arXiv:2601.01631v1 [math.OC] 4 Jan 2026

希尔伯特空间中分数阶后向随机演化方程的随机极大值原理与线性二次最优控制问题

Javad A.Asadzade* 和 NazimI. Mahmudov†

摘要

本文为希尔伯特空间中由分数阶倒向随机演化方程（FBSEEs）所支配系统的最优控制建立了一个全面的框架。我们首先建立随机最大值原理（SMP），作为最优性的必要条件。为此，我们引入尖峰变分，推导相关变分方程的精确估计，并构造适用于分数阶动力学的伴随过程。随后，我们应用这一一般原理显式求解线性二次（LQ）最优控制问题。所得最优控制由伴随过程以闭式形式刻画，并证明其由一组耦合的分数阶前向-后向随机方程所支配。我们的工作将分数阶微积分与随机控制理论相结合，为具有记忆和长程依赖的无限维系统控制提供了严格的理论基础。

关键词： 随机最大值原理、线性二次型最优控制问题、分数阶后向随机演化方程。

数学主题分类（MSC 2020）： 93E20, 49K20, 49J15。

1 引言

随机最优控制理论长期以来一直是现代应用数学的基石，在金融、工程、物理学和生物科学领域有着深远的应用。其历史渊源可追溯到 Kushner [15, 16] 和 Bismut [4], 的开创性贡献，他们奠定了随机最大值原理的基础。随机最大值原理为由随机微分方程（SDE）描述的系统提供最优性的必要条件，并在适当条件下提供充分条件。一个重要的里程碑是 Pardoux 和 Peng [28], 提出了后向随机微分方程（BSDE），随后 Peng [31, 29, 30]对其进行了发展，使之成为随机控制理论中的一项基本分析工具。

在这些基础上，20世纪80年代和20世纪90年代，随机最大值原理在推广至更一般情形方面取得了显著进展。特别是，Bensoussan [3] 为分布参数系统建立了随机最大值原理，为随机偏微分方程（SPDE）的分析开辟了道路。后来，Mahmudov [22] 推导出适用于希尔伯特空间中随机演化系统的随机最大值原理，将该理论推广至无限维情形。这些进展与 Bismut [4], 早期的贡献共同为研究无限维随机环境中的最优控制奠定了基础。

Hu 和 Peng [13], 将倒向随机微分方程推广到半线性随机演化方程，Mahmudov 和 McKibben [23], 则为希尔伯特空间中的 BSEE 建立了统一框架，进一步推动了该领域的发展。他们的研究推导出一阶随机演化系统，并为此类方程引入了最优控制表述，极大丰富了函数空间中随机控制的数学结构。随后，L¨u 和 Zhang [21] 通过为无限维空间中的 BSEE 提出一般的庞特里亚金型随机最大值原理，进一步推进了该理论。

与此同时，相关研究致力于放宽光滑性假设，并纳入更一般的随机动力学。Mao [25], 、Rong [32], 和 Situ [33] 研究了带跳跃且具有非利普希茨

*数学系，东地中海大学，北塞浦路斯，土耳其。电子邮箱：javad.asadzade@emu.edu.tr

†数学系，东地中海大学，北塞浦路斯，土耳其；阿塞拜疆国立经济大学（UNEC）经济物理学研究中心，阿塞拜疆巴库。电子邮箱：nazim.mahmudov@emu.edu.tr

系数的倒向随机微分方程，而 Chen 和 Wang [11]则探讨了无限时域倒向随机微分方程。Briand 和 Hu [5, 6] 研究了具有二次增长和无界终端条件的倒向随机微分方程，将存在性与唯一性结果拓展到了标准 Lipschitz框架之外。总体而言，这些贡献显著拓宽了倒向随机微分方程理论的适用范围。

在随机控制领域，El Karoui、Peng 和 Quenez [12] 将反向随机微分方程引入金融数学，而 Morlais [27] 则通过二次倒向随机微分方程将其拓展至效用优化。Cadenillas 和 Haussmann [9], 以及后来的 Cadenillas 和 Karatzas [10], 研究了奇异控制问题中的随机最大值原理，而 Li [20], 、Buckdahn 等人 [7, 8], 和 Yong [34] 则为均值场系统和相互作用系统建立了随机最大值原理。这些研究共同构成了现代随机控制的理论基础。

近年来，分数阶随机系统受到越来越多的关注，因为它们能够刻画经典模型所不具备的记忆和遗传效应。基于 Caputo 或 Riemann–Liouville算子的分数阶微分方程为这类系统提供了适当的数学框架 [37, 36]。在随机框架下，Li 和 Wang [18] 以及 Yang 和 Gu [35] 确立了分数阶随机演化方程的存在性、唯一性和渐近性质。Mahmudov 和 Ahmadova [24], 以及 Ahmadova 和 Mahmudov [1], 将分析拓展至分数阶倒向随机微分方程及其奇异变体，揭示了非局部和弱奇异动力学所带来的新挑战。

分数阶倒向随机演化方程的发展融合了分数阶微积分与倒向随机分析的进展。Li和Luo [19] 为分数阶倒向随机演化方程提供了新的适定性结果，而Asadzade和Mahmudov [2] 研究了无限维空间中的奇异平均场倒向与正向随机Volterra积分方程，并证明了适应的M-解的存在性与唯一性。他们的结果还得出了庞特里亚金最大值原理的分数阶变体，为分数阶及依赖记忆的情形下的随机最优控制铺平了道路。

在随机控制领域，线性二次型最优控制问题仍然是分析上最易处理、实践中最具相关性的框架之一。Hu、Jin和Zhou [14], 、Yong [34], 以及Meng和Shi [26]对经典随机线性二次问题进行了广泛研究。对平均场系统和分数阶系统 [20, 7, 8]的推广进一步丰富了这一领域。尽管如此，分数阶倒向随机演化方程的线性二次理论仍不够成熟，这主要是由于分数阶导数、无限维算子与倒向随机动力学之间存在复杂耦合。

本文主要致力于为一类分数阶倒向随机演化方程建立随机最大值原理，并进一步分析其线性二次型最优控制问题。在这一研究中，我们系统地将 Bismut [4] 和 Peng [31, 30] 的开创性成果扩展至一个统一框架，同时纳入分数阶动力学和无限维状态空间，从而获得新的理论洞见，并推导出一组必要最优性条件。我们的方法在概念上植根于 Mahmudov 和 McKibben[23], 开创的一阶随机演化框架，并将其分析基础推广至分数阶情形。

基于 Li和Luo [19], 近期建立的分数阶倒向随机演化方程适定性结果，我们提出并严格分析其分数阶对应形式，以推导出新的随机最大值原理和显式线性二次控制表示。通过综合分数阶后向随机微分方程理论中的方法与奇异 Volterra 型方程 [1, 2, 24], 分析理论中的工具，我们构建了一个连贯的理论框架。这一综合有效地衔接了分数阶随机分析与现代控制理论这两个不同领域，进而将经典随机控制的适用范围扩展至具有非马尔可夫记忆效应和无限维动力学特征的系统。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍数学预备知识，包括分数阶微积分算子、赖特函数，以及随机演化方程的分数阶预解算子的构造。第 3 节针对一般分数阶后向随机系统建立随机最大值原理：我们引入最优控制的尖峰变分，推导变分方程的精确矩估计，证明代价泛函的一阶变分公式，并通过伴随过程得到必要的最优性条件。第 4 节专门讨论线性二次情形，通过分数阶分部积分推导伴随方程，并给出最优控制的闭式表示，从而显式求解相应的后向线性二次问题。最后，第 5 节给出结论。

2 预备知识

本节建立后续论述所需的基本数学框架和分析记号。我们首先考虑配备正规滤过 $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le b}$ 的完备概率空间 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$，并引入可分希尔伯特空间 H、U 和 E。随机分析以定义在该概率空间上的 Q-维纳过程 $B=\{B_t, t\in[0,b]\}$ 为基础，该过程由线性、有界、非负且具有有限迹的协方差算子 $Q\in\mathcal{L}(E)$ 表征 $(\operatorname{Tr} Q<\infty)$。

噪声过程的谱结构通过 E 中的完备正交归一系 $\{e_k\}_{k\ge1}$和满足 $Qe_k=\lambda_k e_k$的非负有界特征值序列 $\{\lambda_k\}_{k\ge1}$ 来刻画。这使得可以利用相互独立的标准布朗运动 $\{\beta_k\}_{k\ge1}$表示维纳过程：

$$\langle B_t,e\rangle_E=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\,\langle e_k,e\rangle_E\,\beta_k(t),\quad e\in E,\ t\in[0,b],$$

其中，$\langle\cdot,\ \cdot\rangle_E$ 表示 E中的内积。假设滤过 $\{\mathcal{F}_t\}$ 由该维纳过程生成。

关键函数空间定义如下：$L_2^0=L_2(Q^{1/2}E,\ H)$表示从 $Q^{1/2}E$ 到 H的希尔伯特-施密特算子空间，该空间赋予内积 $\langle\Psi,\ \Phi\rangle_{L_2^0}=\operatorname{Tr}(\Psi Q\Phi^*)$。进一步定义 $L^2(\Omega,\ \mathcal{F}_b;H)$为由 $\mathcal{F}_b$-可测、平方可积的 H-值随机变量构成的希尔伯特空间，并定义 $L^2_{\mathcal{F}}([0,b];\ H)$为由平方可积、$\{\mathcal{F}_t\}$-适应的 H-值过程构成的空间，其范数为

$$\|x\|_{L^2_{\mathcal{F}}([0,b];H)}=\left(\mathbb{E}\int_0^b\|x_t\|_H^2\,dt\right)^{1/2}<\infty.$$

最后，$\mathcal{L}(\ K,\ H)$ 表示从 K 到 H 的有界线性算子空间，赋予标准算子 or 范数，其中 特殊情形 $\mathcal{L}(H):=\mathcal{L}(H,\ H)$。

定义 2.1. [36] 伽马函数 对 $x>0$ 定义为

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

定义 2.2. [36] 函数 f 的下限为 0、阶数为 $\alpha\in(0,\ 1)$ 的左侧卡普托分数阶导数定义为

$${}_0^C D^{\alpha}(t)\kappa_t=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{-\alpha}\kappa_s'\,ds,\quad t>0.$$

定义 2.3。 [36] 阶数为 $\alpha\in$ （0，1）、上限为 b 的函数 f 的右侧卡普托分数阶导数定义为

$${}_t^C D_b^{\alpha}\kappa_t=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^b(s-t)^{-\alpha}\kappa_s'\,ds,\quad t>0.$$

定义 2.4。 [36] 赖特函数 W_ρ 定义为

$$W_\rho(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-r)^{k-1}}{(k-1)!\Gamma(1-\rho k)},\quad r\in\mathbb{C},\ \rho\in(0,1),$$

且满足

$$\int_0^{\infty}r^{\gamma}W_\rho(r)\,dr=\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\rho\gamma)},\quad \gamma>-1.$$

定义 2.5。 [36] 设 A是希尔伯特空间H上的 C_0-半群 $\{S_t\}_{t\ge0}$ 的无穷小生成元。对于 $\alpha\in$ （0，1），称为分数阶预解算子的算子 $S_\alpha(t)$ 和 $P_\alpha(t)$ 定义为

$$S_\alpha(t)=\int_0^{\infty}\alpha\,r\,W_{-\alpha}(r)\,S(t^\alpha r)\,dr,\quad P_\alpha(t)=\int_0^{\infty}W_{-\alpha}(r)\,S(t^\alpha r)\,dr,\quad t>0,$$

其中 $W_{-\alpha}(r)$ 是由下式给出的赖特函数

$$W_{-\alpha}(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-r)^{k-1}}{(k-1)!\,\Gamma(1+\alpha k)},\quad r\in\mathbb{C},\ \alpha\in(0,1).$$

引理 2.6 ([19])。 对于任意固定的 $t \in [0,b]$， $S_\alpha(t)$ 和 $P_\alpha(t)$ 均为满足下列条件的线性算子

$$\|S_\alpha(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \le M_1, \qquad \frac{\alpha M_0}{\Gamma(1+\alpha)} \le \|P_\alpha(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \le \frac{\alpha M_1}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

3 随机最大值原理

本节考虑如下随机控制系统:

$$\begin{aligned} x_t = S_\alpha(b-t)x_b &+ \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} P_\alpha(s-t)\kappa(s,x_s,z_s,u_s)\,ds \\ &+ \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} P_\alpha(s-t) z_s\,dB_s, \end{aligned} \tag{1}$$

其代价泛函为

$$\mathcal{J}(u) = \mathbb{E}h(x_0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,\mathbb{E}\int_0^b (b-s)^{\alpha-1} l(s,x_s,z_s,u_s)\,ds. \tag{2}$$

这里,

$$\kappa : [0,b]\times H \times L_0^2 \times U \to H, \quad l : [0,b]\times H \times L_0^2 \times U \to \mathbb{R}, \quad h : H \to H$$

是可测函数， $\xi \in L^2(\Omega\ \mathcal{F}_b, H)$， u: $[0,b]\times\Omega \to U$，以及 $\alpha \in (\frac{1}{2},1)$。 -

作如下假设。

假设 3.1。

(i) κ, l, h 关于 (x,z,u) 连续可微。

(ii) 映射 κ_x 和 κ_z 一致有界:

$$\|\kappa_x\| + \|\kappa_z\| \le C,$$

and

$$\|l_x\| + \|h_x\| \le C(1+\|x\|), \quad \|l_z\| \le C(1+\|z\|),$$

其中 $C > 0$。

定义容许控制集

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^2_{\mathcal{F}}([0,b],U) : u(t,\omega) \in U\}.$$

显然，t 在假设 3.1 下，对于任意 $u \in \mathcal{U}_{ad}$，状态方程 (1) 存在唯一解

$$(x,z) = \big(x(\cdot,u_{(\cdot)}),\, z(\cdot,u_{(\cdot)})\big),$$

且代价泛函 (2) 定义良好。我们称 $(x,\ z,\ u)$ 为可容许三元组，称 $(x,\ z)$ 为可容许状态过程。

问题 A。 求一个控制 $u^0_{(\cdot)} \in \mathcal{U}_{ad}$，使得

$$\mathcal{J}(u^0) = \inf_{u\in\mathcal{U}_{ad}} \mathcal{J}(u). \tag{3}$$

任何满足 (3) 的控制 u^0 都称为最优控制。相应的过程

$$(x^0,z^0) = \big(x(\cdot,u^0_{(\cdot)}),\, z(\cdot,u^0_{(\cdot)})\big),$$

and t三元组 (x^0,z^0,u^0) 分别称为最优状态过程和最优三元组。

假设（$x^0_{(\cdot)}, z^0_{(\cdot)}, u^0_{(\cdot)}$）是控制问题（1）–（2）的最优解。考虑以下前向随机方程：

$$\begin{aligned}\Psi_t = S_\alpha(t)h_x(x_0^0) &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}P_\alpha(t-s)\left(\kappa_x^*[s]\,\psi_s + l_x[s]\right)\,ds \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}P_\alpha(t-s)\left(\kappa_z^*[s]\,\psi_s + l_z[s]\right)\,dB_s. \end{aligned} \tag{4}$$

我们将使用以下记号：

$$\begin{cases} \mathscr{K}[t] = \mathscr{K}\big(t, x_t^0, z_t^0, u_t^0\big), \\ \Delta_u\mathscr{K}_t = \mathscr{K}\big(t, x_t^0, z_t^0, u_t\big) - \mathscr{K}[t], \\ \Delta_x\mathscr{K}_t = \mathscr{K}\big(t, x_t, z_t^0, u_t^0\big) - \mathscr{K}[t], \\ \Delta_z\mathscr{K}_t = \mathscr{K}\big(t, x_t^0, z_t, u_t^0\big) - \mathscr{K}[t]. \end{cases} \tag{5}$$

令 $\mathcal{H}$ 为哈密顿函数

$$\mathcal{H}(t,v) = \mathbb{E}\Big\langle \kappa\big(t, x_t^0, z_t^0, v\big),\, \psi_t \Big\rangle - \frac{(b-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} l\big(t, x_t^0, z_t^0, v\big).$$

对于任意 $v \in \mathcal{U}_{ad}$, $t_0 \in [0, b)$ 和 $0 < \varepsilon \le b - t_0$，定义尖峰变分控制 为

$$u_t^\varepsilon = \begin{cases} v, & t \in [t_0,\, t_0+\varepsilon], \\ u_t^0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

令 $(x^\varepsilon_{(\cdot)}, z^\varepsilon_{(\cdot)})$ 为对应于 $u^\varepsilon_{(\cdot)}$ 的方程 (1) 的解，并令 $(p^\varepsilon_{(\cdot)}, q^\varepsilon_{(\cdot)})$ 为线性反向随机微分方程的解

$$\begin{aligned} p_t^\varepsilon = &\int_t^b (s-t)^{\alpha-1}P_\alpha(s-t)\kappa_x[s]p_s^\varepsilon\,ds + \int_t^b (s-t)^{\alpha-1}P_\alpha(s-t)\kappa_z[s]q_s^\varepsilon\,ds \\ &+ \int_t^b (s-t)^{\alpha-1}P_\alpha(s-t)\Delta u_\varepsilon\kappa[s]\,ds + \int_t^b (s-t)^{\alpha-1}P_\alpha(s-t)q_s^\varepsilon\,dB_s. \end{aligned} \tag{6}$$

定理 3.2。 设假设 *3.1* 成立。则

$$\begin{cases} \sup_{0\le t\le b}\mathbb{E}\|p_t^\varepsilon\|^2 + \mathbb{E}\int_0^b \|q_t^\varepsilon\|^2 dt = O(\varepsilon^{2\alpha}), \\ \sup_{0\le t\le b}\mathbb{E}\|p_t^\varepsilon\|^4 + \mathbb{E}\int_0^b \|q_t^\varepsilon\|^4 dt = O(\varepsilon^{4\alpha}), \\ \sup_{0\le t\le b}\mathbb{E}\|x_t^\varepsilon - x_t^0 - p_t^\varepsilon\|^2 + \mathbb{E}\int_0^b \|z_t^\varepsilon - z_t^0 - q_t^\varepsilon\|^2 dt = o(\varepsilon^{2\alpha}). \end{cases} \tag{7}$$

此外，一阶变分公式成立：

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u^\varepsilon) - \mathcal{J}(u^0) = \mathbb{E}\langle h_x(x_0^0),\, p_0^\varepsilon\rangle + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b (b-s)^{\alpha-1}\langle l_x[s],\, p_s^\varepsilon\rangle\,ds \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b (b-s)^{\alpha-1}\langle l_z[s],\, q_s^\varepsilon\rangle\,ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b (b-s)^{\alpha-1}\Delta l_u[s]\,ds + o(\varepsilon^\alpha). \end{aligned} \tag{8}$$

证明。 利用式（6）和詹森不等式，可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|p_t^\varepsilon\|^2 \le\; &4\,\mathbb{E}\Big\| \int_t^b (s-t)^{\alpha-1}P_\alpha(s-t)\kappa_x[s]\,p_s^\varepsilon\,ds\Big\|^2 + 4\,\mathbb{E}\Big\| \int_t^b (s-t)^{\alpha-1}P_\alpha(s-t)\kappa_z[s]\,q_s^\varepsilon\,ds\Big\|^2 \\ &+ 4\,\mathbb{E}\Big\| \int_t^b (s-t)^{\alpha-1}P_\alpha(s-t)\Delta_u\kappa[s]\,ds\Big\|^2 + 4\,\mathbb{E}\Big\| \int_t^b (s-t)^{\alpha-1}P_\alpha(s-t)q_s^\varepsilon\,dB_s\Big\|^2. \end{aligned}$$

利用引理 2.6、假设 3.1 和柯西–施瓦茨不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big\| \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} P_\alpha(s-t)\kappa_x[s]\, p_s^\varepsilon \, ds\Big\|^2 &\le \mathbb{E}\left(\int_t^b (s-t)^{\alpha-1} \|P_\alpha(s-t)\| \|\kappa_x[s]\| \|p_s^\varepsilon\| \, ds \right)^2 \\ &\le \left(\frac{\alpha M_1 C}{\Gamma(1+\alpha)} \right)^2 \mathbb{E}\left(\int_t^b (s-t)^{\alpha-1} \|p_s^\varepsilon\| \, ds \right)^2 \\ &\le \left(\frac{\alpha M_1 C}{\Gamma(1+\alpha)} \right)^2 \frac{(b-t)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} \int_t^b \mathbb{E}\|p_s^\varepsilon\|^2 \, ds \\ &\le C_1 \int_t^b \mathbb{E}\|p_s^\varepsilon\|^2 \, ds,\end{aligned}$$

其中

$$C_1 = \left(\frac{\alpha M_1 C}{\Gamma(1+\alpha)} \right)^2 \frac{b^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}.$$

类似地，我们得到

$$\mathbb{E}\Big\| \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} P_\alpha(s-t)\kappa_z[s]\, q_s^\varepsilon \, ds\Big\|^2 \le C_1 \int_t^b \mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^2 ds.$$

由于在脉冲区间上， $\Delta_u \kappa_s = 0$ 对 $s \notin [t_0, t_0+\varepsilon]$ 和 $\Delta_u \kappa$ 有界，

$$\Big\| \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} P_\alpha(s-t)\Delta_u\kappa_s \, ds\Big\| \le \frac{CM_1\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} (s-t)^{\alpha-1} ds = \frac{CM_1}{\Gamma(1+\alpha)} \varepsilon^\alpha. \tag{9}$$

Thus

$$\mathbb{E}\Big\| \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} P_\alpha(s-t)\Delta_u\kappa_s \, ds\Big\|^2 \le C_2 \varepsilon^{2\alpha}, \tag{10}$$

其中

$$C_2 = \left(\frac{CM_1}{\Gamma(1+\alpha)} \right)^2.$$

对随机项使用伊藤等距，我们得到

$$\mathbb{E}\Big\| \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} P_\alpha(s-t) q_s^\varepsilon \, dB_s\Big\|^2 ds \le C_3 \int_t^b (s-t)^{2\alpha-2} \mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^2 ds, \tag{11}$$

其中

$$C_3 = \left(\frac{\alpha M_1}{\Gamma(1+\alpha)} \right)^2.$$

那么，存在 C_4 使得

$$\mathbb{E}\|p_t^\varepsilon\|^2 \le C_4 \int_t^b \mathbb{E}\|p_s^\varepsilon\|^2 \, ds + C_4 \int_t^b \mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^2 \, ds + C_4 \int_t^b (s-t)^{2\alpha-2} \mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^2 \, ds + C_4 \varepsilon^{2\alpha}, \tag{12}$$

其中

$$C_4 = \max_{i=1,2,3} \{C_i\}.$$

对 $[0,b]$ 上的 t 积分 (12)，并使用 Fubini 定理交换积分次序：

$$\begin{aligned}\int_0^b \mathbb{E}\|p_t^\varepsilon\|^2 dt &\le C_4\int_0^b\int_t^b \mathbb{E}\|p_s^\varepsilon\|^2\,ds\,dt + C_4\int_0^b\int_t^b \mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^2\,ds\,dt\\ &+ C_4\int_0^b\int_t^b (s-t)^{2\alpha-2}\mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^2\,ds\,dt + C_4 b\varepsilon^{2\alpha}\\ &= C_4\int_0^b s\mathbb{E}\|p_s^\varepsilon\|^2\,ds + C_4\int_0^b s\mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^2\,ds\\ &+ C_4\int_0^b \frac{s^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^2\,ds + C_4 b\varepsilon^{2\alpha}\\ &\le C_4 b\int_0^b \mathbb{E}\|p_s^\varepsilon\|^2\,ds + C_4\left(b+\frac{b^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\right)\int_0^b \mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^2\,ds + C_4 b\varepsilon^{2\alpha},\end{aligned}$$

其中

$$\widetilde{C} = \max\left\{C_4 b,\, C_4\left(b+\frac{b^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\right)\right\}.$$

定义

$$\Phi_t := \sup_{t\le r\le b}\mathbb{E}\|p_r^\varepsilon\|^2 + \mathbb{E}\int_t^b \mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^2 ds.$$

由 (12) 和上述积分界可得

$$\Phi_t \le \widetilde{C}\int_t^b \Phi_s\,ds + \widetilde{C}\varepsilon^{2\alpha}, \qquad 0\le t\le b.$$

在 $[0,b]$ 上应用格朗沃尔不等式可得

$$\Phi_0 \le \widetilde{C}\varepsilon^{2\alpha},$$

i.e.

$$\sup_{0\le t\le b}\mathbb{E}\|p_t^\varepsilon\|^2 + \mathbb{E}\int_0^b \|q_s^\varepsilon\|^2 ds = O(\varepsilon^{2\alpha}).$$

接下来，我们证明四阶矩估计。利用 (6)、Burkholder–Davis–Gundy不等式、H¨older不等式和引理 2.6，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|p_t^\varepsilon\|^4 &\le 64\,\mathbb{E}\Big\|\int_t^b (s-t)^{\alpha-1}P_\alpha(s-t)\kappa_x[s]p_s^\varepsilon\,ds\Big\|^4 + 64\,\mathbb{E}\Big\|\int_t^b (s-t)^{\alpha-1}P_\alpha(s-t)\kappa_z[s]q_s^\varepsilon\,ds\Big\|^4\\ &+ 64\,\mathbb{E}\Big\|\int_t^b (s-t)^{\alpha-1}P_\alpha(s-t)\Delta_u\kappa[s]\,ds\Big\|^4 + 64\,\mathbb{E}\Big\|\int_t^b (s-t)^{\alpha-1}P_\alpha(s-t)q_s^\varepsilon\,dB_s\Big\|^4.\end{aligned}$$

对于确定性积分，由引理 2.6、假设 3.1 和 H¨older不等式可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big\|\int_t^b (s-t)^{\alpha-1}P_\alpha(s-t)\kappa_x[s]p_s^\varepsilon\,ds\Big\|^4 &\le \left(\frac{CM_1\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)^4\mathbb{E}\left\{\int_t^b (s-t)^{\alpha-1}\|p_s^\varepsilon\|\,ds\right\}^4\\ &\le \left(\frac{CM_1\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)^4\left(\int_t^b (s-t)^{\frac{4}{3}(\alpha-1)}\,ds\right)^3\int_t^b \mathbb{E}\|p_s^\varepsilon\|^4\,ds\\ &\le C_1\int_t^b \mathbb{E}\|p_s^\varepsilon\|^4 ds,\end{aligned}$$

类似地

$$\mathbb{E}\Big\|\int_t^b (s-t)^{\alpha-1}P_\alpha(s-t)\kappa_z[s]q_s^\varepsilon\,ds\Big\|^4 \le C_1\int_t^b \mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^4 ds,$$

其中

$$C_1 = \left(\frac{CM_1\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)^4 \frac{27\,b^{4\alpha-1}}{(4\alpha-1)^3}.$$

对于尖峰积分，利用 (9) 和 P_α 的界，

$$\mathbb{E}\Big\| \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} P_\alpha(s-t)\Delta_u\kappa[s]\,ds\Big\|^4 \le C_2\varepsilon^{4\alpha},$$

其中

$$C_2 := \Big(\frac{M_1 C}{\Gamma(1+\alpha)}\Big)^4.$$

对于随机积分，根据 Burkholder–Davis–Gundy 不等式、柯西-施瓦茨不等式和引理 2.6,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big\| \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} P_\alpha(s-t) q_s^\varepsilon\, dB_s\Big\|^4 &\le \Big(\frac{\alpha M_1}{\Gamma(1+\alpha)}\Big)^4 \mathbb{E}\Big(\int_t^b (s-t)^{2\alpha-2}\|q_s^\varepsilon\|^2 ds\Big)^2 \\
&\le \Big(\frac{\alpha M_1}{\Gamma(1+\alpha)}\Big)^4 \int_t^b (s-t)^{2\alpha-2}\,ds \int_t^b (s-t)^{2\alpha-2}\mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^4 ds \\
&\le C_3 \int_t^b (s-t)^{2\alpha-2}\mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^4 ds,
\end{aligned}$$

with

$$C_3 := \frac{b^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\Big(\frac{\alpha M_1}{\Gamma(1+\alpha)}\Big)^4.$$

将上述估计关于 $t \in [0,b]$ 积分，并利用 Fubini 定理交换积分次序，得到

$$\begin{aligned}
\int_0^b \mathbb{E}\|p_t^\varepsilon\|^4 dt &\le C_1 \int_0^b \int_t^b \mathbb{E}\|p_s^\varepsilon\|^4 ds\,dt + C_1 \int_0^b \int_t^b \mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^4 ds\,dt \\
&\quad + C_3 \int_0^b \int_t^b (s-t)^{2\alpha-2}\mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^4 ds\,dt + C_2 b\varepsilon^{4\alpha} \\
&= C_1 \int_0^b s\,\mathbb{E}\|p_s^\varepsilon\|^4 ds + C_1 \int_0^b s\,\mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^4 ds \\
&\quad + C_3 \int_0^b \frac{s^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^4\,ds + C_2 b\varepsilon^{4\alpha} \\
&= C_1\, b \int_0^b \mathbb{E}\|p_s^\varepsilon\|^4\,ds + C_1\, b \int_0^b \mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^4\,ds \\
&\quad + C_3 \frac{b^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\int_0^b \mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^4\,ds + C_2 b\varepsilon^{4\alpha} \\
&\le C_4 \int_0^b \mathbb{E}\|p_s^\varepsilon\|^4 ds + C_4 \int_0^b \mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^4\,ds + C_4\varepsilon^{4\alpha},
\end{aligned}$$

其中我们定义

$$C_4 := \max\left\{C_2 b,\, C_1 b + C_3\,\frac{b^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\right\}.$$

定义

$$\tilde\Phi_t := \sup_{r\in[t,b]} \mathbb{E}\|p_r^\varepsilon\|^4 + \int_t^b \mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^4 ds.$$

于是，由上述不等式可得

$$\tilde\Phi_t \le C_4 \int_t^b \tilde\Phi_s ds + C_4\varepsilon^{4\alpha}, \qquad t\in[0,b].$$

应用格朗沃尔不等式可得

$$\sup_{0\le t\le b}\mathbb{E}\|p_t^\varepsilon\|^4+\int_0^b\mathbb{E}\|q_s^\varepsilon\|^4ds=O(\varepsilon^{4\alpha}).$$

接下来，定义余项

$$\tilde{x}^\varepsilon:=x^\varepsilon-x^0-p^\varepsilon,\qquad \tilde{z}^\varepsilon:=z^\varepsilon-z^0-q^\varepsilon.$$

则（$\tilde{x}^\varepsilon,\tilde{z}^\varepsilon$）满足

$$\begin{aligned}\tilde{x}_t^\varepsilon=&\int_t^b(s-t)^{\alpha-1}P_\alpha(s-t)\Big(\kappa_x[s]\tilde{y}_s^\varepsilon+\kappa_z[s]\tilde{z}_s^\varepsilon+R_s^\varepsilon\Big)ds\\&+\int_t^b(s-t)^{\alpha-1}P_\alpha(s-t)\tilde{z}_s^\varepsilon dB_s,\end{aligned}$$

其中

$$R_s^\varepsilon:=\Delta_x\kappa_s-\kappa_x[s]p_s^\varepsilon+\Delta_z\kappa_s-\kappa_z[s]q_s^\varepsilon.$$

由假设 3.1 和前面的估计可得，$\mathbb{E}\|R_s^\varepsilon\|^2=o(\varepsilon^{2\alpha})$。利用与上文相同的嵌套积分技巧，我们得到

$$\sup_{0\le t\le b}\mathbb{E}\|\tilde{x}_t^\varepsilon\|^2+\int_0^b\mathbb{E}\|\tilde{z}_s^\varepsilon\|^2ds=o(\varepsilon^{2\alpha}).$$

最后，我们得出

$$\sup_{0\le t\le b}\mathbb{E}\|x_t^\varepsilon-x_t^0-p_t^\varepsilon\|^2+\int_0^b\mathbb{E}\|z_s^\varepsilon-z_s^0-q_s^\varepsilon\|^2ds=o(\varepsilon^{2\alpha}).$$

对于变分公式，应用泰勒公式可得

$$\begin{aligned}&\mathcal{J}(u^\varepsilon)-\mathcal{J}(u^0)=\mathbb{E}\left[h(x_0^\varepsilon-h(x_0^0)\right]\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\left(l(s,x_s^\varepsilon,z_s^\varepsilon,u_s^\varepsilon)-l(s,x_s^0,z_s^\varepsilon,u_s^\varepsilon)\right)ds\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\left(l(s,x_s^0,z_s^\varepsilon,u_s^\varepsilon)-l(s,x_s^0,z_s^0,u_s^\varepsilon)\right)ds\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\left(l(s,x_s^0,z_s^0,u_s^\varepsilon)-l(s,x_s^0,z_s^0,u_s^0)\right)ds\\&=\mathbb{E}\int_0^1\left\langle h_x\big(x_0^0+\delta(x_0^\varepsilon-x_0^0)\big),\,x_0^\varepsilon-x_0^0\right\rangle d\delta\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\Big\langle l_x\big(s,x_s^0+\delta(x_s^\varepsilon-x_s^0),z_s^\varepsilon,u_s^\varepsilon\big),\,x_s^\varepsilon-x_s^0\Big\rangle ds\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\Big\langle l_z\big(s,x_s^0,z_s^0+\delta(z_s^\varepsilon-z_s^0),u_s^\varepsilon\big),\,z_s^\varepsilon-z_s^0\Big\rangle ds\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\left(l(s,x_s^0,z_s^0,u_s^\varepsilon)-l(s,x_s^0,z_s^0,u_s^0)\right)ds.\end{aligned}$$

定义余项

$$X_t^\varepsilon=x_t^\varepsilon-x_t^0-p_t^\varepsilon,\qquad Z_t^\varepsilon=z_t^\varepsilon-z_t^0-q_t^\varepsilon.$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{J}(u^\varepsilon)-\mathcal{J}(u^0)\\
&=\mathbb{E}\langle h_x(x_0^0),p_0^\varepsilon\rangle+\mathbb{E}\langle h_x(x_0^0),X_0^\varepsilon\rangle\\
&+\mathbb{E}\int_0^1\left\langle h_x\left(x_0^0+\delta(x_0^\varepsilon-x_0^0)\right)-h_x(x_0^0),p_0^\varepsilon+X_0^\varepsilon\right\rangle d\delta\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\langle l_x[s],p_s^\varepsilon+X_s^\varepsilon\rangle\,ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\langle l_z[s],q_s^\varepsilon+Z_s^\varepsilon\rangle\,ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\Delta l_u[s]\,ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\left\langle l_x\big(s,x_s^0+\delta(x_s^\varepsilon-x_s^0),Z_s^\varepsilon,u_s^\varepsilon\big)-l_x[s],p_s^\varepsilon+X_s^\varepsilon\right\rangle ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\left\langle l_z\big(s,x_s^\varepsilon,z_s^0+\delta(z_s^\varepsilon-z_s^0),u_s^\varepsilon\big)-l_z[s],q_s^\varepsilon+Z_s^\varepsilon\right\rangle ds.
\end{aligned}
$$

利用矩估计（7）和假设 3.1，我们有

$$
\begin{cases}
\mathbb{E}\langle h_x(x_0^0),X_0^\varepsilon\rangle=o(\varepsilon^\alpha),\\
\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\langle l_x[s],X_s^\varepsilon\rangle ds=o(\varepsilon^\alpha),\\
\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\langle l_z[s],Z_s^\varepsilon\rangle ds=o(\varepsilon^\alpha),\\
\mathbb{E}\int_0^1\left\langle h_x\big(x_0^0+\delta(x_0^\varepsilon-x_0^0)\big)-h_x(x_0^0),p_0^\varepsilon+X_0^\varepsilon\right\rangle d\delta=o(\varepsilon^\alpha),\\
\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\left\langle l_x\big(s,x_s^0+\delta(x_s^\varepsilon-x_s^0),z_s^\varepsilon,u_s^\varepsilon\big)-l_x[s],p_s^\varepsilon+X_s^\varepsilon\right\rangle ds=o(\varepsilon^\alpha),\\
\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\left\langle l_z\big(s,x_s^\varepsilon,z_s^0+\delta(z_s^\varepsilon-z_s^0),u_s^\varepsilon\big)-l_z[s],q_s^\varepsilon+Z_s^\varepsilon\right\rangle ds=o(\varepsilon^\alpha).
\end{cases}
$$

因此，所有余项的阶均为 $o(\varepsilon^\alpha)$，由此得到一阶变分公式 a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}(u^\varepsilon)-\mathcal{J}(u^0)&=\mathbb{E}\langle h_x(x_0^0),p_0^\varepsilon\rangle+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\langle l_x[s],p_s^\varepsilon\rangle ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\langle l_z[s],q_s^\varepsilon\rangle ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\Delta l_u[s]ds+o(\varepsilon^\alpha).
\end{aligned}\tag{13}
$$

□

定理3.3. 假设(3.1) 成立，且(x^0,z^0,u^0) 是问题 A 的一个最优三元组。那么，存在一个过程 ψ 满足(4)，使得

$$
\mathcal{H}(t,v)\le\mathcal{H}(t,u_t^0),\quad \forall v\in U,\ a.e.\ t\in[0,b],\ \mathbb{P}\text{-}a.s.\tag{14}
$$

证明. 由公式（8），我们有

$$
\begin{aligned}
J(u^\varepsilon)-J(u^0)&=\mathbb{E}\langle h_x(x_0^0),p_0^\varepsilon\rangle+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\langle l_x[s],p_s^\varepsilon\rangle ds\\
+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\langle l_z[s],q_s^\varepsilon\rangle ds&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\Delta l_u[s]ds+o(\varepsilon^\alpha).
\end{aligned}
$$

另一方面,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\langle h_x(x_0^0),p_0^\varepsilon\rangle+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\langle l_x[s],p_s^\varepsilon\rangle ds\\
+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\langle l_z[s],q_s^\varepsilon\rangle ds&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\langle\Delta u^\varepsilon\kappa[s],p_s^\varepsilon\rangle ds.
\end{aligned}
$$

因此，我们得到

$$
0\le J(u^\varepsilon)-J(u^0)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\langle\Delta u^\varepsilon\kappa[s],p_s^\varepsilon\rangle ds+o(\varepsilon^\alpha),
$$

由此我们可以轻松推导出变分不等式（14）。 □

4 后向线性二次型问题

在本节中 .....中，我们研究与 FBSEE 相关的线性二次型最优控制问题。目标是 to 最小化一个 二次型代价泛函，并受分数阶反向动态系统约束。

我们首先考虑以下最优控制问题：

$$J(u) = \mathbb{E}\,\langle Gx_0, x_0\rangle + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,\mathbb{E}\int_0^b (b-t)^{\alpha-1}\langle \Pi u_t, u_t\rangle\,dt \to \min, \tag{15}$$

满足分数阶反向系统约束

$$\begin{cases} {}_t^C D_b^\alpha x_t = [A\,x_t + B\,u_t + C\,z_t] + z_t\,\dfrac{dB_t}{dt}, \\ x(b) = \xi, \end{cases} \tag{16}$$

其中， $B\colon U \to H$、 $C\colon L_0^2 \to H$ 和 $\Pi\colon [0,b] \to L(U)$ 是给定的算子。我们假设 $G = G^*$，并且对某个 $\gamma > 0$，有 $\Pi_t = \Pi_t^* \geq \gamma I$。

令 u^0 表示最优控制，(x^0, z^0) 表示相应的最优状态过程。为分析最优性，我们引入如下形式的扰动

$$u^\varepsilon = u^0 + \varepsilon v,$$

其中 v 是容许变分。相应的扰动状态记为

$$x^\varepsilon = x^0 + \varepsilon\delta y + o(\varepsilon^\alpha), \qquad z^\varepsilon = z^0 + \varepsilon\delta z + o(\varepsilon^\alpha),$$

其终端条件为 $\delta x(b) = 0$。一阶近似导出以下线性化（或变分）方程：

$$\begin{cases} {}_t^C D_b^\alpha \delta x_t = A\delta x_t + Bv_t + C\delta z_t + \delta z_t \dfrac{dB_t}{dt}, \\ \delta x_b = 0. \end{cases}$$

4.1 代价泛函的一阶变分

现在我们计算代价泛函 $J(u)$ 的一阶变分。根据定义，它由以下公式给出 y

$$\begin{aligned}
\delta J(v) &= \frac{d}{d\varepsilon} J(u^\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\varepsilon}\left[\mathbb{E}\langle Gx_0^\varepsilon, x_0^\varepsilon\rangle + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b (b-t)^{\alpha-1}\langle \Pi_t u_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon\rangle dt\right]\Bigg|_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\varepsilon}\left[\mathbb{E}\langle G(x_0^0 + \varepsilon\delta x_0), x_0^0 + \varepsilon\delta x_0\rangle\right]\Big|_{\varepsilon=0} \\
&+ \frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b (b-t)^{\alpha-1}\langle \Pi_t(u_t^0 + \varepsilon v_t), u_t^0 + \varepsilon v_t\rangle dt\right]\Bigg|_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\varepsilon}\left[\mathbb{E}\langle Gx_0^0, x_0^0\rangle + \varepsilon\mathbb{E}\langle Gx_0^0, \delta x_0\rangle + \varepsilon\mathbb{E}\langle G\delta x_0, x_0^0\rangle + \varepsilon^2\mathbb{E}\langle G\delta x_0, \delta x_0\rangle + o(\varepsilon^\alpha)\right]\Big|_{\varepsilon=0} \\
&+ \frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b (b-t)^{\alpha-1}\langle \Pi_t u_t^0, u_t^0\rangle dt\right. \\
&+ \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b (b-t)^{\alpha-1}\left[\langle \Pi_t u_t^0, v_t\rangle + \langle \Pi_t v_t, u_t^0\rangle\right] dt \\
&\left.+ \frac{\varepsilon^2}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b (b-t)^{\alpha-1}\langle \Pi_t v_t, v_t\rangle\right] dt\Bigg|_{\varepsilon=0}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d}{d\varepsilon}\left[\mathbb{E}\langle Gx_0^0, x_0^0\rangle + 2\varepsilon\mathbb{E}\langle Gx_0^0, \delta x_0\rangle + \varepsilon^2\mathbb{E}\langle G\delta x_0, \delta x_0\rangle + o(\varepsilon^\alpha)\right]\Big|_{\varepsilon=0} \\
&+ \frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b (b-t)^{\alpha-1}\langle \Pi_t u_t^0, u_t^0\rangle dt\right. \\
&+ \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b (b-t)^{\alpha-1}\left[\langle \Pi_t u_t^0, v_t\rangle + \langle \Pi_t v_t, u_t^0\rangle\right] dt \\
&\left.+ \frac{\varepsilon^2}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b (b-t)^{\alpha-1}\langle \Pi_t v_t, v_t\rangle\right] dt\Big|_{\varepsilon=0} \\
&= 2\mathbb{E}\langle Gx_0^0, \delta x_0\rangle + \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b (b-t)^{\alpha-1}\langle \Pi_t u_t^0, v_t\rangle dt.
\end{aligned}
$$

因此，我们得到紧凑形式

$$
\delta J(v) = 2\mathbb{E}\langle Gx_0^0, \delta x_0\rangle + \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b (b-t)^{\alpha-1}\langle \Pi_t u_t^0, v_t\rangle dt. \tag{17}
$$

4.2 伴随方程

为了将 $\delta J(v)$ 仅用 v 表示，我们现在通过分数阶分部积分论证 [17]引入伴随过程 ψ_t 。对于足够光滑的 ψ 和 δy，下列恒等式成立：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^b \langle \psi_t, {}_t^C D_b^\alpha \delta x_t\rangle\, dt &= -\mathbb{E}\int_0^b \left\langle \psi_t, {}_t^{RL} I_b^\alpha \delta x_t'\right\rangle dt \\
&= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b\int_t^b \langle \psi_t, (s-t)^{-\alpha}\delta x_s'\rangle\, ds\, dt \\
&= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\mathbb{E}\int_0^b \left\langle \int_0^s (s-t)^{-\alpha}\psi_t\, dt,\ \delta x_s'\right\rangle ds \\
&= -\mathbb{E}\int_0^b \langle {}_0^{RL} I_s^{1-\alpha}\psi_s, \delta x_s'\rangle\, ds \\
&= -\mathbb{E}\langle {}_0^{RL} I_s^{1-\alpha}\psi_s, \delta x_s\rangle\Big|_{s=0}^{s=b} + \mathbb{E}\int_0^b \langle {}_0^{RL} D_s^\alpha \psi_s, \delta x_s\rangle\, ds.
\end{aligned} \tag{18}
$$

计算边界项并利用 $\delta x(b) = 0$，我们只保留 $s = 0$ 处的贡献。于是得到以下结果

$$
\mathbb{E}\int_0^b \langle \psi_t, {}_t^C D_b^\alpha \delta x_t\rangle\, dt = \mathbb{E}\langle {}_0^{RL} I_s^{1-\alpha}\psi_s, \delta x_s\rangle\Big|_{s=0} + \mathbb{E}\int_0^b \langle {}_0^{RL} D_s^\alpha \psi_s, \delta x_s\rangle\, ds. \tag{19}
$$

接下来，我们将线性化动力学代入（19）式左侧：

$$
\mathbb{E}\int_0^b \langle \psi_t, {}_t^C D_b^\alpha \delta x_t\rangle\, dt = \mathbb{E}\int_0^b \langle \psi_t, A\delta x_t + Bv_t + C\delta z_t\rangle\, dt + \mathbb{E}\int_0^b \langle \psi_t, \delta z_t\rangle\, dB_t.
$$

因此，

$$
\mathbb{E}\int_0^b \langle \psi_t, {}_t^C D_b^\alpha \delta x_t\rangle\, dt = \mathbb{E}\int_0^b \langle A^*\psi_t + C^*\psi_t\, \frac{dB_t}{dt}, \delta x_t\rangle\, dt + \mathbb{E}\int_0^b \langle B^*\psi_t, v_t\rangle\, dt.
$$

将这一结果与（19）式比较，可得关系式

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\langle {}_0^{RL} I_t^{1-\alpha}\psi_t, \delta x_t\rangle\Big|_{t=0} + \mathbb{E}\int_0^b \langle {}_0^{RL} D_t^\alpha \psi_t, \delta x_t\rangle\, ds \\
&= \mathbb{E}\int_0^b \langle A^*\psi_t + C^*\psi_t\, \frac{dB_t}{dt}, \delta x_t\rangle\, dt + \mathbb{E}\int_0^b \langle B^*\psi_t, v_t\rangle\, dt.
\end{aligned} \tag{20}
$$

将该关系式代入（17）式并合并同类项，可得

$$\begin{aligned}\delta J(v) = \mathbb{E}\langle 2Gx_0^0 - {}_0^{RL}I_t^{1-\alpha}\psi_t\big|_{t=0},\ \delta x_0\rangle \\ + \mathbb{E}\int_0^b \Big\langle -{}_0^{RL}D_t^{\alpha}\psi_t + A^*\psi_t + C^*\psi_t\,\frac{dB_t}{dt},\ \delta x_t\Big\rangle\,dt \\ + \mathbb{E}\int_0^b \Big\langle B^*\psi_t + \frac{2}{\Gamma(\alpha)}(b-t)^{\alpha-1}\Pi_t u_t^0,\ v_t\Big\rangle\,dt.\end{aligned}$$

为确保对所有可容许的 v （以及任意的 δy）都有 $\delta J(v) = 0$ ，我们施加伴随条件，使得 δx_t 和 δx_0 的系数为零。因此，伴随变量 ψ_t 满足

$$\begin{cases} {}_0^{RL}D_t^{\alpha}\psi_t = A^*\psi_t + C^*\psi_t\,\frac{dB_t}{dt}, \\ {}_0^{RL}I_t^{1-\alpha}\psi_t\Big|_{t=0} = 2\,G\,x_0^0. \end{cases} \tag{21}$$

在这些选择下，一阶变分简化为

$$\delta J(v) = \mathbb{E}\int_0^b \Big\langle B^*\psi_t + \frac{2}{\Gamma(\alpha)}(b-t)^{\alpha-1}\Pi_t u_t^0,\ v_t\Big\rangle\,dt.$$

驻定条件 $\delta J(v) = 0$ 对所有 v 成立，这意味着

$$B_t^*\psi_t + \frac{2}{\Gamma(\alpha)}(b-t)^{\alpha-1}\Pi_t u_t^0 = 0.$$

因此，利用 Π_t的可逆性，最优控制可明确表示为

$$u_t^0 = -\frac{\Gamma(\alpha)}{2}(b-t)^{1-\alpha}\Pi_t^{-1}B_t^*\psi_t.$$

定理 4.1. 对于问题(15)–(16)，存在唯一的最优控制 u^0 。此外，最优控制 ad al 得出以下显式表示：

$$u_t^0 = -\frac{\Gamma(\alpha)}{2}(b-t)^{1-\alpha}\Pi_t^{-1}B_t^*\psi_t. \tag{22}$$

证明。 在对 G andΠ_t 的假设下，代价泛函 (15) 显然是二次且正定的。因此，存在一个最优控制。此外，由于相应的后向系统满足 (21)，应用定理3.3可得

$$\langle Bu_t^0, \psi_t\rangle - \frac{(b-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\langle \Pi_t u_t^0, u_t^0\rangle \geq \langle Bv, \psi_t\rangle - \frac{(b-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\langle \Pi_t v, v\rangle, \quad \forall v \in U.$$

这个不等式直接导出最优性条件 (22)。因此，由 (22) 给出的控制是唯一的 ly 满足 th 随机最大值原理，因此是最优控制。 □

结论

本文建立了希尔伯特空间中 FBSEE 最优控制的综合理论框架。主要贡献总结如下：

• 我们针对一大类非线性分数阶随机控制问题，以随机最大值原理的形式推导出了必要的最优性条件。为此，我们采用了尖峰变分法，严格估计了所得变分系统的矩，并引入了一个针对分数阶后向动力学构造的新型伴随过程。

• 我们获得了后向线性二次最优控制问题的显式闭式最优控制表示。该解以伴随过程的形式刻画，而伴随过程本身由一个涉及黎曼–刘维尔分数阶导数的前向随机微分方程所支配。

• 我们的工作提供了一个统一框架，将分数阶微积分、随机分析和无限维控制理论中的工具无缝结合起来。研究结果将经典控制理论扩展到了具有记忆和长程依赖的系统，这些特性通过分数阶导数进行建模。

这项研究为未来工作开辟了若干方向，包括研究完全耦合的前向-后向分数阶系统、带有状态约束的问题，以及对所推导出的最优性条件进行数值分析，以便将其应用于工程和数学金融等领域。

数据可用性

本研究未使用任何数据。

利益冲突

作者声明不存在任何利益冲突。

经费

未获得任何经费资助。

参考文献

[1] Ahmadova, A., & Mahmudov, N. I. (2024). 奇异反向随机非线性 Volterra 积分方程的 Picard 逼近. 动力系统定性理论, 23(4), 192.[2] Asadzade, J. A., & Mahmudov, N. I. (2025). 无限维空间中的奇异平均场反向随机 Volterra 积分方程. 应用科学中的数学方法.[3] Bensoussan, A. (1983). 分布参数系统的随机最大值原理. 富兰克林研究所期刊, 315(5-6), 387-406.[4] Bismut, J. M. (1973). 最优随机控制中的共轭凸函数. 数学分析与应用杂志, 44(2), 384-404.[5] Briand, P., & Hu, Y. (2006). 具有二次增长和无界终端值的反向随机微分方程. 概率论及相关领域, 136(4), 604-618.[6] Briand, P., & Hu, Y. (2008). 具有凸生成元和无界终端条件的二次倒向随机微分方程. 概率论及相关领域, 141(3), 543-567.[7] Buckdahn, R., Djehiche, B., & Li, J. (2011). 平均场型随机微分方程的一般随机最大值原理. 应用数学与优化, 64(2), 197-216.[8] Buckdahn, R., Li, J., & Ma, J. (2016). 一般平均场系统的随机最大值原理. 应用数学与优化, 74(3), 507-534.[9] Cadenillas, A., & Haussmann, U. G. (1994). 奇异控制问题的随机最大值原理. 随机学：概率与随机过程国际期刊, 49(3-4), 211-237.[10] Cadenillas, A., & Karatzas, I. (1995). 具有随机系数的线性凸最优控制的随机最大值原理. SIAM 控制与优化杂志, 33(2), 590-624.[11] Chen, Z., & Wang, B. (2000). 无限时间区间反向随机微分方程与 g-鞅的收敛性. 澳大利亚数学学会杂志, 69(2), 187-211.[12] El Karoui, N., Peng, S., & Quenez, M. C. (1997). 金融领域中的后向随机微分方程. 数学金融, 7(1), 1-71.[13] Hu, Y., & Peng, S. (1991). 反向半线性随机演化方程的适应解. 随机分析与应用, 9(4), 445-459.[14] Hu, Y., Jin, H., & Zhou, X. Y. (2012). 时间不一致随机线性二次控制. SIAM 控制与优化杂志, 50(3), 1548-1572.[15] Kushner, H. J. (1965). 关于随机最大值原理：固定控制时间 . 数学分析与应用杂志, 11, 78-92.

[16] Kushner, H. J., & Schweppe, F. C. (1964). 随机控制系统的最大值原理. 数学分析与应用杂志, 8(2), 287-302.[17] Love, E. R., & Young, L. C. (1938). 关于分数阶分部积分. 伦敦数学会会刊, 2(1), 1-35.[18] Li, Y., & Wang, Y. (2019). 具有无限时滞的分数阶随机演化方程解的存在性与渐近行为. 微分方程杂志, 266(6), 3514-3558.[19] Li, Q., & Luo, D. (2025). 分数阶后向随机演化方程的新结果. 应用科学中的数学方法.[20] Li, J. (2012). 均场控制中的随机最大值原理. Automatica, 48(2), 366-373.[21] L¨u, Q., & Zhang, X. (2014). 一般庞特里亚金型随机最大值原理与无限维空间中的后向随机演化方程 . 施普林格 .[22] Mahmudov, N. I. (2002). 希尔伯特空间中随机演化系统的最大值原理. Int. J. Pure Appl. Math, 2(3), 287-298.[23] Mahmudov, N. I., & McKibben, M. A. (2007). 希尔伯特空间中的后向随机演化方程与最优控制. 非线性分析：理论、方法与应用, 67(4), 1260-1274.[24] Mahmudov, N. I., & Ahmadova, A. (2022). 关于分数阶后向随机微分方程的一些结果. 动力系统定性理论, 21(4), 129.[25] Mao, X. (1995). 具有非利普希茨系数的后向随机微分方程的适应解. 随机过程及其应用, 58(2), 281-292.[26] Meng, Q., & Shi, P. (2013). 后向随机偏微分系统的随机最优控制. 数学分析与应用杂志, 402(2), 758-771.[27] Morlais, M. A. (2009). 由连续鞅驱动的二次倒向随机微分方程及其在效用最大化问题中的应用. 金融与随机, 13(1), 121-150.[28] Pardoux, E., & Peng, S. (1990). 后向随机微分方程的适应解. 系统与控制快报, 14(1), 55-61.[29] Peng, S. (1993). 后向随机微分方程及其在最优控制中的应用. 应用数学与优化, 27(2), 125-144.[30] Peng, S. (1990). 最优控制问题的一般随机最大值原理. SIAM 控制与优化杂志, 28(4), 966-979.[31] Peng, S. (2010). 后向随机微分方程、非线性期望及其应用. 收录于《2010年国际数学家大会论文集》（ICM 2010）（共4卷），第一卷：大会报告与典礼；第二至第四卷：特邀报告（第393-432页）.[32] Rong, S. (1997). 关于具有跳跃的后向随机微分方程的解及其应用. 随机过程及其应用, 66(2), 209-236.[33] Situ, R. (2002). 关于希尔伯特空间中具有跳跃和非利普希茨系数的后向随机微分方程的解及随机控制. 统计与概率快报, 60(3), 279-288.[34] Yong, J. (2013). 平均场随机微分方程的线性二次最优控制问题. SIAM 控制与优化杂志, 51(4), 2809-2838.[35] Yang, M., & Gu, H. (2021). 由维纳过程和分数布朗运动共同驱动的黎曼–刘维尔分数阶随机演化方程. 不等式与应用杂志, 2021(1), 8.[36] Zhou, Y. (2023). 分数阶微分方程基础理论. 世界科学出版社.[37] Zhou, Y., Shen, X. H., & Zhang, L. (2013). 具有卡普托导数的分数阶演化方程的柯西问题. 欧洲物理杂志专题, 222(8), 1749-1765.