arXiv:2601.01635v1 [physics.optics] 4 Jan 2026

# 运动镜光学腔中电磁场的变分处理

**F. Lorenzi**[1], *__M. G. Pelizzo__[1,3,5],和 **L. Salasnich**[2,4,6,7]

[1]帕多瓦大学信息工程系，意大利帕多瓦 35131，Gradenigo 路 6A[2]帕多瓦大学“伽利略·伽利莱”物理与天文系，意大利帕多瓦 35131，Marzolo 路 8[3]帕多瓦大学空间研究与活动中心，意大利帕多瓦 35131，Venezia 大道 1[4]意大利国家核物理研究所（INFN）帕多瓦分部，意大利帕多瓦 35131，Marzolo 路 8[5]意大利国家研究委员会光子学与纳米技术研究所，意大利帕多瓦 35131，Trasea 路 7[6]帕多瓦量子技术中心，帕多瓦大学，意大利帕多瓦 35131，Gradenigo 路 6A[7]意大利国家研究委员会（CNR）意大利国家光学研究所（INO），意大利塞斯托·菲奥伦蒂诺 50019，Nello Carrara 路 1

*电子邮箱： francesco.lorenzi.2@phd.unipd.it

**摘要**。 含运动镜的光学腔为探索辐射–物质相互作用和光学介导的力学效应提供了灵活的平台，对这些效应的控制具有广泛的技术意义。然而，要在一致的理论框架内描述电磁场与镜面的耦合动力学，仍然颇具挑战。我们分析腔内经典电磁场与可动镜之间的耦合问题，并考察镜面运动的非相对论和相对论区域。从受一般外势作用的镜面的运动方程出发，我们给出了镜面–辐射相互作用的变分表述。在这一理论框架内，我们引入单模变分近似，以捕捉耦合系统的基本动力学特征。对于镜面自由运动这一特殊情形，变分方法可得出精确解。这种统一处理揭示了不同动力学参数范围之间的联系，并为分析从精密干涉测量到相对论辐射压力效应等应用奠定了基础。

## 1. 引言

光具有动量并能施加压力这一观点可追溯至开普勒和牛顿 [1]。麦克斯韦1873年电磁理论提供了一个力学理论框架，后来在20世纪初由列别捷夫 [2]以及尼科尔斯和赫尔 [3, 4]通过实验予以证实。如今，辐射压力的研究涉及极为广泛的长度尺度。在微观层面，量子化电磁场与作为镜面的物质的量子化运动之间的相互作用日益受到关注，部分原因是用于精密测量的超灵敏干涉仪不断发展。从布拉金斯基、马努金和吉洪诺夫最初对光诱导有质动力效应的预测 [5, 6], 开始，这一研究领域逐渐发展成熟，在经典和量子层面架起了光学与力学之间的桥梁 [7–9]。早期研究发现了法布里–珀罗干涉仪中的参数不稳定性 [10] ，并提出将光诱导阻尼作为一种稳定机制[11]。随后对高-$Q$ 微腔开展的实验证实了辐射压力诱导的振荡 [12]，并揭示了非线性多稳态 [13]。关于边带冷却和动力学反作用的后续理论进展 [14, 15]，为将机械运动冷却至量子基态[16]开辟了新途径。近年来，量子态工程与层析成像 [9, 17–20],、波长转换 [21–24], 以及超快调谐方面的进展，使光力学成为基础科学和新兴技术的强大平台 [25,26]。一个引人注目的例子是用于引力波探测的超灵敏干涉仪的发展。与此相反，在天文学尺度上，人们提出利用辐射压力推进航天器，使轻型“光帆”达到相对论速度；所谓光帆，即携带有效载荷的反射表面[27–30]。在这一参数范围内，反射表面被建模为自由运动。在类似腔的构型中，微观和宏观情形都可以处理，其中反射表面充当动力学边界 [31, 32]。

理论方法很大程度上取决于所关注的参数范围。耦合镜面–辐射系统的量子动力学已通过场模分解以及构造相应的哈密顿算符 [33–36]进行了分析。该理论框架能够描述动态卡西米尔效应等现象，这些现象源于非绝热动力学 [37]。对于相对论运动，只有在

镜面匀速运动的情况下才存在精确解，这些解通过坐标变换 [38,39], 获得，并由此产生准模。

本文提出了一种近似方法，用于计算经典区域中与腔辐射耦合的镜面的完整动力学。我们采用变分单模近似，从而得到镜面的有效势。由于这种处理在相对论区域内仍然有效，因此也适用于激光辐射压力作用下自由光帆的运动。本文组织如下：第 2 节回顾电磁场和镜面的基本方程，并对腔场进行模态分解。第 3 节讨论如何通过变分单模方法分析动力学，引入适当的变分试探函数，并推导相对论情形下的运动方程，其中包括存在一般外势的情形。第 4 节讨论如何通过简化和 Wentzel-Kramers-Brillouin（WKB）方法求解所得方程，并获得相应的动力学结果。附录专门讨论谐势存在时相对论运动这一特殊情形；从数学角度看，这一情形颇为有趣。

## 2. 基本理论

通过施加适当的边界条件并计算作用在镜面表面上的合力，可以将辐射压力效应形式化。我们考虑一面理想反射镜，将其建模为平坦的理想导体。在这种情况下，边界条件要求电场的切向分量在镜面处为零。然而，当镜面运动时，这一条件必须作相应修正：由于洛伦兹变换，电场和磁场在实验室系与共动系之间并非不变。电磁场的相应变换为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma\,(\mathbf{E} + c\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E}) \\ \mathbf{B}' &= \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{c^2}\times\mathbf{E}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{B}),\end{aligned} \tag{1}$$

其中$\mathbf{E}'$ 和$\mathbf{B}'$ 分别是镜面共动系中的电场和磁感应场，$\mathbf{E}$ 和$\mathbf{B}$ 则是实验室参考系中的电场和磁感应场， $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{v}/c$ 是相对速度$\mathbf{v}$ 与真空光速之比， $c$ 而 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ 是洛伦兹-菲茨杰拉德因子。假设场垂直于镜面的运动方向，而镜面的运动沿 $x$ 方向。设运动镜的坐标为 $q(t)$，其中 $q(0) = q_0$ 是其在时间 $t = 0$的位置。固定镜则位于位置 $x = 0$。镜面上横向电场为零的边界条件表示为

$$\mathbf{E}(q(t),t) + c\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}(q(t),t) = 0. \tag{2}$$

在真空中传播的一维腔内，我们假设电磁场为横向电磁场，并且不失一般性地仅保留单一偏振，因此场可以写为 $\mathbf{E} = E\,\mathbf{u}_y$ 和 $\mathbf{B} = B\,\mathbf{u}_z$。考虑镜面的运动

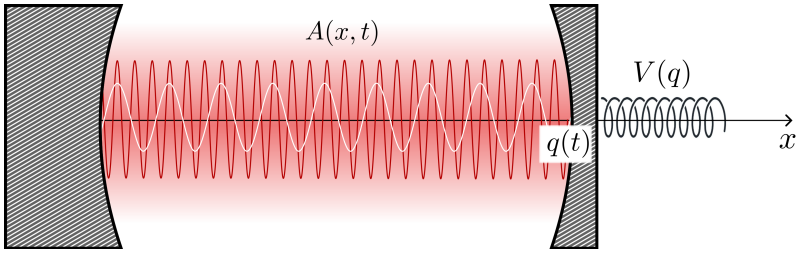



图 1：腔系统示意图。固定镜位于左侧，位置为 $q(t)$；可动镜位于右侧。在腔内，场 $A(x,t)$，即磁矢势的横向分量，可以具有多个激发模，图中以正弦曲线表示。可以设置外势$V(q)$作用于运动镜。

沿 $\hat{}x$ 方向，$\mathbf{v} = \dot{q}(t)\,\mathbf{u}_x$，方程可简化为

$$E' = \gamma(E + \dot{q}(t)\ B), \quad B' = \gamma\left(B - \frac{\dot{q}(t)}{c^2}E\right), \tag{3}$$

满足边界条件

$$E(q(t),t) - \dot{q}(t)\ B(q(t),t) = 0. \tag{4}$$

该方程与 $E(0,t) = 0$ 一起，构成了该问题随时间变化的边界条件。当镜面并非理想反射时，部分电磁波会穿透镜面，并在材料内部耗散。因此必须改变边界条件，因为镜面处的切向电场不再为零，而是与感生表面电流及材料响应相关，这些可以通过表面阻抗 [40] 来建模。有限的表面阻抗会导致吸收以及反射时的相移。磁矢势$\mathbf{A}$ 和电标势 $\phi$ 是在库仑规范下引入的。在所关注的区域内不存在电荷和电流时，库仑规范的规范固定条件对应于 $\nabla^2\phi = 0$ 和 $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$。在该规范下，当 $\mathbf{A} = A\,\mathbf{u}_y$ 时，各场可表示为

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t}, \quad B = \frac{\partial A}{\partial x}. \tag{5}$$

边界条件 (4) 隐含在磁势为常数这一要求中，因为全导数

$$\frac{dA(q(t),t)}{dt} = -E(q(t),t) + \dot{q}(t)\ B(q(t),t) = 0 \tag{6}$$

对应于该边界条件。由此得到的边界条件为 [39]

$$A(0,t) = 0, \tag{7}$$
$$A(q(t),t) = 0. \tag{8}$$

在腔内，在没有介质的情况下，有

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \tag{9}$$

镜面的相对论的牛顿定律可通过在实验室参考系中计算电磁应力张量的压力分量得到。若镜面不是理想反射的，辐射压力不仅必须平衡入射和反射的动量密度，还必须平衡透射和材料能量吸收的影响 [41]。假设镜面的表面为 $S$。由于镜面上的剪切项为零，因此预计只有沿 $x$ 方向、与镜面速度矢量共线的力分量。此力$\mathbf{F}^{(\mathrm{rad})} = F_x^{(\mathrm{rad})}\mathbf{u}_x$表示为

$$F_x^{(rad)} = \frac{S}{2\mu_0}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\dot{q}}{c^2}\,\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2\Bigg|_{x=q(t)}. \tag{10}$$

总力由 $F_x^{\mathrm{rad}}$和镜面所在位置处外势产生的力组成。假设相应的力仅沿腔轴方向作用，其大小为 $-\partial V/\partial q$，因此忽略横向运动。该系统示意图如图 1 所示。考虑运动镜的相对论运动，其动量为 $\gamma m\dot{q}$，其中 $\gamma = 1/\sqrt{1-\dot{q}^2/c^2}$ 为洛伦兹-菲茨杰拉德因子，根据相对论牛顿定律可得（另见 [41, 附录 A]）

$$\gamma^3 m\ddot{q} = F_x^{(\mathrm{rad})} - \frac{\partial V}{\partial q}\,. \tag{11}$$

在 $\gamma \sim 1$的极限情况下，可得非相对论运动方程。而电磁场的边界条件则需要保持与方程（8）相同的形式。

根据 Law [34], ，电磁场可分解为一组满足边界条件的正交归一函数，如下所示

$$A(x,t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} Q_\ell(t)\sqrt{\frac{2}{q(t)}}\sin\left(\frac{\pi\ell}{q(t)}x\right)\,. \tag{12}$$

这种分解得到的耦合模方程如下：对于场，对应式（9）；对于镜面位置，对应式（10、11）：

$$\ddot{Q}_\ell = -\omega_\ell^2 Q_\ell + \frac{2\dot{q}}{q}\sum_j g_{\ell j}\dot{Q}_j + \frac{\ddot{q}q - \dot{q}^2}{q^2}\sum_j g_{\ell j}Q_j + \frac{\dot{q}^2}{q^2}\sum_{jh} g_{j\ell}g_{jh}Q_h, \tag{13}$$

$$\gamma^3 m\ddot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q} + \frac{1}{q}\sum_{\ell,j}(-1)^{\ell+j}\omega_\ell\omega_j Q_\ell Q_j. \tag{14}$$

with

$$g_{kj} = \begin{cases} (-1)^{k+j}\dfrac{2kj}{j^2-k^2}, & k \neq j, \\ 0, & k = j. \end{cases} \tag{15}$$

以及 $\omega_\ell = c\ell\pi/q$。由于模振幅方程之间存在全连接耦合，这些方程难以直接求解。

所得方程组构成了对 Razavy [36] 和 Law[33, 34]最初研究的动力学边值问题的相对论推广。在非相对论区域，通过取适当的极限（即从方程（14）中去掉因子 [36] ），可以直接恢复 Law 的有效哈密顿量

描述。在相对论和非相对论情形下，与静态情况不同，每个腔模的频率都不再是常数：波数不仅取决于镜面位置，镜面的运动还会使所有模式彼此耦合。

耦合系数 $g_{\ell j}$ 的存在表明，每个场模都与其他所有场模相互作用，镜面则在整个频谱范围内传递能量交换。这种多模相互作用通常无法得到闭式解。当镜面以匀速运动时，问题的复杂性会有所降低，但即便如此，完整的多模解仍然难以求得。因此，直接求解整组方程是不可行的，必须采用近似方法。

## 3. 单模变分处理

下文将采用变分方法构造单模截断，随后对单模场应用绝热近似。该理论框架在保留镜场相互作用核心物理特征的同时，系统地降低了问题的复杂性。

下文将回顾该问题的一般拉格朗日量结构。所研究系统的拉格朗日量为

$$L = L_q + L_A \,, \tag{16}$$

其中

$$L_q = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{q}^2}{c^2}} - V(q)\,, \tag{17}$$

这是质量为 $m$ 、位置为 $q(t)$且处于外势 $V(q)$中的运动镜的相对论拉格朗日量。在非相对论极限下，忽略常数项后， $L_q$ 呈现出熟知的形式 $L_q \approx m\dot{q}^2/2 - V(q)$。与辐射相关的项则为

$$L_A = \frac{\epsilon_0\, S}{2}\int_0^q dx\left[\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2 - c^2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2\right] \tag{18}$$

这是矢势为 $A(x,\ t)$的电磁场的拉格朗日量，其中 $S$ 为两面镜之间的横向面积。由于 $L_A$中的积分上限，两个拉格朗日量相互耦合。

变分试探函数的构造可以从以下假设出发：只有一个模式被激发，且模耦合可以忽略。仅选取式（12）中的一个模式，我们得到场 $A(x,\ t)$的如下试探函数

$$A(x,t) = Q(t)\sqrt{\frac{2}{q(t)}}\sin\left(\frac{\pi\,\ell}{q(t)}x\right), \tag{19}$$

这是单色电磁波的一种非常特殊的情形：只有一个单模被占据，其模数为 $\ell$，波数为 $k_\ell(t) = \pi\ell/q(t)$，振幅为$Q(t)$。这个单模假设满足所需的边界条件（方程（7、8））， 且 $Q(t)$是随时间变化的变分参数。我们注意到，方程（19）的假设与腔光力学中标准的绝热模消去

描述有些相似：一个电磁腔模的瞬时频率 $\omega_\ell(t) = \pi c\,\ell/q(t)$ 受到镜面位置 $q(t)$ [42], 的参数调制，而其他模则通过平均值有效地纳入考虑，并假设它们振荡得快得多。在量子极限下，这会简化为单模腔光力学模型，其中场与机械位移 [43]耦合。然而，方程（19）代表了更强的近似，因为它相当于在方程（13）和（14）中将除所考虑模以外的所有模的振幅设为零，并忽略它们之间的相互耦合。

通过估算速度诱导的模间耦合的影响，可以定量评估单模截断的有效性。利用前文讨论的模耦合系数 (15)，模 $\ell$ 的演化方程 (13) 包含混合项，这些项取决于其他模的振幅及其导数。由于下文考虑较大的模数 $\ell$，我们考察耦合系数在 $\ell$ 变大时的渐近行为。在此参数范围内，主要贡献对应于方程 (13) 中最后一个耦合项，该项涉及满足 $j = \ell \pm 1$ 的相邻模。事实上，当 $\ell$ 较大时，耦合系数按 $|g_{\ell,\ \ell\pm1}| \sim \ell$ 的规律变化。由于 $\omega_\ell = \pi c\,\ell/q$，在最后一项中，相对于光学频率、控制这些交叉项大小的无量纲比值为

$$\frac{(\dot q/q)\,|g_{\ell,\ell\pm1}|}{\omega_\ell} \sim \frac{(\dot q/q)\,\ell}{\pi c\,\ell/q} = \frac{|\dot q|}{\pi c}, \tag{20}$$

该比值与 $\ell$ 无关。距离更远的模影响更小：对于满足 $m > 1$ 的 $j = \ell+m$，可得 $|g_{\ell,\ \ell+m}| \sim \ell/m$，因此相应项还会进一步受到因子 $1/m$ 的抑制。所有其他项均在 $\ell$ 变大时渐近趋于零。因此，我们得出结论：单模假设在非相对论区域内是可靠的；而在 $\ell$ 较大的情况下，许多模间相互作用项会受到抑制。值得注意的是，该假设可以相当精确地进行解析处理。将方程 (19) 代入方程 (18)，并对 $x$ 积分，可得

$$L_A = \frac{\epsilon_0 S}{2}\left[\left(\dot Q^2 - \frac{c^2\pi^2\ell^2}{q^2}Q^2\right) + \left(1 + \frac{2\pi^2\ell^2}{3}\right)\frac{\dot q^2 Q^2}{q^2}\right] \tag{21}$$

照例， $q(t)$ 和 $Q(t)$ 的共轭动量定义为

$$p_q = \frac{\partial L}{\partial \dot q} = \frac{m\dot q}{\sqrt{1-\frac{\dot q^2}{c^2}}}, \tag{22}$$

$$p_Q = \frac{\partial L}{\partial \dot Q} = \epsilon_0 S\dot Q, \tag{23}$$

而哈密顿量

$$H = p_q\dot q + p_Q\dot Q - L \tag{24}$$

为

$$H = H_q + H_Q + H_{\rm cross}, \tag{25}$$

与镜面相关的能量

$$H_q = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\dot q^2}{c^2}}} + V(q), \tag{26}$$

以及与模态相关的能量，

$$H_Q = \frac{\epsilon_0 S}{2}\left(\dot{Q}^2 + \frac{c^2\pi^2\ell^2}{q^2}Q^2\right), \tag{27}$$

以及交叉能量项，

$$H_{\rm cross} = \frac{\epsilon_0 S}{2}\left(1 + \frac{2\pi^2\ell^2}{3}\right)\frac{\dot{q}^2 Q^2}{q^2}. \tag{28}$$

这个哈密顿量是一个守恒量，具体而言，它是我们系统有效模型的总能量。我们单模处理中的正则变量可以与 Law 的基础哈密顿量理论框架中使用的变量对应起来 [34] 如下。选定一个固定的模式指标 $\ell$ 后，本理论中的动态电磁模振幅 $Q$ 与基础模型中的 $Q_\ell$ 相对应（另见式（13）），而镜面坐标 $q$ 则保持不变。正如上文所述，在不存在模态混合的静止镜极限下，这种对应关系以及相应的正则动量关系便是精确的。我们得到以下欧拉-拉格朗日方程。$Q$ 的运动方程很简单：

$$\ddot{Q} + \left[\frac{c^2\pi^2\ell^2}{q^2} - \left(1 + \frac{2\pi^2\ell^2}{3}\right)\frac{\dot{q}^2}{q^2}\right]Q = 0 \tag{29}$$

而 $q$ 的运动方程则稍微复杂一些

$$\begin{aligned}&\frac{m\,\ddot{q}}{\left(1-\frac{\dot{q}^2}{c^2}\right)^{3/2}} + \frac{\partial V}{\partial q} - \epsilon_0 S\left[\frac{c^2\pi^2\ell^2}{q^3}Q^2\right.\\ &\left. - \left(1 + \frac{2\pi^2\ell^2}{3}\right)\left(-\dot{q}^2\frac{Q}{q} + 2\dot{q}\dot{Q} + \ddot{q}Q\right)\frac{Q}{q^2}\right] = 0\end{aligned} \tag{30}$$

上述方程大大简化了原来的耦合模方程（式（14–13））。正如下一节所述，我们还可以进一步简化这些方程：届时将对拉格朗日量的一个约化形式应用 WKB方法。我们将证明，尽管一般情况下只能采用数值方法，但对于自由镜，仍有可能得到解析解。

## 4. 求解方法

我们注意到，变分拉格朗日量 (21) 中包含 $\dot{q}(t)$ 与 $Q(t)$ 之间的耦合项；若满足 $\dot{q} \ll c$，则可忽略该项（另见参考文献 [35]）。值得注意的是，这对应于一种混合近似方案：为了忽略方程 (28) 中的交叉能量项，我们要求速度不处于超相对论状态，但仍保留镜面动能的相对论形式。在第 4.2 节讨论相对论解时，我们将着重强调这一点。应用此近似后，得到修正后的有效拉格朗日量

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{q}^2}{c^2}} + \frac{\epsilon_0 S}{2}\left(\dot{Q}^2 - \frac{c^2\pi^2\ell^2}{q^2}Q^2\right). \tag{31}$$

相应的欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{m\ddot{q}}{\left(1-\frac{\dot{q}^2}{c^2}\right)^{3/2}} - \epsilon_0 S\frac{c^2\pi^2\ell^2}{q^3}Q^2 + \frac{\partial V}{\partial q} = 0 \tag{32}$$

$$\ddot{Q} + \frac{c^2\pi^2\ell^2}{q^2}Q = 0 \tag{33}$$

$\ell$ 的特征尺度由比较光波长与系统长度确定。我们回顾其定义

$$\ell = \frac{2q_0}{\lambda_0} = \frac{q_0\omega_0}{2\pi c}\,, \tag{34}$$

其中 $q_0 = q(0)$，且 $\omega_0 = \omega_0(q_0)$。例如，考虑一种典型的红外激光器，其波长为 $\lambda_0 \sim 1\mu\mathrm{m}$，初始距离对应于 $q_0 \sim 1\,\mathrm{mm}$。在这种情况下，模式指标为 $\ell \sim 10^3$。在这些条件下，若考虑处于谐势中的镜面，光学振荡周期 $T_{\rm opt} = 2\pi/\omega_0 \sim 10^{-15}\mathrm{s}$ 比实验中通常可实现的机械周期 $T_{\rm m} = 2\pi/\Omega$ 短许多数量级；当 $\Omega$ 为 $\sim 2\pi\times 10^7\,\mathrm{s}^{-1}$ [7] g 时，后者为 $T_{\rm m}\sim 10^{-7}\,\mathrm{s}$，因此时间尺度分离约为 $T_{\rm m}/T_{\rm opt}\sim 10^8$。对于自由运动镜，机械运动的相关时间尺度为 $T'_{\rm m} = q(t)/|\dot{q}(t)|$；与光学振荡对应的瞬时周期相比 $c\pi\ell/q$，缓慢变化条件为 $|\dot{q}|/(c\pi\ell) \ll 1$。当 $\ell$ 足够大时，可以认为该条件在每一时刻都成立。这表明可以采用短波渐近，即使用 WKB方法。WKB方法为方程（33）提供了近似解，即模式振幅 $Q(t)$ 可表示为时间和 $q(t)$ 的函数。模式振幅的一阶（程函与输运）WKB解，在初始条件 $Q(0) = Q_0$ 和 $\dot{Q}(0) = 0$ 下为

$$Q(t) \approx Q_0\sqrt{\frac{q(t)}{q_0}}\,\cos\left(\int_0^t d\tau\,\frac{c\pi\ell}{q(\tau)}\right) = Q_0\sqrt{\frac{q(t)}{q_0}}\,\cos\left(\int_0^t d\tau\,\omega_0\frac{q_0}{q(\tau)}\right). \tag{35}$$

代入式（32），可得到关于 $q$ 的积分微分方程。项 $Q^2$ 包含和频与差频以及一个常数分量。我们可以忽略快速振荡项，从而得到关于 $q(t)$ 的简单微分方程。将该解代入镜面位置方程（32），可得

$$\ddot{q} = \frac{(1-\frac{\dot{q}^2}{c^2})^{3/2}}{m}\left(\frac{\epsilon_0 S}{2}\,\frac{c^2\pi^2\ell^2}{q^2}\,\frac{Q_0^2}{q_0} - \frac{\partial V}{\partial q}\right), \tag{36}$$

该方程可以通过数值方法求解。

作为初始条件，我们假设在 $t = 0$ 处的模式中储存了一定的电磁能，并且对于 $t \le 0$，$q(t) = q_0$。相应的能量为

$$E_0 = \frac{\epsilon_0 S}{2}Q_0^2\omega_0^2\,, \tag{37}$$

接下来，我们将考虑形状为 $V(q) = \Omega^2 m(q-\bar{q})^2/2$ 的谐势。假设时间尺度为 $t_{\rm rel} = q_0/c$，长度尺度为 $l_{\rm rel} = q_0$，定义 $\mathfrak{q} = q/q_0$

以及 $\bar{\mathfrak{q}} = \bar{q}/q_0$，并利用公式 (36, 37)，可得以下归一化方程

$$\ddot{\mathfrak{q}} = \left(1 - \dot{\mathfrak{q}}^2\right)^{3/2} \left( \frac{\Gamma}{\mathfrak{q}^2} - K(\mathfrak{q} - \bar{\mathfrak{q}}) \right) . \tag{38}$$

其中 $\Gamma = E_0/(mc^2)$，以及 $K = (\Omega q_0/c)^2$。

运动方程 (38) 可以改写为关于时间变量的隐式积分方程，具体如下。将对时间的导数替换为对 $\mathfrak{q}$ in $\ddot{\mathfrak{q}}$ 的导数，得到

$$\dot{\mathfrak{q}} \frac{\mathrm{d}\dot{\mathfrak{q}}}{\mathrm{d}\mathfrak{q}} = (1 - \dot{\mathfrak{q}}^2)^{3/2} \left( \frac{\Gamma}{\mathfrak{q}^2} - K(\mathfrak{q} - \bar{\mathfrak{q}}) \right) , \tag{39}$$

因此，我们可以将方程分离

$$\frac{\dot{\mathfrak{q}}}{(1 - \dot{\mathfrak{q}}^2)^{3/2}} \frac{\mathrm{d}\dot{\mathfrak{q}}}{\mathrm{d}\mathfrak{q}} = \frac{\Gamma}{8\mathfrak{q}^2} - K(\mathfrak{q} - \bar{\mathfrak{q}}) . \tag{40}$$

积分后得到能量守恒方程（另见式 (26)）

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \dot{\mathfrak{q}}^2}} + \mathcal{V}(q) = \mathcal{E} . \tag{41}$$

其中，左侧前两项构成动能，$\mathcal{E}$ 是守恒能量，而 $\mathcal{V}(\mathfrak{q})$ 是有效势，定义为

$$\mathcal{V}(\mathfrak{q}) = \mathcal{V}_\Gamma(\mathfrak{q}) + \mathcal{V}_K(\mathfrak{q}) ; \tag{42}$$

分解为辐射压力分量

$$\mathcal{V}_\Gamma(\mathfrak{q}) = \frac{\Gamma}{\mathfrak{q}} , \tag{43}$$

和弹性分量

$$\mathcal{V}_K(\mathfrak{q}) = \frac{K(\mathfrak{q} - \bar{\mathfrak{q}})^2}{2} . \tag{44}$$

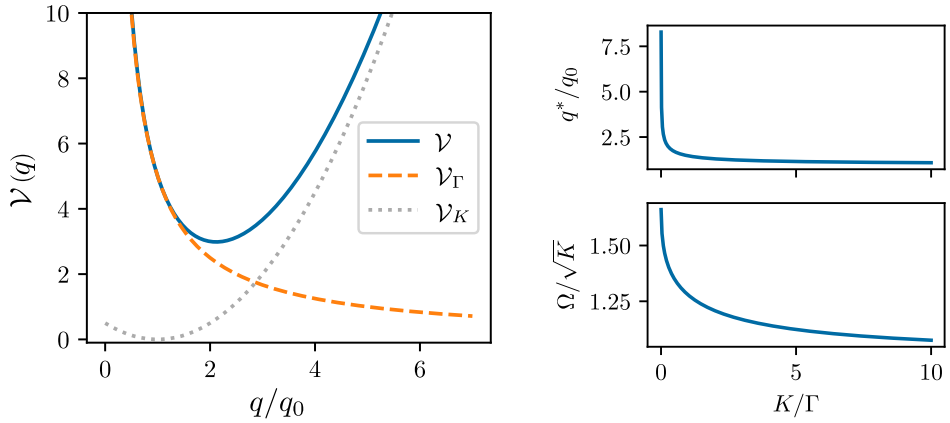
应用初始条件（$\mathfrak{q}(0) = 1$，$\dot{\mathfrak{q}}(0) = 0$），我们得到初始能量 $\mathcal{E} = \Gamma + K(1-\bar{\mathfrak{q}})^2/2 + 1$。求解速度 $\dot{\mathfrak{q}}$ 后，我们得到隐式关系

$$\dot{\mathfrak{q}} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{(\mathcal{E} - \mathcal{V}(\mathfrak{q}))^2}} \tag{45}$$

这意味着

$$t = \pm \int_1^{\mathfrak{q}} \frac{ds \ |\mathcal{E} - \mathcal{V}(s)|}{\sqrt{(\mathcal{E} - \mathcal{V}(s))^2 - 1}} . \tag{46}$$

一般而言，这个积分无法用初等函数表示其解。它等价于直接求解二阶微分方程（38）。我们注意到，选择数值求解器对实现能量守恒至关重要，因此采用 Størmer–Verlet 类型的辛积分方法 [44]。接下来分析不同的极限情形。在相对论区域，有两种特殊情形值得关注：纯相对论谐振子情形（$\Gamma = 0$），以及镜面可自由运动的情形（$K = 0$）。谐势中的相对论运动情形（其中 $K \neq 0$）具有数学上的研究价值，并在附录 A 中加以讨论。第二种情形则在激光推进的背景下颇具意义，下面将对此进行分析。现在我们聚焦于非相对论区域。




(a) (b)

图2：采用WKB方法近似得到的辐射压力作用下镜子动力学的有效势及不动点性质。图（a）表示有效势 $\mathcal{V}$ 随坐标 $\mathfrak{q}$的变化，展示了辐射压力项 $\mathcal{V}_\Gamma$ 与弹性项 $\mathcal{V}_K$的组合。参数为 $K=1$ 和 $\Gamma=5$。图（b）表示不动点坐标 $q^*$（上图）和小振荡频率 $\Omega$（下图）随比值$K/\Gamma$的变化。

### *4.1.* 谐势中的非相对论运动

在对应于大多数实验装置的非相对论区域，可以通过研究不动点、其稳定性以及相应的小振荡，来了解整体动力学的直观特征。将式（31）中的动能项按 $\frac{\dot{q}}{c}$ 的幂展开至二阶，即可得到非相对论拉格朗日量。我们还忽略了对应于相对论静能的常数项，从而得到

$$L=\frac{m}{2}\dot{q}^2+\frac{\epsilon_0 S}{2}\left(\dot{Q}^2-\frac{c^2\pi^2\ell^2}{q^2}Q^2\right)\,. \tag{47}$$

按照上文所述消去场 $Q$ 的WKB步骤，得到镜面运动的非相对论有效方程：

$$\ddot{q}=\frac{\epsilon_0 S}{m}\,\frac{c^2\pi^2\ell^2}{q^2}\,\frac{Q_0^2}{2q_0}-\frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial q}, \tag{48}$$

在归一化单位下，

$$\ddot{\mathfrak{q}}=\frac{\Gamma}{\mathfrak{q}^2}-K(\mathfrak{q}-\bar{\mathfrak{q}})\,. \tag{49}$$

因此，镜面的运动就是非相对论粒子在方程（43–44）中得到的势 $\mathcal{V}_\Gamma$ 和 $\mathcal{V}_K$ 下的运动。

为求微分方程的定态解 $\mathfrak{q}^*=q^*/q_0$，我们令$\Gamma/\mathfrak{q}^{*2}-K(\mathfrak{q}^*-\bar{\mathfrak{q}})=0$。记住 $\Gamma>0$，$\bar{\mathfrak{q}}>0$ 和 $K>0$，根据笛卡尔符号法则，该方程有唯一的正定态解。该解具有如下

性质：当 $K/\Gamma \to 0$ 时， $\mathfrak{q}^* \to \infty$。将方程 49 在其不动点 ($\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^*$， $\dot{\mathfrak{q}} = 0$) 附近线性化，可得到小振荡频率

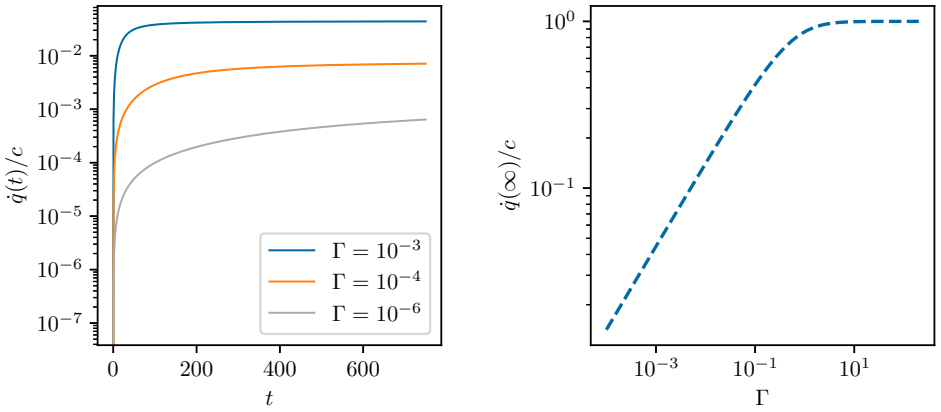
$$\Omega = K^{1/2}\sqrt{1 + \frac{2\Gamma}{K\mathfrak{q}^{*3}}} = K^{1/2}\sqrt{3 - 2\frac{\bar{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{q}^*}}\,. \tag{50}$$

振荡频率的一个显著性质是，当 $\mathfrak{q}^* \to \infty$ 时，频率变为 $\Omega = \sqrt{3K}$。请注意，这种处理同样适用于完全相对论情形，但其物理意义较小，因为我们考虑的是小振荡，而典型的腔光力学实验处于非相对论区域[12, 13]。不动点的位置及相应的频率如图 2 所示。面板 (a) 绘出了有效势 $\mathcal{V}(q)$ 随坐标 $q$ 的变化，同时展示了其两个主要贡献：辐射压力项 $\mathcal{V}_\Gamma$ 和弹性项 $\mathcal{V}_K$。合成势 $\mathcal{V}(q)$ 源于这两个贡献之间的竞争。面板 (b) 通过绘制不动点坐标 $\mathfrak{q}^*$ （上图）以及围绕该平衡位置的小振荡频率 $\Omega$（下图）随比值 $K/\Gamma$的变化，刻画了平衡构型。结果表明，增大 $K/\Gamma$会使平衡位置向较小位移方向移动，并使振荡频率降低并趋近于其背景值。

频率的变化可能是实验上可观测的预测。在我们的非相对论描述中，该频移仅取决于腔内能量与刚度之比 $\Gamma/K$。在实验中，通过改变驱动激光与腔共振之间的失谐来调节这一能量；因此，测得的振荡频率效应通常表示为该 [7, 12]的函数。我们指出，已知的光学弹簧效应与腔相对于外部激光 [45–47]交替处于共振和非共振状态这一事实有关。先前工作中所描述的光学弹簧的弹簧常数可能极高；相对于裸机械频率，其增强因子可达 $10^3$ 量级。这与共振条件有关，该条件在空间上仅跨越几纳米甚至更小的范围 [47, 48]。我们的分析情形与光学弹簧效应所得结果互为补充，因为在我们的单模腔中，共振条件始终满足，因此机械刚度的增强较弱，正如下文所示。利用文献 [45], 所报告实验的数据：质量为 $m = 10^{-3}\,\mathrm{kg}$，初始位置为 $q_0 = 0.9\mathrm{m}$，裸机械共振频率为 $\Omega = 2\pi \times 172\,\mathrm{Hz}$，光学共振线宽为 $\gamma = 2\pi \times 11\,\mathrm{kHz}$，输入功率为 $P_{\mathrm{in}} = 3\mathrm{W}$，有效腔增益为 $5 \times 10^3$，这意味着循环功率为 $P_{\mathrm{circ}} = gP_{\mathrm{in}}$，储存能量为 $E_0 \approx 0.217\mathrm{J}$，从而得到$\Gamma = E_0/(mc^2) \approx 2.4 \times 10^{-15}$ 和 $K = (\Omega q_0/c)^2 \approx 1.0 \times 10^{-11}$。将这些数值代入我们关于所得频率的表达式（50），对于这些腔参数，得到的频移约为 40 mHz。将功率提高到 $P_{\mathrm{in}} = 30\,\mathrm{W}$ 后，频移变为约 0.4 Hz。

### *4.2.* 自由镜面相对论动力学

在不存在外势的特殊情况下，即 $K = 0$，镜面的自由运动可通过将 $\mathcal{E} - \mathcal{V}(s) = \Gamma(1 - 1/s) + 1$ 代入式（46）后得到的积分来求得。该积分可解，结果为




(a) (b)

图 3：自由镜运动方程的解。(a) 显示了不同辐射压力参数 $\Gamma$ 下速度随时间的变化。(b) 显示了最终速度的极限值随辐射压力参数的变化。初始速度设为零。 $t$ 以 $q_0/c$ 为单位， $q_0$ 为初始位置。

关系

$$t = \frac{(1+\Gamma)\sqrt{(\mathfrak{q}-1)(\mathfrak{q}(2+\Gamma)-\Gamma)}}{\Gamma^{1/2}(2+\Gamma)} + \frac{2}{\Gamma^{1/2}(2+\Gamma)^{3/2}}\,\mathrm{arcsinh}\left(\sqrt{\frac{(\mathfrak{q}-1)(2+\Gamma)}{2}}\right) \tag{51}$$

可以通过对等式两边求导，并取 $\mathfrak{q} \to \infty$ 的极限来考察终端速度，这对应于无限时间时的位置。结果为

$$\dot{\mathfrak{q}}(\infty) = \frac{\sqrt{\Gamma(2+\Gamma)}}{1+\Gamma}, \tag{52}$$

由此可见，速度不会超过光速，因为对于每个 $\Gamma$， $\Gamma(2+\Gamma) < (1+\Gamma)^2$ 。不同 $\Gamma$ 对应的解及终端速度如图 3 所示。该图展示了自由镜在辐射压力作用下随时间变化的动力学。面板 (a) 显示了不同辐射压力参数 $\Gamma$下镜面速度 $\dot{q}(t)$ 的时间演化。当 $\Gamma$较小时，速度缓慢增加，在模拟时间尺度内始终远低于 $c$ ；而 $\Gamma$ 较大时，则会导致更快的加速度，并更早进入高度相对论区域。面板 (b) 通过绘制最终速度 $\dot{q}(\infty)$ 随 $\Gamma$变化的曲线，总结了渐近行为。图中显示，当 $\Gamma$ 较小时呈幂律依赖，而当 $\Gamma$较大时则进入饱和区间。需要指出的是，由于我们采用小速度近似（另见式 (31) 的推导），因此只有最终速度较低时得到的结果才是可靠的。随着 $\Gamma$ 增大，相对论修正会变得越来越重要。为评估这些修正对终端速度的影响，我们还对相应的非相对论方程进行了数值求解，即将式 (38) 右端的第一个因子近似为 1。我们计算了相对误差 $\varepsilon_r = |\dot{\mathfrak{q}}_{\mathrm{nr}}(\infty) - \dot{\mathfrak{q}}(\infty)|/\dot{\mathfrak{q}}(\infty)$,

其中 $\dot{q}_{\rm nr}(\infty)$ 是非相对论情形下得到的结果。对于较为保守的 $\Gamma$取值，相对误差在百分之几的水平：例如，当 $\Gamma = 3.16 \times 10^{-2}$ 时，我们有$\varepsilon_r = 2.18\times10^{-2}$；而当 $\Gamma = 1.00\times10^{-1}$ 时，我们有 $\varepsilon_r = 7.07\times10^{-2}$。非相对论计算会高估终端速度。为了估算会使相对论修正变得显著的物理参数量级，我们可以采用参考文献 [41]讨论的星际飞行场景中的参数。对于参考发射方案，光帆质量为 $m = 10$ g，激光功率为 $P = 50$ GW，推力持续时间为 $t_{\rm F} = 500$ s，因此发射期间输入的激光总能量约为 $Pt_{\rm F} \approx 2.5 \times 10^{13}$ J。我们可以将这一能量与参数 $\Gamma$的上限联系起来。若上述能量全部储存在单一模式中，则得到其最大值 $\Gamma_{\max} \approx 2.8 \times 10^{-2}$。因此，即使在星际飞行情况下，无量纲驱动参数仍处于相对论修正仅为百分之几的参数范围。在这一简化情形下，根据式 (52)，最终速度为 $\dot{q}(\infty) \approx 0.23c$；若初始距离为 $q_0 = 3.5 \times 10^7$ m，则经过数百秒即可达到该速度。但需要指出的是，本文建立的模型与参考文献 [41], 所述模型存在显著差异，仍需进一步研究以厘清二者之间的关系。

## 5. 讨论

此处获得的结果表明，只要采用适当的近似，就能在相当程度上独立分析镜子的动力学，而不必考虑场的完整动力学。这种分离所依据的关键假设是，可以对电磁场进行绝热消除。这一思路受到 Baranov 和 Shirokov 早期工作的启发；他们指出，运动镜的边界条件会使腔中产生动态模，其中多普勒频移引起的场谱调制 [38] 会改变模结构。在这种图景中，镜子的运动会直接重塑腔共振结构，使其偏离静态腔的单色模，但相关计算仅限于匀速运动的情形。其他方法则将镜子视为一个动力学自由度，明确展示了辐射压力如何直接进入腔模的动力学方程并在模之间引入相互作用[34, 36]。这两种观点彼此一致：前者强调模结构的运动学变化，后者则建立了适用于量子化的正则形式主义。然而，它们无法直接相互映射。我们的变分单模方法导出了约化方程（38），兼具这两种图景的某些特点。它能够预测多种动力学特征，例如偏移后的驻点、小振荡频率，以及弱相对论区域内自由镜的运动。

由于我们假设腔中只有一个孤立的腔模，因此本处理无法描述多模激发和外部泵浦至关重要的现象，例如光学双稳态、动力学反作用导致的参数不稳定性，以及辐射压力诱导耗散 [6–8, 10, 48]。这些效应需要输入场驱动腔偏离共振状态，如干涉仪和光机械装置中的情况 [7,8, 45]。相比之下，在我们的理论框架中，所选腔模始终以某种方式与运动边界共振。

另一个核心假设是，在相关时间尺度内能量守恒。这一假设适用于高品质因数腔，因为由吸收造成的损耗，

散射或非理想反射率导致的损耗，只有经过多次往返后才会变得显著。品质因数定义为 $Q = \omega U/P_{\mathrm{loss}}$，其中 $\omega$ 为模式频率， $U$ 为储存能量， $P_{\mathrm{loss}}$ 为耗散功率 [49]。对于长度为$L$ 、镜面反射率为 $R$的 Fabry–P´erot 腔，可得 $Q \sim 2\pi\ell L\sqrt{R}/(\lambda(1-R))$. 因此，在 $R$ 固定时，品质因数随 $L$ 线性增长，但在实际中，腔长过长时，残余吸收和散射会使品质因数最终下降。因此，我们的保守单模模型最适用于具有极高镜面反射率的大-$Q$ 腔。然而，在实际系统中，需要外部泵浦来补充腔损耗。泵浦会引入输入–输出耦合以及激发多个模式的可能性，从而以复杂的方式改变镜面动力学。

## 6. 结论

在本研究中，我们建立了一个变分框架，用于研究运动镜光学腔的动力学，并涵盖相对论和非相对论区域。我们没有求解电磁场与镜面运动的完整耦合方程组，而是采用单模变分试探函数，在保持解析可处理性的同时捕捉辐射–镜面相互作用的关键物理特征。这种方法清晰直观地展现了腔场与镜面动力学如何内在耦合。通过在短波长极限下应用 WKB近似，我们推导出镜面的有效运动方程，并确定了驻点的出现以及振荡行为。在自由镜的极限情形下，我们得到了精确的解析解，并表明辐射压力会推动镜面趋向一个有限的终端速度，该速度由腔内初始储存的能量决定。

总体而言，我们的结果为经典光机械腔的动力学提供了一种可处理的近似。本研究提出的理论框架为今后研究辐射压推进概念提供了理论途径，包括腔辅助推进器和激光驱动光帆；它也适用于精密干涉实验，在这些实验中，镜面运动在不同动力学参数范围内起着决定性作用。将当前处理扩展至包含多模相互作用和外部泵浦，是未来研究的自然方向。这些扩展对于将这一简化图景与腔光力学、激光干涉测量及相关平台中的实验实现联系起来至关重要。此外，对耗散和环境效应进行定量分析，尤其是考虑非理想镜面反射率和镜面阻尼，将有助于明确当前近似仍然有效的参数范围。纳入这些机制也将使我们能够与现有实验进行更现实的比较。最后，深入研究镜面和场的量子涨落，将加深对系统行为的理解，并为未来的实验研究提供指导。

## 数据可用性声明

本研究未创建或分析任何新数据。

**致谢**

M.G.P. 感谢 Progetto Space-it Up!、Bando（Prot. CI-2022-DSR-042）针对“航天活动”（主题15）的资助，MUR 第341号，日期为2022年3月15日。

**附录 A：相对论区域中的有界振荡**

纯相对论谐振子的情形，即此前已有研究对方程（38）进行研究的情形 [50, 51], ，可以用雅可比椭圆函数 [52]进行分析。相对论运动处于谐势中的情形从物理角度来看不太重要，但在数学上呈现出有趣的性质。为完整起见，我们在此报告辐射压力作用下相对论运动处于谐势中的情形所得到的结果。图4展示了在刚度固定为 $K = 1$时，对于不同辐射压力与弹性回复力之比（$\Gamma/K$），镜面的运动方程解。初始条件为 $q(0) = q_0$，以及 $\dot{q}(0) = 0$。面板（a）显示镜面位置$q(t)$随时间的变化，而面板（b）显示相应的速度 $\dot{q}(t)$。对于较小的 $\Gamma/K$值，振荡仍近似为正弦振荡，表明辐射压力项造成的畸变较弱。然而，随着 $\Gamma/K$ 增大，动力学变得强烈非线性：位置和速度呈现不对称的非正弦振荡，具有更加尖锐的特征和非谐轮廓。这说明辐射压力相对于弹性响应逐渐占据主导地位，并塑造镜面的运动。辐射压力项的存在会产生静态偏置，并对相对论谐振子的固有频率造成微小修正，但不会改变运动的基本相对论性质。光力会使振子的平衡位置发生频移，建立一个新的位置，使相对论动力学围绕该位置展开。相比之下，相对论运动学仍控制着运动偏离谐性的、依赖于振幅的程度。因此，辐射压力对平衡位置和线性弹性常数起到微扰修正的作用，而相对论项仍负责非线性频移以及周期轨道的变形。如 Babusci [50],所示，如果仅保留相对论谐振子经典运动的一阶相对论修正，就会得到一个 Duffing 型动力学方程 [50, 方程（3.2）]。在此背景下，可以利用众所周知的方法对辐射压力进行微扰研究。需要注意的是，图中绘制的速度对应于归一化为光速的相对论速度 $c$；在高度相对论区域，预计当前模型将失去有效性，因此需要更完整的相对论处理。

**附录 B：量子涨落和热涨落存在时镜面的有效动力学**

通过消除与单模的相互作用而得到的镜面坐标非相对论运动方程，即公式（49），可以由以下形式的相应经典拉格朗日量推导得出

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^{\,2} - \mathcal{V}(q). \tag{53}$$

其中 $\mathcal{V}$ 是公式（42）给出的有效势。利用该拉格朗日量，可以推导出玻色子系统 [53–57]的量子有效势。定义

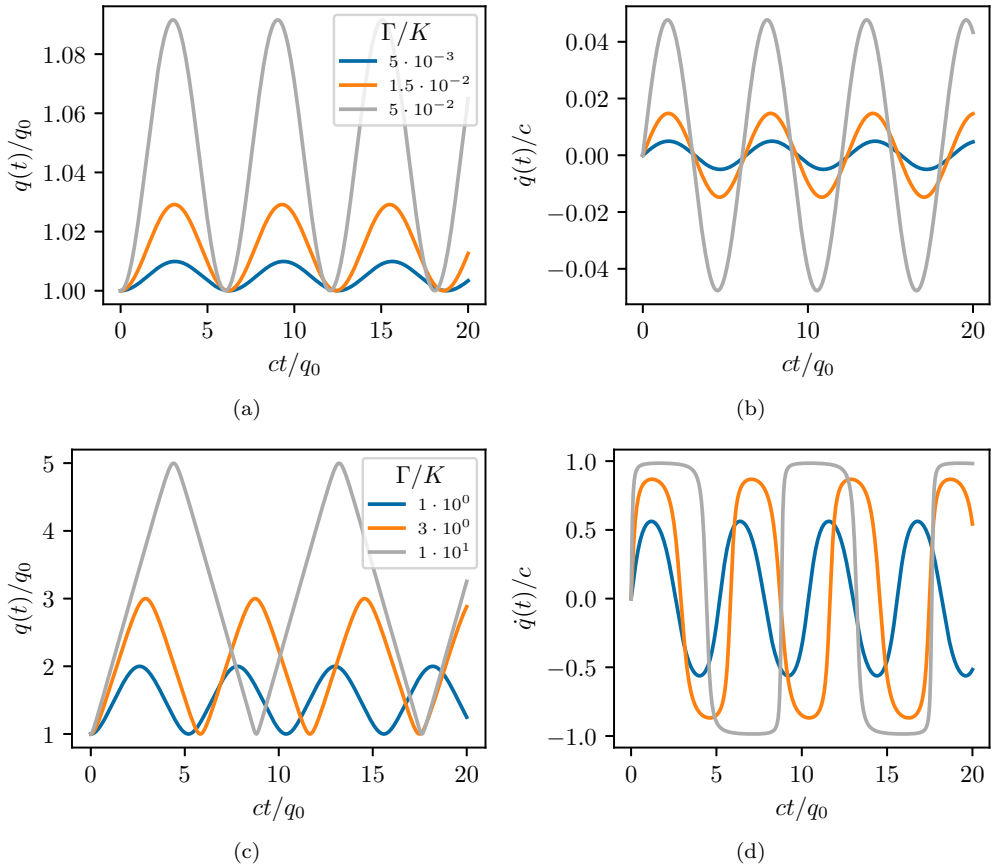



图4：对于不同的辐射压力与弹性系数之比 $\Gamma/K$（其中 $K = 1$），由运动方程（式38）得到的镜面位置 $q$ 和速度 $\dot{q}$ 的时间演化。上方的图（a）–（b）对应非相对论区域，下方的图（c）–（d）则显示相对论情形。初始速度设为零，初始位置为 $q_0$。

有效频率 $\omega(q) = \sqrt{\mathcal{V}''(q)/m}$后，由零点涨落和热涨落贡献构成的单圈有效势为

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(q) = \mathcal{V}(q) + \tilde{\mathcal{V}}_0(q) + \tilde{\mathcal{V}}_T(q), \tag{54}$$

包含零点能的贡献

$$\tilde{\mathcal{V}}_0(q) = \frac{\hbar}{2}\,\omega(q) = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{V}''(q)}{m}}, \tag{55}$$

和热能

$$\tilde{\mathcal{V}}_T(q) = k_B T\,\ln\left[1 - \exp\Big(-\frac{\hbar\,\omega(q)}{k_B T}\Big)\right]. \tag{56}$$

其中 $T$ 为系统的绝对温度，$k_B$ 为玻尔兹曼常数。利用归一化镜面坐标 $\mathfrak{q}$ 并明确写出势能，我们

have

$$\mathcal{V}''(\mathfrak{q}) = K + \frac{2\Gamma}{\mathfrak{q}^{3}}\,, \tag{57}$$

该形式体系能够以微扰方式计算非零温度和量子涨落存在时振荡频率的偏差。我们考虑温度为 $T = 300\,\mathrm{K}$。使用第 4.1 节中的相同参数，并假设稳态位置 $q^{*}$ 保持不变，计算得到的由量子涨落和热涨落引起的频率偏移比第 4.1 节中预测的结果低许多个数量级，因此这一效应可以忽略。然而，我们指出，这种处理无法描述通过耗散过程与外部环境的相互作用。

## 参考文献

1. Ashkin, A. 激光的压力。《科学美国人》**226**, 62–71 (1972). 2. Lebedew, P. 关于光的压力的研究。《物理学年鉴》**311**,433–458 (1901). 3. Nichols, E. F. & Hull, G. F. 关于热辐射和光辐射压力的初步报告。*Physical Review (Series I)* **13**, 307 (1901). 4. Nichols, E. F. & Hull, G. F. 辐射产生的压力。（第二篇论文。）*Physical Review (Series I)* **17**, 26 (1903). 5. Braginski, V. & Manukin, A. 电磁辐射的有质动力效应。《苏联物理学—实验与理论物理》**25**, 653–655 (1967). 6. Braginskiĭ, V. B., Manukin, A. B. & Tikhonov, M. Y. 电磁辐射耗散性质动力效应的研究。《苏联实验与理论物理学杂志》**31**,829 (1970). 7. Aspelmeyer, M., Kippenberg, T. J. & Marquardt, F. 腔光力学。《现代物理评论》**86**,1391–1452 (2014). 8. Kippenberg, T. J. & Vahala, K. J. 腔光力学：介观尺度上的反作用。《科学》**321**, 1172–1176 (2008). 9. Meystre, P. 量子光力学简述。《物理学年鉴》**525**,215–233 (2013). 10. Braginsky, V. B., Strigin, S. E. & Vyatchanin, S. P. 法布里–珀罗干涉仪中的参量振荡不稳定性。《物理快报 *A*》**287**,331–338 (2001). 11. Braginsky, V. B.& Vyatchanin, S.P. 法布里–珀罗干涉仪的低量子噪声镇静器。《物理快报 *A*》**293**, 228–234 (2002). 12. Kippenberg, T. J., Rokhsari, H., Carmon, T., Scherer, A. & Vahala, K. J. 辐射压力引发的光学微腔机械振荡分析。《物理评论快报》**95**, 033901 (2005). 13. Marquardt, F., Harris, J. G. E. & Girvin, S. M. 高精细度微机械光学腔中辐射压力引发的动力学多稳态。《物理评论快报》**96**,103901 (2006). 14. Marquardt, F., Chen, J. P., Clerk, A. A. & Girvin, S. M. 机械运动腔辅助边带冷却的量子理论。《物理评论快报》**99**,093902 (2007).

15. Wilson-Rae, I., Nooshi, N., Zwerger, W. & Kippenberg, T. J. 利用动力学反作用实现机械振子的基态冷却理论。《物理评论快报》99, 093901 (2007). 16. Gr¨ oblacher, S. 等. 在低温腔中实现超冷微型光机振子的演示。《自然·物理》5, 485–488 (2009). 17. Vanner, M. R., Hofer, J., Cole, G. D. & Aspelmeyer, M. 通过测量冷却，并利用脉冲光力学进行机械态层析。《自然·通讯》4, 2295 (2013). 18. Riedinger, R. 等. 机械振子产生的单光子与声子之间的非经典关联。《自然》530, 313–316 (2016). 19. Vijayan, J. 等. 悬浮光力学中的腔介导长程相互作用。《自然·物理》20, 859–864 (2024). 20. Verhagen, E., Del´eglise, S., Weis, S., Schliesser, A. & Kippenberg, T. J. 机械振子与光学腔模的量子相干耦合。《自然》 482, 63–67 (2012). 21. Notomi, M. & Mitsugi, S. 通过动态折射率调谐实现腔内波长转换。Physical Review A 73, 051803 (2006). 22. Preble, S., Cao, L., Elshaari, A., Aboketaf, A. & Adams, D. 单光子绝热波长转换。《应用物理快报》101, 171110 (2012). 23. Jirauschek, C. & Huber, R. 腔内光子的波长频移：波长快速扫描激光器中的绝热波长调谐。《生物医学光学快报》6, 2448–2465 (2015). 24. Kranendonk, L. A., Bartula, R. J. & Sanders, S. T. 通过高速腔长变化实现波长敏捷激光器的无模运行。《光学快报》13, 1498–1507 (2005). 25. Dania, L. 等. 室温下的高纯度量子光力学。《自然·物理》，1–6 (2025). 26. Huang, G., Beccari, A., Engelsen, N. J. & Kippenberg, T. J. 利用超低噪声腔实现室温量子光力学。《自然》626, 512–516 (2024). 27. Davoyan, A. R., Munday, J. N., Tabiryan, N., Swartzlander, G. A. & Johnson, L. 星际太阳帆航行用光子材料。《光学》8, 722–734 (2021). 28. Kulkarni, N., Lubin, P. & Zhang, Q. 由定向能推进的相对论飞船。《天文学杂志》155, 155 (2018). 29. Atwater, H. A. 等. 星际射击计划光帆的材料挑战。《自然·材料》17, 861–867 (2018). 30. Ilic, O. & Atwater, H. A. 纳米结构宏观物体的自稳定光子悬浮与推进。《自然·光子学》13, 289–295 (2019). 31. Bae, Y. K. 光子激光推进器：规模扩大100倍及推进演示。《推进与动力杂志》37, 400–407 (2021). 32. Bae, Y. K. 光子激光推进器：光机学与量子电子学分析。《推进与动力杂志》38, 437–449 (2022). 33. Law, C. K. 运动镜和时变介电介质腔中辐射的有效哈密顿量。Physical Review A 49, 433–437 (1994).

34. Law, C. 运动镜与辐射压力的相互作用：哈密顿表述。《物理评论 *A*》**51**, 2537 (1995). 35. Cheung, H. & Law, C. 运动介电球与辐射场之间的光机械耦合：拉格朗日-哈密顿形式体系。《物理评论 *A*》**86**(2012). 36. Razavy, M. & Terning, J. 具有运动边界的一维腔中的量子辐射。《物理评论 *D*》**31**, 307–313 (1985). 37. Calucci, G. 运动物体的卡西米尔效应。*Journal of Physics A: Mathematicaland General* **25**, 3873 (1992). 38. Baranov, R. & Shirokov, Y. M. 带有可动镜的光学谐振腔中的电磁场。*Soviet Physics JETP* **53**, 2123 (1967). 39. Moore, G. T. 可变长度一维腔中的电磁场量子理论。*Journal of Mathematical Physics* **11**, 2679–2691 (1970). 40. Someda, C. G.电磁波(Crc Press, 2017). 41. Lorenzi, F., Salasnich, L. & Pelizzo, M. G. 用于激光推进的相对论区域光学腔。*Physical Review Applied* **24**,034033 (2025). 42. Jiang, C., Cui, Y. & Chen, G. 二次耦合光机械系统的动力学：绝热消除一阶修正的影响。*Scientific Reports* **6**,35583 (2016). 43. Ghorbani, N., Motazedifard, A. & Naderi, M. 二次光机械耦合对电光机械系统中双体纠缠、机械基态冷却和机械正交分量压缩的影响。《物理评论 *A*》**111**,013524 (2025). 44. E. Hairer C. Lubich, G. W. 几何数值积分：常微分方程的保结构算法(Springer, 2006). 45. Corbitt, T.等克级镜的全光阱。《物理评论快报》**98**, 150802 (2007). 46. Corbitt, T., Ottaway, D., Innerhofer, E., Pelc, J. & Mavalvala, N. 悬置法布里-珀罗腔中辐射压力诱导的光机械动力学测量。《物理评论 *A*》**74**, 021802 (2006). 47. Sheard, B. S., Gray, M. B., Mow-Lowry, C. M., McClelland, D. E. & Whitcomb, S. E. 光学弹簧的观测与表征。《物理评论 *A*》**69**,051801 (2004). 48. Meystre, P., Wright, E. M., McCullen, J. & Vignes, E. 辐射压力驱动干涉仪理论。*Journal of the Optical Society of America B* **2**,1830–1840 (1985). 49. Saleh, B. E. A. & Teich, M. C. 光子学基础，套装共两卷 (John Wiley & Sons, 2019). 50. Babusci, D., Dattoli, G., Quattromini, M. & Sabia, E. 相对论谐振子、相关运动方程与代数积分方法。*Physical Review E* **87**,033202 (2013). 51. Zarmi, Y. 关于相对论谐振子。*Applied Mathematics* **14**, 1–20 (2023). 52. Moreau, W., Easther, R. & Neutze, R. 相对论（非）谐振子。*American Journal of Physics* **62**,531–535 (1994).

53. Jona-Lasinio, G. 具有对称性破缺解的相对论场论。$Nuovo\ Cim$ **34**,1790–1795 (1964). 54. Coleman, S. & Weinberg, E. 辐射修正：自发对称性破缺的起源。$Phys.\ Rev.\ D$ **7**, 1888–1910 (1973). 55. Goldstone, J., Salam, A. & Weinberg, S. 破缺对称性。$Phys.\ Rev.$ **127**,965–970 (1962). 56. Furutani, K., Tempere, J. & Salasnich, L. 玻色约瑟夫森结的量子有效作用量。$Phys.\ Rev.\ B$ **105**, 134510 (2022). 57. Burgess, C. P. 有效场论导论(Cambridge UniversityPress, 2020).