{T}_\mathcal{D}$ 上恒等于零，并映射到 $\mathcal{T}_\mathcal{D}^\perp$。*(4)* $L_\mathcal{E}$： $\mathcal{T}_\perp^0 \to \mathcal{T}_{tt}^\perp$以及 $L_\mathcal{E}$： $\mathcal{T}_{tt} \to [\mathcal{T}_\perp^0]^\perp$。

证明。 我们只需验证 (1) 和 (2)，因为 (3) 和 (4) 可由 [CM14，命题 631] 结合 (4.13) 直接推出。

首先，考虑共形变分 $h = \phi g_N$。直接计算可得

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'' &= (n-2)\int_N \left\{\phi\Delta\phi - \phi\Delta v - \Delta\phi\left(\tfrac{n-1}{2}\phi + v\right)\right\} dV_{g_N} \\ &= (n-2)\int_N \left\langle L_\mathcal{E}(\phi, v), (\phi, v)\right\rangle dV_{g_N},\end{aligned}$$

其中

$$L_\mathcal{E}(\phi, v) = \left(\tfrac{3-n}{2}\Delta\phi,\, -2\Delta\phi\right).$$

写成分块形式， $L_\mathcal{E}$ 可表示为对称算子

$$\begin{pmatrix} \frac{3-n}{2}\Delta & -\Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3-n}{2} & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\Delta.$$

由于 Δ 是椭圆的，且系数矩阵非退化，因此这个二阶算子是椭圆的。由此得到 (1)。

接下来，设 h 满足 $\delta h = 0$ 且 $\operatorname{tr} h = 0$。那么

$$\mathcal{E}'' = \frac{1}{2}\int_N \langle \Delta_L h, h\rangle\, dV_{g_N}.$$

由于 Lichnerowicz 拉普拉斯算子 Δ_L 在横向无迹张量上是椭圆的，相应的线性算子是 Fredholm 算子，从而验证了 (2)。

□

注意， $L_\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{T}_1^0$和 $\mathcal{T}_{tt}$ 上的限制的非平凡分量，与 $L_\mathcal{R}$ 在 [CM14]中的非平凡分量相同。因此，以下结果无需任何修改即可立即得到。

定理 4.12。 $L_{\mathcal{E}}$ 在 $\mathcal{T}_1^0$上的限制是从 $\mathcal{T}_1^0$到$\mathcal{T}_1^0$的 C^β闭包的 *Fredholm* 算子。

我们首先证明泛函 $\widetilde{\mathcal{E}}$: $\mathcal{T}_1^0 \to \mathbb{R}$ 满足一个 Łojasiewicz–Simon 不等式，其中该泛函定义为

$$\widetilde{\mathcal{E}} := \mathcal{E} \circ \exp,$$

其中 exp : $\mathcal{T}_1^0 \to \mathcal{G}_1$ 是 [CM14第 6 条引理中构造的指数映射。15]。令 Π_K 表示到有限维核 K 的 $L_{\mathcal{E}}$正交投影，并定义映射

$$\mathcal{N} := \nabla\widetilde{\mathcal{E}} + \Pi_K.$$

下面的引理给出了 Lyapunov–Schmidt约化。

引理 4.13 ([CM14，引理 7。5])。 存在一个包含0 的开邻域 $\mathcal{O} \subseteq C^\beta \cap E$ 以及映射 Θ: $\mathcal{O} \to C^{2,\beta} \cap E$，满足 $\Theta(0) = 0$，使得:

- $\Theta \circ \mathcal{N}(h) = h$ *and* $\mathcal{N} \circ \Theta(h) = h$;
- $\|\Theta(h)\|_{C^{2,\beta}} \le C\|h\|_{C^\beta}$, *and* $\|\Theta(h_1) - \Theta(h_2)\|_{W^{2,2}} \le C\|h_1 - h_2\|_{L^2}$;
- *the function* $\widetilde{f} := \widetilde{\mathcal{E}} \circ \Theta$ *is analytic.*

这里， E 是 L^2的一个闭子空间。

现在我们证明 $\mathcal{E}$ 满足 Łojasiewicz–Simon 不等式。

定理 4.14. 泛函 $\widetilde{\mathcal{E}}$ 在 $C^{2,\beta} \cap E$ 中的 0 的某个邻域 $\mathcal{O}_E$ 上定义良好。存在一个常数 $\alpha \in (0,1)$，使得对于所有充分小的 $h \in E$,

$$\left|\widetilde{\mathcal{E}}(h) - \widetilde{\mathcal{E}}(0)\right|^{2-\alpha} \le \|\nabla\widetilde{\mathcal{E}}(h)\|_{L^2}^2. \tag{4.14}$$

证明. 设 $h \in E$ 充分小。则存在一个常数 $C > 0$，使得

$$\begin{aligned}
C\|\nabla\widetilde{\mathcal{E}}(h)\|_{L^2}^2 &\ge \|\nabla\widetilde{f}(\Pi_K h)\|_{L^2}^2 && \text{by [CM14, Lemma 7.10]}\\
&\ge |\nabla\widetilde{f}_K(\Pi_K h)|^2 &&\\
&\ge |\widetilde{f}_K(\Pi_K h) - \widetilde{f}_K(0)|^{2-\alpha} && \text{by the Łojasiewicz–Simon inequality}\\
&= |\widetilde{f}(\Pi_K h) - \widetilde{\mathcal{E}}(0)|^{2-\alpha}. &&
\end{aligned}$$

所需的不等式由三角不等式以及 [CM14, 引理 7.15],得出，其给出

$$|\widetilde{f}(\Pi_K h) - \widetilde{\mathcal{E}}(h)| \le C\|\nabla\widetilde{\mathcal{E}}(h)\|_{L^2}^2.$$

□

沿用 论证 [CM14, 第 8],我们以主要结果结束本节 .

定理 4.15。 $\mathcal{E}$ 上的 *Łojasiewicz–Simon* 不等式可推出 $\mathcal{E}$上的相应不等式。更准确地说，在 $\mathcal{G}_1$ 中存在一个以 $(g_N, 1)$ 为中心的邻域 $\mathcal{U}_1$，使得对所有 $y \in \mathcal{U}_1$,

$$|\mathcal{E}(y)|^{2-\alpha} \le C\|\nabla_1\mathcal{E}(y)\|_{L^2}^2.$$

定理 4.15 中建立的 Łojasiewicz–Simon 不等式给出了关于 $\mathcal{A}'$的定量衰减估计。

定理 5.1。 在定理 *2.3* 的假设下，存在 $\beta > 0$ 以及常数 $C = C(\delta, g_N) > 0$，使得对所有 $t \in [t_i, t_i + L]$,

$$\big(-\mathcal{A}'(t)\big)^{2-\alpha} \le C\, h_{[t-1,t+3]} = C\big(\mathcal{A}'(t+3) - \mathcal{A}'(t-1)\big).$$

证明。 一方面,

$$-\mathcal{A}'(t) = -\mathcal{A}'(t) + \mathcal{A}'(\infty) = -\mathcal{A}'(t) + \mathcal{E}(g_N, 1) \le -\mathcal{E}\big(g_t, |\nabla u|(t)\big) + C\, h_{[t-1,t+3]},$$

其中使用了性质 (R.5)。另一方面，根据定理 4.15,

$$\big|\mathcal{E}\big(g_t, |\nabla u|(t)\big)\big|^{2-\alpha} \le \big\|\nabla_1 \mathcal{E}\big(g_t, |\nabla u|(t)\big)\big\|_{L^2}^2 \le C\, h_{[t-1,t+3]}$$

结合这两个 估计并使用初等不等式（对 a, $b > 0$ 和 $2 - \alpha > 1$ 有效）)

$$(a+b)^{2-\alpha} \le 2^{1-\alpha}\big(a^{2-\alpha} + b^{2-\alpha}\big),$$

我们得到

$$\big(-\mathcal{A}'(t)\big)^{2-\alpha} \le C\Big(h_{[t-1,t+3]} + h_{[t-1,t+3]}^{2-\alpha}\Big) \le C\, h_{[t-1,t+3]}.$$

最后，由于 $h_{[t-1,t+3]}$ 是一致有界的，这就得到

$$\big(-\mathcal{A}'(t)\big)^{2-\alpha} \le \big(\mathcal{A}'(t+3) - \mathcal{A}'(t-1)\big),$$

如所声称。 □

现在我们准备证明第2.4节中所述的衰减估计。

定理 *2.5* 的证明。为方便起见，定义

$$\mathcal{B}(t) := -\mathcal{A}'(t) \ge 0.$$

根据构造， $\mathcal{B}$ 是非递增函数。

定理 5.1 得出

$$(\mathcal{B}(t+3))^{2-\alpha} \le (\mathcal{B}(t))^{2-\alpha} \le C\, h_{[t-1,t+3]} = C\big(\mathcal{B}(t-1) - \mathcal{B}(t+3)\big).$$

应用 [CM14，引理 2。42], 我们得到定量增量估计

$$\mathcal{B}^{\alpha-1}(t+3) - \mathcal{B}^{\alpha-1}(t-1) \ge C > 0.$$

迭代此不等式可得

$$\mathcal{B}^{\alpha-1}(t^*) \ge \mathcal{B}^{\alpha-1}(t_i) + C\,(t^* - t_i) \ge C\,(t^* - t_i),$$

从而

$$\mathcal{B}(t^*) \le C\,(t^* - t_i)^{\frac{1}{\alpha-1}} = C\,(t^* - t_i)^{-\beta-1}. \tag{5.1}$$

至此，证明完成。 □

第2 部分：线性增长调和函数的存在性

6. The existence of harmonic functions with linear growth

本节遵循引言中概述的策略，证明定理 1.3。

在整个证明过程中，我们使用布塞曼函数的水平集管状邻域，记作 $\mathcal{T}_{[a,b]}$。在我们的情形下，从定量意义上说，这些集合与测地球相当。根据 Colding 的体积收敛定理 [Col97]，，极限空间 N 带有与极限度量相对应的 n 维豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^n$。此外，该测度可分解为 $\mathcal{L}^1$ 上的勒贝格测度 $\mathbb{R}$ 维因子与 $n-1$ 维豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^{n-1}$ 在 N 上的乘积。因此，我们用 dt 表示在 $\mathcal{L}^1$ 上、相对于 $\mathbb{R}$ 的积分。

定理 6.1 (调和逼近/替换)。对于任意 $L>0$，设 f 是定义在 $(0,L)\times N$ 上的调和函数。则对于任意 $R_i\to\infty$，存在定义在 $\mathcal{T}_{(R_i,R_i+L)}$ 上的调和函数 f_i，使得 f_i 在 $(0,L)\times N$ 上的 $H^{1,2}$ 中强收敛到 f。

证明。证明可由 [AH18，推论 4。12] 推得。只需验证 [AH18，定理 48]中的以下两个条件成立：

(1) 第一个狄利克雷特征值 $\lambda_1^D((0,\ L)\times N)$ 严格为正。(2) 等式

$$H_0^{1,2}((0,L)\times N)=\widehat{H}_0^{1,2}((0,L)\times N)$$

成立，其中 $H^{1,\ 2}{}_0((0,\ L)\times N)$ 表示 $\mathrm{Lip}_c((0,\ L)\times N)$ 在 $H^{1,\ 2}(\mathbb{R}\times N)$ 中的闭包，而 $\widehat{H}^{1,\ 2}{}_0((0,\ L)\times N)$ 是 $H^{1,\ 2}(\bar{N})$ 的子空间，由在 $(0,\ L)\times N$ 之外几乎处处为零的函数组成。

(1)： 回忆一下，第一个狄利克雷特征值通过瑞利商定义为

$$\lambda_1^D:=\inf\left\{\frac{\int|\nabla u|^2d\mathcal{H}^n}{\int u^2d\mathcal{H}^n}:u\in H_0^{1,2}((0,L)\times N),u\not\equiv 0\right\}.$$

尖锐的一维 Poincar´e 不等式给出

$$\int_0^L|u(t,x)|^2\,dt\le\frac{L^2}{\pi^2}\int_0^L|\partial_t u(t,x)|^2\,dt.$$

对上述不等式关于 $x\in N$ 积分并应用富比尼定理，我们得到

$$\int_{(0,L)\times N}u^2d\mathcal{H}^n\le\frac{L^2}{\pi^2}\int_{(0,L)\times N}|\partial_t u|^2d\mathcal{H}^n.$$

结合以下事实，即

$$|\nabla u|^2\ge|\partial_t u|^2$$

可得

$$\int_{(0,L)\times N}u^2d\mathcal{H}^n\le\frac{L^2}{\pi^2}\int_{(0,L)\times N}|\nabla u|^2d\mathcal{H}^n,$$

这验证了 (1)。

(2)： 为方便起见，设

$$\Omega_L:=(0,L)\times N.$$

根据定义，$H^{1,2}{}_0(\Omega_L)\subseteq\widehat{H}^{1,2}{}_0(\Omega_L)$ 的包含关系显然成立。我们证明反向包含关系。固定 $u\in\widehat{H}^{1,2}{}_0(\Omega_L)$，即 $u\in H^{1,2}(\bar{N})$，且 $u=0$ 几乎处处在 Ω_L 之外。

由于 Lipschitz 函数在 $H^{1,2}(\bar{N})$ 中稠密，存在 $u_i \in \mathrm{Lip}(\bar{N}) \cap H^{1,2}(\bar{N})$，使得

$$\|u_i - u\|_{H^{1,2}} \to 0 \qquad \text{as } i \to \infty.$$

对于 $\delta \in (0, L/4)$，选取 $\eta_\delta \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$ 使得

$$0 \le \eta_\delta \le 1, \qquad \eta_\delta \equiv 1 \text{ on } [\delta, L-\delta], \qquad \eta_\delta \equiv 0 \text{ on } (-\infty, \delta/2] \cup [L-\delta/2, \infty),$$

以及 $|\eta_\delta'| \le C/\delta$。通过 $\eta_\delta(t, y) := \eta_\delta(t)$ 将 η_δ 延拓至 N。那么对于每个 i，δ，

$$v_{i,\delta} := \eta_\delta\, u_i \in \mathrm{Lip}_c(\Omega_L),$$

因为 $\mathrm{supp}(\eta_\delta) \subseteq (\delta/2, L-\delta/2)$，且 N 是紧的。因此

$$\|v_{i,\delta} - \eta_\delta u\|_{H^{1,2}(\bar{N})} = \|\eta_\delta(u_i - u)\|_{H^{1,2}(\bar{N})} \to 0 \qquad \text{as } i \to \infty.$$

因此，只需证明

$$\|\eta_\delta u - u\|_{H^{1,2}(\bar{N})} \to 0 \qquad (\delta \downarrow 0).$$

根据 Fubini 性质，对于乘积空间 $\mathbb{R} \times N$ 上的 Sobolev 函数，对于几乎处处的 $x \in N$，切片

$$u_x(t) := u(t, x)$$

属于经典的 $H^{1,2}(\mathbb{R})$，并满足 $u_x(t) = 0$ 对几乎处处的 $t \notin (0, L)$ 成立。特别地，u_x 在 $t = 0$ 和 $t = L$ 处具有零迹。此外，t- 导数 $\partial_t u$ 在弱意义下存在，并且

$$\int_{\bar{N}} |\partial_t u|^2 d\mathcal{H}^n < \infty.$$

对于一个固定的截面 $u_x \in H^{1,2}(\mathbb{R})$，且 $u_x = 0$ 在 $\mathbb{R} \setminus (0, L)$ 上几乎处处成立，我们估计（记 $\tilde{\eta}_\delta := 1 - \eta_\delta$）

$$\|\tilde{\eta}_\delta u_x\|^2_{H^{1,2}(\mathbb{R})} \le 2\|\tilde{\eta}_\delta u_x\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\|\partial_t(\tilde{\eta}_\delta u_x)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

首先，

$$\|\tilde{\eta}_\delta u_x\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \le \int_0^\delta |u_x|^2 dt + \int_{L-\delta}^L |u_x|^2 dt \xrightarrow[\delta \downarrow 0]{} 0$$

对几乎处处的 x，控制收敛给出对 x 积分后的收敛。

对于导数项，

$$\partial_t(\tilde{\eta}_\delta u_x) = \tilde{\eta}_\delta\, u_x' + \tilde{\eta}_\delta'\, u_x.$$

因此

$$\|\partial_t(\tilde{\eta}_\delta u_x)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \le 2\int_0^\delta |u_x'|^2 dt + 2\int_{L-\delta}^L |u_x'|^2 dt + 2\int_0^\delta |\eta_\delta'|^2 |u_x|^2 dt + 2\int_{L-\delta}^L |\eta_\delta'|^2 |u_x|^2 dt.$$

前两项显然在 $\delta \downarrow 0$ 时趋于 0，对几乎处处的 x 成立；再次对 x 积分后，由于 $u_x' \in L^2(0, L)$，根据控制收敛定理，积分也趋于 0。

对于截断函数项，在 $(0, \delta)$ 上使用一维 Poincaré 不等式，并利用 0 处的零迹：

$$\int_0^\delta |u_x(t)|^2 dt \le \delta^2 \int_0^\delta |u_x'(t)|^2 dt,$$

在 L 附近同理（利用 L 处的零迹）：

$$\int_{L-\delta}^L |u_x(t)|^2 dt \le \delta^2 \int_{L-\delta}^L |u_x'(t)|^2 dt.$$

由于 $|\eta_\delta'| \le C/\delta$，我们得到

$$\int_0^\delta |\eta_\delta'|^2 |u_x|^2 dt \le \frac{C^2}{\delta^2} \int_0^\delta |u_x|^2 dt \le C^2 \int_0^\delta |u_x'|^2\, dt \xrightarrow[\delta \downarrow 0]{} 0,$$

同理

$$\int_{L-\delta}^{L} |\eta_\delta'|^2 |u_x|^2 dt \le C^2 \int_{L-\delta}^{L} |u_x'|^2 dt \xrightarrow[\delta\downarrow 0]{} 0.$$

对 $x \in N$ 积分这些不等式，得到

$$\|\eta_\delta u - u\|_{L^2} \to 0 \quad \text{and} \quad \|\partial_t(\eta_\delta u - u)\|_{L^2} \to 0.$$

最后，由于 η_δ 对切向梯度没有贡献，这意味着 $\|\eta_\delta u - u\|_{H^{1,\,2}(\bar{N})} \to 0$，当 $\delta \downarrow 0$ 时。

□

注 6.2. 对于 [AH18 中构造的条件 (2) 的反例，例 1。1]，

$$\left([0,+\infty), \mathsf{d}_{\mathrm{eucl}}, s, \mathcal{L}^1\right) \xrightarrow{\mathrm{mGH}} \left([0,+\infty), \mathsf{d}_{\mathrm{eucl}}, \pi/4, \mathcal{L}^1\right)$$

当 $s \uparrow \pi/4$ 时，环境边界点 0 可能成为 $B_{\pi/4}(\pi/4 - \varepsilon)$ 的内点。特别地，函数 $u \in \widehat{H}^{1,\,2}_{0}\left(B_{\pi/4}(\pi/4 - \varepsilon)\right)$ 在 0 处的迹不一定为零。因此，逼近性质

$$\|\eta_\delta u - u\|_{H^{1,2}} \to 0 \qquad (\delta \downarrow 0)$$

不再成立。

我们在管状邻域 $\mathcal{T}_{[a,b]}$ 上为可测函数 $f(t,x)$引入以下 L^2 范数:

$$\|f\|_{a,b} = \int_a^b \int_N |f(t,x)|^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} dt.$$

令 $0 \le \mu_0 < \mu_1 \le \cdots \le \mu_j \le \cdots$为 $-\Delta_N$的特征值，其中 Δ_N是截面 N上的拉普拉斯算子。令 ϕ_j为对应于 μ_i的特征函数，即 $\Delta_N \phi_j = -\mu_j \phi_j$与$\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$ 在 N上构成一组 L^2 正交归一基。特别地， $\phi_0 = \mathcal{H}^{n-1}(N)^{-1/2}$。与圆锥情形完全相同 [Hua20，定理 3.1], 根据谱理论和变量分离，我们得到调和函数 u在 N 上的如下 $H^{1,2}{}_{\mathrm{loc}}$ 且局部一致收敛的级数表示:

$$\overline{u} = (a_0 r + \tilde{a}_0)\phi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i^+ e^{\sqrt{\mu_i} r} + a_i^- e^{-\sqrt{\mu_i} r}\right) \phi_i,$$

其中 a_0、 $\tilde{a}_0$、 $a_i^{\pm}$为常数。

定理 6.3. 假设$\bigcup_{j=1}^{3} \mathcal{T}_{[t_j L,(t_j+1)L]} \subseteq N$、 $t_j \in \mathbb{N}_0$、 $t_1 < t_2 < t_3$，且 u 是定义在 N 上的调和函数，其形式为

$$\overline{u} = a_0 r \phi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i^+ e^{\sqrt{\mu_i} r} + a_i^- e^{-\sqrt{\mu_i} r}\right) \phi_i.$$

对于满足 $e^{2(\sqrt{\mu_1} - \beta)L} > 2$ 的固定 $0 < \beta < \sqrt{\mu_1}$ 和 $L >> 1$，我们有

$$\|\overline{u}\|_{t_2 L,(t_2+1)L} \le e^{-\beta' L} \left(\|\overline{u}\|_{t_1 L,(t_1+1)L} + \|\overline{u}\|_{t_3 L,(t_3+1)L}\right), \tag{6.1}$$

其中

$$\beta' < \min\left\{\beta, \frac{1}{2} \log\left(\frac{t_3^2 + L t_3 + \frac{L^2}{3}}{t_2^2 + L t_2 + \frac{L^2}{3}}\right)\right\}. \tag{6.2}$$

注 6.4。（6.1）的优点在于，在并集上

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{T}_{[t_j L,(t_j+1)L]},$$

对于任意固定的 β' 满足 (6.2)，我们可以将 $\beta'' > \beta'$ 稍微取大一些，从而得到不等式

$$\|\overline{u}\|_{t_j L,(t_j+1)L} \ \le\ e^{-\beta'' L}\Big(\|\overline{u}\|_{t_{j-1}L,(t_{j-1}+1)L} + \|\overline{u}\|_{t_{j+1}L,(t_{j+1}+1)L}\Big), \quad j \in \mathbb{N}.$$

From $\tilde{}$ $\tilde{}$由此可知，存在 $L(\beta', \beta'')$，使得只要 $L > L$，就有

$$\begin{aligned} &\text{either} \quad \|\overline{u}\|_{t_{j-1}L,(t_{j-1}+1)L} \ \ge\ e^{2\beta' L}\,\|\overline{u}\|_{t_j L,(t_j+1)L} \\ &\text{or} \quad \|\overline{u}\|_{t_{j+1}L,(t_{j+1}+1)L} \ \ge\ e^{2\beta' L}\,\|\overline{u}\|_{t_j L,(t_j+1)L}. \end{aligned}$$

此外，以下单调性成立：

$$\begin{aligned} &\|\overline{u}\|_{t_j L,(t_j+1)L} \ \ge\ e^{2\beta' L}\,\|\overline{u}\|_{t_{j-1}L,(t_{j-1}+1)L} \\ \Rightarrow &\|\overline{u}\|_{t_{j+1}L,(t_{j+1}+1)L} \ \ge\ e^{2\beta' L}\,\|\overline{u}\|_{t_j L,(t_j+1)L}, \end{aligned} \tag{6.3}$$

and

$$\begin{aligned} &\|\overline{u}\|_{t_j L,(t_j+1)L} \ \ge\ e^{2\beta' L}\,\|\overline{u}\|_{t_{j+1}L,(t_{j+1}+1)L} \\ \Rightarrow &\|\overline{u}\|_{t_{j-1}L,(t_{j-1}+1)L} \ \ge\ e^{2\beta' L}\,\|\overline{u}\|_{t_j L,(t_j+1)L}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

特别地，考察定理 6.3 的证明可知，限制条件

$$\beta' \ \le\ \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{t_3^2 + Lt_3 + \frac{L^2}{3}}{t_2^2 + Lt_2 + \frac{L^2}{3}}\right)$$

在单调递增情形 (6.3) 中仅用于控制 $r\phi_0$-模态。因此，在 (6.4) 中，只需假设

$$\beta' < \sqrt{\mu_1},$$

其中 μ_1 表示截面上的第一正特征值。

证明。不失一般性，我们可以假设特征函数 $\phi_i,\ i \ge 0$ 在 L^2 意义下正交归一，并令 $j = 1,2,3$。

- $\phi_i,\ i \ge 1$。通过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned} &\Big\|\sum_{i=1}^{\infty}\left(a_i^+ e^{\sqrt{\mu_i}r} + a_i^- e^{-\sqrt{\mu_i}r}\right)\phi_i\Big\|^2_{t_j L,(t_j+1)L} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\int_{t_j L}^{(t_j+1)L}\int_N \left(a_i^+ e^{\sqrt{\mu_i}r} + a_i^- e^{-\sqrt{\mu_i}r}\right)^2 |\phi_i|^2 dr\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |a_i^+|^2 \frac{e^{2\sqrt{\mu_i}L}-1}{2\sqrt{\mu_i}} e^{2\sqrt{\mu_i}t_j L} + 2a_i^+ a_i^- L + |a_i^-|^2 \frac{1-e^{-2\sqrt{\mu_i}L}}{2\sqrt{\mu_i}} e^{-2\sqrt{\mu_i}t_j L} \\ &:= \sum_{i=1}^{\infty}\left(C_i e^{2\sqrt{\mu_i}t_j L} + D_i + E_i e^{-2\sqrt{\mu_i}t_j L}\right). \end{aligned}$$

对于固定的 $\beta < \sqrt{\mu_1}$，我们可以选择足够大的 L，使得

$$C_i e^{2\sqrt{\mu_i}t_j L} = C_i e^{2\sqrt{\mu_i}t_{j+1}L} e^{2\sqrt{\mu_i}(t_j - t_{j+1})L}$$

$$\leq C_i e^{2\sqrt{\mu_i}t_{j+1}L} e^{2\sqrt{\mu_1}(t_j - t_{j+1})L}$$
$$\leq C_i e^{2\sqrt{\mu_i}t_{j+1}L} e^{-2\sqrt{\mu_1}L} \leq \frac{1}{2} e^{-2\beta L} C_i e^{2\sqrt{\mu_i}t_{j+1}L}$$

and

$$E_i e^{-2\sqrt{\mu_i}t_j L} = E_i e^{-2\sqrt{\mu_i}t_{j-1}L} e^{-2\sqrt{\mu_i}(t_j - t_{j-1})L}$$
$$\leq E_i e^{-2\sqrt{\mu_i}t_{j-1}L} e^{-2\sqrt{\mu_1}(t_j - t_{j-1})L}$$
$$\leq E_i e^{-2\sqrt{\mu_i}t_{j-1}L} e^{-2\sqrt{\mu_1}L} \leq \frac{1}{2} e^{-2\beta L} E_i e^{-2\sqrt{\mu_i}t_{j-1}L}.$$

此外，由柯西–施瓦茨不等式和泰勒展开可得

$$|D_i| \left(1 - 2e^{-2\beta L}\right) \leq \frac{1}{2} e^{-2\beta L} \left(C_i e^{2\sqrt{\mu_i}t_{j+1}L} + E_i e^{-2\sqrt{\mu_i}t_{j-1}L}\right).$$

将它们结合起来，我们得到

$$C_i e^{2\sqrt{\mu_i}t_j L} + D_i + E_i e^{-2\sqrt{\mu_i}t_j L}$$
$$\leq \frac{1}{2} e^{-2\beta L} C_i e^{2\sqrt{\mu_i}t_{j+1}L} + \frac{1}{2} e^{-2\beta L} E_i e^{-2\sqrt{\mu_i}t_{j-1}L}$$
$$+ \frac{1}{2} e^{-2\beta L} \left(C_i e^{2\sqrt{\mu_i}t_{j+1}L} + E_i e^{-2\sqrt{\mu_i}t_{j-1}L}\right) + 2e^{-2\beta L} D_i$$
$$\leq e^{-2\beta L} \left(C_i e^{2\sqrt{\mu_i}t_{j+1}L} + D_i + E_i e^{-2\sqrt{\mu_i}t_{j+1}L}\right)$$
$$+ e^{-2\beta L} \left(C_i e^{2\sqrt{\mu_i}t_{j-1}L} + D_i + E_i e^{-2\sqrt{\mu_i}t_{j-1}L}\right).$$

- ϕ_0。不妨设 $a_0 = 1$ 和 $\int_N |\phi_0|^2 \mathcal{H}^{n-1} = 1$。通过直接计算，我们得到

$$\left\| a_0 r \phi_0 \right\|^2_{t_j L, (t_j+1)L} = \int_{t_j}^{t_j+L} \int_N r^2 |\phi_0|^2 dr \mathcal{H}^{n-1} = L t_j^2 + L^2 t_j + \frac{L^3}{3}. \tag{6.5}$$

因此，

$$\left\| a_0 r \phi_0 \right\|^2_{t_2 L, (t_2+1)L} \leq e^{-2\beta' L} \left(\left\| a_0 r \phi_0 \right\|^2_{t_1 L, (t_1+1)L} + \left\| a_0 r \phi_0 \right\|^2_{t_3 L, (t_3+1)L} \right)$$

由 β'的定义立即可得。类似地，我们可以处理 $\tilde{a} r g_N$。

将它们结合起来，我们得到所需的估计（6.1）。 □

定理 6.5。 在渐近极限具有唯一性的条件下，设 u 是 M^n的端上的调和函数。存在 ϵ_0，使得只要满足，定理 *6.3* 中的结论对于管状邻域$\mathcal{T}_{[R,R+l]}$ 上的 u 成立

$$\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}\big((\mathcal{T}_{[R,R+L]}, \gamma_R), ([0,L] \times N, (0,x))\big) < \epsilon_0.$$

证明。 沿用 [YZ25], 中的思路，我们用反证法证明。若结论不成立，则可以找到一个$\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ 趋于无穷的序列，使得（6.1）不成立。由渐近柱状性质可知， u 经过归一化后收敛到一个调和函数 $\bar{u}$ 在圆柱上 N，从而得出矛盾。 □

现在我们可以证明本节的主要结果了。

定理 *1.3* 的证明。令 $\{L_j\}_{j=1}^{\infty}$ 满足 $L_j \to \infty$ 为 $j \to \infty$，并令 $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足 $R_i \to \infty$ 为 $i \to \infty$。对于每个固定的 L_j，由定理 6.1，存在定义在 $\mathcal{T}_{[R_i, R_i+L_j]}$ 上的调和函数 $u_{i,\,j}$，它们在 $H^{1,\,2}$ 中强收敛到定义在 $[0, L_j] \times N$ 上的调和函数 r。

我们可以假设，对于任意 $R \geq R_0$ 以及满足以下条件的任意 $L > 0$

$$\mathsf{d}_{\mathrm{GH}}\big((\mathcal{T}_{[R,R+L]}, \gamma_R), ([0, L] \times N, (0, x))\big) < \epsilon_0.$$

不失一般性，我们可以固定 $R_{i_0} > R_0$，使得对于任意 j，定理 6.3 在 $\mathcal{T}_{[R_{i_0}, R_{i_0}+L_j]}$ 上成立。这意味着 $\{u_{i_0,j}\}_{j=1}^{\infty}$ 在 $H^{1,\,2}$ 中有一致上界，并满足一致的三圆定理。因此，根据 Arzel`a–Ascoli 定理，$\{u_{i_0,j}\}_{j=1}^{\infty}$ 局部收敛到一个调和函数u。特别地，根据定理 6.3，u 非常数，且渐近于布塞曼函数。□

注 6.6。现在假设 u 是定义在 M^n 的端上的调和函数，具有多项式增长但超线性增长，即

$$|u(x)| \leq C\big(1 + \mathsf{d}(x, p)^N\big) \quad \text{for some } C > 0 \text{ and } N \in \mathbb{N}, \tag{6.6}$$

and

$$\lim_{b_\gamma(x) \to \infty} \frac{|u(x)|}{b_\gamma(x)} = +\infty. \tag{6.7}$$

进一步假设 $u \in H^{1,\,2}_{\mathrm{loc}}(M)$。

根据定理 6.1，对于任意固定的 $L > 0$ 以及任意序列 $R_i \to \infty$，限制 $u|_{\mathcal{T}_{[R_i, R_i+L]}}$ 的子序列收敛到定义在 $[0, L] \times N$ 上的调和函数 $\bar{u}$。然而，超线性增长条件（6.7）与定理 6.3 中的三圆不等式不相容；该不等式迫使圆柱上的任意极限调和函数在 $\mathbb{R}$ 方向至多呈线性增长。这个矛盾表明，不存在满足（6.6）–（6.7）的调和函数。因此我们断言，定义在 M 的端上的每个多项式增长调和函数实际上都必须呈线性增长。

References

[AA81] William K. Allard 和 Frederick J. Almgren Jr., *On the radial behavior of minimal surfaces and the uniqueness of their tangent cones*, 《数学年刊》（）（），第 – 期。MR 2, **113** 1981, 215–265.

[18] AH Luigi Ambrosio 和 Shouhei Honda，RCD（，），*Local spectral convergence in * K N spaces*，《非线性分析》，**177** 2018，1–23，3865185（），–。MR

[90] And Michael T. Anderson, *Convergence and rigidity of manifolds under Ricci curvature bounds*, 《数学发明》，**102** 1990，2, 429–445，1074481（），第 – 期。MR

[11] BM Olivier Biquard 和 Vincent Minerbe, *A Kummer construction for gravitational instantons*, 《数学物理通讯》，**308** 2011，3, 773–794，2855540（），第 – 期。MR

[96] CC Jeff Cheeger 和 Tobias H. Colding, *Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products*，《数学年刊》（）（），第 – 期。MR 2, **144** 1996，1, 189–237，1405949

[97] *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I*CC，，《微分几何杂志》46（1997），第3期，406–480。MR1484888[Che01] Jeff Cheeger, *Degeneration of Riemannian metrics under Ricci curvature bounds*, 费米讲座。[费米讲座], 比萨高等师范学校，比萨，2001年。MR2006642[CHNP13] Alessio Corti、Mark Haskins、Johannes Nordstr¨om 和 Tommaso Pacini, *Asymptotically cylindrical Calabi-Yau 3-folds from weak Fano 3-folds*，《几何与拓扑》（），第 – 期。MR 4, **17** 2013，4, 1955–2059，3109862

[14] CM Tobias Holck Colding 和 William P. Minicozzi II, *On uniqueness of tangent cones for Einstein manifolds*, 《数学发明》，**196** 2014，3, 515–588，3211041（），第 – 期。MR

[97] CM Tobias H. Colding 和 William P. Minicozzi II, *Large scale behavior of kernels of Schrödinger operators*, 《美国数学杂志》，**119** 1997，6, 1355–1398，1481818（），第 – 期。MR

[13] CN Tobias H. Colding 和 Aaron Naber, *Characterization of tangent cones of noncollapsed limits with lower Ricci bounds and applications*，**23** 2013，1, 134–148，3037899，《几何与泛函分析》（），第 – 期。MR

[Col12] Tobias Holck Colding, *New monotonicity formulas for Ricci curvature and applications. I*, 《数学学报》209（ 2012 2, 229 263 3001606 ），第 – 期。MR Col Tobias H. Colding, *Ricci Curvature and Volume Convergence*, 《数学年刊》[97] 145（1997），第3期。MR1454700[CT94] Jeff Cheeger 和 Gang Tian, *On the cone structure at infinity of Ricci flat manifolds with Euclidean volume growth and quadratic curvature decay* **118** 1994 3, 493 571 , 《数学发明》（），第 – 期。MR 1296356 [04] *An existence theorem of harmonic functions with polynomial growth* Din Yu Ding, , 《美国数学会会刊》132（2004），第2期，543–551。MR2022380[DPG18] Guido De Philippis 和 Nicola Gigli, *Non-collapsed spaces with Ricci curvature bounded from below*, 《综合理工学院数学杂志》5（2018），613–650。MR3852263[Gig14] Nicola Gigli, *An overview of the proof of the splitting theorem in spaces with non-negative Ricci curvature*, 《度量空间分析与几何》 **2** 2014 1, 169 213 3210895 （），第 – 期。MR Hei Hans-Joachim Hein, , 《美国数学会[12] *Gravitational instantons from rational elliptic surfaces* 杂志》25（2012），第2期，355–393。MR2869021[HHN15] Mark Haskins、Hans-Joachim Hein 和 Johannes Nordstr ¨ *Asymptotically cylindrical Calabi-Yau man-* om, , 《微分几何杂志》（），第 – *ifolds* **101** 2015 2, 213 265 3399097 期。MR[HO25] Yiqi Huang 和 Tristan Ozuch, *Regularity of einstein 5-manifolds via 4-dimensional gap theorems* （2025），可见于 2512.21317。[Hua20] Xian-Tao Huang, *On the asymptotic behavior of the dimension of spaces of harmonic functions with polynomial growth* **762** 2020 281 306 , 《纯粹与应用数学杂志》（），–。 4195662 MR[08] ¨ *Deformations of asymptotically cylindrical G_2-manifolds*Nor Johannes Nordstrom, , 《剑桥哲学学会数学会刊》 **145** 2008 2, 311 348 2442130 （），第 – 期。MR Per G. Perelman, [97] *A complete Riemannian manifold of positive Ricci curvature with Euclidean volume growth and nonunique asymptotic cone* 1993 94 1997, 165 166 ，比较几何（加利福尼亚州伯克利，–），第–页。MR1452873[Sim83] Leon Simon, *Asymptotics for a class of nonlinear evolution equations with applications to geometric problems* 2 **118** 1983 3, 525 571 , 《数学年刊》（）（），第 – 期。 *The almost rigidity of manifolds with lower bounds on Ricci curvature and minimal* MR[Sor00a] Christina Sormani, *volume growth* **8** 2000 1, 159 212 1730892 , 《分析与几何通讯》（），第 – 期。MR[Sor00b] , *Harmonic functions on manifolds with nonnegative Ricci curvature and linear volume growth*,《太平洋数学杂志》192（2000），第1期，183–189。MR1741022[Sor98] , *Busemann functions on manifolds with lower bounds on Ricci curvature and minimal volume growth* **48** 1998 3, 557 585 , 《微分几何杂志》（），第 – 期。MR[19] *Local estimate of fundamental groups* **352** Xu Guoyi Xu, , 《数学进展》（2019），158–230。MR3959654[Yau76] Shing Tung Yau, *Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifold and their applications to geometry* **25** 1976 7, 659 670 417452 , 《印第安纳大学数学杂志》（），第 – 期。MR[YZ25] Zetian Yan 和 Xingyu Zhu, *Uniqueness of the asymptotic limits for ricci-flat manifolds with linear volume growth* 2025 2510 00420 （），可见于 arXiv:。。[Zhu25] Xingyu Zhu, *On the geometry at infinity of manifolds with linear volume growth and nonnegative Ricci curvature* **378** 2025 1, 503 526 4840313 , 《美国数学会会刊》（），第 – 期。MR

(Z. Yan) Department of Mathematics, UC Santa Barbara, Santa Barbara, CA 93106, USA
Email address: ztyan@ucsb.edu

（X. Zhu） Department of Mathematics, Michigan State University, East Lansing, MI 48824, USA*Email address*: zhuxing3@msu.edu