arXiv:2601.01648v1 [math.AG] 4 Jan 2026

双线性概形的几何与奇点

WERONIKA OBCOWSKA

摘要。本文旨在研究 Joachim Jelisiejew 引入的双线性概形 $\mathrm{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d_1\ d_2,,d_3}(\mathbb{A}^n)$ 的几何。该函子可视为 Quot 概形的推广，它给出了局部自由模的双线性映射的模空间。我们通过证明双线性函子可实现为若干 Quot 概形之积的闭子函子，来描述它与 Quot 概形之间的关系；因此，双线性函子可由这些 Quot 概形之积的一个闭子概形表示。我们利用这一结果计算表示 $\mathrm{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d_1\ d_2,,d_3}(\mathbb{A}^n)$ 的双线性概形的切空间。我们定义了两类轨迹：与点组对应的轨迹，以及全退化轨迹。第一类轨迹构成双线性概形的主不可约分支。我们运用最小边界秩张量和割线簇的理论，并发现对所有 n（只要 $r_i \geq d \geq 3$），$\mathrm{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d_1\ d_2,,d_3}(\mathbb{A}^n)$ 都是可约的。我们详细描述了 $\mathrm{Bilin}^{2,2}_{2,2,2}(\mathbb{A}^1)$ 的 $\Bbbk$-点。

1. 引言

我们关注这样一个模空间：它以自然的方式出现在 $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^m$ 中简约最小边界秩张量的分类问题里。如 [JLP24], 所述，这一问题仍未解决，并且事实证明极其困难。 [JLP24、JJ 25] 的工作解决了特殊情形 $m = 5$ 下的分类问题。他们引入的工具之一，是作为简洁张量新不变量的 111-代数结构。具有 $\tau \in V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ 111-代数结构的张量 A 以一种规范的方式诱导出映射 $\tau\colon\ V_1^\vee \otimes V_2^\vee \to V_3$该映射具有 A-双线性性质。我们希望研究一个参数化这类双线性映射的模空间，这促成了 双线性函子 的构造。遵循 [Jel23，问题 XXXVIII],中，我们定义双线性函子

$$\mathrm{Bilin}^{r_1,r_2}_{d_1,d_2,d_3}(\mathbb{A}^n)\colon \mathrm{Sch}^{op}_{/\Bbbk} \to \mathrm{Set}$$

在 $\Bbbk$-点上定义为

$$\mathrm{Bilin}^{r_1,r_2}_{d_1,d_2,d_3}(\mathbb{A}^n)(\Bbbk) = \left\{ \begin{array}{c} \text{quotients of } S\text{-modules } S^{\oplus r_i} \xrightarrow{p_i} M_i = {}^{S^{\oplus r_i}}\!/_{K_i} \text{ for } i = 1,2 \\ \text{together with a surjection } M_1 \otimes_S M_2 \xrightarrow{\pi} M_3 = {}^{S^{\oplus r_1 r_2}}\!/_{K_3} \\ \text{such that } \dim_\Bbbk M_j = d_j \text{ for } j = 1,2,3 \end{array} \right\}$$

其中 $S = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ 是任意无限代数闭域 $\Bbbk$。这一构造推广了 Hilbert 点概形和 Quot 概形。我们将更详细地讨论它与 Quot 概形的联系。为此，我们定义一个到多个 Quot 概形的乘积中的闭嵌入

$$\mathrm{Bilin}^{r_1,r_2}_{d_1,d_2,d_3}(\mathbb{A}^n) \hookrightarrow \mathrm{Quot}^{r_1}_{d_1}(\mathbb{A}^n) \times \mathrm{Quot}^{r_2}_{d_2}(\mathbb{A}^n) \times \mathrm{Quot}^{r_1 r_2}_{d_3}(\mathbb{A}^n)$$

并利用它证明双线性函子是可表的，这意味着现在我们可以称之为双线性概形。我们回顾 Quot 概形的切空间定义，并利用这一结果计算双线性概形的切空间。

对于希尔伯特概形和 Quot 概形，我们描述了与点组对应的不可约分支。它们分别称为希尔伯特概形的可平滑化分支和

日期：2026年1月6日。由 NCN 资助，资助编号为 2023/50/E/ST1/00336。

Quot 概形的主分支。这些分支因与数学其他领域的联系而得到广泛研究。希尔伯特概形的可平滑化分支在组合学中有应用[Ber12, Hai01], 而 Quot 概形的主分支则自然地出现在交换矩阵簇的研究中 [JS22]。我们将这些构造推广到 $\mathrm{Bilin}^{r_1\,r_2}_{d\,d\,d,,,}(\mathbb{A}^n)$ 的情形，并如下定义其主不可约分支。对于 $p_1\colon S^{\oplus r_1}\twoheadrightarrow M_1$，假设 M_1 对应于一个点组。那么必定存在同构 $M_2\simeq M_1$ 和 $M_3\simeq M_1$，因此所有三个 S-模都对应于同一个点组。此外，我们发现第三个映射 $\pi\colon M_1\otimes_S M_2\twoheadrightarrow M_3$必定是唯一确定的同构。为了计算主分支的维数，我们研究 Quot 概形主分支的某些开子概形。我们证明，这种形式的子概形同构于希尔伯特概形可平滑化分支上的一个向量丛。利用这一结果，我们证明双线性概形的主分支维数为$nd+(r_1-1)d+(r_2-1)d$。

我们断言，双线性概形通常是可约的，并通过描述必定位于主分支之外的轨迹来证明这一点。对于 $\mathrm{Quot}^r_d(\mathbb{A}^n)$，将全退化轨迹定义为对应于形如 $(S/\mathfrak{m})^{\oplus d}$ 的模的轨迹，其中 $\mathfrak{m}\lhd S$ 是一个固定的极大理想。我们证明它给出了一个闭子概形 $\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}$，并将其推广为如下定义的 $\mathrm{Bilin}^{r_1\,r_2}_{d\,d\,d,,,}(\mathbb{A}^n)$ 的全退化轨迹。假设对于 $i=1,2$，我们有满射 $p_i\colon S^{\oplus r_i}\twoheadrightarrow(S/\mathfrak{m})^{\oplus d}$，那么第三个映射具有如下形式$\pi\colon(S/\mathfrak{m})^{\oplus d^2}\twoheadrightarrow(S/\mathfrak{m})^{\oplus d}$。我们证明该轨迹的维数为 $(r_1-d)d+(r_2-d)d+(d^2-d)d$。

一般而言，主分支与全退化轨迹的维数不同。特别是，只要满足以下条件，全退化轨迹就不能包含在主分支中

$$nd+(r_1-1)d+(r_2-1)d<(r_1-d)d+(r_2-d)d+(d^2-d)d,$$

这意味着全退化轨迹的维数大于主分支的维数。由此可得参数 r_i、d、n 的例子，使得 $\mathrm{Bilin}^{r_1\,r_2}_{d\,d\,d,,,}(\mathbb{A}^n)$ 可约，这正是 $n<d^2-3d+2$ 的情形。

为了确定在其余情形下 $\mathrm{Bilin}^{r_1\,r_2}_{d\,d\,d,,,}(\mathbb{A}^n)$ 是否不可约，我们将其与塞格雷嵌入的割簇联系起来。令 $[p_1,p_2,\pi]\in\mathrm{Bilin}^{r_1\,r_2}_{d\,d\,d,,,}(\mathbb{A}^n)(\Bbbk)$，其中 $\pi\colon M_1\otimes_S M_2\twoheadrightarrow M_3$。此映射定义了一个 M_3-简洁张量 $\mu_\pi\in M_1^\vee\otimes M_2^\vee\otimes M_3$。来自 $\mathrm{Bilin}^{r_1\,r_2}_{d\,d\,d,,,}(\mathbb{A}^n)$ 主不可约分支上的点的张量，其边界秩为 d，这意味着它们是与 d 个点的元组相对应的代数的乘法张量的极限。割簇为边界秩提供了几何解释： d 阶割簇 $\sigma_d(\mathbb{P}^{m-1}\times\mathbb{P}^{m-1}\times\mathbb{P}^{m-1})$ 上的仿射锥参数化了来自 $\Bbbk^m\times\Bbbk^m\times\Bbbk^m$ 的边界秩至多为 d 的张量。因此，$\mathrm{Bilin}^{r_1\,r_2}_{d\,d\,d,,,}(\mathbb{A}^n)$ 的主不可约分支给出了对应于 d 阶割簇 $\sigma_d(\mathbb{P}^{d-1}\times\mathbb{P}^{d-1}\times\mathbb{P}^{d-1})\subseteq\mathbb{P}(\Bbbk^d\otimes\Bbbk^d\otimes\Bbbk^d)$ 上各点的张量。$\mathrm{Bilin}^{r_1\,r_2}_{d\,d\,d,,,}(\mathbb{A}^n)$ 的不可约性等价于$\sigma_d(\mathbb{P}^{d-1}\times\mathbb{P}^{d-1}\times\mathbb{P}^{d-1})$ 是整个环境空间，而这仅在 $d\le 2$ 的情况下成立。由此可以找出使 $\mathrm{Bilin}^{r_1\,r_2}_{d\,d\,d,,,}(\mathbb{A}^n)$ 不可约的所有参数。特别地，对于所有满足 $r_i\ge d\ge 3$ 的 n，$\mathrm{Bilin}^{r_1\,r_2}_{d\,d,,,d}(\mathbb{A}^n)$ 都是可约的。

我们详细描述两个点 $\mathrm{Bilin}^{2,2}_{2,2,2}(\mathbb{A}^1)$ 这一特殊情形；我们的概形是不可约的。设 $S=\Bbbk[x]$。点 $[p_1,p_2,\pi]\in\mathrm{Bilin}^{2,2}_{2,2,2}(\mathbb{A}^1)(\Bbbk)$ 由 p_i 给出： $S^{\oplus 2}\twoheadrightarrow M_i$，其中 $i=1,\ 2$，以及满足 $\dim_\Bbbk M_j=2$ 的 π： $M_1\otimes M_2\twoheadrightarrow M_3$，其中 $j=1,\ 2,\ 3$。若一个 S-模 M 满足 $\dim_\Bbbk M=2$ 且为循环模，则必满足 $M\simeq S/((x-c_1)(x-c_2))$ 或 $M\simeq S/(x-c)^2$，其中 c、c_1、$c_2\in\Bbbk$ 满足 $c_1\ne c_2$。反之，若 M 不为循环模，则 $M\simeq(S/(x-c))^{\oplus 2}$，其中 $c\in\Bbbk$。只需考虑以下情形：$S/(x(x-1))$、$S/(x)^2$ 以及 $(S/(x))^{\oplus 2}$。我们先讨论循环模的情形。假设 $M_1\simeq S/(x(x-1))$，于是得到主分支上的一个点。因此还有 $M_2\simeq M_3\simeq S/(x(x-1))$，且映射

$\pi\colon\ M_1 \otimes M_2 \twoheadrightarrow M_3$ 给出一个秩为 2 的简约张量。该张量同构于 $S/(x(x-1))$ 的乘法张量。现在，对于 $i = 1,\ 2$，假设 $M_i \simeq S/(x)^2$。我们发现 $M_3 \simeq S/(x)^2$，且映射$\pi\colon\ M_1 \otimes M_2 \twoheadrightarrow M_3$ 给出一个秩为 3 的简约张量，即 $S/(x)^2$ 的乘法张量。将其表示为前一种情形中张量的极限，即可证明其边界秩为 2。接下来我们考虑不一定是循环模的模。设 $M_1 \simeq S/I$。我们只需讨论 $p_1\colon\ S^{\oplus 2} \twoheadrightarrow M_1 \simeq S/(x)^2$。此时，要么$M_2 \simeq S/(x)^2$，要么 $M_2 \simeq (S/(x))^{\oplus 2}$。假设后一种情况成立。那么映射 $\pi\colon\ M_1 \otimes M_2 \twoheadrightarrow M_3$ 给出一个秩为 2 的非简约张量，即 S-模 $(S/(x))^{\oplus 2}$ 的乘法张量。该张量在第一个坐标上不简约。同样，对于 $p_1\colon\ S^{\oplus 2} \twoheadrightarrow M_1 \simeq (S/(x))^{\oplus 2}$ 以及 $p_2\colon\ S^{\oplus 2} \twoheadrightarrow M_2 \simeq S/(x)^2$，第三个映射给出一个秩为 2 的张量，它在第二个坐标上不简约。最后，我们考虑最后一种情形，即全退化轨迹上的点。设 $[p_1, p_2, \pi]$ 由 $p_i\colon\ S^{\oplus 2} \twoheadrightarrow M_i \simeq (S/(x))^{\oplus 2}$ 给出，其中 $i = 1,\ 2$。那么 $\pi\colon\ M_1 \otimes M_2 \simeq (S/(x))^{\oplus 4} \twoheadrightarrow M_3 \simeq (S/(x))^{\oplus 2}$ 由一个满秩的 4×2 矩阵定义。由此不会产生新的张量类型；根据不可约性，所有由此产生的张量都可以表示为秩为 2 的简约张量的极限。

致谢

我想感谢我的导师 Joachim Jelisiejew，在撰写论文的过程中给予我的支持、启发与指导。我也感谢我的朋友 Jakub Jagiełła，感谢他与我进行的诸多讨论；这些讨论对培养我对张量的直觉起到了至关重要的作用。

2. 预备知识

我们将使用以下记号，并遵循以下约定。我们在$\bar{}$无限代数闭域 $\Bbbk = \Bbbk$上工作。对于一个 $\Bbbk$-概形 X，记作 $\mathbb{A}^n_X = \mathbb{A}^n_\Bbbk \times_\Bbbk X$。当概形$X$是仿射的，即 $X = \operatorname{Spec} A$时，我们记作 $\mathbb{A}^n_A = \mathbb{A}^n_{\operatorname{Spec} A}$。我们将 $\mathbb{A}^n$ 记作 $\mathbb{A}^n_\Bbbk = \operatorname{Spec} S$，其中$S = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$。对于一个环 A，我们记作 $S_A = S \otimes_\Bbbk A$。对于环 A中的理想 I，我们记作 $I \lhd A$。对于一个 A-模 M，我们将由 $\operatorname{Spec} A$上的 M确定的拟凝聚层记作 $M^\sim$。对于 $\Bbbk$-概形范畴，我们记作 $\mathbf{Sch}/\Bbbk$；对于集合范畴，我们记作 $\mathbf{Set}$。设 X, Y 为 $\Bbbk$-概形。我们将 $\operatorname{Spec}\Bbbk$上的乘积记作 $X \times Y = X \times_\Bbbk Y$，并将 $\operatorname{Spec}\Bbbk$上的态射记作 $\operatorname{Hom}(X, Y) = \operatorname{Hom}^{\mathrm{Sch}/\Bbbk}(X, Y)$。设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为范畴。我们将 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$之间的反变函子范畴记作 $\mathbf{Funct}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{D})$。设 $F, G\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 为函子。我们将 F 与 G之间的自然变换记作 $\mathbf{Nat}(F, G)$。

2.1. 子函子。 每个概形 X 都确定一个反变函子 $X\colon \mathbf{Sch}^{op}_{/\Bbbk} \to \mathbf{Set}$，其定义为态射 $X(Y) = \operatorname{Hom}(Y,\ X)$ 的集合。将点函子赋给概形，确定了一个协变函子 $\mathbf{Sch}/\Bbbk \to \mathbf{Funct}(\mathbf{Sch}^{op}_{/\Bbbk},\ \mathbf{Set})$。

定理 2.1（米田引理）。设 $F\colon \mathrm{Sch}^{op}_{/\Bbbk} \to \mathrm{Set}$是一个反变函子。设 X 是一个 $\Bbbk$-概形。存在一个双射 $\mathrm{Nat}(X, F) \simeq F(X)$，它在 X 中自然。

这使我们能够将概形与其点函子等同。此外，我们可以将$\Bbbk$-概形范畴视为函子范畴 $\mathbf{Funct}(\mathbf{Sch}^{op}_{/\Bbbk},\ \mathbf{Set})$ 的一个全子范畴。

推论 2.2（米田嵌入）。由 $X \mapsto X$ 给出的协变函子$\mathrm{Sch}/\Bbbk \to \mathrm{Funct}(\mathrm{Sch}^{op}_{/\Bbbk}, \mathrm{Set})$ 是全忠实的。

—

定义 2.3. 如果存在一个概形 X，并且有一个自然同构 $\psi\colon X \xrightarrow{\simeq} F$，我们就称函子 $F\colon \mathbf{Sch}^{op}_{/\Bbbk} \to \mathbf{Set}$ 是可表的。此时，我们称 F 可由 X 表示。

由推论 2.2，表示概形 X 在同构意义下唯一。假设同构$\psi\colon X \xrightarrow{\simeq} F$存在，那么由定理 2.1 可知，存在唯一的元素 $\xi \in F(X)$，称为泛元，使得对于每个 $f\colon Y \to X$，都有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \underline{X}(X) & \xrightarrow{\psi_X} & F(X) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ff} \\ \underline{X}(Y) & \xrightarrow{\psi_Y} & F(Y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{1}_X & \longmapsto & \xi = \psi_X(\mathbb{1}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Y \xrightarrow{f} X) & \longmapsto & \psi_Y(f) = Ff(\xi) \end{array}$$

这意味着，对于每个 Y以及每个元素 $c \in F(Y)$，都存在唯一的映射 $f\colon Y \to X$，使得 c可以由泛元沿着 f拉回得到。

现在我们将开子概形和闭子概形的概念推广到函子的情形。我们采用以下文献作为一般参考 [EH00，Str96]。

定义 2.4。设 G 和 F是函子 $Sch^{op} \to Set$。那么 G 是 F的子函子，如果：

(1) 对每个概形 T，都有集合的包含关系 $G(T) \subseteq F(T)$；(2) 对每个概形态射 $t\colon T' \to T$，诱导映射 $G(t)\colon G(T) \to G(T')$ 是 $F(t)\colon F(T) \to F(T')$ 的限制。

在 换言之，包含 $G \hookrightarrow F$必须是函子的自然变换 .

进一步假设 $Y \subseteq X$ 是一个开（分别为闭）子概形。设 $f\colon T \to X$ 是概形态射。则原像 $f^{-1}(Y)$定义了 T的一个开（分别为闭）子概形 $T \times_X Y$，如下方交换图所示：

$$\begin{array}{ccc} T \times_X Y & \xrightarrow{f'} & Y \\ \text{open} \\ \text{(resp. closed)} & {\scriptstyle \iota'}\downarrow & \downarrow{\scriptstyle \iota} \quad \text{open (resp. closed)} \\ T & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

考虑相应的点函子。对于概形 W，我们有如下集合的纤维积：

$$\begin{array}{ccc} \underline{T}(W) \times_{\underline{X}(W)} \underline{Y}(W) & \longrightarrow & \underline{Y}(W) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_W} \\ \underline{T}(W) & \xrightarrow{f_W} & \underline{X}(W) \end{array}$$

这可以看作函子的纤维积的特殊情形。

定义 2.5 ([EH00，定义 VI-4])。设 F，G，H 是函子 $\mathrm{Sch}^{op} \to \mathrm{Set}$。设 $g\colon G \to F$ 和$h\colon H \to F$ 是自然变换。则函子的 纤维积 G，H 在 F 上是一个函子$G \times_F H\colon \mathrm{Sch}^{op} \to \mathrm{Set}$，定义为

$$\begin{aligned} (G \times_F H)(W) &= G(W) \times_{F(W)} H(W) \\ &= \{(a,b) \in G(W) \times H(W) \mid g_W(a) = h_W(b) \text{ in } F(W)\}. \end{aligned}$$

对于点函子的特殊情形，纤维积 $T \times_X Y$可由概形的纤维积 $\underline{T} \times_X Y$表示。为此，考虑态射 $g\colon W \to T$、$h\colon W \to Y$，使得 $g \circ f = h \circ \iota$。根据拉回图的泛性质，存在唯一的态射 $\varphi_W\colon W \to T \times_X Y$使得

$h = \varphi \circ \iota'$ 和 $g = \varphi \circ \iota'$。这可以用点函子表述如下：

$$\begin{aligned}\underline{T}(W) \times_{\underline{X}(W)} \underline{Y}(W) &= \mathrm{Hom}(W, T) \times_{\mathrm{Hom}(W, X)} \mathrm{Hom}(W, Y) \\ &\simeq \mathrm{Hom}(W, T \times_X Y) = \underline{(T \times_X Y)}(W).\end{aligned}$$

同构 态射 φ_W 关于 W 是自然的，因此它们给出一个自然变换的分量

$$\varphi \colon \underline{T} \times_{\underline{X}} \underline{Y} \xrightarrow{\simeq} \underline{T \times_X Y}.$$

这可以推广到任意函子 F， G: $\mathrm{Sch}^{op} \to \mathrm{Set}$，由此引出开子函子和闭子函子的概念。

定义 2.6。 设 G 是一个子函子 F。如果对每个概形 T 以及每个对象 $\xi \in G(T)$，所诱导的函子的纤维积 $T \times_G F$ 都可表为 T 的一个开（分别为闭）子概形，则称它为一个开（分别为闭）子函子。

命题 2.7。 设 G 是 F 的一个子函子。若满足以下条件，则 G 是一个开（分别为闭）子函子。对于任意概形 T 和 $\xi \in F(T)$，存在一个开（分别为闭）子概形 $U \subseteq T$，使得对于任意 $f : T' \to T$，都有：

$$\textit{the element } f^*\xi \in F(T') \textit{ is in } G(T') \iff f \textit{ factors through } U \subseteq T.$$

由此可得以下推论，后文将直接使用，不再特别说明。

命题 2.8. 设 G 是 F 的开（分别为闭）子函子，且 F 可由概形 X 表示。那么 G 可由 X 的一个开（分别为闭）子概形表示。

在命题 2.7 的设定下，定义 2.6 中的纤维积可由 U 表示。根据 [EH00，命题 VI-2]，，只需验证仿射概形满足命题 2.7 的条件。对于闭子函子，我们可以将其改述如下。

命题 2.9. 设 G 是 F 的子函子。若满足以下条件，则 G 是闭子函子。对于任意仿射概形 $\mathrm{Spec}\ A$ 和 $\xi \in F(\mathrm{Spec}\ A)$，存在一个理想 $I \lhd A$，使得对于任意仿射概形态射 $f : \mathrm{Spec}\ B \to \mathrm{Spec}\ A$，都有：

$$\text{元素 } f^*\xi \in F(\mathrm{Spec}\ B) \text{ 属于 } G(\mathrm{Spec}\ B) \iff f \text{ 经过} \mathrm{Spec}(A/I) \subseteq \mathrm{Spec}\ A.$$

现在我们将介绍两个有用的构造，它们分别给出一个闭子函子和一个开子函子。我们先从零点函子开始。

命题 2.10 (零点函子)。 设 Y 是一个概形。考虑一个局部自由 $\mathcal{O}_Y$-模的态射 $\varphi \colon \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$。定义 $\mathcal{Z}(\varphi) \colon \mathrm{Sch}^{op} \to \mathrm{Set}$ 为 φ 的零点函子，定义如下：

$$\mathcal{Z}(\varphi)(X) = \{f \colon X \to Y \mid f^*\varphi \colon f^*\mathcal{E}_1 \to f^*\mathcal{E}_2 \textit{ is the zero map}\}.$$

函子 $\mathcal{Z}(\varphi)$ 可由 Y 的一个闭子概形表示。

证明。 我们先证明该断言在自由层的特殊情形下成立。设 $U \subseteq Y$ 是一个开子概形，使得

$$(\mathcal{E}_1)_{|U} = \mathcal{O}_U^{\oplus N_1} \quad \text{and} \quad (\mathcal{E}_2)_{|U} = \mathcal{O}_U^{\oplus N_2}.$$

那么，$\varphi_{|U} = (\varphi_{ij})_{i,\ j}$ 由一个矩阵给出，而拉回给出

$$f^*\varphi = (f^{\#}(\varphi_{ij}))_{i,j} \colon f^*(\mathcal{E}_1)_{|U} \simeq \mathcal{O}_X^{\oplus N_1} \to f^*(\mathcal{E}_2)_{|U} \simeq \mathcal{O}_X^{\oplus N_2},$$

其中， $f_{\#}\colon\ \mathcal{O}_U \to f_*\mathcal{O}_X$是诱导映射。那么， $f^*\varphi$是零映射，当且仅当态射f 通过 Y中由截面φ_{ij}的消失所定义的闭子概形分解，记为 $Z(\varphi_{ij})$。等价地，函子 $\mathcal{Z}(\varphi|_U)$可由概形 $Z(\varphi_{ij})$表示。

现在，我们通过构造一个由开可表子函子覆盖的 $\mathcal{Z}(\varphi)$，在完全一般的情形下证明该断言。考虑 $\{U_i\}$ 的一个开覆盖。令 $\mathcal{Z}_i = \mathcal{Z}(\varphi) \times_Y U_i$ 为函子的纤维积。对于每个概形 X ，都有一个交换图

$$\begin{array}{ccccccc} X \times_Y U_i & \xrightarrow{\simeq} & X \times_{\mathcal{Z}(\varphi)} \mathcal{Z}_i & \longrightarrow & \mathcal{Z}_i = \mathcal{Z}(\varphi) \times_Y U_i & \longrightarrow & U_i \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & X & \longrightarrow & \mathcal{Z}(\varphi) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

因此， $\mathcal{Z}_i$ 是 $\mathcal{Z}(\varphi)$的一个开子函子。令 $\Bbbk$ 为一个域，我们将证明 $\bigcup_i \mathcal{Z}_i(\Bbbk) = \mathcal{Z}(\varphi)(\Bbbk)$。对于每个 i ，我们都有一个图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_i(\Bbbk) & \xrightarrow{\pi_i} & U_i(\Bbbk) \\ {\scriptstyle\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_i} \\ \mathcal{Z}(\varphi)(\Bbbk) & \xrightarrow{\beta} & Y(\Bbbk) \end{array}$$

其中

$$\mathcal{Z}_i(\Bbbk) = \{(f,p) \in \mathcal{Z}(\varphi)(\Bbbk) \times U_i(\Bbbk) \mid \alpha_i(f) = \beta(p)\}$$

对于 $f\colon \operatorname{Spec} \Bbbk \to U_i$和 $p\colon \operatorname{Spec} \Bbbk \to X$， 使得 $p^*\varphi = 0$。映射 α_i定义为复合映射$\alpha_i(f) = (\operatorname{Spec} \Bbbk \xrightarrow{f} U_i \xhookrightarrow{\alpha_i} X)$。于是

$$\mathcal{Z}(\varphi)(\Bbbk) = \{p\colon \operatorname{Spec}\Bbbk \to X \mid p^*\varphi\colon (\mathcal{E}_1)_{|p} \to (\mathcal{E}_2)_{|p} \text{ is zero}\},$$

因此， β是自然包含。集合 $\mathcal{Z}_i(\Bbbk)$可以看作这样的 $\Bbbk$-点 $p\colon \operatorname{Spec} \Bbbk \to X$，它们在纤维上给出零映射 $(\mathcal{E}_1)_{|p} \to (\mathcal{E}_2)_{|p}$ ，并且也属于 U_i。由于 $\{U_i\}$ 是 X的一个开覆盖，每个$p \in X(\Bbbk)$都属于某个 $U_i(\Bbbk)$，因此$\bigcup_i \mathcal{Z}_i(\Bbbk) = \mathcal{Z}(\varphi)(\Bbbk)$。由此可知，函子 $\mathcal{Z}_i$ 构成 $\mathcal{Z}(\varphi)$的一个开覆盖。由自由层的特殊情形可知，对于使层 $\mathcal{E}_1$、 $\mathcal{E}_2$平凡化的 $\{U_i\}$ 的一个覆盖 X ，函子 $\mathcal{Z}_i$ 是可表的。函子 $\mathcal{Z}(\varphi)$满足Zariski下降，因此根据EH00，定理VI-14] ，闭子概形 $Z_i \subseteq Y$可以粘合起来，得到一个表示$\mathcal{Z}(\varphi)$的闭子概形。□

我们可以描述与表示函子的闭子概形相关联的理想层 $\mathcal{Z}(\varphi)$ ，该函子来自命题2.10。我们先考虑仿射概形上自由层之间的态射这一特殊情形。令 $Y = \operatorname{Spec} A$，并考虑自由 A-模 φ: $M = A^{\oplus m} \to N = A^{\oplus n}$ 它对应于自由层之间的态射 $\varphi^\sim\colon\ M^\sim \to N^\sim$。如命题2.10的证明中所述，该映射由一个 $n \times m$ 矩阵 (φ_{ij}) 给出。令 $I(\varphi)$ 表示由矩阵 (φ_{ij}) 的各个条目生成的理想。那么

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\varphi)(X) &= \{f\colon X \to \operatorname{Spec} A \mid f^*\varphi = 0\} \\ &\simeq \{f^\#\colon A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \mid f^\#(\varphi_{ij}) = 0 \text{ for all } i,j\} \\ &\simeq \{f^\#\colon A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \mid f^\# \text{ factors through } A \twoheadrightarrow A/I(\varphi)\} \\ &\simeq \operatorname{Hom}(A/I(\varphi), \Gamma(X, \mathcal{O}_X)) \\ &\simeq \operatorname{Hom}(X, \operatorname{Spec}(A/I(\varphi))). \end{aligned} \tag{2.11}$$

对于任意概形 Y以及局部自由 $\mathcal{O}_X$-模的一个态射 $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$，(2.11) 中的同构给出了表示函子$\mathcal{Z}(\varphi)$的闭子概形的显式描述。该构造关于 A是自然的，因此理想 $I(\varphi)$ 可粘合成一个拟凝聚理想层

$\mathcal{I}(\varphi)$ 在 Y 上，我们称其为 φ的*Fitting* 理想。相较于文献中的用法，这个记号略有简化：其完整名称是 φ的零阶 Fitting 理想。

定义 2.12。 设 Y 是一个概形。设 $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是秩分别为 m, n 的局部自由层之间的态射。我们将 Y 上的*Fitting* 理想 定义为与表示函子 $\mathcal{Z}(\varphi)$ 的闭子概形相关联的拟凝聚理想层 $\mathcal{I}(\varphi)$。

现在我们将使用希尔伯特零点定理来构造开子函子的例子。设函子 $F\colon \mathrm{Sch}_{/\Bbbk}^{op} \to \mathrm{Set}$ 可由概形 X 表示。若要求概形 X 具有一些额外性质，那么要定义 F 的开子函子 G，只需指定它的 $\Bbbk$-点 $G(\Bbbk)$。

引理 2.13。 设 X 是一个局部有限型的 $\Bbbk$-概形。则对每个开子集 $U_\Bbbk$，都存在一个开子概形 $U \subseteq X$，使得 $U(\Bbbk) = U_\Bbbk$。

证明。 对于 $U_\Bbbk$ 中的每个点 p_i，都存在一个仿射开邻域 $U_i = \mathrm{Spec}(A_i) \subseteq X$，使得 A_i 是有限生成的 $\Bbbk$-代数。根据希尔伯特零点定理，$U_i(\Bbbk)$ 的开子集与 U_i 的开子概形之间存在双射。交集 $U_i(\Bbbk) \cap U_\Bbbk$ 是 $U_i(\Bbbk)$ 中的开子集，因此存在一个开子概形 $U_i' \subseteq U_i$，使得 $U_i'(\Bbbk) = U_i(\Bbbk) \cap U_\Bbbk$。这些子概形 $\{U_i'\}_i$ 粘合起来，得到一个开子概形 U，使得 $U_\Bbbk = U(\Bbbk) = \bigcup_i U_i'(\Bbbk)$。□

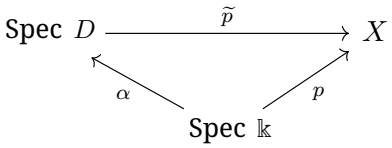
命题 2.14。 设 X 是一个局部有限型的 $\Bbbk$-概形。取一个开子集 $Y_\Bbbk \subseteq X(\Bbbk)$。则存在一个可表函子 $G\colon \mathrm{Sch}_{/\Bbbk}^{op} \to$ 集合，使得 $G(\Bbbk) = Y_\Bbbk$。

证明。 令 Y 为满足 $Y(\Bbbk) = Y_\Bbbk$的开子概形，根据引理 2.13。令 G 为点函子 Y，则 $Y(\Bbbk) = Y_\Bbbk \equiv G(\Bbbk)$。这定义了 F的一个开子函子。□

我们称开子集 $Y_\Bbbk$ 延拓到函子 G。

2.2. **切空间**。 我们给出概形的切空间定义，并可将其推广到函子。令 $D = \Bbbk[\varepsilon] = \Bbbk[t]/t^2$ 为对偶数环，并记 $S[\varepsilon] = S \otimes_\Bbbk D$。下面的定义源自变形理论。

命题 2.15 ([EH00，第 VI.1 章。3])。 设 X 为一个 $\Bbbk$-概形，设 $p\colon \mathrm{Spec}\ \Bbbk \to X$ 为一个 $\Bbbk$-点。那么，X 在 p 处的扎里斯基切空间由满足下图交换的态射 $\widetilde{p}\colon \mathrm{Spec}\ D \to X$ 组成：



从点函子的角度来看，X 在 $p \in X(\Bbbk)$ 处的切空间由满足以下条件的 $\widetilde{p} \in X(D)$ 构成：拉回 α^*: $X(D) \to X(\Bbbk)$ 将 $\widetilde{p}$ 映射到 p。 —

2.3. **不可约性**。 我们回顾点处维数的概念，稍后讨论 $\mathrm{Bilin}_{d_1\ d_2,,,d_3}^{r_1\ r_2}(\mathbb{A}^n)$ 的不可约性时将用到它。

定义 2.16 定义。 设 X 是一个拓扑空间。定义 X 在点 $p \in X$ a 处的维数 s

$$\dim_p X = \min\{\dim U \mid U \subseteq X \text{ is an open neighborhood of } p\}, \tag{2.17}$$

其中最小值取遍 p 的所有开邻域。

引理 2.18. 设 X 是一个拓扑空间。如果 X 不可约，那么 维数$_p X$ 在每个 $p \in X$ 处都相同。

证明。 假设 X 是不可约的。设 V_1, V_2 是 X 的任意两个非空开子集。那么根据假设，$V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$。取一个点 $p \in V_1 \cap V_2$，则它必满足 $\dim_p V_1 = \dim_p V_2$。假设存在一个点 $q \in V_1$，使得 $\dim_q V_1 \geq \dim_p V_1$。根据假设， q 的每个开邻域都与 p 的每个开邻域相交。取一个满足 $\dim U_1 = \dim_p V_1$ 的邻域 $U_1 \in p$，那么 U_1 也是 q 的一个开邻域，因此 $\dim_q V_1 \leq \dim U_1 = \dim_p V_1$，从而 $\dim_q V_1 = \dim_p V_1$。这一推理表明，对于所有 p， $q \in X$，都有 $\dim_p X = \dim_q X$，因为 p 的每个开邻域也是 q 的一个开邻域。□

假设我们要证明拓扑空间 X 是可约的。为此，我们可以尝试找出一个开子集 $U \subseteq X$ 和一个闭子集 $Z \subseteq X$，使得 维数$U <$ 维数Z。由引理 2.18，这表明 $U \cap Z = \varnothing$。这将是我们证明 $\mathrm{Bilin}^{\overline{r_1}\ r_2}_{d_1\ d_2},,_{d_3}(\mathbb{A}^n)$ 可约的策略。

2.4. **希尔伯特概形。** 考虑一个函子 $\mathrm{Hilb}_d(\mathbb{A}^n)$: $\mathrm{Sch}^{op}_{/\Bbbk} \to \mathrm{Set}$，它在 $\Bbbk$-点上的定义为 a s

$$\mathrm{Hilb}_d(\mathbb{A}^n)(\Bbbk) = \{I \lhd S \mid \dim_\Bbbk S/I = d\}.$$

对于任意 $\Bbbk$-概形 X，希尔伯特函子定义为

$$\mathrm{Hilb}_d(\mathbb{A}^n)(X) = \{\text{closed subschemes } Z \subseteq X \times_\Bbbk \mathbb{A}^n \mid \mathcal{O}_Z \text{ is a locally free } \mathcal{O}_X\text{-module of rank } d\}.$$

由此得到仿射 n-空间中 d 个点的希尔伯特函子。它由一个概形$Hilb$表示，称为希尔伯特概形。令 ψ: $Hilb \to \mathrm{Hilb}_d(\mathbb{A}^n)$ 为自然同构，并令 $[\eta]$ 表示泛元，即 $\psi_{Hilb}(\mathbb{1}_{Hilb})$ 在 $\mathrm{Hilb}_d(\mathbb{A}^n)(Hilb)$ 中的像。我们将写作

$$[\eta] = [\mathcal{Z} \overset{\eta}{\hookrightarrow} Hilb \times \mathbb{A}^n]. \tag{2.19}$$

泛元 $[\eta]$ 对应于闭子概形 $\mathcal{Z} \overset{\eta}{\hookrightarrow} Hilb \times \mathbb{A}^n$，使得 $\mathcal{O}_\mathcal{Z}$ 在 $Hilb$ 上局部自由且秩为 d，并且对于每个概形 X，$\mathrm{Hilb}_d(\mathbb{A}^n)(X)$ 的每个元素都可表示为某个唯一的 f: $X \to Hilb$ 对 $\mathcal{Z}$ 的拉回。下面的交换图对此进行了编码:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z} \times_\Bbbk X & \longhookrightarrow & X \times \mathbb{A}^n_\Bbbk \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f \times \mathbb{1}_{\mathbb{A}^n}} \\ \mathcal{Z} & \xhookrightarrow{\eta} & Hilb \times \mathbb{A}^n_\Bbbk \end{array}$$

若 $X = \mathrm{Spec}\ A$，其中 A 是一个 $\Bbbk$-代数 A，则我们用 $\mathrm{Hilb}_d(\mathbb{A}^n)(A)$ 表示 $\mathrm{Hilb}_d(\mathbb{A}^n)(\mathrm{Spec}\ A)$。此时有

$$\begin{aligned} \mathrm{Hilb}_d(\mathbb{A}^n)(A) &= \{Z \subseteq \mathrm{Spec}\, A \times \mathbb{A}^n \mid \mathcal{O}_Z \text{ is a locally free } \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A}\text{-module of rank } d\} \\ &\simeq \{I \lhd S_A \mid S_A/I \text{ is locally free } A\text{-module of rank } d\}. \end{aligned}$$

如果一个闭子概形 $Z \subseteq \mathbb{A}^n$ 由 d 个互不相同的 $\Bbbk$-点组成，我们就说它对应于一个 d 点组。若 $Z = \mathrm{Spec}(S/I)$ 是一个点组，则

$$\mathcal{O}_Z \simeq S/I \simeq S/\mathcal{I}(\{p_1, \ldots, p_d\}) \simeq \Bbbk^d,$$

其中 $p_i \in \mathbb{A}^n(\Bbbk)$ 是互不相同的点。我们将对应于点组的理想 $I \lhd S$ 所成的集合记为 $T_\Bbbk$，并将其视为 $\mathrm{Hilb}_d(\mathbb{A}^n)(\Bbbk)$ 的一个子集。该子集给出希尔伯特概形的一个开子函子，它可由一个开子概形 T of $Hilb$ 表示。 T 的维数为 nd。

我们可以将 $T_\Bbbk$ 视为由那些 $\Bbbk$-点 p: $\mathrm{Spec}\ \Bbbk \to Hilb$ 组成，它们给出了$\Bbbk$-代数的同构

$$(\alpha_* \mathcal{O}_Z)_{|p} \simeq \Bbbk^d, \quad \text{where } \alpha \colon Z \overset{\eta}{\hookrightarrow} Hilb \times \mathbb{A}^n \xrightarrow{pr_1} Hilb.$$

概形 $Hilb$ 满足命题 2.14 的假设，并且 $T_{\Bbbk}$ 在 $\mathrm{Hilb}_d(\mathbb{A}^n)(\Bbbk)$中是开集。因此， $T_{\Bbbk}$ 诱导出一个函子 $\mathcal{T}\colon \mathrm{Sch}_{/\Bbbk}^{op} \to \mathrm{Set}$，使得在 $\Bbbk$-点上有 $\mathcal{T}(\Bbbk) = T_{\Bbbk}$。它定义为开子函子 $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{Hilb}_d(\mathbb{A}^n)$，其中 $\mathcal{T} = T$ 对应一个开子概形 $T \subseteq Hilb$，使得 $T(\Bbbk) = T_{\Bbbk}$。我们将希尔伯特概形的可平滑化分支定义为 T 在 $Hilb$中的闭包。沿包含 $\iota\colon \mathcal{T} \hookrightarrow Hilb$ 的拉回 $[\eta'] = \iota^*[\eta]$给出 $\mathcal{T}$的泛元。它对应于一个闭子概形

$$\mathcal{Z}_T \xhookrightarrow{\eta'} \mathbb{A}^n_T \tag{2.20}$$

such 使得复合 $\beta\colon \mathcal{Z}_T \xhookrightarrow{\eta'} \mathbb{A}^n_T \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} T$ 令 $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}_T}$ 在 $\mathcal{O}_T$ 上局部自由且秩为 d .

2.5. **Quot 概形**。 考虑函子 $\mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)\colon \mathrm{Sch}_{/\Bbbk}^{op} \to \mathrm{Set}$，它定义在 $\Bbbk$-点上为

$$\mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)(\Bbbk) = \{\text{quotients of } S\text{-modules } S^{\oplus r} \xrightarrow{\pi} M \mid \dim_{\Bbbk} M = d\}_{/\sim}$$

其中我们将满射 $\pi \sim \pi'$ 视为相同，只要 $\ker\, \pi = \ker \pi'$。给定任意 $\Bbbk$-概形 X，我们有

$$\mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)(X) = \left\{ \begin{array}{c} \text{equivalence classes of quasicoherent quotients} \\ \mathcal{O}_X^{\oplus r} \otimes_{\Bbbk} S \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \text{ of } (\mathcal{O}_X \otimes_{\Bbbk} S)\text{-modules} \\ \text{such that } \mathcal{M} \text{ is locally free of rank } d \text{ over } \mathcal{O}_X \end{array} \right\}$$

该函子由概形 $Quot$ 表示，称为仿射空间中点的 Quot 概形。由自然同构 $\psi\colon Quot \to \mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)$, 我们得到泛元

$$\begin{aligned} [\xi] &= \psi_{Quot}(\mathbb{1}_{Quot}) \\ &= \left[\mathcal{O}_{Quot}^{\oplus r} \otimes_{\Bbbk} S \xrightarrow{\xi} \mathcal{M}\right] \in \mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)(Quot). \end{aligned} \tag{2.21}$$

对于每个概形 X，$\mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)(X)$ 的每个元素都可由某个唯一的 $f\colon X \to Quot$ 对 $[\xi]$ 作拉回得到，我们将其定义为

$$f^*[\xi] = \left[(f^*\mathcal{O}_{Quot}^{\oplus r}) \otimes_{\Bbbk} S \xrightarrow{f^*\xi} f^*\mathcal{M}\right] \in \mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)(X).$$

我们将 $\mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)(A)$ 记作 $\mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)(\mathrm{Spec}\, A)$。在这种情况下

$$\mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)(A) = \left\{A^{\oplus r} \otimes S \simeq S_A^{\oplus r} \twoheadrightarrow M \mid M \text{ is locally free of rank } d \text{ as an } A\text{-module}\right\}_{/\sim}.$$

现在我们回顾 Quot 概形的切空间的刻画。固定如下记号：

$$[p] = \left[F = S^{\oplus r} \xrightarrow{p} M = {}^F\!/_K\right] \in \mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)(\Bbbk),$$

$$[\widetilde{p}] = \left[\widetilde{F} = S[\varepsilon]^{\oplus r} \xrightarrow{\widetilde{p}} \widetilde{M} = \widetilde{F}/\widetilde{K}\right] \in \mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)(\Bbbk[\varepsilon]).$$

如命题 2.15所述， $\widetilde{p}$ 当 p 时确定一个切向量 $\widetilde{p}$ 限制为 p 在 $\mathrm{Spec}\, \Bbbk$:

$$\begin{aligned} \alpha^*[\widetilde{p}] &= [p] \\ &= \left[\widetilde{F} \otimes_{\Bbbk[\varepsilon]} \Bbbk \xrightarrow{\widetilde{p}\otimes 1} \widetilde{M} \otimes_{\Bbbk[\varepsilon]} \Bbbk \simeq \widetilde{F} \otimes \Bbbk/\widetilde{K} \otimes \Bbbk\right] \end{aligned}$$

换句话说，若我们有同构 $\widetilde{M}/\varepsilon\widetilde{M} \simeq M$和 $\widetilde{K}/\varepsilon\widetilde{K} \simeq K$。根据定义， $\widetilde{\quad}\quad\widetilde{\quad}\quad\widetilde{\quad}\mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)(\Bbbk[\varepsilon])$ 的点对应于满足条件 M 的满射 $[F \twoheadrightarrow M]$ 的等价类，其中 M 在 $\Bbbk[\varepsilon]$上是秩为 d 的局部自由$\widetilde{\quad}$。模 M 也可以等价地刻画为自由模或平坦模。

定理 2.22。 在 $[p]$ 处，$\mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)$ 的切空间同构于 $\mathrm{Hom}_S(K, {}^F\!/_K)$。

对于一个 $\Bbbk$ 点 $[p\colon\ F \to M = {}^F\!/_K]$ 以及一个映射 $\phi\colon\ K \to M$，相应的切向量定义为

$$\left[\widetilde{p}\colon \widetilde{F} \to \widetilde{M} = \widetilde{F}/\widetilde{K}\right],$$

其中

$$\widetilde{K} = \{k + \varepsilon g \mid k \in K,\ g \in F \text{ such that } g + K = \varphi(k)\}. \tag{2.23}$$

我们可以将希尔伯特概形的可平滑化分支推广到 Quot 概形的情形。对于一个理想 $I \lhd S$，考虑满射 $S^{\oplus r} \twoheadrightarrow M$，使得 M 来自一个代数 S/I，该代数对应于一个点组，这意味着存在一个同构 $M \simeq S^{\oplus 1}/I$。由此得到一个开子概形 U，它包含于 $Quot$，且 U 的维数为 $nd + (r-1)d$。这个子概形的闭包称为主分支。考虑一个子集

$$\begin{aligned} U_{\Bbbk} &= \{S^{\oplus r} \twoheadrightarrow M \mid M \text{ corresponds to a tuple of } d \text{ points}\}_{/\sim} \\ &= \{S^{\oplus r} \twoheadrightarrow M \mid M \simeq S^{\oplus 1}/I \text{ for an ideal } I \lhd S\}_{/\sim} \subseteq \mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)(\Bbbk). \end{aligned}$$

我们有$\mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)$ 的泛元，记作 $[\xi] = [\mathcal{O}_{Quot}^{\oplus r} \otimes S \xrightarrow{\xi} \mathcal{M}]$，如（2.21）所示。我们可以将集合 $U_{\Bbbk}$ 视为由 $\Bbbk$-点 $p\colon \operatorname{Spec}\Bbbk \to Quot$ 组成，满足

$$p^*[\xi] = \left[(\mathcal{O}_{Quot}^{\oplus r} \otimes S)_{|p} \simeq S^{\oplus r} \xrightarrow{\bar{\xi}} \mathcal{M}_{|p} \simeq S/I\right]$$

取拉回时。集合 $U_{\Bbbk}$ 是 $\mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)(\Bbbk)$ 中的开集，因此它导出一个开子函子$\mathcal{U}$，该函子属于 $\mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)$，且 $\mathcal{U}(\Bbbk) = U_{\Bbbk} = U(\Bbbk)$，其中 U 是 $Quot$ 中对应于 $U_{\Bbbk}$ 的开子概形。我们简述 $\mathcal{U}$ 的构造并计算其维数。

我们首先用以下方式定义的开集 $\mathcal{U}_v(\Bbbk)$ 覆盖集合 $U_{\Bbbk}$, $v \in \Bbbk^{\oplus r}$。向量 $v \in \Bbbk^{\oplus r}$ 来自整体截面 $s_v\colon\ \mathcal{O}_{Quot} \otimes S \to \mathcal{O}_{Quot}^{\oplus r} \otimes S$，使得沿着一个 $\Bbbk$-点 $p\colon \operatorname{Spec}\Bbbk \to Quot$ 的拉回给出一个映射

$$(\mathcal{O}_{Quot} \otimes S)_{|p} \simeq S \to (\mathcal{O}_{Quot}^{\oplus r} \otimes S)_{|p} \simeq S^{\oplus r}, \quad 1 \mapsto v \in \Bbbk^{\oplus r} \subseteq S^{\oplus r}.$$

对于这种形式的 $v \in \Bbbk^{\oplus r}$，我们定义子集 $\mathcal{U}_v(\Bbbk) \subseteq U_{\Bbbk}$ 如下

$$\mathcal{U}_v(\Bbbk) = \{S^{\oplus r} \xrightarrow{\pi} M \mid \pi(Sv) = M \text{ and } M \text{ corresponds to a tuple of } d \text{ points}\}_{/\sim} \subseteq U_{\Bbbk}.$$

命题 2.24. $U_{\Bbbk}$ 被以下对象覆盖 $\{\mathcal{U}_v(\Bbbk)\}_{v \in \Bbbk^{\oplus r}}$。

形如 $\mathcal{U}_v(\Bbbk)$ 的集合是 $\mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)(\Bbbk)$ 中的开集，并且由于 $U_{\Bbbk} = \bigcup_v \mathcal{U}_v(\Bbbk)$，可知 $U_{\Bbbk}$ 是 $\mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)(\Bbbk)$ 中的开集。证明可分为两步：

(1) 固定 $v \in \Bbbk^{\oplus r}$ 并定义

$$\mathcal{U}'_v(\Bbbk) = \{S^{\oplus r} \xrightarrow{\pi} M \mid \pi(Sv) = M\}_{/\sim} \subseteq \mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)(\Bbbk). \tag{2.25}$$

那么 $\mathcal{U}_v(\Bbbk) = \mathcal{U}'_v(\Bbbk) \cap U_{\Bbbk}$。证明 $\mathcal{U}'_v(\Bbbk)$ 是 $\mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)(\Bbbk)$ 中的开集。

(2) 证明 $\mathcal{U}_v(\Bbbk)$ 是 $\mathcal{U}'_v(\Bbbk)$ 中的开集。

命题2.14给出了一个开子函子 $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)$，它由开子概形 $U \subseteq Quot$ 表示，满足 $U(\Bbbk) = U_{\Bbbk}$。现在我们概述 U 的维数为 $nd + (r-1)d$的证明。由于概形 U 由开子概形 U_v覆盖，因此有

$$\dim U = \sup_v \{\dim U_v\} = \dim U_{e_1} \quad \text{for } e_1 = (1, 0, \ldots, 0).$$

我们通过证明 U_{e_1} 与子概形$T \subseteq Hilb$ 上的一个向量丛同构，来计算其维数。该子概形参数化点组。令 $\mathcal{M} = \beta_* \mathcal{O}_{\mathcal{Z}_T}$为与$\mathcal{O}_T$的泛元相关联的局部自由 T-模，如（2.20）中所述。我们定义与向量丛相关联的 $\mathcal{M}$ 如下：

$$\mathbb{V}(\mathcal{M}) = \mathcal{S}\mathrm{pec}(\mathrm{Sym}(\mathcal{M}^\vee)).$$

根据 [GW20，命题 11。3], 对于每个 p： $Y \to T$ 存在一个双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}_{/T}}(Y, \mathbb{V}(\mathcal{M})) \xrightarrow{\simeq} \Gamma(Y, p^*\mathcal{M}) \tag{2.26}$$

在 Y中自然地。模 $\mathcal{M}$ 是局部自由的。设 W 是一个开子概形，使得我们有平凡化 $\mathcal{M}_{|W} \simeq \mathcal{O}_W^{\oplus d}$。对于一个仿射开子概形 $\mathrm{Spec}\, A \to W$，同构（2.26）给出

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}_{/T}}(\mathrm{Spec}\, A, \mathbb{V}(\mathcal{M})) &\simeq \Gamma(\mathrm{Spec}\, A, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A})^d \\ &\simeq \mathbb{A}^d_T(A) \simeq \mathcal{T}(A) \times_{\Bbbk} \mathbb{A}^d_{\Bbbk}(A).\end{aligned}$$

命题 2.27。 存在一个自然同构

$$\phi\colon \mathcal{U}_{e_1} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}_{/T}}(-, \mathbb{V}(\mathcal{M})^{\times r-1}).$$

命题 2.28。 $U_{e_1} \subseteq \mathrm{Quot}^r_d(\mathbb{A}^n)$ 的维数为 $nd + (r-1)d$。

证明。 由命题2.27,

$$\dim U_{e_1} = \dim(T \times \mathbb{A}^{d(r-1)}) = \dim T + \dim \mathbb{A}^{d(r-1)} = nd + (r-1)d.$$

□

现在，我们将全退化轨迹 定义为形如 $(S/\mathfrak{m})^{\oplus d}$ 的 S-模满射所对应的轨迹，其中固定一个极大理想

$$\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n) \lhd S = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n].$$

一个 S-模 $M \simeq (S/\mathfrak{m})^{\oplus d}$ 可以等价地刻画为

$$\dim_{\Bbbk} M = d \quad \text{and} \quad \mathfrak{m}M = 0.$$

令 $\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}(\Bbbk) \subseteq \mathrm{Quot}^r_d(\mathbb{A}^n)(\Bbbk)$ 表示与此类模相对应的子集。我们将其扩展为 $\mathrm{Quot}^r_d(\mathbb{A}^n)$ 的一个闭子函子 $\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}$。对于每个 $a \in \mathfrak{m}$，考虑乘法映射μ_a： $M \to M$。条件 $\mathfrak{m}M = 0$等价于对所有 $a \in \mathfrak{m}$，乘法映射 μ_a 均为零。考虑更一般的情形。取一个子集 $I \subseteq S$，并定义

$$\mathcal{Z}_I(\Bbbk) = \{S^{\oplus r} \twoheadrightarrow M \mid IM = 0\}_{/\sim} \subseteq \mathrm{Quot}^r_d(\mathbb{A}^n)(\Bbbk).$$

对每个 $a \in I$ 定义

$$\mathcal{Z}_a(\Bbbk) = \{S^{\oplus r} \twoheadrightarrow M \mid aM = 0\}_{/\sim} \subseteq \mathrm{Quot}^r_d(\mathbb{A}^n)(\Bbbk).$$

则 $\mathcal{Z}_I(\Bbbk) = \bigcap_{a \in I} \mathcal{Z}_a(\Bbbk)$。如果集合 $\mathcal{Z}_a(\Bbbk)$ 是闭的，那么 $\mathcal{Z}_I(\Bbbk)$ 也是闭的。

命题 2.29。 集合 $\mathcal{Z}_a(\Bbbk)$ 定义了 $\mathit{Quot}^r_d(\mathbb{A}^n)$ 的一个闭子函子 $\mathcal{Z}_a$。

为了定义子函子 $\mathcal{Z}_a \subseteq \mathrm{Quot}^r_d(\mathbb{A}^n)$，我们使用命题 2.10 中零点函子的构造。我们将每个子集 $\mathcal{Z}_a(\Bbbk)$ 扩展为形如 $\mathcal{Z}(\mu)$的函子，其中映射 μ与 μ_a相关联。

命题2.29的证明。 令 $[\xi] = [\mathcal{O}_{Quot}^{\oplus r} \otimes_{\Bbbk} S \xrightarrow{\xi} \!\!\!\rightarrow \mathcal{M}]$ 表示 $\mathrm{Quot}^r_d(\mathbb{A}^n)$ 的泛元，如（2.21）中所定义。设满射 $S^{\oplus r} \twoheadrightarrow M$对应于一个 $\Bbbk$-点 $p\colon \mathrm{Spec}\, \Bbbk \to \mathit{Quot}$。乘法 $\mu_a\colon M \to M$由 $a \in S$给出，它来自一个映射 $\mu\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$，使得

$$\mu_{|p} = \mu_a\colon \mathcal{M}_{|p} = M \to \mathcal{M}_{|p} = M,$$

而元素 a 来自 $\mathcal{O}_{Quot} \otimes S$ 的一个截面 $\tilde{a}$。在每个仿射概形 $\operatorname{Spec} B$ 上，映射$\mu\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$限制为乘法映射 $\mu_{a'}\colon M_B \to M_B$，其中 $M_B = \mathcal{M}_{|_{\operatorname{Spec} B}}$是一个局部自由的 S_B-模，元素 $a' \in S_B$ 是截面 $\tilde{a}$ 在 $\operatorname{Spec} B$ 上的限制。于是我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(\mu)(B) &= \{f\colon \operatorname{Spec} B \to Quot \mid f^*\mu\colon f^*\mathcal{M} \to f^*\mathcal{M} \text{ is the zero map}\}\\ &= \{f\colon \operatorname{Spec} B \to Quot \mid a'M_B = 0\}.\end{aligned}$$

这将集合 $\mathcal{Z}_a(\Bbbk)$ 扩展为一个可表函子。因此 $\mathcal{Z}_a$ 是零点函子 $\mathcal{Z}(\mu)$，因此根据命题$\operatorname{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)$ 2.10，它构成一个闭子函子。。□

由此可知，对于任意子集 $I \subseteq S$，我们有 $\mathcal{Z}_I = \bigcap_{a\in I} \mathcal{Z}_a$，特别地，对于 $I = \mathfrak{m}$，这给出了所需的可表函子 $\mathcal{Z}_\mathfrak{m}$。现在我们计算 $\mathcal{Z}_\mathfrak{m} \subseteq \operatorname{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)$ 的维数。我们将格拉斯曼函子 $\mathbf{Gr}(d,\ r)\colon \mathbf{Sch}_\Bbbk^{op} \to \mathbf{Set}$ 定义在 $\Bbbk$- 点上如下：

$$\operatorname{Gr}(d,r)(\Bbbk) = \left\{\text{quotients of } \Bbbk\text{-vector spaces } \Bbbk^{\oplus r} \twoheadrightarrow V \mid \dim_\Bbbk V = d\right\}_{/\sim}.$$

对于一个仿射概形 $\operatorname{Spec} A$，我们有

$$\operatorname{Gr}(d,r)(A) = \left\{\text{quotients of locally free } A\text{-modules } A^{\oplus r} \twoheadrightarrow V \mid V \text{ is of rank } d\right\}_{/\sim}.$$

格拉斯曼函子 $\mathbf{Gr}(d,\ r)$ 可由一个 $\Bbbk$-簇表示，其维数为 $(r-d)d$。极大理想 $\mathfrak{m} \lhd S$ 对应于 $\Bbbk$ 的一个点，这给出了如下同构：

$$\alpha_\mathfrak{m}\colon \Bbbk \xhookrightarrow{\iota_\mathfrak{m}} S \xrightarrow{\pi_\mathfrak{m}} {}^{S}\!/_{\mathfrak{m}}.$$

我们将利用这个同构来关联 $\mathbf{Gr}(d,\ r)$ 和 $\mathcal{Z}_\mathfrak{m}$。

命题 2.30。 存在一个自然同构 $\phi\colon \operatorname{Gr}(d,r) \to \mathcal{Z}_\mathfrak{m}$。

证明。W 我们在 $\Bbbk$-点上描述所需的映射；对 $\operatorname{Spec} A$ 的证明类似。取一个 $\Bbbk$-点

$$[S^{\oplus r} \xrightarrow{\pi} M \simeq ({}^{S}\!/_{\mathfrak{m}})^{\oplus d}] \in \mathcal{Z}_\mathfrak{m}(\Bbbk).$$

由于 $\mathfrak{m}M = 0$，映射 π 经由包含 $\iota_\mathfrak{m}$分解。换言之，映射 π 由矩阵$(a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_{d\times r}(\Bbbk)$给出，其中

$$\Bbbk^{\oplus r} = \oplus_i \Bbbk e_i \xhookrightarrow{\iota_\mathfrak{m}} S^{\oplus r} = \oplus_i S e_i \xrightarrow{\pi} M \xrightarrow{\simeq} ({}^{S}\!/_{\mathfrak{m}})^{\oplus d} \xrightarrow{\alpha_\mathfrak{m}^{-1}} \Bbbk^{\oplus d} = \oplus_j \Bbbk e_j$$

将 $e_i \mapsto a_{1i}e_1 + \ldots + a_{di}e_d$映至此处。这唯一确定了一个$\Bbbk$-线性满射 $\Bbbk^{\oplus r} \twoheadrightarrow \Bbbk^{\oplus d}$（在同构意义下），从而给出 $\mathbf{Gr}(d,r)(\Bbbk)$中的一个点。为构造其逆映射，注意到一个 $\Bbbk$-点 $[\Bbbk^{\oplus r} \twoheadrightarrow V]$ 定义了一个S-线性映射

$$({}^{S}\!/_{\mathfrak{m}})^{\oplus r} \xrightarrow{\alpha_\mathfrak{m}^{-1}} \Bbbk^{\oplus r} \twoheadrightarrow V \simeq \Bbbk^{\oplus d} \xrightarrow{\alpha_\mathfrak{m}} ({}^{S}\!/_{\mathfrak{m}})^{\oplus d},$$

与 $\pi_\mathfrak{m}\colon S^{\oplus r} \twoheadrightarrow ({}^{S}\!/_{\mathfrak{m}})^{\oplus r}$复合后，得到 $\mathcal{Z}_\mathfrak{m}(\Bbbk)$中的一个点 $[S^{\oplus r} \twoheadrightarrow V]$。这可扩展为一个自然同构 $\phi\colon \mathbf{Gr}(d,r) \to \mathcal{Z}_\mathfrak{m}$。□

命题 2.31. 闭子概形 $\mathcal{Z}_\mathfrak{m} \subseteq \operatorname{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)$ 的维数为 $(r-d)d$。

证明。 由命题 2.30， 维数 $\mathcal{Z}_\mathfrak{m}$ = 维数 $\mathbf{Gr}(d,r) = (r-d)d$。 □

由引理 2.18，若 维数 U_{e_1} < 维数 $\mathcal{Z}_\mathfrak{m}$ 则 $\operatorname{Quot}_d^r(\mathbb{A}^n)$ 是可约的。由命题 2.28 和 2.31，我们推得只有在 $n < 1-d$ 时才会如此。我们讨论两点的 Quot 概形的不可约性。

命题 2.32。 设 $n \geq 1, r \geq 2$。则 $\operatorname{Quot}_2^r(\mathbb{A}^n)$ 是不可约的。

证明。设 $[p\colon S^{\oplus r}\twoheadrightarrow M=S^{\oplus r}/K]\in \mathrm{Quot}_2^r(\mathbb{A}^n)(\Bbbk)$。只需证明这种形式的每个 $[p]$ 都是点组的极限，即 $\mathcal{U}\subseteq \mathrm{Quot}_2^r(\mathbb{A}^n)$ 的点。由于 $\dim_{\Bbbk} M=2$，$\mathrm{Supp}\,M$至多由两个点组成，它们分别对应于极大理想 $\mathfrak{m}_i\lhd S$。若 $\mathrm{Supp}\,M=\{\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2\}$且$\mathfrak{m}_1\neq\mathfrak{m}_2$，则 $\dim_{\Bbbk} M_{\mathfrak{m}_1}=\dim_{\Bbbk} M_{\mathfrak{m}_1}=1$，因此 M对应于由 $\{\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2\}$ 给出的点组。若 $\mathrm{Supp}\,M=\{\mathfrak{m}\}$，则或者 $\mathfrak{m}M=0$，或者 $\mathfrak{m}^2M=0$。

若 $\mathfrak{m}M=0$，则 $[p]$ 在轨迹 $\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}$中定义一个点，因此 $M\simeq (S/\mathfrak{m})^{\oplus 2}$。不失一般性，假设 $\mathfrak{m}=(x_1,\dots,x_n)$。令 $e_1,\dots,e_r$为 $S^{\oplus r}$的基，使得每个 e_i对应于 $1\in S$。令 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 为 M的基，其中每个 ε_i 对应于 $1\in S/\mathfrak{m}$。由命题 2.30，我们有同构 $\mathrm{Gr}(2,r)\simeq\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}$，因此 $[p\colon S^{\oplus r}\twoheadrightarrow M=(S/\mathfrak{m})^{\oplus 2}]\in\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}(\Bbbk)$由 $S^{\oplus r}$的基 $e_1,\dots,e_r$ 以及 M的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的一个 $2\times r$ 满秩矩阵确定。考虑

$$p(t)\colon S^{\oplus r}\twoheadrightarrow M_t\simeq S/\mathfrak{m}\oplus S/\mathfrak{m}_t=S/\mathfrak{m}\oplus S/(x_1-t,x_2,\dots,x_n),$$

由与 p 相同的矩阵给出，其中 M_t 配备基 $\widetilde{\varepsilon}_1$，$\widetilde{\varepsilon}_2$ 分别对应于 $1\in S/\mathfrak{m}$ 和$1\in S/\mathfrak{m}_t$。于是

$$p=\lim_{t\to 0} p(t).$$

若 $\mathfrak{m}^2M=0$，则 M 与 $\Bbbk[x]/(x^2)$ 同构。令 η_1，η_2 为分别对应于 $\mathbf{1}$，$x\in\Bbbk[x]/(x^2)$ 的基。我们将证明，这可视为 S/I_t 的平坦极限，其中 $I_t=\mathfrak{m}\cap\mathfrak{m}_t=\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}_t$。理想 I_t 包含以下形式的元素：

$$x_i(x_1-t)\quad\text{and}\quad x_i\ \text{ for } i\neq 1,$$

因此 x_2，……，$x_n\in I_t$，并且在 S/I_t 中有 $x_1x_i\equiv tx_i$，也就是说，

$$x_1^2\equiv tx_1\quad\text{and}\quad x_1x_i\equiv 0\ \text{ for } i\neq 1.$$

令 $t\to 0$，得到 $I_0=\lim\limits_{t\to 0} I_t$，使得

$$x_1^2\equiv 0,\ x_1x_i\equiv 0\ \text{ and }\ x_2,\dots,x_n\in I_0.$$

因此$S/I_0\simeq\Bbbk[x]/(x^2)$。为构造极限

$$[p\colon S^{\oplus r}\twoheadrightarrow M\simeq\Bbbk[x]/(x^2)]=\lim_{t\to 0}[p(t)\colon S^{\oplus r}\twoheadrightarrow M\simeq S/I_t],$$

令 $\widetilde{\eta}_1$，$\widetilde{\eta}_2$ 为分别对应于 $\mathbf{1}$，$x_1\in S/I_t$ 的基，并用我们希望 p 具有的同一矩阵定义 $p(t)$，基分别取为 $\{\widetilde{\eta}_i\}$ 和 $\{\eta_i\}$。□

2.6. 张量。我们回顾张量理论中的相关概念。固定有限维 $\Bbbk$-向量空间 A、B、C。张量 是 $A\otimes B\otimes C$ 的一个元素。

定义 2.33。设 $\tau\in A\otimes B\otimes C$。如果相应的映射 $A^\vee\otimes B^\vee\to C$ 是满射，则称 τ 是 C-简洁的。等价地，不存在满足 $\tau\in A\otimes B\otimes C'$ 的真子空间 $C'\subseteq C$。如果 τ 在每个坐标上都是简洁的，则称其为简洁的。

定义 2.34。若两个张量 τ、$\tau'\in A\otimes B\otimes C$ 位于 $\mathrm{GL}(A)\times\mathrm{GL}(B)\times\mathrm{GL}(C)$ 通过基变换作用所产生的同一轨道中，则称它们同构。

定义 2.35。设 $\tau\in A\otimes B\otimes C$。如果对于某些$a\in A$、$b\in B$、$c\in C$，有 $\tau=a\otimes b\otimes c$，则称 τ 的秩 为 $\mathbf{1}$。如果 r 是使 τ 能够写成 r 个秩 $\mathbf{1}$ 张量之和的最小值，则称 τ 的秩 为 r；如果 r 是使 τ 能够表示为 r 个秩 $\mathbf{1}$ 张量的极限的最小值，则称其边界秩 为 r。

边界秩的概念可以通过割线簇从几何上加以解释。

定义 2.36。 设 V 是 $\mathbb{k}$ 上的一个向量空间，且设 $X \subseteq \mathbb{P}V$ 是一个射影簇。对于 $r \in \mathbb{Z}_+$，定义 r 阶割平面的轨迹

$$\sigma_r^\circ(X) = \bigcup_{p_i \in X} \langle p_1, \ldots, p_r \rangle \subseteq \mathbb{P}V,$$

并将 r-次割簇 X 定义为其闭包

$$\sigma_r(X) = \overline{\sigma_r^\circ(X)} \subseteq \mathbb{P}V.$$

设 $X = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$，并考虑塞格雷嵌入

$$X \hookrightarrow \mathbb{P}(A \otimes B \otimes C), \quad ([a], [b], [c]) \mapsto [a \otimes b \otimes c].$$

那么，仿射锥 $\widehat{\sigma}_r$ 在 $\sigma_r := \sigma_r(X)$上参数化边界秩至多为 r 的张量。此外，我们还可以用简约张量来描述 Segre 割簇。

定义 2.37。 设 $\tau \in A \otimes B \otimes C$，其中 $\dim_{\mathbb{k}} A = \dim_{\mathbb{k}} B = \dim_{\mathbb{k}} C = d < \infty$。若 τ 是简洁的且边界秩为 d，则称其具有最小边界秩。

我们还可以将割簇与 $\mathrm{GL}(A) \times \mathrm{GL}(B) \times \mathrm{GL}(C)$ 的作用联系起来。

定义 2.38. 设 A, B, C 为 $\mathbb{k}$-向量空间，且 $\dim_{\mathbb{k}} A = \dim_{\mathbb{k}} B = \dim_{\mathbb{k}} C = d < \infty$。固定 A, B, C的基 $\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\}$。形如

$$\mu_d = a_1 \otimes b_1 \otimes c_1 + \ldots + a_d \otimes b_d \otimes c_d$$

的张量称为单位张量。

注意，单位张量是秩为 d 的简约张量。此外，所有单位张量都同构，因此我们可以取任意一个这种形式的张量，并称其为单位张量。

命题 2.39. 簇 $\widehat{\sigma}_r$ 与单位张量在 $\mathrm{GL}(A) \times \mathrm{GL}(B) \times \mathrm{GL}(C)$作用下的轨道闭包重合。

换言之，所有秩至多为 r 的张量所成集合的闭包，与所有秩至多为 r的简洁张量所成集合的闭包相同。

现在我们回顾一些结果，这些结果在讨论 $\mathrm{Bilin}_{d\,d\,d''}^{r_1\,r_2}(\mathbb{A}^n)$ 的不可约性时会用到。

引理 2.40. $\mathbb{P}(A \otimes B \otimes C)$中简约张量构成的子空间是开集。

证明. 根据定义

$$\{\tau \in A \otimes B \otimes C \mid \tau \text{ is concise}\} = \{\tau \text{ is } A\text{-concise}\} \cap \{\tau \text{ is } B\text{-concise}\} \cap \{\tau \text{ is } C\text{-concise}\},$$

因此，只需证明 $\{\tau \text{is } C\text{-简洁}\}$ 是开集。同样，根据定义，我们有

$$\{\tau \in A \otimes B \otimes C \mid \tau \text{ is } C\text{-concise}\} = \{\text{the induces map } \tau^\vee \colon A^\vee \otimes B^\vee \to C \text{ is surjective}\}.$$

映射 $\tau^\vee \colon A^\vee \otimes B^\vee \to C$由一个 $d^2 \times d$矩阵给出，而满射性等价于该矩阵存在一个非零子式。
□

命题 2.41. 设 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ 是一个不可约射影簇。那么

$$\dim \sigma_r(X) \leq \min\{N, r(\dim X + 1) - 1\}.$$

证明。 直接由预期维数的定义得出 [CGO14，定义 2。7]。 □

3. 双线性概形

我们已将双线性函子 $\mathrm{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d_1\ d_2},_,_,_{d_3}(\mathbb{A}^n)$ 定义为这样的函子：其 $\Bbbk$-点 $[p_1, p_2, \pi]$对应于 S-模的满射

$$p_1 \colon S^{\oplus r_1} \twoheadrightarrow M_1 = {}^{S^{\oplus r_1}}\!/_{K_1} \quad \text{and} \quad p_2 \colon S^{\oplus r_2} \twoheadrightarrow M_2 = {}^{S^{\oplus r_2}}\!/_{K_2},$$
$$\text{together with } \pi \colon M_1 \otimes_S M_2 \twoheadrightarrow M_3 = {}^{S^{\oplus r_1 r_2}}\!/_{K_3},$$

使得 $\dim_{\Bbbk} M_i = d_i$。我们将具有相同核的满射视为相同。对于任意 $\Bbbk$-概形 X，双线性函子定义为

$$\mathrm{Bilin}^{r_1,r_2}_{d_1,d_2,d_3}(\mathbb{A}^n)(X) = \left\{ \begin{array}{c} \text{quasicoherent quotients of } (\mathcal{O}_X \otimes_{\Bbbk} S)\text{-modules} \\ \mathcal{O}_X^{\oplus r_i} \otimes S \xrightarrow{p_i} \!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{M}_i \text{ for } i = 1, 2; \\ \text{together with a quotient } \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\pi} \!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{M}_3; \\ \text{such that } \mathcal{M}_j \text{ is locally free of rank } d_j \text{ over } \mathcal{O}_X \text{ for } j = 1, 2, 3 \end{array} \right\}_{/\sim}$$

其中 我们将具有相同核的满射视为相同。对于仿射概形 $X = \operatorname{Spec} A$，记作

$$\mathrm{Bilin}^{r_1,r_2}_{d_1,d_2,d_3}(\mathbb{A}^n)(A) = \mathrm{Bilin}^{r_1,r_2}_{d_1,d_2,d_3}(\mathbb{A}^n)(\operatorname{Spec} A).$$

在这种情况下，我们有

$$\mathrm{Bilin}^{r_1,r_2}_{d_1,d_2,d_3}(\mathbb{A}^n)(A) = \left\{ \begin{array}{c} S_A\text{-linear surjections } A^{\oplus r_i} \otimes S \xrightarrow{p_i} \!\!\!\!\twoheadrightarrow M_i \text{ for } i = 1, 2; \\ \text{together with a surjection } M_1 \otimes_{S_A} M_2 \xrightarrow{\pi} \!\!\!\!\twoheadrightarrow M_3; \\ \text{such that } M_j \text{ is locally free of rank } d_j \text{ over } A \text{ for } j = 1, 2, 3 \end{array} \right\}_{/\sim}$$

3.1. 与希尔伯特概形和 Quot 概形的关系。 Bilinear 函子可以通过以下方式看作希尔伯特概形的一种推广。

命题 3.1。 设 $d = d_i$ 对于 $i = 1$，2、3 和 $r_1 = r_2 = 1$。那么存在一个同构

$$\mathrm{Bilin}^{1,1}_{d,d,d}(\mathbb{A}^n) \simeq \mathrm{Hilb}_d(\mathbb{A}^n).$$

证明。 $\mathrm{Bilin}^{1\ 1}_{d\ d},_,_{d}(\mathbb{A}^n)$ 的 $\Bbbk$-点对应于

$$p_1 \colon S^{\oplus 1} \twoheadrightarrow M_1 = {}^{S^{\oplus 1}}\!/_{J_1} \text{ and } p_2 \colon S^{\oplus 1} \twoheadrightarrow M_2 = {}^{S^{\oplus 1}}\!/_{J_2}, \text{ where } J_1, J_2 \text{ are ideals in } S,$$
$$\text{together with } \pi \colon M_1 \otimes_S M_2 \twoheadrightarrow M_3.$$

我们有

$$\dim_{\Bbbk} {}^{S^{\oplus 1}}\!/_{J_1} \otimes_S {}^{S^{\oplus 1}}\!/_{J_2} = \dim_{\Bbbk} {}^{S^{\oplus 1}}\!/_{(J_1 + J_2)} \leq \dim_{\Bbbk} {}^{S^{\oplus 1}}\!/_{J_1} = \dim_{\Bbbk} {}^{S^{\oplus 1}}\!/_{J_2} = \dim_{\Bbbk} M_3. \tag{3.2}$$

满射 $\pi\colon {}^{S^{\oplus 1}}\!/_{(J_1 + J_2)} \twoheadrightarrow M_3$ 仅当 维数$_{\Bbbk}\, {}^{S^{\oplus 1}}\!/_{(J_1 + J_2)} \geq$维数$_{\Bbbk}\, M_3$时才存在，因此 (3.2) 中的不等式必为等式，且映射 $\pi\colon {}^{S^{\oplus 1}}\!/_{(J_1 + J_2)} \simeq {}^{S^{\oplus 1}}\!/_{J_1} \twoheadrightarrow M_3$ 是 S-模的同构。因此，$J_1 = J_2 = J_3$ 并且由于我们将核相同的满射视为相同，点$[p_1, p_2, \pi]$ 由单个映射 $p_1 = p_2 = p\colon S \twoheadrightarrow M = {}^{S}\!/_{J}$唯一确定。这就得到了所需的同构。

□

双线性函子也可以看作 Quot 概形的一种推广。理解这种联系有两种方式。第一种观点已在 [Jel23，问题 XXXVIII] 中阐述：函子 $\mathrm{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d_1\ d_2},_,_{d_2}(\mathbb{A}^n)$ 给出了一个空间，用于参数化模及作用于其上的代数。对于第二种观点，设 $[p_1, p_2, \pi]$ 是 $\mathrm{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d_1\ d_2},_,_{d_3}(\mathbb{A}^n)$ 的一个 $\Bbbk$-点，并注意到三个映射 p_1、p_2、π 各自确定 Quot 概形的一个 $\Bbbk$-点。对于映射 p_i，Quot 概形的点定义为 $[p_i\colon\ S^{\oplus r_i} \twoheadrightarrow M_i = {}^{S^{\oplus r_i}}\!/_{K_i}] \in \mathrm{Quot}^{r_i}_{d_i}(\mathbb{A}^n)(\Bbbk)$。映射 π 有唯一的提升

p_3: $S^{\oplus r_1 r_2} \twoheadrightarrow M_3 = S^{\oplus r_1 r_2}/K_3$，它确定 $\mathrm{Quot}^{r_1 r_2}_{d_3}(\mathbb{A}^n)$ 的一个 $\Bbbk$-点。我们将证明这可以延拓为一个自然变换，并利用它将 Quot 概形的已知结果推广到双线性函子的情形。

3.2. **与张量的关系**。现在我们描述特例 $\mathrm{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d\ d\ d,,}(\mathbb{A}^n)$，并刻画由 $\Bbbk$-点诱导的张量。取 $[p_1, p_2, \pi] \in \mathrm{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d\ d\ d,,}(\mathbb{A}^n)(\Bbbk)$，其定义如下

$$p_i \colon S^{\oplus r_i} \twoheadrightarrow M_i \ (i = 1, 2), \quad \pi \colon M_1 \otimes M_2 \twoheadrightarrow M_3,$$

其中 $\dim_{\Bbbk} M_i = d$。设 $\{a_j\}, \{b_j\}, \{c_j\}$ 分别是 M_1, M_2, M_3 在 $\Bbbk$ 上的基。由向量空间 $V \otimes W^\vee \simeq \mathrm{Hom}(V^\vee, W)$ 的自然同构，我们得到与 π 对应的张量，定义如下

$$\mu_\pi \in M_1^\vee \otimes M_2^\vee \otimes M_3.$$

若 π 由 $\pi(a_i \otimes b_j) = \sum_{1 \le k \le d} s_{kij} c_k$ 给出，则

$$\mu_\pi = \sum_{i,j} a_i^* \otimes b_j^* \otimes \big(\sum_k s_{kij} c_k\big),$$

其中 $\{a_j^*\}, \{b_j^*\}$ 分别是 $M_1^\vee$, $M_2^\vee$ 的对偶基。注意，来自 $\mathrm{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d\ d\ d,,}(\mathbb{A}^n)$ 中各点的映射 π: $M_1 \otimes M_2 \twoheadrightarrow M_3$ 对应于 $M_1^\vee \otimes M_2^\vee \otimes M_3$ 中的 M_3-简洁张量。

命题 3.3. 设 $[p_1, p_2, \pi] \in \mathrm{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d\ d\ d,,}(\mathbb{A}^n)$。那么 π 对应于一个秩至少为 d的张量。

证明。由于 π 是满射，对应的张量是 M_3-简洁的，并且也是 $\dim_{\Bbbk} M_1 \otimes M_2 \ge d$。反之，假设对应的张量 μ的秩为 $r < d$。那么存在基 $\{a_i\}, \{b_i\}$，它们分别属于M_1, M_2 ，使得

$$\mu = a_1^* \otimes b_1^* \otimes \pi(a_1 \otimes b_1) + \ldots + a_r^* \otimes b_r^* \otimes \pi(a_r \otimes b_r),$$

这意味着像 $\pi(a_i \otimes b_i)$ 张成了 M_3 中一个维数为 $r < d$ 的子空间，这与 π的满射性矛盾。□

我们稍后将看到，对应于简洁张量的轨迹是开集，并且产生 $\mathrm{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d\ d\ d,,}(\mathbb{A}^n)$ 的主不可约分支。

3.3. **双线性函子是可表的**。双线性函子 $\mathrm{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d_1\ d_2,,,d_3}(\mathbb{A}^n)$ 是一个可表函子的闭子函子，因此是可表的。每个满射 p_i 都给出 Quot 概形 $\mathrm{Quot}^{r_i}_{d_i}(\mathbb{A}^n)$ 的一个 $\Bbbk$-点，其中 $i = 1,2$；第三个映射 π 唯一地提升为一个满射 $S^{\oplus r_1 r_2} \twoheadrightarrow M_3$，因此它给出 Quot 概形 $\mathrm{Quot}^{r_1 r_2}_{d_3}(\mathbb{A}^n)$ 的一个 $\Bbbk$-点。这定义了以下在 $\Bbbk$-点上的包含：

$$\mathrm{Bilin}^{r_1, r_2}_{d_1, d_2, d_3}(\mathbb{A}^n)(\Bbbk) \hookrightarrow (\mathrm{Quot}^{r_1}_{d_1}(\mathbb{A}^n) \times \mathrm{Quot}^{r_2}_{d_2}(\mathbb{A}^n) \times \mathrm{Quot}^{r_1 r_2}_{d_3}(\mathbb{A}^n))(\Bbbk).$$

同样的推理定义了包含

$$\mathrm{Bilin}^{r_1, r_2}_{d_1, d_2, d_3}(\mathbb{A}^n)(A) \hookrightarrow (\mathrm{Quot}^{r_1}_{d_1}(\mathbb{A}^n) \times \mathrm{Quot}^{r_2}_{d_2}(\mathbb{A}^n) \times \mathrm{Quot}^{r_1 r_2}_{d_3}(\mathbb{A}^n))(A)$$

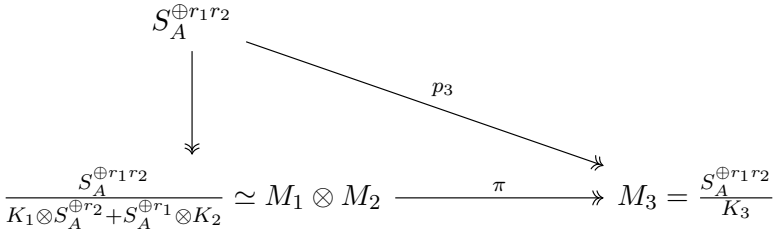
对于任意仿射概形 $\mathrm{Spec}\, A$，这表明 $\mathrm{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d_1\ d_2,\ ,\ ,d_3}(\mathbb{A}^n)$ 是乘积 $\mathrm{Quot}^{r_1}_{d_1}(\mathbb{A}^n) \times \mathrm{Quot}^{r_2}_{d_2}(\mathbb{A}^n) \times \mathrm{Quot}^{r_1 r_2}_{d_3}(\mathbb{A}^n)$ 的子函子。在本节中，我们将用 $\mathcal{Q}$ 表示乘积 $\mathrm{Quot}^{r_1}_{d_1}(\mathbb{A}^n) \times \mathrm{Quot}^{r_2}_{d_2}(\mathbb{A}^n) \times \mathrm{Quot}^{r_1 r_2}_{d_3}(\mathbb{A}^n)$。我们将利用命题 2.9 证明 $\mathrm{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d_1\ d_2,\ ,\ ,d_3}(\mathbb{A}^n)$ 是 $\mathcal{Q}$ 的闭子函子。

我们首先描述 $T \times_{\mathcal{Q}} \mathrm{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d_1\ d_2,,,d_3}(\mathbb{A}^n)_{_}$（定义 2.6 中）所对应的纤维积，以深入了解满足命题 2.9的理想的性质，前提是该理想存在。令 $T = \mathrm{Spec}\, A$,

$T'=\mathbf{Spec}\ B$为仿射概形。只需考虑 $B=A/J$ 的情形，其中 $J\lhd A$，因为我们总可以经由核 $f^{\#}$ 进行分解：$A\twoheadrightarrow A/\ker(f^{\#})\to B$。令 $[p_i]$ 表示 $\mathcal{Q}(A)$ 中的一个元素，其定义为

$$\begin{aligned}[p_i]&=[p_1,p_2,p_3]\\&=\big[S_A^{\oplus r_1}\xrightarrow{p_1}\!\!\!\!\twoheadrightarrow M_1,\ S_A^{\oplus r_2}\xrightarrow{p_2}\!\!\!\!\twoheadrightarrow M_2,\ S_A^{\oplus r_1r_2}\xrightarrow{p_3}\!\!\!\!\twoheadrightarrow M_3\big].\end{aligned}$$

当且仅当第三个映射 $S_A^{\oplus r_1r_2}\xrightarrow{p_3}\!\!\!\!\twoheadrightarrow M_3$ 可分解为以下形式时，它对应于 $\mathbf{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d_1\ d_2,,d_3}(\mathbb{A}^n)(A)$ 的一个元素



其中 $M_i=S^{\oplus r_i}/K_i$ 适用于 $i=1,2$。若映射 π 存在，则它是唯一的，因此在这种情况下，我们可以写作$[p_i]\in\mathbf{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d_1\ d_2,,d_3}(\mathbb{A}^n)(A)$。另一方面，映射 $\pi\colon M_1\otimes M_2\twoheadrightarrow M_3=S^{\oplus r_1r_2}/K_3$ 存在当且仅当以下两个复合映射

$$K_1\otimes S_A^{\oplus r_2}\hookrightarrow S_A^{\oplus r_1r_2}\twoheadrightarrow M_3\quad\text{and}\quad S_A^{\oplus r_1}\otimes K_2\hookrightarrow S_A^{\oplus r_1r_2}\twoheadrightarrow M_3$$

均为零，这等价于核的包含关系 $K_1\otimes S_A^{\oplus r_2}+S_A^{\oplus r_1}\otimes K_2\subseteq K_3$。这一推理确定了有序对 $(T'\xrightarrow{f}T,\ [p_1',p_2',\pi]\in\mathbf{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d_1\ d_2,,d_3}(\mathbb{A}^n)(T'))$ 定义函子的纤维积中的一个元素所需满足的条件

$$\begin{aligned}&(\underline{T}\times_{\mathcal{Q}}\mathrm{Bilin}^{r_1,r_2}_{d_1,d_2,d_3}(\mathbb{A}^n))(T')=\\&\qquad\big\{(T'\xrightarrow{f}T,\ [p_1',p_2',\pi])\in\underline{T}(T')\times\mathrm{Bilin}^{r_1,r_2}_{d_1,d_2,d_3}(\mathbb{A}^n)(T')\mid f^*[p_i]=\iota([p_1',p_2',\pi])\big\},\end{aligned}$$

其中 $\iota\colon\mathbf{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d_1\ d_2,,d_3}(\mathbb{A}^n)\hookrightarrow\mathcal{Q}$是函子的包含。我们记 $M_i'=M_i\otimes_A B$为 $i=1,2,3$。那么，对于形如

$$\begin{aligned}f^*[p_i]&=\big[S_B^{\oplus r_1}\xrightarrow{p_1'}\!\!\!\!\twoheadrightarrow M_1',\ S_B^{\oplus r_2}\xrightarrow{p_2'}\!\!\!\!\twoheadrightarrow M_2',\ S_B^{\oplus r_1r_2}\xrightarrow{p_3'}\!\!\!\!\twoheadrightarrow M_3'\big],\\[p_1',p_2',\pi]&=\big[S_B^{\oplus r_1}\xrightarrow{p_1'}\!\!\!\!\twoheadrightarrow M_1',\ S_B^{\oplus r_2}\xrightarrow{p_2'}\!\!\!\!\twoheadrightarrow M_2',\ M_1'\otimes_{S_B}M_2'\xrightarrow{\pi}\!\!\!\!\twoheadrightarrow M_3'\big]\end{aligned}$$

我们有 $f^*[p_i]=\iota([p_1',p_2',\pi])$ 当且仅当 $f^*[p_i]$定义了 $\mathbf{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d_1\ d_2,,d_3}(\mathbb{A}^n)(B)$ 的一个元素，这等价于映射 $p_3'\colon S^{\oplus r_1r_2}\twoheadrightarrow M_3'$经过 $M_1'\otimes_{S_B}M_2'\xrightarrow{\pi}\!\!\!\!\twoheadrightarrow M_3'$的分解。令$M_i'=S_B^{\oplus r_i}/K_i'$为 $i=1,2$ 且 $M_3'=S_B^{\oplus r_1r_2}/K_3'$。那么，与前面一样，映射 π存在当且仅当我们有核的包含

$$K_1'\otimes S_B^{\oplus r_2}+S_B^{\oplus r_1}\otimes K_2'\subseteq K_3'\tag{3.4}$$

或者等价地说，如果这些复合

$$K_1'\otimes S_B^{\oplus r_2}\to S_B^{\oplus r_1r_2}\twoheadrightarrow M_3'\quad\text{and}\quad S_B^{\oplus r_1}\otimes K_2'\to S_B^{\oplus r_1r_2}\twoheadrightarrow M_3'\tag{3.5}$$

为零。换言之，给定一个元素 $[p_i]\in\mathcal{Q}(A)$，我们要寻找这样的商 $A\twoheadrightarrow A/J$：将 $K_1\otimes S_A^{\oplus r_2}$, $S_A^{\oplus r_1}\otimes K_2\twoheadrightarrow M_3$ 与 A/J 做张量积后，得到的映射为零。

另一方面，声称 $\mathbf{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d_1\ d_2,,d_3}(\mathbb{A}^n)$ 是 $\mathcal{Q}$ 的闭子函子，等价于声称对于所有仿射概形 T、T'，纤维积 $T\times_{\mathcal{Q}}\mathbf{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d_1\ d_2,,d_3}(\mathbb{A}^n)$ 可表为

一个闭子概形 $Z = \operatorname{Spec}(A/I) \subseteq T$，其中 $I \lhd A$ 是命题 2.9 中的理想。结合这两种观点，我们得出结论：所寻找的是理想 $I \lhd A$，使得映射 $f\colon \operatorname{Spec}(A/J) \to \operatorname{Spec} A$ 满足条件（3.4）或（3.5），当且仅当它可分解为经过$\operatorname{Spec}(A/I) \subseteq \operatorname{Spec} A$。

条件 3.6（对于理想 $I \lhd A$）。令 $f\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$，其中 $B = A/J$。令

$$[p_i] = \left[S_A^{\oplus r_1} \xrightarrow{p_1} M_1,\ S_A^{\oplus r_2} \xrightarrow{p_2} M_2,\ S_A^{\oplus r_1 r_2} \xrightarrow{p_3} M_3\right] \in \mathcal{Q}(A)$$

满足

$$f^*[p_i] = \left[S_B^{\oplus r_1} \xrightarrow{p_1'} M_1',\ S_B^{\oplus r_2} \xrightarrow{p_2'} M_2',\ S_B^{\oplus r_1 r_2} \xrightarrow{p_3'} M_3'\right] \in \mathcal{Q}(B).$$

令 $M_i = S_A^{\oplus r_i}/K_i$ 和 $M_i' = S_B^{\oplus r_i}/K_i'$，对于 $i = 1,\ 2$。定义映射

$$\psi_1\colon K_1' \otimes S_B^{\oplus r_2} = K_1 \otimes S_A^{\oplus r_2} \otimes A/J \to S_B^{\oplus r_1 r_2} \to M_3',$$
$$\psi_2\colon S_B^{\oplus r_1} \otimes K_2' = S_A^{\oplus r_1} \otimes K_2 \otimes A/J \to S_B^{\oplus r_1 r_2} \to M_3'$$

为典范嵌入和商映射的复合。在此情形下，当且仅当 $I \subseteq J$ 时，我们得到零映射 $\psi_i \equiv 0$。

定理 3.7。满足条件 *3.6* 的理想存在。

在证明定理 3.7之前，我们先说明理想 I 应当是什么的动机。令

$$Q_1 = K_1 \otimes S_A^{\oplus r_2} \quad \text{and} \quad Q_2 = S_A^{\oplus r_1} \otimes K_2.$$

考虑复合映射 ψ_j：对于 $j = 1,\ 2$，有 $Q_j \to S_A^{\oplus r_1 r_2} \twoheadrightarrow M_3$。它们是局部自由$A$-模的态射，因此确定了 Spec A上拟凝聚层的态射。考虑限制到某个开子概形 Spec $R = $Spec $A_f \subseteq$Spec A，使得模 Q_i和 M_3是自由的。于是可以写成

$$\varphi_i = (\psi_i)_{|\operatorname{Spec} R}\colon M = (Q_i)_{|\operatorname{Spec} R} \to N = (M_3)_{|\operatorname{Spec} R}$$

对于该限制。它们是自由 R-模的态射，因此由某些矩阵 P_i 给出，其元素属于 R。考虑一个态射 f：Spec(R/J) $\to$Spec R，它对应于对理想$J \lhd R$取商。这诱导出拉回映射 f^*： $\mathcal{Q}(R)$ $\to \mathcal{Q}(R/J)$，并将映射 φ_i发送为

$$\varphi_i' = \varphi_i \otimes 1\colon M_i' = M_i \otimes_B R/J \to N' = N \otimes_B R/J.$$

由于模 M，N是自由的，我们有同构

$$M_i' = M_i \otimes R/J \simeq R^{\oplus m_i} \otimes R/J \simeq (R/J)^{\oplus m_i} \text{ for } i = 1, 2,$$
$$N' = N \otimes R/J \simeq R^{\oplus n} \otimes R/J \simeq (R/J)^{\oplus n},$$

这表明 M_i'、N'也都是自由的。映射 φ_i'由矩阵 P_i'给出，其元素是 P_i 在 R/J中的元素的像。由此可知，映射 φ_i' 为零，当且仅当 P_i 的元素都属于理想 $J \lhd R$。这表明，条件 I 中的理想 3.6 必须包含此类矩阵P_i 的元素，换言之，必须包含定义 2.12中的 Fitting 理想。

定理的证明 *3.7*。设$Q_1 = K_1 \otimes S_A^{\oplus r_2}$和$Q_2 = S_A^{\oplus r_1} \otimes K_2$如上。考虑复合映射 ns

$$\psi_j\colon Q_j \to S_A^{\oplus r_1 r_2} \twoheadrightarrow M_3 \quad \text{for } j = 1, 2.$$

我们断言，对每个 $\mathcal{I}(\psi_j)$，Fitting 理想的构造 在 $j = 1$ 上，2 给出理想 $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\psi_1) + \mathcal{I}(\psi_2)$，它满足条件 3.6。取一个仿射开子概形 Spec A_f，使得模 $(Q_j)^{|\operatorname{Spec} A_f}$

和 $(M_3)^{|\operatorname{Spec} A_f}$ 都是自由的。于是，根据（2.11）中的同构，映射 ψ_j 的拉回为零，当且仅当 $\mathcal{I} \subseteq J$。由命题 2.10，这给出了 A 中定义良好的理想。□

由定义在仿射概形上的函子 $\mathcal{Z}(\psi_1) \cap \mathcal{Z}(\psi_2)$ 表示的概形可以粘合起来，得到表示双线性函子 $\mathbf{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d_1\ d_2,,,d_3}(\mathbb{A}^n)$ 的闭子概形 $Bilin \subseteq \mathcal{Q}$。

3.4. 双线性概形的切空间。令 $\mathbf{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d_1\ d_2,,,d_3}(\mathbb{A}^n) \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathcal{Q}$ 表示第 3.3 节中的函子闭嵌入。我们将结合定理 2.22，利用这一结果计算双线性概形的切空间。我们先固定记号。令 $M_i = {}^{F_i}\!/_{K_i}$ 和 $M_i = \widetilde{{}^{\widetilde{F}_i}\!/_{\widetilde{K}_i}}$ 对于 $i = 1$、2、3。记 $F_j = S^{\oplus r_j}$、$F_j = S[\varepsilon]^{\oplus r_j}$ 为 $j = 1$、2 和 $F_3 = S[\varepsilon]^{\oplus r_1 r_2}$、$F_3 = S^{\oplus r_1 r_2}$。考虑

$$\left[F_1 \overset{p_1}{\twoheadrightarrow} M_1,\ F_2 \overset{p_2}{\twoheadrightarrow} M_2,\ F_3 \overset{p_3}{\twoheadrightarrow} M_3\right] = [p_1, p_2, p_3] \in \mathcal{Q}(\Bbbk),$$

$$\left[\widetilde{F}_1 \overset{\widetilde{p_1}}{\twoheadrightarrow} \widetilde{M}_1,\ \widetilde{F}_2 \overset{\widetilde{p_2}}{\twoheadrightarrow} \widetilde{M}_2,\ \widetilde{F}_3 \overset{\widetilde{p_3}}{\twoheadrightarrow} \widetilde{M}_3\right] = [\widetilde{p_1}, \widetilde{p_2}, \widetilde{p_3}] \in \mathcal{Q}(\Bbbk[\varepsilon]).$$

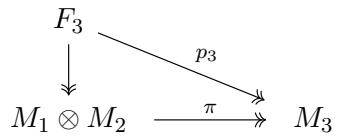
点 $[\widetilde{p_1}, \widetilde{p_2}, \widetilde{p_3}]$ 在 $[p_1, p_2, p_3]$ 处确定一个切向量，如果 $M_i \simeq \widetilde{M}_i/\varepsilon\widetilde{M}_i$。另请考虑

$$\left[F_1 \overset{p_1}{\twoheadrightarrow} M_1,\ F_2 \overset{p_2}{\twoheadrightarrow} M_2,\ M_1 \otimes_S M_2 \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M_3\right] = [p_1, p_2, \pi] \in \mathbf{Bilin}^{r_1,r_2}_{d_1,d_2,d_3}(\mathbb{A}^n)(\Bbbk),$$

$$\left[\widetilde{F}_1 \overset{\widetilde{p_1}}{\twoheadrightarrow} \widetilde{M}_1,\ \widetilde{F}_2 \overset{\widetilde{p_2}}{\twoheadrightarrow} \widetilde{M}_2,\ \widetilde{M}_1 \otimes_{S[\varepsilon]} \widetilde{M}_2 \overset{\widetilde{\pi}}{\twoheadrightarrow} \widetilde{M}_3\right] = [\widetilde{p_1}, \widetilde{p_2}, \widetilde{\pi}] \in \mathbf{Bilin}^{r_1,r_2}_{d_1,d_2,d_3}(\mathbb{A}^n)(\Bbbk[\varepsilon]).$$

与 $\mathcal{Q}$ 的情形一样，如果 $[\widetilde{p_1}, \widetilde{p_2}, \widetilde{\pi}]$ 沿 $\alpha\colon \operatorname{Spec} \Bbbk[\varepsilon] \to \operatorname{Spec} \Bbbk$ 的拉回给出 $[p_1, p_2, \pi]$，则点 $[\widetilde{p_1}, \widetilde{p_2}, \widetilde{\pi}]$ 在 $[p_1, p_2, \pi]$ 处确定一个切向量；这等价于对每个$i = 1,2,3$，都有 $M_i = \widetilde{M}_i/\varepsilon\widetilde{M}_i$。

根据第 3.3 节中的相同推理，$[p_1, p_2, p_3] \in \mathcal{Q}(\Bbbk)$ 确定一个 $\Bbbk$-点 $[p_1, p_2, \pi] \in \mathbf{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d_1\ d_2,,,d_3}(\mathbb{A}^n)(\Bbbk)$，当且仅当我们有如下分解



将 $F_3 \twoheadrightarrow M_1 \otimes M_2$ 的核记为 $Q = K_1 \otimes F_2 + F_1 \otimes K_2 = Q_1 + Q_2$。于是我们有同构 $M_1 \otimes M_2 \simeq {}^{F_3}\!/_{Q}$，且映射 $\pi\colon M_1 \otimes M_2 \twoheadrightarrow M_3 = {}^{F_3}\!/_{K_3}$ 存在，当且仅当复合映射 $Q_j \hookrightarrow F_3 \twoheadrightarrow M_3$ 对 $j = 1$，2 都为零。等价地，映射 π 存在，当且仅当有包含 $Q \subseteq K_3$。

考虑 $\mathcal{Q}$ 在 $[p_1, p_2, p_3]$处的切空间。根据定理 2.22，它同构于

$$\operatorname{Hom}_S(K_1, M_1) \times \operatorname{Hom}_S(K_2, M_2) \times \operatorname{Hom}_S(K_3, M_3).$$

取一个元素

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \operatorname{Hom}_S(K_1, M_1) \times \operatorname{Hom}_S(K_2, M_2) \times \operatorname{Hom}_S(K_3, M_3).$$

上述推理得到以下图表：

$$\begin{array}{ccc} K_1 \otimes F_2 & \xrightarrow{\varphi_1 \otimes \mathbb{1}_{F_2}} & M_1 \otimes F_2 \\ \downarrow{\scriptstyle j_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi \circ (\mathbb{1}_{M_1} \otimes p_2)} \\ K_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & M_3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F_1 \otimes K_2 & \xrightarrow{\mathbb{1}_{F_1} \otimes \varphi_1} & F_1 \otimes M_2 \\ \downarrow{\scriptstyle j_2} & & \downarrow{\scriptstyle \pi \circ (p_1 \otimes \mathbb{1}_{M_1})} \\ K_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & M_3 \end{array}$$

命题 3.8. $\mathbf{Bilin}^{r_1\ r_2}_{d_1\ d_2,,,d_3}(\mathbb{A}^n)$ 在 $[p_1, p_2, \pi]$ 处的切空间由满足上述条件的元素组成

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \operatorname{Hom}_S(K_1, M_1) \times \operatorname{Hom}_S(K_2, M_2) \times \operatorname{Hom}_S(K_3, M_3)$$

使上方图表交换的元素。换句话说，当且仅当满足以下条件时，$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ 确定了 $[p_1, p_2, \pi]$ 处的切向量：

$$k_1 \otimes f_2 \in K_1 \otimes F_2 \quad \textit{and} \quad f_1 \otimes k_2 \in F_1 \otimes K_2,$$

像 $\varphi_1(k_1) \otimes f_2$, $f_1 \otimes \varphi_2(k_2)$ 在 F_3/K_3 中满足

$$\varphi_3(k_1 \otimes f_2) = \varphi_1(k_1) \otimes f_2 + K_3 \quad \textit{and} \quad \varphi_3(f_1 \otimes k_2) = f_1 \otimes \varphi_2(k_2) + K_3.$$

证明。 根据定义， $[\widetilde{p_1}, \widetilde{p_2}, \widetilde{\pi}] \in \mathrm{Bilin}^{r_1\, r_2}_{d_1\, d_2,,,d_3}(\mathbb{A}^n)(\Bbbk[\varepsilon])$确定 $[p_1, p_2, \pi]$ 处的一个切向量，当且仅当通过 $\alpha\colon \mathrm{Spec}\ \Bbbk \to \mathrm{Spec}\ \Bbbk[\varepsilon]$进行拉回后，它限制为 $[p_1, p_2, \pi]$。对于 $i = 1, 2$，映射 $\widetilde{p_i}$ 限制为所需的映射 p_i，当且仅当它们对应于 Quot 概形 $\mathrm{Quot}^{r_i}_{d_i}(\mathbb{A}^n)$的切向量。在这种情况下，我们有相应的 S-线性映射 φ_i。映射 $\widetilde{\pi}$ 提升到$\widetilde{p_3}$，当且仅当它限制为 p_3时，它确定 $\mathrm{Quot}^{r_1 r_2}_{d_3}(\mathbb{A}^n)$在 $[p_3]$ 处的一个切向量。若此条件成立，它便给出一个 S-线性映射 φ_3。令 $[\widetilde{p_1}, \widetilde{p_2}, \widetilde{p_3}] \in \mathcal{Q}(\Bbbk[\varepsilon])$ 限制为 $[p_1, p_2, p_3] \in \mathcal{Q}(\Bbbk)$，使得 p_3 经过 π分解。我们将证明， $\widetilde{p_3}$ 经过 $\widetilde{\pi}$ 分解，当且仅当映射 φ_i 满足所需的交换图。这将表明，这种形式的 $[\widetilde{p_1}, \widetilde{p_2}, \widetilde{\pi}]$ 确定了$[p_1, p_2, \pi]$处的一个切向量。

如果我们构造映射 φ_i，对应点 $[\widetilde{p_1}, \widetilde{p_2}, \widetilde{p_3}] \in \mathcal{Q}(\Bbbk[\varepsilon])$，其中 $\widetilde{p_3}$ 定义为 $\widetilde{\pi}$的提升，那么它们将自动满足所需的图表。只需证明反向命题即可。假设~映射 φ_i 满足这些图表。回忆一下我们在（2.23）中定义的模。同样，定义

$$\widetilde{K_i} = \{k + \varepsilon g \mid k \in K_i,\ g \in F_i \text{ such that } g + K_i = \varphi_i(k)\}$$

~ ~ ~ ~ ~对于 $i = 1$，2、 3。令 $Q_1 = K_1 \otimes F_2$，我们将证明 $Q_1 \subseteq K_3$。 Q_1 的元素具有以下形式

$$(k + \varepsilon g) \otimes (f_1 + \varepsilon f_2) = k \otimes f_1 + \varepsilon g \otimes f_1 + k \otimes \varepsilon f_2.$$

我们注意到以下观察结果。

~(1) $k \otimes f_1 \in K_1 \otimes F_2$，因此 $k \otimes f_1 + \varepsilon g_3 \in K_3$，其中 $g_3 + K_3 = \varphi_3(k \otimes f_1) = \varphi_1(k) \otimes f_1 + K_3$。(2) $\varepsilon g \otimes f_1$ 满足 $g + K_1 = \varphi_1(k)$，所以 $g \otimes f_1 + K_1 \otimes F_2 = \varphi_1(k) \otimes f_1$。~(3) $k \otimes \varepsilon f_2 \in \varepsilon K_1 \otimes F_1$ 且 $\varepsilon(k \otimes f_2 + \varepsilon h) = \varepsilon k \otimes f_2 \in K_3$，对于满足 $\varphi_3(k \otimes f_2) = h + K_3$的 h。

~只需证明 $k \otimes f_1 + \varepsilon g \otimes f_1 \in K_3$。在 F_3/K_3中，元素 $g \otimes f_1$ 和 g_3 都映射到~$\varphi_3(k \otimes f_1)$，因此 $\varepsilon g \otimes f_1$ 对应于 εg_3，从而 $k \otimes f_1 + \varepsilon g \otimes f_1 \in K_3$。同理，推理~ ~表明 $Q_2 \subseteq K_3$。

□

3.5. **双线性概形的主分支**。受希尔伯特概形的可平滑化分支和 Quot 概形的主分支启发，我们定义双线性概形 $\mathrm{Bilin}^{r_1\, r_2}_{d_1\, d_2,,,d_3}(\mathbb{A}^n)$ 的一个不可约分支，它可视为以点组为参数。我们将讨论特殊情形 $\mathrm{Bilin}^{r_1\, r_2}_{d\, d\, d,,,}(\mathbb{A}^n)$。回顾一下，我们有函子间的闭嵌入 $\iota\colon \mathrm{Bilin}^{r_1\, r_2}_{d\, d\,,,d}(\mathbb{A}^n) \hookrightarrow \mathcal{Q}$。考虑复合映射

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bilin}^{r_1, r_2}_{d,d,d}(\mathbb{A}^n) & \xhookrightarrow{\ \iota\ } & \mathrm{Quot}^{r_1}_d(\mathbb{A}^n) \times \mathrm{Quot}^{r_2}_d(\mathbb{A}^n) \times \mathrm{Quot}^{r_1 r_2}_d(\mathbb{A}^n) \\ & & \Big\downarrow \mathrm{pr}_1 \\ & & Quot^{r_1}_d(\mathbb{A}^n) \end{array}$$

我们也将其记为 $\mathrm{pr}_1 : \mathrm{Bilin}^{r_1\, r_2}_{d\, d\, d,,,}(\mathbb{A}^n) \to \mathrm{Quot}^{r_1}_d(\mathbb{A}^n)$。对于 $\Bbbk$-点，我们记作

$$\mathrm{pr}_1(\Bbbk) \colon \mathrm{Bilin}^{r_1,r_2}_{d,d,d}(\mathbb{A}^n)(\Bbbk) \to \mathrm{Quot}^{r_1}_d(\mathbb{A}^n)(\Bbbk).$$

令 $\mathcal{U}^{r_1}_d \subseteq \mathrm{Quot}^{r_1}_d(\mathbb{A}^n)$ 表示给出 Quot 概形主分支的开子函子。对于开子概形 $\mathcal{U}^{r_1}_d(\Bbbk)$ 的 $\Bbbk$-点，考虑原像 $\mathrm{pr}_1(\Bbbk)^{-1}(\mathcal{U}^{r_1}_d(\Bbbk))$。它与 $\mathrm{Bilin}^{r_1\, r_2}_{d\, d\, d,,,}(\mathbb{A}^n)(\Bbbk)$ 中由下式定义的子集重合

$$\mathcal{W}(\Bbbk) = \{S^{\oplus r_1} \xrightarrow{p_1} M_1,\ S^{\oplus r_2} \xrightarrow{p_2} M_2,\ M_1 \otimes M_2 \xrightarrow{\pi} M_3 \mid M_i \text{ 对应于一个点组 } S/I\}_{/\sim}.$$

现在我们将描述 $\mathcal{W}(\Bbbk)$的点。

命题 3.9. 假设存在一个同构 $M_1 \simeq S/I$。那么也有 $M_2 \simeq M_3 \simeq S/I$。

证明。 由于对于 $i = 1,\ 2,\ 3$，$\dim_{\Bbbk} M_i = d$，且 M_1 对应一个点组，我们可以写成

$$\operatorname{Supp} M_1 = \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_d\} \quad \text{and} \quad \operatorname{Supp} M_2 = \{\mathfrak{n}_1, \dots, \mathfrak{n}_s\}.$$

我们有分解 $M_1 \otimes M_2 \simeq \oplus_{i,\ j}(M_1)_{\mathfrak{m}_i} \otimes (M_2)_{\mathfrak{n}_j}$，其中 $(M_1)_{\mathfrak{m}_i} \otimes (M_2)_{\mathfrak{n}_j} = 0$，对于 $\mathfrak{m}_i \neq \mathfrak{n}_j$。由于 $M_1 \simeq S/I$，我们得到同构 $M_1 \otimes M_2 \simeq M_2/IM_2$，因此 $\dim_{\Bbbk} M_1 \otimes M_2 \leq \dim_{\Bbbk} M_2 = d$。等式成立是满射 $M_1 \otimes M_2 \twoheadrightarrow M_3$ 存在的必要条件，因为 $\dim_{\Bbbk} M_3 = d$。因此 $\operatorname{Supp} M_2 = \operatorname{Supp} M_1$。$M_1 \otimes M_2 \twoheadrightarrow M_3$ 的存在意味着 $\operatorname{Supp} M_3 \subseteq \operatorname{Supp} M_1 \otimes M_2$，所以 $\operatorname{Supp} M_1 = \operatorname{Supp} M_2 = \operatorname{Supp} M_3$；又由于 $|\operatorname{Supp} M_1| = \dim_{\Bbbk} M_1$，对于每个 $i = 1,\ \dots\dots,\ d$，必有 $\dim_{\Bbbk}(M_1)_{\mathfrak{m}_i} = 1$。由此可得，对于 $j = 1,\ 2,\ 3,\ M_j \simeq S/I$。□

命题 3.10。 映射 $M_1 \otimes M_2 \xrightarrow{\pi} M_3$ 在同构意义下唯一，因此 $\mathcal{W}(\Bbbk)$ 的点由满射 $S^{\oplus r_j} \xrightarrow{p_j} M_j \simeq S/I$ （$j = 1,\ 2$）确定。

证明。 我们将 $S/I \otimes_S S/I \simeq S/I$ 视为同一对象，因此该映射可写为 $S/I \xrightarrow{\pi} S/I$，这表明它必为同构。我们将核相同的映射视为相同，因此由于 $\ker \pi = 0$，在此情形下只有一个等价类，正如所述。□

由于 $\mathcal{W}(\Bbbk)$ 是开集 $\mathcal{U}^{r_1}_d(\Bbbk)$ 的连续原像，因此它也是开集。因此存在一个开子概形 $W \subseteq Bilin$ 使得 $\mathcal{W}(\Bbbk) = W(\Bbbk)$，根据命题 2.14，我们将其扩展为可表函子$\mathcal{W} = W$。我们将双线性概形的主不可约分支定义为 W的闭包。

命题 3.11. W 的维数为 $nd + (r_1 - 1)d + (r_2 - 1)d$。

为了证明命题 3.11，我们将使用 [Vak25，定理 12.4。1]。我们不需要这个结果的完全一般形式，只需考虑推论 12.4.2 中陈述的特殊情形。

命题 3.12 ([Vak25，推论 12.4。2])。 设 $f\colon X \to Y$是一个有限型态射，其定义域为不可约$\Bbbk$-簇。那么存在一个非空开子集 $V \subseteq Y$，使得对所有 $p \in V$，纤维 p的维数为 维数X − 维数Y，或者为空。

定理 *3.11* 的证明。 我们将对当前情形应用命题 3.12 。令

$$[p_1] = \left[S^{\oplus r_1} \xrightarrow{p_1} M_1 \simeq S/I\right] \in \mathcal{U}^{r_1}_d(\Bbbk).$$

考虑 $[p_1]$ 上的纤维 $\mathrm{pr}_1(\Bbbk)^{-1}([p_1])$。它具有如下形式：

$$\mathrm{pr}_1(\Bbbk)^{-1}([p_1]) = \left[S^{\oplus r_1} \xrightarrow{p_1} M_1,\ S^{\oplus r_2} \xrightarrow{p_2} M_2,\ M_1 \otimes M_2 \xrightarrow{\pi} M_3\right],$$

其中映射 $S^{\oplus r_1} \xrightarrow{p_1} M_1$ 是固定的，而映射 $M_1 \otimes M_2 \xrightarrow{\pi} M_3$ 在同构意义下唯一。因此，纤维由第二个映射 $S^{\oplus r_2} \xrightarrow{p_2} M_2$确定。将其限制在 $\operatorname{Spec} A$ 的一个仿射开邻域 $[p_1]$上，则命题 2.27 给出了 $[p_1]$ 上纤维与$\Gamma(\operatorname{Spec} A,\, M_2)^{r_2-1} \simeq \mathbb{A}_{\Bbbk}^{r_2-1}(A)$的一个同构。由命题 3.12 可得

$$\begin{aligned}\dim W &= \dim pr_1^{-1}([p_1]) + \dim \mathcal{U}_d^{r_1} \\ &= \dim \mathbb{A}_{\Bbbk}^{d(r_2-1)} + \dim \mathcal{T} + \dim \mathbb{A}_{\Bbbk}^{d(r_1-1)} \\ &= d(r_2-1) + nd + (r_1-1)d.\end{aligned}$$

□

3.6. 双线性概形的全退化轨迹。 设 $r, r_1, r_2 \geq d$。固定极大理想 $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n) \lhd S = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$。现在我们定义与形如 $(S/\mathfrak{m})^{\oplus d}$ 的 S-模满射相对应的轨迹。这是 Quot 概形的全退化轨迹的一般化。考虑 $\mathbf{Bilin}_{d\,d\,d}^{r_1\,r_2}{}_{,,}(\mathbb{A}^n)(\Bbbk)$ 的子集，该子集由以下形式的点构成

$$[q_1, q_2, \pi] = \left[S^{\oplus r_1} \xrightarrow{q_1} M_1 \simeq (S/\mathfrak{m})^{\oplus d},\ S^{\oplus r_2} \xrightarrow{q_2} M_2 \simeq (S/\mathfrak{m})^{\oplus d},\ M_1 \otimes M_2 \xrightarrow{\pi} M_3\right]. \tag{3.13}$$

我们已假设 $r_i \geq d$，因此满射 q_i 存在。由同构

$$M_1 \otimes M_2 \simeq (S/\mathfrak{m})^{\oplus d} \otimes (S/\mathfrak{m})^{\oplus d} \simeq (S/\mathfrak{m})^{\oplus d^2} \tag{3.14}$$

模 M_3 也必须同构于 $(S/\mathfrak{m})^{\oplus d}$。所得子集为

$$\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}(\Bbbk) = \left\{ \begin{matrix} S^{\oplus r_i} \xrightarrow{q_i} M_i \simeq (S/\mathfrak{m})^{\oplus d} \text{ for } i = 1, 2 \\ M_1 \otimes_S M_2 \xrightarrow{\pi} M_3 \simeq (S/\mathfrak{m})^{\oplus d} \end{matrix} \right\}_{/\sim}$$

我们的目标是定义 $\mathbf{Bilin}_{d\,d\,d}^{r_1\,r_2}{}_{,,}(\mathbb{A}^n)$ 的闭子函子 $\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}$，使其 $\Bbbk$-点与此子集一致。为此，我们定义闭子函子 $\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}^{\mathcal{Q}} \subseteq \mathbf{Quot}_d^{r_1}(\mathbb{A}^n) \times \mathbf{Quot}_d^{r_2}(\mathbb{A}^n)$，并证明$\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}(\Bbbk)$ 与沿着由以下复合映射定义的映射，$\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}^{\mathcal{Q}}$ 的原像的 $\Bbbk$-点一致

$$\rho\colon \mathbf{Bilin}_{d,d,d}^{r_1,r_2}(\mathbb{A}^n) \hookrightarrow \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathbf{Quot}_d^{r_1}(\mathbb{A}^n) \times \mathbf{Quot}_d^{r_2}(\mathbb{A}^n), \tag{3.15}$$

其中 $\mathcal{Q} = \mathbf{Quot}_d^{r_1}(\mathbb{A}^n) \times \mathbf{Quot}_d^{r_2}(\mathbb{A}^n) \times \mathbf{Quot}_d^{r_1 r_2}(\mathbb{A}^n)$。为定义子函子 $\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}^{\mathcal{Q}}$，注意，形如 $S^{\oplus r} \xrightarrow{q} M \simeq (S/\mathfrak{m})^{\oplus d}$ 的满射确定了 $\mathbf{Quot}_d^{r}(\mathbb{A}^n)(\Bbbk)$的一个子集，该子集由 $\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathbf{Quot}_d^{r_1}(\mathbb{A}^n)$ 的 $\Bbbk$-点组成。取乘积

$$\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}^{\mathcal{Q}}(\Bbbk) = \mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}(\Bbbk) \times \mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}(\Bbbk) \subseteq (\mathbf{Quot}_d^{r_1}(\mathbb{A}^n) \times \mathbf{Quot}_d^{r_2}(\mathbb{A}^n))(\Bbbk)$$

即可得到所需的函子 $\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}^{\mathcal{Q}} = \mathcal{Z}_{\mathfrak{m}} \times \mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}$。$\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}^{\mathcal{Q}}(\Bbbk)$ 的点具有如下形式

$$[q_1, q_2] = \left[S^{\oplus r_1} \xrightarrow{q_1} M_1 \simeq (S/\mathfrak{m})^{\oplus d},\ S^{\oplus r_2} \xrightarrow{q_2} M_2 \simeq (S/\mathfrak{m})^{\oplus d}\right].$$

由命题 2.30 可知，我们有同构 $\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}^{\mathcal{Q}} \simeq \mathbf{Gr}(d, r_1) \times \mathbf{Gr}(d, r_2)$。考虑原像$\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}^{\mathcal{B}}(\Bbbk) = \rho(\Bbbk)^{-1}(\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}^{\mathcal{Q}}(\Bbbk))$，其中 $\rho(\Bbbk)$ 表示由 (3.15) 中定义的 ρ 在 $\Bbbk$-点上诱导的映射。根据同构 (3.14)，$\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}^{\mathcal{B}}(\Bbbk)$ 的点具有如下形式

$$\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}^{\mathcal{B}}(\Bbbk) = \left\{ \begin{matrix} S^{\oplus r_i} \xrightarrow{q_i} M_i \simeq (S/\mathfrak{m})^{\oplus d} \text{ for } i = 1, 2 \\ M_1 \otimes_S M_2 \xrightarrow{\pi} M_3 \simeq (S/\mathfrak{m})^{\oplus d} \end{matrix} \right\}_{/\sim}$$

这与我们在（3.13）中给出的子集 $\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}(\Bbbk) \subseteq \mathbf{Bilin}_{d\,d\,d}^{r_1\,r_2}{}_{,,}(\mathbb{A}^n)(\Bbbk)$ 的定义一致。因此，该子集是闭的。接下来，我们定义相应的闭子函子 $\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}} = \mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}^{\mathcal{B}}\mathbf{of}\ \mathbf{Bilin}_{d\,d}^{r_1\,r_2}{}_{,,d}(\mathbb{A}^n)$。我们将利用第 2.5 节的结果证明 $\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}} \hookrightarrow \mathbf{Bilin}_{d\,d\,d}^{r_1\,r_2}{}_{,,}(\mathbb{A}^n)$ 的维数为

维数 $(r_1-d)d+(r_2-d)d+(d^2-d)d$。令

$$\bar{\rho}=\rho|_{\mathcal{Z}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{m}}}:\mathcal{Z}^{B}_{\mathfrak{m}}\to\mathcal{Z}^{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{m}},\quad \text{where } \mathcal{Z}^{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{m}}=\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}\times\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}\subseteq \mathrm{Quot}^{r_1}_{d}(\mathbb{A}^n)\times\mathrm{Quot}^{r_2}_{d}(\mathbb{A}^n),$$

与前面一样。取一点 $[q_1,q_2]\in\mathcal{Z}^{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{m}}(\Bbbk)$，其中 $q_i\colon S^{\oplus r_i}\twoheadrightarrow M_i\simeq(S/\mathfrak{m})^{\oplus d}$对于 $i=1,2$。考虑纤维 $\bar{\rho}(\Bbbk)^{-1}([q_1,q_2])\in\mathcal{Z}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{m}}(\Bbbk)$。由于存在同构 $M_1\otimes M_2\simeq(S/\mathfrak{m})^{\oplus d^2}$，且假设 $\dim_{\Bbbk}M_3=d$，因此也必然存在同构 $M_3\simeq(S/\mathfrak{m})^{\oplus d}$。因此，$[q_1,q_2]$ 上的纤维由形如 $\pi\colon(S/\mathfrak{m})^{\oplus d^2}\twoheadrightarrow(S/\mathfrak{m})^{\oplus d}$ 的 S-线性满射组成。

命题 3.16。令 $[q_1,q_2]\in\mathcal{Z}^{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{m}}(\Bbbk)$ 为一个点，对应于形如 $q_i\colon\ S^{\oplus r_i}\twoheadrightarrow M_i\simeq(S/\mathfrak{m})^{\oplus d}$ 对于 $i=1,2$ 的满射。则纤维 $\bar{\rho}(\Bbbk)^{-1}([q_1,q_2])$ 同构于 $\mathrm{Gr}(d,d^2)(\Bbbk)$。

证明。同构 $\alpha_{\mathfrak{m}}\colon\ \Bbbk\simeq S/\mathfrak{m}$ 给出一个映射 $\phi\colon\mathrm{Gr}(d,d^2)(\Bbbk)\to\bar{\rho}(\Bbbk)^{-1}([q_1,q_2])$，定义如下

$$\left[\Bbbk^{\oplus d^2}\xrightarrow{\pi}V\simeq\Bbbk^{\oplus d}\right]\mapsto\left[(S/\mathfrak{m})^{\oplus d^2}\simeq\Bbbk^{\oplus d^2}\xrightarrow{\pi}V\simeq\Bbbk^{\oplus d}\simeq(S/\mathfrak{m})^{\oplus d}\right].$$

这显然是一个双射，因此给出了所需的同构。 □

命题 3.17。闭子概形 $\mathcal{Z}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{m}}\subseteq\mathrm{Bilin}^{r_1\,r_2}_{d\,d\,d,\ ,\ ,}(\mathbb{A}^n)$ 的维数为$(r_1-d)d+(r_2-d)d+(d^2-d)d$.

证明。由命题3.12,

$$\begin{aligned}\dim\mathcal{Z}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{m}}&=\dim\mathcal{Z}^{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{m}}+\dim\bar{\rho}(\Bbbk)^{-1}([q_1,q_2])\\&=\dim(\mathrm{Gr}(d,r_1)\times\mathrm{Gr}(d,r_2))+\dim\mathrm{Gr}(d,d^2)\\&=(r_1-d)d+(r_2-d)d+(d^2-d)d.\end{aligned}$$

□

3.7. 不可约性。我们将利用命题3.11 和3.17 找到参数 $n,\ r_i,\ d$的例子，使得双线性概形 $\mathrm{Bilin}^{r_1\,r_2}_{d\,d\,d,\ ,\ ,}(\mathbb{A}^n)$不可约。令 Z_1 表示开子概形 $W\subseteq Bilin$ 的闭包，该开子概形对应于到循环模的满射，如第3.5节所定义。令Z_2 表示子函子 $\mathcal{Z}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{m}}$对应的闭子概形，如第3.6节所定义。由引理2.18，若 $n,\ r_i,\ d$ 满足 $\dim\ Z_1<\dim Z_2$，则 Z_2 必定包含于与Z_1 不同的不可约分支中，且 $\mathrm{Bilin}^{r_1\,r_2}_{d\,d\,d,\ ,\ ,}(\mathbb{A}^n)$可约。满足此性质的参数 $r_i,\ d$ 的例子在$n=1,\ 2$时就已出现。

定理 3.18. 设 $r_i\geq d\geq 3$。若 $n<d^2-3d+2$，则 $\mathrm{Bilin}^{r_1\,r_2}_{d\,d\,d,,,}(\mathbb{A}^n)$ 是可约的 .

证明。 给定如陈述中所示的 r_i,d,n，我们有

$$\dim Z_1=(n+(r_1-1)+(r_2-1))d<(r_1+r_2+d^2-3d)d=\dim Z_2.$$

□

剩下需要考虑的是满足 $n\geq d^2-3d+2$ 的 $\mathrm{Bilin}^{r_1\,r_2}_{d\,d\,d,,,}(\mathbb{A}^n)$ 情形。我们将利用第2.6 节关于割线簇的结果来改进定理 3.18。对于 $[p_1,p_2,\pi]\in\mathrm{Bilin}^{r_1\,r_2}_{d\,d\,d,,,}(\mathbb{A}^n)(\Bbbk)$，$[p_1,p_2,\pi]\in Z_1$ 当且仅当相应的张量 $\mu_\pi\in M_1^\vee\otimes M_2^\vee\otimes M_3$ 的边界秩为 d。因此，声称 $\mathrm{Bilin}^{r_1\,r_2}_{d\,d\,d,,,}(\mathbb{A}^n)$ 不可约，等价于说所有张量 $\Bbbk^d\otimes\Bbbk^d\otimes\Bbbk^d$ 的边界秩都是 d。这给出了 $\mathrm{Bilin}^{r_1\,r_2}_{d\,d\,d,,,}(\mathbb{A}^n)$ 不可约的一个必要条件：簇 $\sigma_d(\mathbb{P}(\Bbbk^d)\times\mathbb{P}(\Bbbk^d)\times\mathbb{P}(\Bbbk^d))$ 必须与环境空间 $\mathbb{P}(\Bbbk^d\otimes\Bbbk^d\otimes\Bbbk^d)$ 重合。我们证明，只要 $d\geq 3$，该条件就不成立。

定理 3.19。 设 $r_i \geq d \geq 3$。则 $\mathrm{Bilin}_{d\,d\,d,,,}^{r_1\,r_2}(\mathbb{A}^n)$ 是可约的。

证明。 只需证明

$$\sigma_d(\mathbb{P}(\Bbbk^d)^3) \neq \mathbb{P}^{d^3-1} = \mathbb{P}(\Bbbk^d \otimes \Bbbk^d \otimes \Bbbk^d).$$

根据命题2.41可得

$$\dim \sigma_d(\mathbb{P}(\Bbbk^d)^3) \leq \min\{d^3,\, d(3d+1)-1\}.$$

对于 $d \leq 3$，我们有 $d^3 \leq d(3d+1) - 1$，因此 $\dim \sigma_d(\mathbb{P}(\Bbbk^d)^3) < \dim \mathbb{P}^{d^3-1}$。这意味着存在边界秩大于 d 的张量 $\mu \in M_1^\vee \otimes M_2^\vee \otimes M_3$。还需证明可以选择这些张量使其为 M_3-简洁的。根据引理 2.40，简洁张量构成 $\mathbb{P}^{d^3-1}$ 的一个开子集；由于该空间不可约，简洁张量的子空间是稠密的。因此，必定存在一个简洁张量$\mu \in M_1^\vee \otimes M_2^\vee \otimes M_3$，不属于 $\sigma_d(\mathbb{P}(\Bbbk^d)^3)$。该张量定义了一个映射 $\pi_\mu\colon M_1 \otimes M_2 \twoheadrightarrow M_3$，从而给出一个点 $[p_1, p_2, \pi_\mu] \in \mathrm{Bilin}_{d\,d\,d,,,}^{r_1\,r_2}(\mathbb{A}^n) \setminus \mathcal{W}$。□

现在 w e 将证明，对于所有 n，$\mathrm{Bilin}_{2\,2\,2,,,}^{r_1\,r_2}(\mathbb{A}^n)$ 都是不可约的。我们将其分为两个步骤 s.

(1) 证明每个 S-线性商 $p\colon\ S^{\oplus r} \twoheadrightarrow M$ 满足 维数$_\Bbbk M = 2$，都可表示为与点组相对应的商的极限。这等价于证明 $\mathrm{Quot}_2^r(\mathbb{A}^n)$ 是不可约的，命题 2.32。（2）给定两个 S-线性商 $p_i\colon S^{\oplus r_i} \twoheadrightarrow M_i$ 以及 $\pi\colon\ M_1 \otimes_S M_2 \twoheadrightarrow M_3$，使得维数$_\Bbbk M_i$ =维数$_\Bbbk M_3 = 2$，证明相应的张量 $\mu_\pi \in M_1^\vee \otimes M_2^\vee \otimes M_3$的边界秩为 2。

第二步由以下结果得出。

命题 3.20。 令 $X = \mathbb{P}(\Bbbk^2) \times \mathbb{P}(\Bbbk^2) \times \mathbb{P}(\Bbbk^2) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Bbbk^2 \otimes \Bbbk^2 \otimes \Bbbk^2)$ 为塞格雷嵌入。则$\sigma_2(X) = \mathbb{P}(\Bbbk^2 \otimes \Bbbk^2 \otimes \Bbbk^2)$。

定理 3.21. 对于每个 $n \geq 1$ 和 $r_1, r_2 \geq 2$，表示 $\mathrm{Bilin}_{2\,2\,2,,,}^{r_1\,r_2}(\mathbb{A}^n)$ 的概形都是不可约的。

证明. 根据命题 3.20，每个 $\pi\colon\ M_1 \otimes M_2 \twoheadrightarrow M_3$ 都对应一个边界秩为 2 的张量。为了定义 $\mathrm{Bilin}_{2\,2\,2,,,}^{r_1\,r_2}(\mathbb{A}^n)$ 的一个点，我们还必须指定 $p_i\colon S^{\oplus r_i} \twoheadrightarrow M_i$，并证明它们与取极限所得结果一致。这些映射的存在性由命题 2.32得出。□

3.8. **两个点**。 我们详细描述 $\mathrm{Bilin}_{2,2,2}^{2,2}(\mathbb{A}^1)$ 的 $\Bbbk$-点。令 $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}\ S$，其中 $S = \Bbbk[x]$，并固定极大理想 $\mathfrak{m} = (x) \lhd S$。一个点 $[p_1, p_2, \pi] \in \mathrm{Bilin}_{2,2,2}^{2,2}(\mathbb{A}^1)$ 由以下数据给出

$$p_i\colon S^{\oplus 2} \twoheadrightarrow M_i\ (i = 1, 2), \quad \pi\colon M_1 \otimes M_2 \twoheadrightarrow M_3,$$

使得 $\dim_\Bbbk M_j = 2$ 对于 $j = 1$，2，3。给出一个 S-模 M 且 $\dim_\Bbbk = 2$，等价于给出一个维数为 2 的$\Bbbk$-向量空间，以及一个对应于乘以 x的自同态。我们发现 M 满足以下条件之一：

(1) $M \simeq S/((x-c_1)(x-c_2))$ 对于 c_1，$c_2 \in \Bbbk$，使得 $c_1 \neq c_2$。
(2) $M \simeq S/(x-c)^2$ 对于 $c \in \Bbbk$。(3) $M \simeq (S/(x-c))^{\oplus 2}$
对于 $c \in \Bbbk$。

不失一般性，我们可以考虑情形$S/(x(x-1))$、$S/(x)^2$ 和$(S/(x))^{\oplus 2}$。令 e_1，e_2 为 $S^{\oplus 2}$ 的一组基，其中每个 e_i 对应于 $1 \in S$。

根据命题 3.9，若对于某些理想 I, J，在 S 中有 $p_1\colon S^{\oplus 2} \twoheadrightarrow M_1 \simeq S/I$and $p_2\colon S^{\oplus 2} \twoheadrightarrow M_2 \simeq S/J$，则必有 $M_1 \simeq M_2 \simeq M_3 \simeq S/I$。对于 $p_i\colon S^{\oplus 2} \twoheadrightarrow M_i \simeq S/(x(x-1))$，第三个映射

$\pi_1\colon M_1 \otimes M_2 \twoheadrightarrow M_3$ 是与一个最小边界秩（即边界秩为 2）的简洁张量对应的唯一确定的同构。根据命题 2.39，我们可以取单位张量。设 α_1, α_2 是 $S/(x(x-1)) \simeq S/(x) \times S/(x-1)$ 的基，其中 α_1 和 α_2 分别对应于 $1 \in S/(x)$ 和 $1 \in S/(x-1)$。于是我们可以假设 π_1 是 $S/(x(x-1))$ 中的乘法。在基 α_1, α_2 下，对应的张量为

$$\mu_1 = \alpha_1^* \otimes \alpha_1^* \otimes \alpha_1 + \alpha_2^* \otimes \alpha_2^* \otimes \alpha_2.$$

对于 $p_i\colon S^{\oplus 2} \twoheadrightarrow M_i \simeq S/\mathfrak{m}^2$ 我们有 $M_1 \otimes_S M_2 \simeq S/\mathfrak{m}^2 \otimes_S S/\mathfrak{m}^2 \simeq S/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\pi_2} S/\mathfrak{m}^2$，因此第三个映射$\pi_2$ 必须是一个同构，我们可以假设它是 $S/\mathfrak{m}^2$ 中的乘法。令 β_1，β_2 为 $S/\mathfrak{m}^2$ 的基，其中 β_1 对应于 $1 \in S/\mathfrak{m}^2$，而 β_2 对应于 $x \in S/\mathfrak{m}^2$。那么，与 π_2 对应的张量为

$$\mu_2 = \beta_1^* \otimes \beta_1^* \otimes \beta_1 + \beta_1^* \otimes \beta_2^* \otimes \beta_2 + \beta_2^* \otimes \beta_1^* \otimes \beta_2,$$

秩为 3 的简洁形式。根据命题 3.20，μ_2 的边界秩为 2，因此存在一个秩为 2 的张量 $\mu_2(t)$，使得相应的映射 $\pi_2(t)$ 与 $S/((x-c_1$ 中的乘法同构$(t))(x-c_2(t)))$。令$M_t \simeq S/I_t = S/(x(x-t))$ 以 θ_1，θ_2 为基，分别对应于 1，$x \in S/I_t$。考虑乘法

$$\pi_2(t)\colon M_t \otimes M_t \to M_t.$$

基 θ_1, θ_2 中的张量 $\mu_2(t)$ 是

$$\mu_2(t) = \theta_1^* \otimes \theta_1^* \otimes \theta_1 + \theta_1^* \otimes \theta_2^* \otimes \theta_2 + \theta_2^* \otimes \theta_1^* \otimes \theta_2 + \theta_2^* \otimes \theta_2^* \otimes t\theta_2.$$

令 $t \to 0$，得到 $\mu_2 =$ 极限$_{t\to 0}\, \mu_2(t)$，且由于 $\mu_2(t)$与单位张量同构，这表明 μ_2的边界秩为 2。根据命题 2.32，对于任意 $p_i\colon S^{\oplus 2} \twoheadrightarrow M_i \simeq S/\mathfrak{m}^2$，存在 $p_i(t)\colon S^{\oplus 2} \twoheadrightarrow M_t$使得

$$[p_1, p_2, \pi_2] = \lim_{t\to 0} [p_1(t), p_2(t), \pi_2(t)].$$

现在我们考虑 不假设 M_2 是循环的情况下讨论 $M_1 \simeq S/I$。我们需要讨论的唯一情形是 s

$$p_1\colon S^{\oplus 2} \twoheadrightarrow M_1 \simeq S/\mathfrak{m}^2.$$

由于 Supp $M_1 \otimes M_2 =$、Supp $M_1 \cap$、Supp M_2，必有 Supp $M_2 = \{\mathfrak{m}\}$。于是我们有 $M_2 \simeq S/\mathfrak{m}^2$ 或 $M_2 \simeq (S/\mathfrak{m})^{\oplus 2}$ 两种情况。前一种情况我们已经讨论过，因此假设后一种情况成立。根据这些同构

$$M_1 \otimes M_2 \simeq S/\mathfrak{m}^2 \otimes (S/\mathfrak{m})^{\oplus 2} \simeq (S/\mathfrak{m})^{\oplus 2}$$

我们推得 $M_3 \simeq (S/\mathfrak{m})^{\oplus 2}$，并且第三个映射 $\pi_3\colon M_1 \otimes M_2 \twoheadrightarrow M_3$ 是一个同构。令 γ_1，γ_2为 $(S/\mathfrak{m})^{\oplus 2}$ 的一组基，其中每个 γ_i 对应于 $1 \in S/\mathfrak{m}$；再令 β_1，β_2 为 $S/\mathfrak{m}^2$ 的一组基，如前所述。那么与 $\pi_3\colon M_1 \otimes M_2 \twoheadrightarrow M_3$ 对应的张量同构于

$$\mu_3 = \beta_1^* \otimes \gamma_1^* \otimes \gamma_1 + \beta_1^* \otimes \gamma_2^* \otimes \gamma_2,$$

它是 S-模 $(S/\mathfrak{m})^{\oplus 2}$ 中的乘法张量。注意，此张量并非 $M_1^\vee$-简洁。同样，给定

$$p_1\colon S^{\oplus 2} \twoheadrightarrow M_1 \simeq (S/\mathfrak{m})^{\oplus 2} \quad \text{and} \quad p_2\colon S^{\oplus 2} \twoheadrightarrow M_2 \simeq S/\mathfrak{m}^2,$$

我们看到，第三个映射 $\pi_4\colon M_1 \otimes M_2 \twoheadrightarrow M_3 \simeq (S/\mathfrak{m})^{\oplus 2}$ 对应于

$$\mu_4 = \gamma_1^* \otimes \beta_1^* \otimes \gamma_1 + \gamma_2^* \otimes \beta_1^* \otimes \gamma_2,$$

它在第二个坐标上不是简洁的。为证明 μ_3 是简洁秩 2 张量的一个极限，考虑 $M_{t,1} \simeq S/(x(x-t))$，其基为 θ_1，θ_2，分别对应于 1，$x \in S/(x(x-t))$；以及 $M_{t,2} \simeq S/(x) \times S/(x-t)$，其基为 α_1，α_2，分别对应于 $1 \in S/(x), S/(x-t)$。那么

$$\begin{aligned}\mu_3(t) &= \theta_1^* \otimes \alpha_1^* \otimes \alpha_1 + \theta_1^* \otimes \alpha_2^* \otimes \alpha_2 + \theta_2^* \otimes \alpha_2^* \otimes t\alpha_2 \\ &= \theta_1^* \otimes \alpha_1^* \otimes \alpha_1 + (\theta_1^* + t\theta_2^*) \otimes \alpha_2^* \otimes \alpha_2\end{aligned}$$

即为所需的张量。同样，对于 $\pi_4\colon (S/\mathfrak{m})^{\oplus 2} \otimes S/\mathfrak{m}^2 \twoheadrightarrow (S/\mathfrak{m})^{\oplus 2}$，我们得到 μ_4 作为以下对象的极限

$$\begin{aligned}\mu_4(t) &= \alpha_1^* \otimes \theta_1^* \otimes \alpha_1 + \alpha_2^* \otimes \theta_1^* \otimes \alpha_2 + \alpha_2^* \otimes \theta_2^* \otimes t\alpha_2 \\ &= \alpha_1^* \otimes \theta_1^* \otimes \alpha_1 + \alpha_2^* \otimes (\theta_1^* + t\theta_2^*) \otimes \alpha_2.\end{aligned}$$

在这两种情况下，映射

$$M_{t,i} \to M_{t,i}, \quad \theta_1 \mapsto \theta_1,\, \theta_2 \mapsto \theta_1 + t\theta_2$$

对于 $t \neq 0$ 是同构，因此对于 $t = 0$也是同构。

还需考虑一个点 $[p_1, p_2, \pi_5] \in \mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}(\mathbb{k})$，它由下式给出

$$p_i\colon S^{\oplus 2} \twoheadrightarrow M_i \simeq (S/\mathfrak{m})^{\oplus 2}\ (i = 1, 2), \quad \pi\colon M_1 \otimes M_2 \simeq (S/\mathfrak{m})^{\oplus 4} \twoheadrightarrow M_3 \simeq (S/\mathfrak{m})^{\oplus 2}.$$

这次，第三个映射不是同构，而是由一个满秩 4×2 矩阵定义的满射。对于任意$p_i\colon\ S^{\oplus 2} \twoheadrightarrow M_i$，都存在映射 $p_i(t)\colon S^{\oplus 2} \twoheadrightarrow M_{t,i}$，使得每个 $M_{t,i}$ 都对应一个点组和 $p_i = \text{极限}_{t\to 0}\, p_i(t)$。$\pi_5$不会产生新的张量类型，因为我们已经涵盖了所有可能性。如果对应于 π_5 的张量是简洁的，那么它与某个代数 S/I的乘法张量同构，该代数可以是 $S/(x-c)^2$ 的形式，也可以是 $S/(x-c_1)(x-c_2)$ 的形式，其中 $c, c_1, c_2 \in \mathbb{k}$满足 $c_1 \neq c_2$。否则，该张量在第一个或第二个坐标上不简洁。如果不简洁发生在第一个坐标上，那么该张量同构于

$$\gamma_1^* \otimes \gamma_1^* \otimes \gamma_1 + \gamma_1^* \otimes \gamma_2^* \otimes \gamma_2 = \lim_{t\to 0} (\gamma_1^* \otimes \gamma_1^* \otimes \gamma_1 + (\gamma_1^* + t\gamma_2^*) \otimes \gamma_2^* \otimes \gamma_2).$$

如果它在第二个坐标上不简洁，那么它同构于

$$\gamma_1^* \otimes \gamma_1^* \otimes \gamma_1 + \gamma_2^* \otimes \gamma_1^* \otimes \gamma_2 = \lim_{t\to 0} (\gamma_1^* \otimes \gamma_1^* \otimes \gamma_1 + \gamma_2^* \otimes (\gamma_1^* + t\gamma_2^*) \otimes \gamma_2).$$

最后两种情况来自 $(S/\mathfrak{m})^{\oplus 2} \in S$-模中的乘法。

参考文献

[Ber12] José Bertin. 支撑于一点的希尔伯特概形：导论。载于《表示论中的几何方法》第一卷，Sémin. Congr. 第24-I卷，第1–102页。法国数学会，巴黎，2012年。2[CGO14] Enrico Carlini、Nathan Grieve 和 Luke Oeding。《割线簇四讲》，第101–146页。Springer New York，2014年。14[EH00] David Eisenbud 和 Joe Harris。《概形几何》，第197卷。2000年1月。4、5、6、7[GW20] Ulrich Görtz 和 Torsten Wedhorn。《代数几何 I：概形——含例题与习题》。Springer Studium Mathematik—Master。Springer Spektrum，威斯巴登，第二版， [2020] ©2020年。11[Hai01] Mark Haiman。希尔伯特概形、多重图与 Macdonald 正性猜想。《美国数学会杂志》，14(4)：941–1006，2001年。2[Jel23] Joachim Jelisiejew。Artin 代数的变形、希尔伯特概形及相关领域中的公开问题，2023年。1、15[JJ25] Jakub Jagiełła 和 Joachim Jelisiejew。通过模分类小型最小边界秩张量及其退化，2025年。1[JLP24] Joachim Jelisiejew、J. M. Landsberg 和 Arpan Pal。最小边界秩的简洁张量，2024年。1[JS22] Joachim Jelisiejew 和 Klemen Sivic。Quot 概形与可交换矩阵簇的不可约分支和奇点，2022年。2

[Str96] Stein Arild Strømme。可表函子与希尔伯特概形简明导论。载于 参数空间（华沙，*1994*年），第36卷，*Banach*中心出版物，第179–198页。波兰科学院数学研究所，华沙，1996年。 4[Vak25] Ravi Vakil。渐升之海——代数几何基础。普林斯顿大学出版社，美国新泽西州普林斯顿， [2025]©2025年。 21电子邮件地址：w.obcowska@student.uw.edu.pl