arXiv:2601.01670v1 [math.DS] 4 Jan 2026

利用分段常数自变量方程研究具有自适应状态依赖时滞的脉冲微分方程的存在性、唯一性和数值近似

Ferenc Hartung 潘诺尼亚大学数学系，匈牙利维斯普雷姆 8201，邮政信箱 158

2026年1月6日

摘要

本文研究一类具有自适应状态依赖时滞的脉冲非线性微分方程。我们采用 Picard–Lindelöf 型论证，借助分段常数自变量方程（EPCAs）定义近似解，并讨论初值问题解的存在性和唯一性。此外，我们证明，在紧时间区间上，相关分段常数自变量方程的解一致地近似原脉冲时滞微分方程（DDE）在自适应状态依赖时滞下的解。这两个结果所依据的关键假设是延迟时间函数单调或分段严格单调。

AMS（MOS）学科分类： 34K43,34K45, 65L03
关键词： 时滞微分方程、状态依赖时滞、自适应时滞、分段常数自变量方程、数值近似。

1 引言

状态依赖时滞方程（SD-DDEs）常用于数学模型中（应用及基础理论综述见 [24]，近期论文可参见例如 [15, 32, 37] ）。因此，SD-DDEs 的定性性质仍是一个受到广泛关注的研究课题 [4, 5, 13, 25, 26, 27, 30, 38]。在许多应用中，时滞对系统状态的依赖关系由代数方程或积分方程定义（一些应用见 [24]）。另一类 SD-DDEs 的时滞函数由一个相关的微分方程定义，该方程取决于模型的状态。这种时滞函数的定义称为自适应时滞。关于自适应时滞 SD-DDEs 的一些应用和定性研究，见 [3, 7, 22, 24, 31, 33, 40, 41] 。在一些模型中，由于天气、辐射、药物施用、收获等环境因素发生突然变化，会采用脉冲时滞微分方程（例如见 [11, 28, 35]）。目前只有少数论文研究带脉冲的 SD-DDEs（见 [1, 8, 12, 14, 22, 30]）。

本文考虑一类如下形式的随机微分延迟方程

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t)), \theta), \qquad \text{a.e. } t \in [0, T], \tag{1.1}$$

其中延迟函数由以下自适应条件定义

$$\dot{\tau}(t) = g(t, x(t), \tau(t)), \qquad \text{a.e. } t \in [0, T], \tag{1.2}$$

脉冲条件为

$$\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k-)), \qquad k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.3}$$

其中，与 (1.1) 相关的初始条件为

$$x(t) = \varphi(t), \qquad t \in (-\infty, 0], \tag{1.4}$$

与 (1.2) 相关的初始条件为

$$\tau(0) = \lambda. \tag{1.5}$$

这里，初始延迟值 λ是一个正常数，$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_K < T$为脉冲时刻，且 $\Delta x(t) := x(t) - x(t-)$。我们还假设初始函数是分段连续的：在任意有限区间上，函数 φ 至多有有限个跳跃间断点，并且在所有这些点上均右连续（详情见下文假设 (A4)）。

称脉冲初值问题 (IIVP) (1.1)–(1.5) 在区间 $(-\infty, \alpha]$ 上的解为函数 $x\colon (-\infty, \alpha] \to \mathbb{R}^n$ 且 $\tau\colon [0, \alpha] \to \mathbb{R}$，其中 x 在区间 $[t_k, t_{k+1}) \subset [0, \alpha]$ 上绝对连续；对于所有 k，x 在脉冲时刻 t_k处右连续；τ 在 $[0, \alpha]$上连续，在 $[0, \alpha]$ 上连续可微（除点 $\{t_1, \ldots, t_K\} \cap [0, \alpha]$外），$x$ 在脉冲时刻t_k处右连续，并且 x 和 τ 满足 (1.1)–(1.5)。

本文的主要目标是研究脉冲初值问题（1.1）–（1.5）解的局部存在唯一性，以及解的数值近似。近期论文 [8] 研究了包括具有显式定义延迟函数的脉冲状态依赖延迟微分方程的解的存在唯一性在内的问题。存在性证明使用了 Schauder 不动点定理，并假设延迟时间函数单调递增。我们注意到，在 [22] 中研究了脉冲初值问题（1.1）–（1.5）的一种变体，其中 f 和 g 的表达式依赖于额外参数，甚至可能依赖于无限维参数。该论文的主要目标是研究解关于这些参数的可微性。因此，[22] 中必须假设函数 f和 g连续可微。此外，还假设 f 和 g 关于其变量（时间变量除外）的偏导数有界，这显然意味着 f 和 g具有全局Lipschitz连续性。在存在无限维参数的情况下，这类条件具有实用性。但若检查 [22], 中适定性结果定理 3.3 的证明，就会发现实际上并未用到 f 和 g 的连续可微性；证明适定性只需要 f 和 g 满足Lipschitz连续性。对于本文研究的脉冲初值问题（1.1）–（1.5），相应函数只需满足局部Lipschitz连续性，这显然允许应用中采用范围更广的例子。值得注意的是，假设初始函数 φ满足Lipschitz连续性，也是无脉冲状态依赖时滞微分方程解唯一性问题中的常见做法，参见例如 [10, 19]。为保证适定性以及数值方法的收敛性，我们假设初始函数分段满足Lipschitz连续性（其他无脉冲状态依赖时滞微分方程类别的类似结果见 [18, 19, 23] ）。

在 [22] 中，假设对所有 $t \in [0, T]$、$u \in \mathbb{R}^n$ 和 $w \in \mathbb{R}$，$g(t, u, w) \le q < 1$ 都成立，这保证延迟时间函数 $t - \tau(t)$ 单调递增。该性质对于 [22]中证明参数的可微性至关重要。另见 [3, 31] ，其中也假设了类似条件。在下文的定理 3.3 中，我们假设该条件，并证明当延迟时间函数单调递增时解的存在唯一性。对于数值逼近格式的收敛性（见下文的定理 4.1），我们只要求较弱的假设：延迟时间函数分段严格单调

（定义见第 2 节）。我们还在分段严格单调性这一假设下给出了一个存在唯一性结果（见定理 4.3）。但是，这样我们就无法对延迟时间函数得到任何先验下界估计。因此，不能假设初始区间具有预先确定的有限长度。所以，我们将无穷区间（$-\infty$，0]上的初始条件 (1.4) 与 (1.1) 联系起来。当然，如果解定义在有限区间上，那么沿着该解，延迟时间函数有一个负的有限下界。

在 [22] 中，研究者结合 Schauder 不动点定理与步进法证明了解的存在性。本文采用经典的 Picard–Lindelöf 型方法证明该脉冲初值问题的存在性。我们借助分段常数自变量方程（EPCAs）定义了一种数值逼近格式。我们取一列近似解，并证明其中存在一个子列收敛到该脉冲初值问题的一个解。 [23] 中针对一类中性状态依赖时滞微分方程也采用了类似的论证。分段常数自变量方程最早在 [16] 中用于定义数值逼近格式，并证明其对于一类具有常时滞的线性时滞方程和中性方程的收敛性。此后，类似的格式在不同类别的状态依赖时滞微分方程中得到定义和研究 [17, 18, 21, 23]。对分段常数自变量方程的研究可追溯至 Cooke 和 Wiener 的工作 [9, 39], ，但这一领域仍然十分活跃，参见例如 [2, 6, 29]。

本文安排如下。第 2 节介绍一些记号和预备结果；第 3 节定义我们的数值格式，并讨论与脉冲初值问题 (1.1)–(1.5) 相关的局部存在性和唯一性结果。第 4 节给出数值格式收敛性的证明，第 5 节则通过两个数值算例说明本文的结果。

2 记号与预备知识

我们用 $\mathbb{N}_0$ 和 $\mathbb{R}$ 分别表示非负整数集合和实数集合。对于 $h > 0$，我们使用记号 $\mathbb{N}_0 h = \{jh : \ j \in \mathbb{N}_0\}$。 $\mathbb{R}^n$ 上的一个固定范数记为 $|\cdot|$。我们将使用记号 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(M) = \{u \in \mathbb{R}^n : \ |u| \le M\}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为中心、半径为 M 的闭球。

设 $r > 0$ 为固定值，并考虑一个固定的有限序列 $-r < t_{-\ell_0} < t_{-\ell_0+1} < \cdots < t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_{k_0} < \alpha$. $PC([-r, \alpha], \ \mathbb{R}^n)$ 表示分段连续函数 x 的空间： $[-r, \alpha] \to \mathbb{R}^n$ 其不连续点位于 $\{t_{-\ell_0}, \ldots, t_{k_0}\}$，其中左极限 $x(t_k–)$ 存在，且函数右连续，即对于 $k = 1$，……， k_0，有 $x(t_k) = x(t_k+)$。注意，在记号 $PC([-r, \alpha], \ \mathbb{R}^n)$ 中，为简洁起见省略了对固定时间不连续点集合$\{t_{-\ell_0}, \ldots, t_{k_0}\}$的依赖，但始终应牢记这一点。我们有， $PC([-r, \alpha], \ \mathbb{R}^n)$ 是一个巴拿赫空间，其范数为$|x|_{PC([-r,\alpha], \ \mathbb{R}^n)} = \sup\{|x(t)| : \ t \in [-r, \alpha]\}$。

对于不连续点，我们采用以下记号

$$t_{-\ell_0-1} = -r, \quad t_{k_0+1} = \alpha, \quad \mathcal{I}'_k = [t_k, t_{k+1}) \text{ for } k = -\ell_0 - 1, \ldots, k_0 - 1, \quad \text{and} \quad \mathcal{I}'_{k_0} = [t_{k_0}, \alpha].$$

很容易做到。验证以下阿尔泽拉-阿斯科利定理的推广（例如，参见 [36]） .

Lemma 2.1. 设 $U \subset PC([-r, \alpha], \mathbb{R}^n)$。则 U 相对紧当且仅当 f

(i) U一致有界，即存在常数 $R > 0$，使得$|x|_{PC([-r,\alpha],\mathbb{R}^n)} \le R$对 $x \in U$成立，

(ii) U在 $[-r, \alpha]$上拟等度连续，即对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得 $|x(t) - x(\bar{t})| \le \varepsilon$对 $x \in U$和 $t, \bar{t} \in \mathcal{I}'_k$ 成立；对 $k = -\ell_0 - 1$，……， k_0 和 $|t - \bar{t}| \le \delta$ 也成立。

下面的证明将依赖于以下估计，它推广了适用于脉冲积分不等式的延迟型格朗沃尔引理。

引理 2.2 ([22], 引理 2.3)。 设 $a_0, a_1, a_2, b, c \geq 0$, $0 < t_1 < \cdots < t_K < T$, $r > 0$ 为固定值，且令$t_0 = 0$和 $t_{K+1} = T$。假设函数 $u\colon \ [-r, T] \to \mathbb{R}^n$ 在区间 $[t_k, t_{k+1})$ （其中$k = 0, \ldots, K-1$）以及 $[-r, 0]$ 和 $[t_K, T]$上连续，在点 t_k （其中 $k = 1, \ldots, K$）处具有有限的左极限 $u(t_k-)$，并且满足

$$
\begin{aligned}
&|u(t)| \leq a_0, \qquad t \in [-r, 0],\\
&|u(t)| \leq |u(t_k)| + a_1 + b\int_{t_k}^{t} \sup_{-r\leq\zeta\leq s} |u(\zeta)|\, ds, \qquad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, \ldots, K,
\end{aligned}
$$

and

$$
|\Delta u(t_k)| \leq c|u(t_k-)| + a_2, \qquad k = 1, \ldots, K.
$$

Then

$$
|u(t)| \leq \sum_{j=0}^{K} (1+c)^j (a_0 + a_1 + a_2) e^{bt}, \quad t \in [0, T]. \tag{2.6}
$$

绝对连续函数 $u\colon \ [a, b] \to \mathbb{R}$ 若存在 $[a, b]$ 的有限网格 $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_{m-1} < s_m = b$，使得对于所有 $i = 0$, 1, ..., $m-1$，满足以下任一条件，则称其在 $[a, b]$ 上是分段严格单调的

$$
\operatorname{ess\,inf}\{\dot{u}(s)\colon \ s \in [a', b']\} > 0, \qquad \text{for all } \ [a', b'] \subset (s_i, s_{i+1})
$$

or

$$
\operatorname{ess\,sup}\{\dot{u}(s)\colon \ s \in [a', b']\} < 0, \qquad \text{for all } \ [a', b'] \subset (s_i, s_{i+1}).
$$

这一性质对于 [20] 中证明具有分段严格单调延迟时间函数的状态依赖时滞微分方程解的可微性至关重要。文中给出了一个例子，说明缺少这一性质时，可微性结论可能不成立。

3 解的存在唯一性

设 $T > 0$ 为有限常数。给定固定的脉冲时刻 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_K < T$，令$\mathcal{T} := \{t_1, \ldots, t_K\}$ 表示脉冲时刻的集合。

考虑非线性状态依赖时滞微分方程

$$
\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t))), \qquad \text{a.e. } t \in [0, T], \tag{3.1}
$$

其中，延迟函数由自适应条件定义

$$
\dot{\tau}(t) = g(t, x(t), \tau(t)), \qquad \text{a.e. } t \in [0, T], \tag{3.2}
$$

脉冲条件为

$$
\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k-)), \qquad k = 1, 2, \ldots, K, \tag{3.3}
$$

且初始条件为

$$
x(t) = \varphi(t), \qquad t \in (-\infty, 0], \tag{3.4}
$$

且 $\tau(0) = \lambda$，其中 $\lambda > 0$ 是一个常数。为便于后续记号，我们将 τ 以常数值延拓至 $(-\infty, 0)$，并考虑延拓后的初始条件

$$
\tau(t) = \lambda, \qquad t \in (-\infty, 0]. \tag{3.5}
$$

接下来列出我们的假设。

(A1) **(i)** $f\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\supset[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 连续,

(ii) f 关于其第二和第三个自变量是局部Lipschitz连续的，即，对于每个 $M>0$，存在 $L_1=L_1(M)\geq 0$，使得

$$|f(t,u,v)-f(t,\bar{u},\bar{v})|\leq L_1\Big(|u-\bar{u}|+|v-\bar{v}|\Big),\qquad t\in[0,T],\ u,\bar{u},v,\bar{v}\in\overline{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^n}(M).$$

(A2) **(i)** $g\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\supset[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的,

(ii) 函数 g 满足

$$g(t,u,0)>0,\qquad t\in[0,T],\quad u\in\mathbb{R}^n,$$

(iii) g 关于其第二和第三个自变量是局部Lipschitz连续的，即，对于每个 $M>0$，存在常数 $L_2=L_2(M)\geq 0$，使得

$$|g(t,u,w)-g(t,\bar{u},\bar{w})|\leq L_2\Big(|u-\bar{u}|+|w-\bar{w}|\Big),\qquad t\in[0,T],\ u,\bar{u}\in\overline{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^n}(M),\ w,\bar{w}\in[-M,M].$$

(A3) 函数 $I_k\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 对于 $k=1,\ldots,K$ 是全局利普希茨连续的，即存在常数 $L_3\geq 0$，使得

$$|I_k(u)-I_k(\bar{u})|\leq L_3|u-\bar{u}|,\qquad u,\bar{u}\in\mathbb{R}^n,\quad k=1,2,\ldots,K.$$

(A4) **(i)** 初始函数 $\varphi\colon(-\infty,0]\to\mathbb{R}^n$ 是局部逐段利普希茨连续的，即存在一个序列 $t_{-k}\,(k\in\mathbb{N}_0)$，其中 $t_0=0$，且严格单调递减序列 t_{-k} 趋于$-\infty$，当 $k\to\infty$时，并且 φ 仅能在点 t_{-k}处有跳跃间断点， φ 在 t_{-k} 处右连续，对于 $k\in\mathbb{N}_0$，且对每个 $M>0$，存在常数 $L_4=L_4(M)\geq 0$，使得

$$|\varphi(s)-\varphi(\bar{s})|\leq L_4|s-\bar{s}|,\qquad s,\bar{s}\in[t_{-k-1},t_{-k})\cap[-M,0],\quad k\in\mathbb{N}_0.$$

(ii) φ 在 $(-\infty,0]$上有界，即存在 $N_\varphi\geq 0$ 使得

$$|\varphi(s)|\leq N_\varphi,\qquad s\in(-\infty,0].$$

考虑初始函数 $t_{-k}\,(k\in\mathbb{N}_0)$ 的跳跃间断点，并定义 $\mathcal{T}^*=\mathcal{T}\cup\{t_{-k}{:}k\in\mathbb{N}_0\}$。为简化记号，我们还引入 $t_{K+1}:=T$，并定义区间

$$\mathcal{I}_k:=[t_k,t_{k+1})\qquad\text{for } k=\cdots,-1,0,1,\ldots,K-1,\qquad\text{and}\quad\mathcal{I}_K:=[t_k,T].$$

对于固定的步长 $h>0$，我们引入以下记号

$$[t]_h=\left[\frac{t}{h}\right]h,$$

其中 $[\cdot]$ 表示最大整数函数。于是 $t-h<[t]_h\leq t$，因此

$$|[t]_h-t|\leq h,\qquad t\in\mathbb{R}.\tag{3.6}$$

我们的数值近似的网格点将是集合 $\mathbb{N}_0h$ 中的点。

受 I. Győri 在[16], 中提出、后来在 [18, 21, 23] 中针对不同类别的泛函微分方程进行研究的借助分段常数自变量方程的数值逼近格式启发，我们考虑如下定义的带自适应时滞的脉冲延迟广义Euler方法近似系统

$$\dot{x}_h(t) = f([t]_h, x_h([t]_h), x_h([t]_h - [\tau_h([t]_h)]_h)), \qquad t \in [0,T], \tag{3.7}$$
$$\dot{\tau}_h(t) = g([t]_h, x_h([t]_h), \tau_h([t]_h)), \qquad t \in [0,T], \tag{3.8}$$
$$\Delta x_h(t_k) = I_k(x_h(t_k-)), \qquad k = 1,2,\dots,K, \tag{3.9}$$
$$x_h(t) = \varphi(t), \qquad t \in (-\infty, 0], \tag{3.10}$$
$$\tau_h(t) = \lambda, \qquad t \in (-\infty, 0]. \tag{3.11}$$

函数 x_h 在 $t_k \in \mathcal{T}$ 处有跳跃间断点，在 t_k 处右连续，并且 τ_h 是连续函数。在点 $t \geq 0$ 处，当 $[t]_h \in \mathcal{T}$ 或 $[t]_h - [\tau_h([t]_h)]_h \in \mathcal{T}^*$ 或对于 $t \in \mathbb{N}_0 h$ 时，我们将 (3.7) 和 (3.8) 中的导数解释为右导数。

我们定义正数常量

$$h_0 = \min\{t_{k+1} - t_k \colon k = 0, \dots, K\}. \tag{3.12}$$

如果 $0 < h < h_0$，那么在两个相邻网格点 jh 和 $(j+1)h$之间至多有一个脉冲时刻 t_k，因此本文始终假设 $0 < h < h_0$。首先考虑关于方程 (3.7)–(3.11) 的计算和解的存在性的以下注释。

注 3.1。 设 $t_k \leq jh < (j+1)h \leq t_{k+1}$。然后将方程 (3.7) 和 (3.8) 从 jh 积分到$t \in (jh, (j+1)h)$，并取极限 $t \to (j+1)h-$，可得

$$x_h((j+1)h-) = x_h(jh) + hf(jh, x_h(jh), x_h(jh - [\tau_h(jh)]_h)),$$
$$\tau_h((j+1)h) = \tau_h(jh) + hg(jh, x_h(jh), \tau_h(jh)).$$

如果 $jh < t_k < (j+1)h$，则类似于前面的计算，并利用脉冲条件 (3.9)，我们得到

$$x_h(t_k-) = x_h(jh) + (t_k - jh) f(jh, x_h(jh), x_h(jh - [\tau_h(jh)]_h)),$$
$$x_h(t_k) = x_h(t_k-) + I_k(x_h(t_k-)),$$
$$x_h((j+1)h-) = x_h(t_k) + ((j+1)h - t_k) f(jh, x_h(jh), x_h(jh - [\tau_h(jh)]_h)),$$
$$\tau_h((j+1)h) = \tau_h(jh) + hg(jh, x_h(jh), \tau_h(jh)).$$

因此，如果对于 $j = 0, 1, \dots, j_0$，有 $\tau_h(jh) \geq 0$，那么 IIVP (3.7)–(3.11) 在区间 $(-\infty, (j_0+1)h]$上有唯一解。如果对于某个 $j \in \mathbb{N}$，$\tau(jh) < 0$，那么定义 $x_h((j+1)j-)$ 的关系不再是显式递推，因此 $x_h((j+1)h-)$ 的存在性并不明显。

称 IIVP (3.7)–(3.11) 在 $(-\infty, \alpha]$ 上（对于某个 $\alpha \leq T$）的解为一对函数 (x_h, τ_h)，其中函数 τ_h 在 $[0, \alpha]$上连续，并且在相邻网格点 $(\mathbb{N}_0 h \cap [0, \alpha]) \cup \{\alpha\}$之间为线性函数；函数 x_h 在区间 $\mathcal{I}_k \cap [0, \alpha]$（对于 $k = 0, 1, \dots, K$）上连续，并且在相邻网格点和脉冲时刻 $(\mathbb{N}_0 h \cap [0, \alpha]) \cup \{\alpha\} \cup (\mathcal{T} \cap [0, \alpha])$之间为线性函数；$x_h$具有有限左极限，且在每个脉冲时刻 $t_k \in \mathcal{T} \cap [0, \alpha]$处右连续；并且满足 (3.7)–(3.11)。

以下结果将是证明存在性与唯一性定理的关键。

引理 3.2。 假设 *(A1)–(A4)*，并令 $\lambda > 0$。则存在正常数 $h^* \le h_0$ 和 $\alpha \le T$使得 $\alpha \notin \mathcal{T}$，且对于 $0 < h < h^*$，*IIVP* (3.7)–(3.11) 在 $[0, \alpha]$上有唯一解 $(x_h(t)\ \tau_h(t))$。此外，存在非负常数 M_1、M_2、M_3 使得对于 $0 < h < h^*$

$$\tau_h(t) > 0, \qquad t \in [0, \alpha], \tag{3.13}$$
$$|x_h(t)| + \tau_h(t) < M_1, \qquad t \in (-\infty, \alpha], \tag{3.14}$$
$$|x_h(t) - x_h(\bar{t})| \le M_2|t - \bar{t}|, \qquad t, \bar{t} \in \mathcal{I}_k \cap [0, \alpha],\ k = 0, \dots, K, \quad t, \bar{t} \in \mathcal{I}_{-k} \cap [-M_1, 0],\ k \in \mathbb{N}_0 \tag{3.15}$$
$$|\tau_h(t) - \tau_h(\bar{t})| \le M_3|t - \bar{t}|, \qquad t, \bar{t} \in [0, \alpha], \tag{3.16}$$

证明。 设 L_3 为 (A3) 中的 Lipschitz 常数， $N_\varphi > 0$ 为 (A4)(ii) 中的常数，并固定常数 M_1 ，使得

$$M_1 > \Big(N_\varphi + \lambda + T \max_{s\in[0,T]} |f(s,0,0)| + T \max_{s\in[0,T]} |g(s,0,0)| + \max_{k=1,\dots,K} |I_k(0)|\Big) \sum_{j=0}^{K} (1 + L_3)^j.$$

考虑分别来自 (A1)(ii) 和 (A2)(iii) 的 Lipschitz 常数 $L_1 = L_1(M_1)$ 和 $L_2 = L_2(M_1)$，并定义

$$L = L_1 + L_2.$$

固定 $0 < \alpha \le T$，使得 $\alpha \notin \mathcal{T}$，并且

$$\Big(N_\varphi + \lambda + T \max_{s\in[0,T]} |f(s,0,0)| + T \max_{s\in[0,T]} |g(s,0,0)| + \max_{k=1,\dots,K} |I_k(0)|\Big) \sum_{j=0}^{K} (1 + L_3)^j e^{2L\alpha} < M_1. \tag{3.17}$$

由注 3.1 可知，若 τ_h 在某个网格点处取非负值，则 x_h 和 τ_h 在下一个网格点处唯一确定，因此可将解延拓到更长的区间。因此，要证明脉冲初值问题 (3.7)–(3.11) 在某个 $\alpha > 0$ 对应的 $[0, \alpha]$ 上有唯一解，只需证明它在 $[0, \alpha]$ 上生成一个正函数 τ_h 。

由于我们假设，当 t 足够小时， $\tau_h(0) = \lambda > 0$, $\tau_h(t)$ 为正。假设存在 $0 < \alpha_h^* \le \alpha$ ，使得 (x_h, τ_h) 在 $[0, \alpha_h^*]$ 上存在，并且

$$\tau_h(t) > 0, \qquad t \in [0, \alpha_h^*), \qquad \text{and} \qquad \tau_h(\alpha_h^*) = 0. \tag{3.18}$$

注意， N_φ 和 M_1 的定义给出 $|x_h(0)| + |\tau_h(0)| \le N_\varphi + \lambda < M_1$，因此当 t 足够小时，可得$|x_h(t)| + |\tau_h(t)| < M_1$。我们声称

$$|x_h(t)| + |\tau_h(t)| < M_1, \qquad t \in [0, \alpha_h^*]. \tag{3.19}$$

假设存在 $0 < T_h^* \le \alpha_h^*$ ，使得

$$|x_h(t)| + |\tau_h(t)| < M_1, \qquad t \in [0, T_h^*), \qquad \text{and} \qquad |x_h(T_h^*)| + |\tau_h(T_h^*)| \ge M_1. \tag{3.20}$$

由于 x_h 和 τ_h a 在 $\mathcal{I}_k$ 上连续，(3.7) 和 (3.8) 对于 $t \in \mathcal{I}_k \cap [0, T_h^*]$ 和 $k = 0$，1，.....， K 给出

$$x_h(t) = x_h(t_k) + \int_{t_k}^{t} f([s]_h, x_h([s]_h), x_h([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h))\, ds, \tag{3.21}$$
$$\tau_h(t) = \tau_h(t_k) + \int_{t_k}^{t} g([s]_h, x_h([s]_h), \tau_h([s]_h))\, ds. \tag{3.22}$$

由于 (3.20) 成立，我们可以在下面针对 $t \in \mathcal{I}_k \cap [0, T_h^*]$ 和 $k = 0$，1，……，K 的估计中使用 (A1) (ii)

$$\begin{aligned}
|x_h(t)| &\le |x_h(t_k)| + \int_{t_k}^{t} |f([s]_h, 0, 0)|\, ds \\
&\quad + \int_{t_k}^{t} \Big| f([s]_h, x_h([s]_h), x_h([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h)) - f([s]_h, 0, 0) \Big|\, ds \\
&\le |x_h(t_k)| + T \max_{s\in[0,T]} |f(s,0,0)| + \int_{t_k}^{t} L_1 \Big(|x_h([s]_h)| + |x_h([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h)| \Big)\, ds.
\end{aligned}$$

同样地，对于 $t \in \mathcal{I}_k \cap [0, T_h^*]$和 $k = 0$，1、……、K，我们有

$$\begin{aligned}
|\tau_h(t)| &\le |\tau_h(t_k)| + \int_{t_k}^{t} |g([s]_h, 0, 0)|\, ds + \int_{t_k}^{t} \Big| g([s]_h, x_h([s]_h), \tau_h([s]_h)) - g([s]_h, 0, 0) \Big|\, ds \\
&\le |\tau_h(t_k)| + T \max_{s\in[0,T]} |g(s,0,0)| + \int_{t_k}^{t} L_2 \Big(|x_h([s]_h)| + |\tau_h([s]_h)| \Big)\, ds.
\end{aligned}$$

将两个估计式相加，并引入记号

$$\omega_h(t) = |x_h(t)| + |\tau_h(t)|, \qquad t \in (-\infty, \alpha_h^*]$$

可得，对于 $t \in \mathcal{I}_k \cap [0, T_h^*]$和 $k = 0$，1、……、K

$$\omega_h(t) \le \omega_h(t_k) + T\Big(\max_{s\in[0,T]} |f(s,0,0)| + \max_{s\in[0,T]} |g(s,0,0)| \Big) + \int_{t_k}^{t} L \Big(\omega_h([s]_h) + \omega_h([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h) \Big)\, ds.$$

由（3.20）可得

$$[s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h \ge -\tau_h([s]_h) \ge -M_1, \qquad s \in \mathcal{I}_k \cap [0, T_h^*], \quad k = 0, \ldots, K,$$

因此，对于 $t \in \mathcal{I}_k \cap [0, T_h^*]$和 $k = 0$，1、……、K

$$\omega_h(t) \le \omega_h(t_k) + T\Big(\max_{s\in[0,T]} |f(s,0,0)| + \max_{s\in[0,T]} |g(s,0,0)| \Big) + \int_{t_k}^{t} 2L \max_{-M_1\le\zeta\le s} \omega_h(\zeta)\, ds. \tag{3.23}$$

由 τ_h 的连续性、脉冲条件（3.9）和假设（A3），对于 $t_k \le T_h^*$ 有

$$\begin{aligned}
\Delta\omega_h(t_k) &= \Big| |x_h(t_k)| - |x_h(t_k-)| \Big| \\
&\le |\Delta x_h(t_k)| \\
&\le |I_k(x_h(t_k-)) - I_k(0)| + |I_k(0)| \\
&\le L_3 |x_h(t_k-)| + |I_k(0)| \\
&\le L_3 \omega_h(t_k-) + |I_k(0)|.
\end{aligned}$$

初始条件 (3.10)、(3.11) 和 (A4) 给出

$$\omega_h(t) = |x_h(t)| + |\tau_h(t)| = |\varphi(t)| + \lambda \le N_\varphi + \lambda, \qquad t \in [-M_1, 0].$$

我们应用引理 2.2，其中 $r = M_1$, $a_0 = N_\varphi + \lambda$, $a_1 = T\Big(\max_{s\in[0,T]} |f(s,\ 0,\ 0)| + \max_{s\in[0,T]} |g(s,\ 0,\ 0)|\Big)$,$a_2 = \max_{k=1,\ \ldots,\ K} |I_k(0)|$, $b = 2L$ 和 $c = L_3$，对 (3.23) 进行估计，因此得到

$$\omega_h(t) \le \Big(N_\varphi + \lambda + T \max_{t\in[0,T]} |f(t,0,0)| + T \max_{t\in[0,T]} |g(t,0,0)| + \max_{k=1,\ldots,K} |I_k(0)| \Big) \sum_{j=0}^{K} (1+L_3)^j e^{2LT_h^*}, \quad t \in (-\infty, T_h^*]. \tag{3.24}$$

关系 (3.17) 和 (3.24) 与 (3.20) 矛盾，因此这样的 T_h^* 不存在，即关系 (3.19) 成立。

注意，对于 $t \in [0,\alpha]$，$t - \tau_h(t) \geq -M_1$。令 $L_4 = L_4(M_1)$ 为 (A4) (i) 中的利普希茨常数。定义常数

$$M_2 = \max\Big\{\max\{|f(t,u,v)|\colon t \in [0,T], u,v \in \overline{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^n}(M_1)\}, L_4\Big\}, \tag{3.25}$$

$$M_3 = \max\{|g(t,u,w)|\colon t \in [0,T], u \in \overline{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^n}(M_1), w \in [0,M_1]\}. \tag{3.26}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
|x_h(t) - x_h(\bar{t})| &= \Big|\int_{\bar{t}}^{t} f([s]_h, x_h([s]_h), x_h([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h))\,ds\Big| \\
&\leq M_2|t-\bar{t}|, \qquad t,\bar{t} \in \mathcal{I}_k \cap [0,\alpha_h^*], \quad k = 0,\dots,K, \\
|x_h(t) - x_h(\bar{t})| &= |\varphi(t) - \varphi(\bar{t})| \leq L_4|t-\bar{t}| \leq M_2|t-\bar{t}|, \qquad t,\bar{t} \in \mathcal{I}_{-k} \cap [-M_1,0], \quad k \in \mathbb{N}_0, \\
|\tau_h(t) - \tau_h(\bar{t})| &= \Big|\int_{\bar{t}}^{t} g([s]_h, x_h([s]_h), \tau_h([s]_h))\,ds\Big| \leq M_3|t-\bar{t}|, \qquad t,\bar{t} \in [0,\alpha_h^*].
\end{aligned} \tag{3.27}$$

根据 (A2) (i) 和 (ii)，可得

$$A_0 = \min\{g(t,u,0)\colon t \in [0,T],\ u \in \overline{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^n}(M_1)\} > 0.$$

g 在紧集 $[0,T] \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(M_1) \times [0,M_1]$ 上的一致连续性表明，存在 $\delta_0 > 0$使得

$$g(t,u,w) \geq A_0/2 > 0, \qquad t \in [0,T],\ u \in \overline{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^n}(M_1),\ 0 \leq w < \delta_0. \tag{3.28}$$

令 $j_0 h$ 为小于 α_h^*的最后一个网格点。于是 $\alpha_h^* - j_0 h \leq h$，由 (3.18) 可得 $\tau_h(j_0 h) > 0$。定义$h^* = \min\{\delta_0/M_3, h_0\}$，其中 h_0 由 (3.12) 定义。利用关系 (3.27) 以及 α_h^* 的定义，可得

$$0 < \tau_h(j_0 h) = \tau_h(j_0 h) - \tau_h(\alpha_h^*) \leq M_3(\alpha_h^* - j_0 h) \leq M_3 h < \delta_0, \qquad 0 < h < h^*.$$

但由此 (3.28) 可推出

$$\dot{\tau}_h(j_0 h) = g(j_0 h, x_h(j_0 h), \tau_h(j_0 h)) > 0,$$

这与对 $j_0 h$ 的选取相矛盾。这个矛盾说明，$\tau_h(\alpha_h^*) = 0$ 不可能发生。因此 $\alpha_h^* = \alpha$，且 (x_h, τ_h) 在 $[0,\alpha]$ 上存在；此外，(3.13)、(3.14)、(3.15) 和 (3.16) 成立。 □

本节余下部分使用以下记号。设 $\alpha \notin \mathcal{T}$ 由引理 3.2 定义，令 $k_0 \in \{0,1,\dots,K\}$ 为满足 $t_{k_0} < \alpha$ 的最大指标，令 $\ell_0 \in \mathbb{N}$ 为满足 $-\lambda \in [t_{-\ell_0}, t_{-\ell_0+1})$ 的指标，并按以下方式重新定义 $t_{-\ell_0}$、$\mathcal{I}_{-\ell_0}$、t_{k_0+1} 和 $\mathcal{I}_{k_0}$：

$$t_{-\ell_0} = -\lambda, \quad \mathcal{I}_k = [t_k, t_{k+1}),\ k = -\ell_0, -\ell_0+1, \dots, k_0-1, \quad \text{and} \quad t_{k_0+1} = \alpha, \quad \mathcal{I}_{k_0} = [t_{k_0}, \alpha]. \tag{3.29}$$

接下来，我们给出存在唯一性结果。首先，我们在一个条件下证明该结果，该条件意味着延迟时间函数 $t - \tau(t)$ 严格单调递增。（另请参见 [22] 中相关的定理 3.3。）为证明唯一性，我们采用 [8] 中使用的技巧。

定理 3.3。假设 *(A1)–(A4)*，令 $\lambda > 0$，并令 $\alpha > 0$、$h^* > 0$、M_1、M_2 和 M_3 由引理 *3.2* 定义，此外

$$g(t,u,w) < 1, \qquad t \in [0,\alpha], \quad u \in \overline{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^n}(M_1), \quad w \in [0,M_1]. \tag{3.30}$$

则脉冲初值问题 (3.1)–(3.5) 在 $(-\infty, \alpha]$ 上有唯一解 (x, τ)。此外，

$$\tau(t) > 0, \qquad t \in [0, \alpha], \tag{3.31}$$

$$|x(t)| + \tau(t) \le M_1, \qquad t \in (-\infty, \alpha], \tag{3.32}$$

$$|x(t) - x(\bar{t})| \le M_2 |t - \bar{t}|, \qquad t, \bar{t} \in \mathcal{I}_k, \quad k = -\ell_0, \dots, k_0, \tag{3.33}$$

$$|\tau(t) - \tau(\bar{t})| \le M_3 |t - \bar{t}|, \qquad t, \bar{t} \in [0, \alpha]. \tag{3.34}$$

证明。令 (x_h, τ_h) 由 $0 < h < h^*$对应的脉冲初值问题 (3.7)–(3.11) 定义。注意，$(x_h(t)\ \tau_h(t)) = (\varphi(t)\ \lambda)$ 与 h 在 $(-\infty, 0]$ 上无关。由引理 2.1 、 3.2 和阿尔泽拉 - 阿斯科利定理可知，存在一个序列 h_i 以及函数 $x \in PC([-M_1, \alpha], \mathbb{R}^n)$ 和 $\tau \in C([0, \alpha], \mathbb{R})$，使得当 $i \to \infty$时 $h_i \to 0$，并且

$$\lim_{i \to \infty} |x_{h_i} - x|_{PC([-M_1, \alpha], \mathbb{R}^n)} = 0 \qquad \text{and} \qquad \lim_{i \to \infty} |\tau_{h_i} - \tau|_{C([0, \alpha], \mathbb{R})} = 0. \tag{3.35}$$

注意，在上述关系中，x_{h_i} 和 τ_{h_i} 在 $[-M_1, \alpha]$ 和 $[0, \alpha]$ 上的限制分别简记为x_{h_i} 和 τ_{h_i}。考虑关于 $h = h_i$的方程 (3.22)，并令 $i \to \infty$取极限，容易验证 x 和 τ 满足

$$\tau(t) = \tau(t_k) + \int_{t_k}^{t} g(s, x(s), \tau(s))\, ds, \qquad t \in \mathcal{I}_k, \quad k = 0, 1, \dots, k_0.$$

于是 x和 τ在 $[0, \alpha]$上满足（3.2）。关系式（3.14）和（3.35）意味着，对于 $t \in [0, \alpha]$，有 $|x(t)| + |\tau(t)| \le M_1$，因此对于 $t \in [0, \alpha]$，有 $x(t) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(M_1)$ 以及 $\tau(t) \in [0, M_1]$。由于 g在紧集$[0, \alpha] \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(M_1) \times [0, M_1]$上连续，根据关系式（3.30）可得

$$\operatorname*{ess\,inf}_{t \in [0, \alpha]} \frac{d}{dt}(t - \tau(t)) = 1 - \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0, \alpha]} g(t, x(t), \tau(t)) > 0,$$

即， 延迟时间函数在 $[0, \alpha]$上严格单调递增。因此，集合 t

$$\mathcal{U} := \bigcup_{k=-\ell_0}^{k_0} \{s \in [0, \alpha] \colon\ s - \tau(s) = t_k\} \tag{3.36}$$

的勒贝格测度为 0。由 τ的连续性、（3.6）和（3.35），我们推得 e

$$[s]_{h_i} - [\tau_{h_i}([s]_{h_i})]_{h_i} \to s - \tau(s), \qquad \text{for } s \in [0, \alpha],$$

并且由于 x 仅在 $t \in \mathcal{T}^*$处具有跳跃间断，我们得到

$$x_{h_i}([s]_{h_i}) \to x(s) \quad \text{and} \quad x_{h_i}([s]_{h_i} - [\tau_{h_i}([s]_{h_i})]_{h_i}) \to x(s - \tau(s)) \qquad \text{for a.e. } s \in [0, \alpha] \tag{3.37}$$

当 $i \to \infty$时。由（3.21），利用（3.6）、（3.35）、（3.37）和勒贝格控制收敛定理，我们得到

$$x(t) = x(t_k) + \int_{t_k}^{t} f(s, x(s), x(s - \tau(s)))\, ds, \qquad t \in \mathcal{I}_k, \quad k = 0, 1, \dots, k_0.$$

令 $k \in \{1, \dots, k_0\}$。利用 x_{h_i} 在 $\mathcal{I}_{k-1}$上一致收敛于 x，我们得到（例如，参见 [34] 中的定理 7.11）

$$\lim_{i \to \infty} x_{h_i}(t_k-) = \lim_{i \to \infty} \lim_{t \to t_k-} x_{h_i}(t) = \lim_{t \to t_k-} \lim_{i \to \infty} x_{h_i}(t) = x(t_k-).$$

因此，跳跃条件 (3.9) 和 I_k 的连续性意味着

$$\begin{aligned}\Delta x(t_k) &= x(t_k) - x(t_k-)\\ &= \lim_{i\to\infty}\Big(x_{h_i}(t_k) - x_{h_i}(t_k-)\Big)\\ &= \lim_{i\to\infty} I_k(x_{h_i}(t_k-))\\ &= I_k(x(t_k-)),\end{aligned}$$

因此 x 满足（3.3）。

显然， x 在 $[-M_1, 0]$上满足（3.4），且 $\tau(0) = \lambda$。利用（3.4）和（3.5），我们可以将 x 和 τ的定义延拓到无穷区间（$-\infty$， $0]$）。于是（x， τ）是在（$-\infty$， $\alpha]$）上IIVP（3.1）–（3.5）的一个解。为证明（3.31），假设存在 $t^* \in (0, \alpha]$ 使得

$$\tau(t) > 0, \qquad t \in [0, t^*) \qquad \text{and} \qquad \tau(t^*) = 0.$$

则 $\dot{\tau}(t^*-) \le 0$，但这与（A2）（ii）矛盾。因此，（3.31）成立。由于 x_{h_i} 和 τ_{h_i} 满足（3.14）–（3.16），取极限 $i \to \infty$ 可得（3.32）–（3.34）。

为证明唯一性，令（x， τ）为通过上述论证得到的解，并假设（$\bar{x}$， $\bar{\tau}$）是IIVP（3.1）–（3.5）在（$-\infty$， $\alpha]$）上的另一个解（由于（A2）（ii），它也满足（3.31），但不一定满足（3.32）–（3.34））。令 $M_1^* \ge M_1$ 使得

$$|\bar{x}(t)| + \bar{\tau}(t) \le M_1^*, \quad t \in [0, \alpha]. \tag{3.38}$$

由延迟时间函数的单调性可知，对于 $s \in [0, \alpha]$， $s - \bar{\tau}(s) \ge -\lambda$。设 $L_1 = L_1(M_1^*)$、 $L_2 = L_2(M_1^*)$ 和 $L_4 = L_4(\lambda)$ 分别为 (A1) (ii)、(A2) (iii) 和 (A4) (i) 中的 Lipschitz 常数。引入

$$\alpha_1 := \inf\{t \in [0, \alpha] \colon |x(t) - \bar{x}(t)| + |\tau(t) - \bar{\tau}(t)| \ne 0\}.$$

假设 $\alpha_1 < \alpha$。设 $k \in \{0, \dots, k_0\}$ 满足 $\alpha_1 \in \mathcal{I}_k$，并设 $\delta_0 > 0$ 满足 $[\alpha_1, \alpha_1 + \delta_0] \subset \mathcal{I}_k$。则容易得到，对于 $t \in [\alpha_1, \alpha_1 + \delta_0]$

$$\begin{aligned}|x(t) - \bar{x}(t)| &\le |x(t_k) - \bar{x}(t_k)| + \int_{t_k}^{t} \Big| f(s, x(s), x(s - \tau(s))) - f(s, \bar{x}(s), \bar{x}(s - \bar{\tau}(s))) \Big| ds\\ &= \int_{\alpha_1}^{t} \Big| f(s, x(s), x(s - \tau(s))) - f(s, \bar{x}(s), \bar{x}(s - \bar{\tau}(s))) \Big| ds\\ &\le \int_{\alpha_1}^{t} L_1 \Big(|x(s) - \bar{x}(s)| + |x(s - \tau(s)) - x(s - \bar{\tau}(s))| + |x(s - \bar{\tau}(s)) - \bar{x}(s - \bar{\tau}(s))| \Big) ds.\end{aligned}$$

由于 τ 和 $\bar{\tau}$ 在 $[0, \alpha]$ 上为正，因此存在 $\delta_1 > 0$，使得对于 $t \in [0, \alpha]$， $\tau(t) \ge \delta_1$ 且 $\bar{\tau}(t) \ge \delta_1$。假设对于某个 $j \in \{-\ell_0, \dots, k\}$， $\alpha_1 - \tau(\alpha_1) = \alpha_1 - \bar{\tau}(\alpha_1) \in \mathcal{I}_j$。则存在 $\varepsilon > 0$，使得

$$J := [\alpha_1 - \tau(\alpha_1), \alpha_1 - \tau(\alpha_1) + \varepsilon] \subset \mathcal{I}_j.$$

我们有，两个延迟时间函数 $t - \tau(t)$ 和 $t - \bar{\tau}(t)$ 均为递增且连续，因此存在 $0 < \delta < \min\{\delta_0, \delta_1\}$ 使得

$$s - \tau(s) \in J \qquad \text{and} \qquad s - \bar{\tau}(s) \in J \qquad \text{for } s \in [\alpha_1, \alpha_1 + \delta].$$

因此，对于 $t \in [\alpha_1, \alpha_1 + \delta]$，我们得到 $|x(s - \bar{\tau}(s)) - \bar{x}(s - \bar{\tau}(s))| = 0$，并且

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \le \int_{\alpha_1}^{t} L_1 \Big(|x(s) - \bar{x}(s)| + M_2 |\tau(s) - \bar{\tau}(s)| \Big) ds.$$

同理，对于 $t \in [\alpha_1, \alpha_1 + \delta]$。

$$\begin{aligned} |\tau(t) - \bar{\tau}(t)| &\le |\tau(t_k) - \bar{\tau}(t_k)| + \int_{t_k}^{t} \Big| g(s, x(s), \tau(s)) - g(s, \bar{x}(s), \bar{\tau}(s)) \Big| ds \\ &= \int_{\alpha_1}^{t} \Big| g(s, x(s), \tau(s)) - g(s, \bar{x}(s), \bar{\tau}(s)) \Big| ds \\ &\le \int_{\alpha_1}^{t} L_2 \Big(|x(s) - \bar{x}(s)| + |\tau(s) - \bar{\tau}(s)| \Big) ds. \end{aligned}$$

我们定义了

$$\begin{aligned} L_0 &= L_1 \max\{1, M_2\} + L_2, \\ \omega(t) &= |x(t) - \bar{x}(t)| + |\tau(t) - \bar{\tau}(t)|, \qquad t \in (-\infty, \alpha]. \end{aligned}$$

然后，将前面的估计相加，得到 $t \in [\alpha_1, \alpha_1 + \delta]$

$$\omega(t) \le \int_{\alpha_1}^{t} L_0 \sup_{-M_1 \le \zeta \le s} \omega(\zeta)\, ds.$$

利用 $\omega(\alpha_1) = 0$，格朗沃尔引理推出对于 $t \in [\alpha_1, \alpha_1 + \delta]$，$\omega(t) = 0$，这与 α_1 的定义矛盾。因此我们得到对于 $t \in [0, \alpha]$，$\omega(t) = 0$，从而解的唯一性得证。 □

T引理 3.2 和定理 3.3 的证明立即推出以下结果。 t.

推论 3.4。令 $\lambda > 0$，并假设 *(A1)–(A4)*，其中 f 和 g 在其定义域上是全局利普希茨连续的，即，L_1 和 L_2 分别在 *(A1) (ii)* 和 *(A2) (iii)* 中不依赖于 M，此外

$$g(t, u, w) < 1, \qquad t \in [0, T], \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad w \in [0, \infty).$$

那么，脉冲初值问题(3.1)–(3.5)在$(-\infty, T]$上有唯一解(x, τ)，并且关系(3.31)–(3.34)在$\alpha = T$下成立。

4 数值近似

现在我们借助分段常数自变量方程研究脉冲初值问题 (3.1)–(3.5) 的解的数值近似。下一个定理表明，在紧区间 $[0, \alpha]$ 上，(3.7)–(3.11) 的解一致地近似 (3.1)–(3.5) 的解。该结果的关键假设是延迟时间函数 $t - \tau(t)$ 具有分段严格单调性。

定理 4.1. 假设 *(A1)-(A4)* 成立，令 $\lambda > 0$，并令 $0 < \alpha \le T$ 和 $h^* > 0$ 由引理 *3.2* 定义。设 (x, τ) 是脉冲初值问题 (3.1)–(3.5) 在 $(-\infty, \alpha]$上的任意一个解，其中相应的延迟时间函数$t - \tau(t)$ 在 $[0, \alpha]$上分段严格单调，并假设脉冲时刻 $t_k (k = -\ell_0, \dots, k_0)$ 不是该延迟时间函数的局部极值或极值点，且 $\dot{\tau}(0) \ne 1$ 并且 $\dot{\tau}(\alpha-) \ne 1$。设 (x_h, τ_h) 是脉冲初值问题 (3.7)–(3.11) 在 $(-\infty, \alpha]$ 上的解，其中 $0 < h < h^*$。那么

$$\lim_{h \to 0+} \max_{t \in [0, \alpha]} |x_h(t) - x(t)| = 0 \qquad and \qquad \lim_{h \to 0+} \max_{t \in [0, \alpha]} |\tau_h(t) - \tau(t)| = 0. \tag{4.1}$$

证明. 令 M_1, M_2 和 M_3 由引理 3.2 定义。定义

$$M_1^* := \max\Big\{\sup\{|x(t)| + |\tau(t)|\colon\ t \in [0,\alpha]\}, M_1\Big\}.$$

则 $t-\tau(t) \geq -M_1^*$对于 $t \in [0,\alpha]$。令 M_2^* 和 M_3^* 分别由 (3.25) 和 (3.26) 定义，其中将 M_1 替换为 M_1^*，并令 $L_1 = L_1(M_1^*)$、$L_2 = L_2(M_1^*)$、L_3 和 $L_4 = L_4(M_1^*)$ 分别为 (A1)–(A4) 中的 Lipschitz 常数。注意，$M_2^* \geq M_2$ 和 $M_3^* \geq M_3$。我们使用 (3.29) 定义的记号，但作如下修改：令 ℓ_0 为满足 $-M_1^* \in [t_{-\ell_0}, t_{-\ell_0+1})$ 的指标，并重新定义 $t_{-\ell_0} = -M_1^*$。对于 $h \in (0,\ h^*)$，我们定义常数

$$\mu_{1,h} = \max_{k=0,\dots,k_0} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big| f([s]_h, x(s), x(s-\tau(s))) - f(s, x(s), x(s-\tau(s))) \Big|\, ds,$$
$$\mu_{2,h} = \max_{k=0,\dots,k_0} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big| g([s]_h, x(s), \tau(s)) - g(s, x(s), \tau(s)) \Big|\, ds.$$

关系式 (3.6)、$\mathcal{I}_k$ 区间上 f、g、x 和 τ 的连续性以及勒贝格控制收敛定理表明

$$\lim_{h\to 0+} (\mu_{1,h} + \mu_{2,h}) = 0. \tag{4.2}$$

由于 x_h an d τ_h 在 $\mathcal{I}_k$ 上连续，由 (3.7) 和 (3.8) 可得，对于 $t \in \mathcal{I}_k$ 和 $k = 0,\ 1,\ \dots\dots,\ k_0$

$$x_h(t) = x_h(t_k) + \int_{t_k}^{t} f([s]_h, x_h([s]_h), x_h([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h))\, ds, \tag{4.3}$$
$$\tau_h(t) = \tau_h(t_k) + \int_{t_k}^{t} g([s]_h, x_h([s]_h), \tau_h([s]_h))\, ds. \tag{4.4}$$

将 (3.1) 和 (3.2) 从 t_k 积分到 $t \in \mathcal{I}_k$，得到

$$x(t) = x(t_k) + \int_{t_k}^{t} f(s, x(s), x(s-\tau(s)))\, ds, \tag{4.5}$$
$$\tau(t) = \tau(t_k) + \int_{t_k}^{t} g(s, x(s), \tau(s))\, ds. \tag{4.6}$$

取.....之差　　将 (4.3) 和 (4.5) 相减，并利用假设 (A1)(ii) 和 μ_1 的定义，h，得到

$$\begin{aligned}
|x_h(t) - x(t)| &\leq |x_h(t_k) - x(t_k)| + \int_{t_k}^{t} \Big| f([s]_h, x_h([s]_h), x_h([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h)) - f(s, x(s), x(s-\tau(s))) \Big|\, ds \\
&\leq |x_h(t_k) - x(t_k)| + \int_{t_k}^{t} \Big| f([s]_h, x(s), x(s-\tau(s))) - f(s, x(s), x(s-\tau(s))) \Big|\, ds \\
&\quad + \int_{t_k}^{t} \Big| f([s]_h, x_h([s]_h), x_h([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h)) - f([s]_h, x(s), x(s-\tau(s))) \Big|\, ds \\
&\leq |x_h(t_k) - x(t_k)| + \mu_{1,h} \\
&\quad + \int_{t_k}^{t} L_1 \Big(|x_h([s]_h) - x(s)| + |x_h([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h)) - x(s-\tau(s))| \Big)\, ds
\end{aligned} \tag{4.7}$$

对于 $t \in \mathcal{I}_k$, $k = 0,\dots, k_0$。我们进一步引入以下记号

$$\begin{aligned}
z_h(t) &= |x_h(t) - x(t)|, \qquad t \in (-\infty, \alpha], \\
\eta_h(t) &= |\tau_h(t) - \tau(t)|, \qquad t \in (-\infty, \alpha], \\
\omega_h(t) &= z_h(t) + \eta_h(t), \qquad t \in (-\infty, \alpha].
\end{aligned}$$

然后，结合关系 (3.6)、(3.15) 和 (3.16)，由 (4.7) 可得

$$z_h(t) \le z_h(t_k) + \mu_{1,h} + \int_{t_k}^{t} L_1\Big(|x([s]_h) - x(s)| + |x([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h) - x(s-\tau(s))|\Big)\, ds$$
$$+ \int_{t_k}^{t} L_1\Big(z_h([s]_h) + z_h([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h)\Big)\, ds \tag{4.8}$$

对于 $t \in \mathcal{I}_k$、$k = 0, \ldots, k_0$。假设 $t < t_k + h$。则

$$\int_{t_k}^{t} \Big(|x([s]_h) - x(s)| + |x([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h) - x(s-\tau(s))|\Big)\, ds \le 4M_1^* h.$$

对于 $t \in (t_k + h, t_{k+1})$，我们有 $[t]_h \ge t_k$。因此，根据 M_1^* 的定义、M_2^*以及（3.6），我们得到 t

$$\int_{t_k}^{t} |x([s]_h) - x(s)|\, ds = \int_{t_k}^{t_k+h} |x([s]_h) - x(s)|\, ds + \int_{t_k+h}^{t} |x([s]_h) - x(s)|\, ds \le 2M_1^* h + M_2^* h\alpha. \tag{4.9}$$

注意，（4.9）对所有 $t \in \mathcal{I}_k$ 都成立。

固定 $t \in (t_k + h,\ t_{k+1})$。下面我们估计含有延迟项的积分

$$\int_{t_k}^{t} |x([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h) - x(s-\tau(s))|\, ds.$$

令 $\mathcal{U}$ 由（3.36）定义，并令 $s_0 = 0 < s_1 < \cdots < s_m = \alpha$ 为延迟时间函数 $t - \tau(t)$ 的局部极值点，定义 $\mathcal{M} = \{s_1, \ldots, s_{m-1}\}$。根据该定理的假设，$\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{M}$ 是不相交集。令 $d_0 = \min\{s_{j+1} - s_j :\ j = 0, \ldots, m-1\}$，并令 $0 < d_1 < d_0$ 为集合 $\mathcal{U} \cup \mathcal{M} \cup \{0, \alpha\}$ 中相邻点之间的最小距离。定义 $\mathcal{M}^+$ 和 $\mathcal{M}^-$ 为点 p_j 的集合，其中延迟时间函数分别在区间（p_j，p_{j+1}）上递增和递减。

令 $0 < \delta^* < d_1/4$。则对于所有$s_j \in \mathcal{M} \cup \{0, \alpha\}$，区间（$s_j - \delta^*$，$s_j + \delta^*$）不包含 $\mathcal{U} \cap (0,\ \alpha)$ 中的任何点。定义常数

$$\varepsilon_0 = \operatorname{ess\,inf}\Big\{|1 - \dot\tau(s)| :\ s \in (s_0, s_1 - \delta^*) \cup \bigcup_{j=1}^{m-2} (s_j + \delta^*, s_{j+1} - \delta^*) \cup (s_{m-1} + \delta^*, s_m)\Big\},$$
$$N_0 = \operatorname{ess\,sup}\Big\{|1 - \dot\tau(s)| :\ s \in (0, \alpha)\Big\}.$$

分段严格单调性的定义、假设 $\dot\tau(0) \ne 1$ 且 $\dot\tau(\alpha-) \ne 1$，以及 (3.2) 表明，ε_0 和 N_0 是有限正数。延迟时间函数的分段单调性假设意味着，$\mathcal{U}$ 具有有限个元素。令 $u_{k,1} < u_{k,2} < \cdots < u_{k,i_k}$ 为 $\mathcal{U} \cap (t_k,\ t_{k+1})$ 的元素，此外定义 $u_{k,0} = t_k$ 和 $u_{k,i_k+1} = t_{k+1}$。那么对于每个 $k \in \{0, \ldots, k_0\}$ 和 $i \in \{0, \ldots, i_k\}$，存在$j_{k,i} \in \{-\ell_0, \ldots, k_0\}$，使得当 $s \in (u_{k,i},\ u_{k,i+1})$ 时，$s - \tau(s) \in \mathcal{I}_{j_{k,i}}$。

由（3.6）和 M_3^* 的定义可得

$$|([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h) - (s - \tau(s))| \le |[s]_h - s| + |[\tau_h([s]_h)]_h - \tau_h([s]_h)| + |\tau_h([s]_h) - \tau_h(s)| + |\tau_h(s) - \tau(s)|$$
$$\le Mh + \eta_h(s), \qquad s \in [0, \alpha], \tag{4.10}$$

其中 $M = 2 + M_3^*$。

设 e_0^*为集合 $\mathcal{T}^* \cup \{t_k - \tau(t_k)$ 中相邻元素之间的最小距离： $k = 0,$ ....., $k_0\}$; e_1^*为集合 $\mathcal{T}^* \cup \{s_j - \tau(s_j)$ 中相邻元素之间的最小距离： $j = 1,$ ....., $m-1\}$; 并定义 δ, 使得 $0 < \delta < \min\{\delta^*, e_0^*/(4\varepsilon_0)\ e_0^*/(N_0+\varepsilon_0)\ e_1^*/\varepsilon_0\}$。那么, 区间 $(u_{k,\ i},\ u_{k,\ i}+\delta)$ 和 $(u_{k,\ i+1}-\delta,\ u_{k,\ i+1})$ 不包含 $\mathcal{U} \cup \mathcal{M}$ 中的任何元素, 且延迟时间函数在这些区间上是单调递增或递减的。

我们定义常数

$$
\begin{aligned}
n_0 &= \max\{i_k\colon\ k = 0, \dots, k_0\} + 1,\\
K_0 &= \frac{1 + L_2(1 + M_2^* + M_3^*)\delta}{\varepsilon_0},\\
K_1 &= 2M_1^* n_0(2K_0 + 1) + \alpha M_2^* M,\\
K_2 &= L_1(2M_1^* + M_2^*\alpha + K_1),\\
K_3 &= L_2(2M_1^* + M_2^*\alpha + M_3^*\alpha),\\
K_4 &= \max\Big\{\frac{2M_1^*}{\varepsilon_0}, 1\Big\},\\
D_h &= \mu_{1,h} + \mu_{2,h} + (K_2 + K_3)h,\\
L_0 &= \max\Big\{L_1 \max\Big\{1, \frac{L_2}{\varepsilon_0}\Big\} + L_2, L_1 M_2^*, L_1\Big\},\\
m^* &= 2(i_0 + \cdots + i_{k_0}),\\
E^* &= 2^{m^*+k_0} K_4^{m^*+k_0}\Big(\sum_{i=0}^{k_0}(1 + L_3)^i\Big)^{m^*+2k_0}(e^{3L_0\alpha})^{m^*+2k_0}.
\end{aligned}
$$

由关系式 (4.2) 可知, 存在 $h_1 \in (0, h^*)$, 使得

$$
D_h E^* < \frac{\varepsilon_0\delta}{2}, \qquad 0 < h < h_1. \tag{4.11}
$$

令 $h_2 = \min\{h_1, \frac{\varepsilon_0\delta}{2M}, \delta\}$ 和 $h \in (0, h_2)$。由于 $\eta_h(0) = 0$, 当 t 足够小时, 有 $\eta_h(t) < \frac{\varepsilon_0\delta}{2}$。设 $0 < \beta \le \alpha$ 满足

$$
\eta_h(s) < \frac{\varepsilon_0\delta}{2}, \qquad s \in [0, \beta), \qquad \eta_h(\beta) = \frac{\varepsilon_0\delta}{2}. \tag{4.12}
$$

现在我们有以下观察。如果延迟时间函数在 $(u_{k,i}, u_{k,i} + \delta)$ 上递增, 则不存在这样的 $s \in (u_{k,i}, u_{k,i} + \delta) \cap [0, \beta]$, 使得 $[s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h \ge t_{j_{k,i}+1}$。如果 $i > 0$, 那么 $t_{j_{k,i}} = u_{k,i} - \tau(u_{k,i})$。事实上, 如果该不等式成立, 那么这些估计

$$
e_0^* \le t_{j_{k,i}+1} - t_{j_{k,i}} \le [s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h - (u_{k,i} - \tau(u_{k,i})) \le s - \tau(s) + \varepsilon_0\delta - (u_{k,i} - \tau(u_{k,i})) \le (N_0 + \varepsilon_0)\delta
$$

将与 s、 δ 和 h 的定义、(4.10) 和 (4.12) 矛盾。对于 $i = 0$, 根据 e_0^* 的定义可得矛盾

$$
e_0^* \le t_{j_{k,i}+1} - (t_k - \tau(t_k)) \le [s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h - (t_k - \tau(t_k)) \le s - \tau(s) + \varepsilon_0\delta - (t_k - \tau(t_k)) \le (N_0 + \varepsilon_0)\delta.
$$

同样, 我们可以验证, 若延迟时间函数在 $(u_{k,i}, u_{k,i} + \delta)$ 上递减, 则不存在 $s \in (u_{k,i}, u_{k,i} + \delta) \cap [0, \beta]$ 使得 $[s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h < t_{j_{k,i}}$。若延迟时间函数在 $(u_{k,i+1} - \delta, u_{k,i+1})$ 上递增, 则不存在 $s \in (u_{k,i+1} - \delta, u_{k,i+1}) \cap [0, \beta]$ 使得 $[s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h < t_{j_{k,i}}$。最后, 若延迟时间函数在 $(u_{k,i+1} - \delta, u_{k,i+1})$ 上递减, 则不存在 $s \in (u_{k,i+1} - \delta, u_{k,i+1}) \cap [0, \beta]$ 使得 $[s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h \ge t_{j_{k,i}+1}$。

我们回顾一下记号： $s-\tau(s)\in\mathcal{I}_{j_{k,\ i}}=[t_{j_{k,i}},t_{j_{k,i}+1})$ 表示 $s\in(u_{k,\ i},\ u_{k,\ i+1})$。我们定义不相交集

$$
\begin{aligned}
A^h_{k,i}&=\{s\in(u_{k,i},u_{k,i}+\delta)\colon\ [s]_h-[\tau_h([s]_h)]_h<t_{j_{k,i}}\quad\text{or}\quad [s]_h-[\tau_h([s]_h)]_h\geq t_{j_{k,i}+1}\},\\
B^h_{k,i}&=\{s\in(u_{k,i},u_{k,i+1})\colon\ [s]_h-[\tau_h([s]_h)]_h\in\mathcal{I}_{j_{k,i}}\},\\
C^h_{k,i}&=\{s\in(u_{k,i+1}-\delta,u_{k,i+1})\colon\ [s]_h-[\tau_h([s]_h)]_h<t_{j_{k,i}}\quad\text{or}\quad [s]_h-[\tau_h([s]_h)]_h\geq t_{j_{k,i}+1}\}.
\end{aligned}
$$

接下来我们证明

$$(u_{k,i}+\delta,u_{k,i+1}-\delta)\subset B^h_{k,i}. \tag{4.13}$$

共有四种情况：(i) $t_{j_{k,i}}=u_{k,i}-\tau(u_{k,i})$ 和 $t_{j_{k,i+1}}=u_{k,i+1}-\tau(u_{k,i+1})$；(ii) $t_{j_{k,i+1}}=u_{k,i}-\tau(u_{k,i})$ 和 $t_{j_{k,i}}=u_{k,i+1}-\tau(u_{k,i+1})$；(iii) $t_{j_{k,i}}=u_{k,i}-\tau(u_{k,i})=u_{k,i+1}-\tau(u_{k,i+1})$，以及 $s-\tau(s)>t_{j_{k,i}}$，对于 $s\in(u_{k,i},u_{k,i+1})$；以及 (iv) $t_{j_{k,i+1}}=u_{k,i}-\tau(u_{k,i})=u_{k,i+1}-\tau(u_{k,i+1})$，以及 $s-\tau(s)<t_{j_{k,i+1}}$，对于 $s\in(u_{k,i},u_{k,i+1})$。根据 e_0^* 的定义，可得 $t_{j_{k,i+1}}-t_{j_{k,i}}\geq e_0^*>4\varepsilon_0\delta$。

在情形 (i) 中，首先假设延迟时间函数在 $(u_{k,i},u_{k,i+1})$ 上单调递增。由 ε_0 的定义可得

$$(u_{k,i}+\delta)-\tau(u_{k,i}+\delta)-(u_{k,i}-\tau(u_{k,i}))\geq\varepsilon_0\delta,$$

因此，对于 $s\in(u_{k,i}+\delta,u_{k,i+1})$，有 h $s-\tau(s)>t_{j_{k,i}}+\varepsilon_0\delta$。类似地，对于$s\in(u_{k,i},u_{k,i+1}-\delta)$，可得 $s-\tau(s)<t_{j_{k,i+1}}-\varepsilon_0\delta$。若延迟时间函数不是单调递增的，则它在 $u_{k,i}$ 和 $u_{k,i+1}$ 之间有局部极值点。由 e_1^* 和 δ 的定义可知，对于任意局部极大点 s_1，有 $s_1-\tau(s_1)\leq t_{j_{k,i+1}}-e_1^*<t_{j_{k,i+1}}-\varepsilon_0\delta$；对于任意局部极小点 s_2，则有 $s_2-\tau(s_2)>t_{j_{k,i}}+\varepsilon_0\delta$。因此，在这两种情形下，对于 $s\in(u_{k,i}+\delta,u_{k,i+1}-\delta)$，均有 $t_{j_{k,i}}+\varepsilon_0\delta<s-\tau(s)<t_{j_{k,i+1}}-\varepsilon_0\delta$。于是，对于$s\in(u_{k,i}+\delta,u_{k,i+1}-\delta)\cap[0,\beta]$，由 (4.10)、(4.12) 及上述估计可得

$$t_{j_{k,i}}<s-\tau(s)-\varepsilon_0\delta\leq[s]_h-[\tau_h([s]_h)]_h\leq s-\tau(s)+\varepsilon_0\delta<t_{j_{k,i}+1},$$

这证明了情形 (i) 下的 (4.13)。情形 (ii) 下关系式 (4.13) 的证明类似。

情形 (iii) 下，延迟时间函数在点 $s^*\in(u_{k,\ i},\ u_{k,\ i+1})$ 处取得最大值。e_1^* 和 δ 的定义意味着 $t_{j_{k,\ i+1}}-\varepsilon_0\delta>t_{j_{k,\ i+1}}-e_1^*\geq s^*-\tau(s^*)$。于是，与情形 (i) 相同，容易得到$s-\tau(s)>t_{j_{k,\ i}}+\varepsilon_0\delta$ 对 $s\in(u_{k,\ i}+\delta,\ u_{k,\ i+1}-\delta)$ 成立，因此对于这样的 s，我们有

$$t_{j_{k,i}}<s-\tau(s)-\varepsilon_0\delta\leq[s]_h-[\tau_h([s]_h)]_h\leq s-\tau(s)+\varepsilon_0\delta\leq s^*-\tau(s^*)+\varepsilon_0\delta<t_{j_{k,i}+1}.$$

这证明了情形 (iii) 下的 (4.13)。情形 (iv) 下 (4.13) 的证明类似。

接下来我们估计 $A^h_{k,\ i}$ 的勒贝格测度。令 $v^h_{k,\ i}$ 为 $A^h_{k,\ i}\cap[t_k,t]\cap\mathbb{N}_0h$ 中最大的元素。于是 $A^h_{k,\ i}\cap[t_k,t]\subset(u_{k,\ i},\ v^h_{k,\ i}+h)$。我们有两种情形：或者 (i) 对某个 $s_j\in\mathcal{M}^+$，$u_{k,\ i}\in(s_j+\delta,\ \ s_{j+1}-\delta)$；或者 (ii) 对某个 $s_j\in\mathcal{M}^-$，$u_{k,\ i}\in(s_j+\delta,\ \ s_{j+1}-\delta)$。在情形 (i) 下，$A^h_{k,\ i}$ 的定义意味着

$$v^h_{k,i}-\tau_h(v^h_{k,i})\leq v^h_{k,i}-[\tau_h(v^h_{k,i})]_h<t_{j_{k,i}}\leq u_{k,i}-\tau(u_{k,i}),$$

因此，我们得到　根据 ε_0 的定义以及延迟时间函数 t 的单调性　hat

$$\varepsilon_0(v^h_{k,i}-u_{k,i})\leq v^h_{k,i}-\tau(v^h_{k,i})-(u_{k,i}-\tau(u_{k,i}))<\tau_h(v^h_{k,i})-\tau(v^h_{k,i}).$$

在情形（ii）中，延迟时间函数在 $(u_{k,i},u_{k,i}+\delta)$ 上递减，且

$$v^h_{k,i}-(\tau_h(v^h_{k,i})-h)>v^h_{k,i}-[\tau_h(v^h_{k,i})]_h\geq t_{j_{i+1}}\geq u_{k,i}-\tau(u_{k,i}),$$

我们得到

$$-\varepsilon_0(v_{k,i}^h-u_{k,i})\geq v_{k,i}^h-\tau(v_{k,i}^h)-(u_{k,i}-\tau(u_{k,i}))>\tau_h(v_{k,i}^h)-\tau(v_{k,i}^h)-h.$$

因此，在这两种情况下，$A_{k,i}^h$ 的勒贝格测度可估计为

$$m\Big(A_{k,i}^h\cap[t_k,t]\Big)\leq\frac{1}{\varepsilon_0}|\tau_h(v_{k,i}^h)-\tau(v_{k,i}^h)|+\left(\frac{1}{\varepsilon_0}+1\right)h,\qquad i=0,\dots,i_{k,t}. \tag{4.14}$$

利用 τ_h 和 τ 是绝对连续的，由 (3.2) 和 (3.8) 可得

$$\begin{aligned}|\tau_h(v_{k,i}^h)-\tau(v_{k,i}^h)|&=\Big|\tau_h(u_{k,i}^h)-\tau(u_{k,i}^h)+\int_{u_{k,i}^h}^{v_{k,i}^h}\Big(g([s]_h,x_h([s]_h),\tau_h([s]_h)-g(s,x(s),\tau(s)))\Big)ds\Big|\\&\leq|\tau_h(u_{k,i}^h)-\tau(u_{k,i}^h)|+\int_{u_{k,i}^h}^{v_{k,i}^h}L_2\Big(h+|x_h([s]_h)-x([s]_h)|+|x([s]_h)-x(s)|\\&\quad+|\tau_h([s]_h)-\tau([s]_h)|+|\tau([s]_h)-\tau(s)|\Big)ds.\end{aligned}$$

令 $i_{k,t}$ 为满足 $u_{k,i_{k,t}}<t$ 的最大指标，并令 $i_{k,t}$ 为满足 $u_{k,\bar{i}_{k,t}+1}-\delta<t$ 的最大指标。由于 x 和 τ 在 $[u_{k,i},u_{k,i}+\delta]$ 上是 Lipschitz 连续的，对于 $i=0,..,i_{k,t}$，有

$$\eta_h(v_{k,i}^h)\leq\eta_h(u_{k,i}^h)+L_2(1+M_2^*+M_3^*)\delta h+\int_{u_{k,i}^h}^{\min\{u_{k,i}^h+\delta,t\}}L_2\omega_h([s]_h)\,ds.$$

因此，将其与 (4.14) 结合可得

$$m\Big(A_{k,i}^h\cap[t_k,t]\Big)\leq\frac{1}{\varepsilon_0}\eta_h(u_{k,i}^h)+\Big(K_0+1\Big)h+\frac{L_2}{\varepsilon_0}\int_{u_{k,i}^h}^{\min\{u_{k,i}^h+\delta,t\}}\omega_h([s]_h)\,ds,\qquad i=0,\dots,i_{k,t}. \tag{4.15}$$

以类似的方式可证明

$$m\Big(C_{k,i}^h\cap[t_k,t]\Big)\leq\frac{1}{\varepsilon_0}\eta_h(u_{k,i+1}^h-\delta)+K_0h+\frac{L_2}{\varepsilon_0}\int_{u_{k,i+1}^h-\delta}^{\min\{u_{k,i+1}^h,t\}}\omega_h([s]_h)\,ds,\qquad i=0,\dots,\bar{i}_{k,t}. \tag{4.16}$$

现在我们可以估计含延迟项的积分了。在集合 $B_{k,\,i}^h$ 上，我们可以利用 x 的利普希茨连续性（利普希茨常数为 M_2^*）以及估计式 (4.10)；在集合 $A_{k,\,i}^h$ 和 $C_{k,\,i}^h$ 上，我们使用估计式

(4.15) 和 (4.16)，因此对于 $t \in \mathcal{I}_k \cap [0,\beta]$，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_k}^{t} |x([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h) - x(s-\tau(s))|\, ds \\
&\quad = \sum_{i=0}^{i_{k,t}-1} \int_{A_{k,i}^h} |x([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h) - x(s-\tau(s))|\, ds \\
&\qquad + \int_{A_{k,i_{k,t}}^h \cap [u_{k,i_{k,t}}^h, t)} |x([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h) - x(s-\tau(s))|\, ds \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{i_{k,t}-1} \int_{B_{k,i}^h} |x([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h) - x(s-\tau(s))|\, ds \\
&\qquad + \int_{B_{k,i_{k,t}}^h \cap [u_{k,i_{k,t}}^h, t)} |x([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h) - x(s-\tau(s))|\, ds \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{i_{k,t}-1} \int_{C_{k,i}^h} |x([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h) - x(s-\tau(s))|\, ds \\
&\qquad + \int_{C_{k,i_{k,t}}^h \cap [u_{k,i_{k,t}}^h, t)} |x([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h) - x(s-\tau(s))|\, ds \\
&\quad \le 2M_1^* \sum_{i=0}^{i_{k,t}-1} m(A_{k,i}^h) + 2M_1^* m\Big(A_{k,i_{k,t}}^h \cap [u_{k,i_{k,t}}, t)\Big) + \sum_{i=0}^{i_{k,t}-1} M_2^* \int_{B_{k,i}^h} (Mh + \eta_h(s))\, ds \\
&\qquad + M_2^* \int_{B_{k,i_{k,t}}^h \cap [u_{k,i_{k,t}}, t)} (Mh + \eta_h(s))\, ds + 2M_1^* \sum_{i=0}^{i_{k,t}-1} m(C_{k,i}^h) + 2M_1^* m\Big(C_{k,i_{k,t}}^h \cap [u_{k,i_{k,t}}, t)\Big) \\
&\quad \le K_4 \sum_{i=0}^{i_{k,t}} \eta_h(u_{k,i}^h) + K_4 \sum_{i=0}^{\bar{i}_{k,t}} \eta_h(u_{k,i+1}^h - \delta) + K_1 h + \frac{L_2}{\varepsilon_0} \int_{t_k}^{t} \omega_h([s]_h)\, ds + M_2^* \int_{t_k}^{t} \eta_h(s)\, ds. \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

由于 $K_1 \ge 2M_1^*$，(4.17) 对 $t \in (t_k, t_k + h)$ 也成立。

我们引入简化记号 $w_{k,2i}^h = u_{k,i}^h$ 和 $w_{k,2i+1}^h = u_{k,i+1}^h - \delta$，分别表示 $i = 0, \dots, i_k$、$w_{k,2i_k+2} = u_{i_k+1} = t_{k+1}$，并令 $i_{k,t}^*$ 为满足 $w_{k,i_{k,t}^*}^h < t$ 的最大指标。于是

$$
t_k = w_{k,0}^h < w_{k,1}^h < \cdots < w_{k,i_{k,t}^*}^h < t < t_{k+1}.
$$

我们指出，z_h、η_h 和 ω_h 在点 $w_{k,1}^h, \dots, w_{k,i_{k,t}^*}^h$ 处连续。

结合 (4.8)、(4.9) 和 (4.17)，可得对于 $t \in \mathcal{I}_k \cap [0,\beta]$ 和 $k = 0,1,\dots,k_0$

$$
\begin{aligned}
z_h(t) &\le z_h(t_k) + \mu_{1,h} + K_2 h + K_4 \sum_{i=0}^{i_{k,t}^*} \eta_h(w_{k,i}^h) \\
&\quad + \int_{t_k}^{t} L_1 \Big(z_h([s]_h) + z_h([s]_h - [\tau_h([s]_h)]_h) + \frac{L_2}{\varepsilon_0} \omega_h([s]_h) + M_2^* \eta_h(s) \Big)\, ds. \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

同理，将（4.4）与（4.6）相减，并利用假设（A2）（iii）以及.....的定义

$\mu_{2,\ h}$，可得对于 $t\in\mathcal{I}_k$、 $k=0$，……， k_0

$$\begin{aligned}|\tau_h(t)-\tau(t)| &\le |\tau_h(t_k)-\tau(t_k)|+\int_{t_k}^{t}|g([s]_h,x_h([s]_h),\tau_h([s]_h))-g(s,x(s),\tau(s))|\,ds\\ &\le |\tau_h(t_k)-\tau(t_k)|+\int_{t_k}^{t}|g([s]_h,x(s),\tau(s))-g(s,x(s),\tau(s))|\,ds\\ &\quad+\int_{t_k}^{t}|g([s]_h,x_h([s]_h),\tau_h([s]_h))-g([s]_h,x(s),\tau(s))|\,ds\\ &\le |\tau_h(t_k)-\tau(t_k)|+\mu_{2,h}+\int_{t_k}^{t}L_2\Big(|x_h([s]_h)-x([s]_h)|+|x([s]_h)-x(s)|\\ &\quad+|\tau_h([s]_h))-\tau([s]_h)|+|\tau([s]_h))-\tau(s)|\Big)\,ds.\end{aligned}$$

因此，利用 z_h 和 η_h 的定义以及关系式 (3.6)、(3.15)、(3.16) 和 (4.9)，对于 $t\in\mathcal{I}_k$、$k=0$、……、 k_0，可得

$$\eta_h(t)\le\eta_h(t_k)+\mu_{2,h}+K_3h+\int_{t_k}^{t}L_2\Big(z_h([s]_h)+\eta_h([s]_h)\Big)\,ds,\quad t\in\mathcal{I}_k,\ k=0,\dots,k_0. \tag{4.19}$$

将 (4.18) 与 (4.19) 相加，并利用 ω_h、 D_h 和 L_0的定义，对于 $t\in\mathcal{I}_k\cap[0,\beta]$ 和 $k=0$、……、 k_0，可得

$$\begin{aligned}\omega_h(t)&\le\omega_h(t_k)+D_h+K_4\sum_{i=0}^{i^*_{k,t}}\eta_h(w^h_{k,i})+\int_{t_k}^{t}L_0\Big(\omega_h([s]_h)+\omega_h(s)+\omega_h([s]_h-[\tau_h([s]_h)]_h)\Big)\,ds\\ &\le\omega_h(t_k)+D_h+K_4\sum_{i=0}^{i^*_{k,t}}\omega_h(w^h_{k,i})+\int_{t_k}^{t}3L_0\sup_{-M_1^*\le\zeta\le s}\omega_h(\zeta)\,ds.\end{aligned} \tag{4.20}$$

τ_h、 τ 和 η_h的连续性、脉冲条件 (3.3) 和 (3.9)，以及假设（A3）给出

$$\begin{aligned}|\Delta\omega_h(t_k)|&=|\Delta z_h(t_k)|\\ &=\Big||x_h(t_k)-x(t_k)|-|x_h(t_k-)-x(t_k-)|\Big|\\ &\le|\Delta x_h(t_k)-\Delta x(t_k)|\\ &=|I_k(x_h(t_k-))-I_k(x(t_k-))|\\ &\le L_3|x_h(t_k-)-x(t_k-)|\\ &\le L_3\omega_h(t_k-).\end{aligned} \tag{4.21}$$

初始条件 (3.4) 和 (3.10) 给出

$$\omega_h(t)=|x_h(t)-x(t)|+|\tau_h(t)-\tau(t)|=0,\qquad t\in(-\infty,0].$$

假设 $\beta\in\mathcal{I}_{k^*}$，且 i^* 是满足$w^h_{k^*,\ i^*}<\beta$的最大指标。我们考虑连续区间 ls

$$[t_0,w^h_{0,1}),[w^h_{0,1},w^h_{0,2}),\dots,[w^h_{0,2i_0+1},t_1),[t_1,w^h_{1,1}),\dots,[w^h_{1,2i_1+1},t_2),\dots,[t_{k^*},w^h_{k^*,1}),\dots,[w^h_{k^*,i^*},\beta].$$

我们在上述区间上依次应用不等式 (4.20)。由于 $\omega_h(t_0)=0$，在区间 $[t_0,w^h_{0,1})$ 上，不等式 (4.20) 化简为

$$\omega_h(t)\le\omega_h(t_0)+D_h+\int_{t_0}^{t}3L_0\sup_{-M_1\le\zeta\le s}\omega_h(\zeta)\,ds,\qquad t\in[t_0,w^h_{0,1}). \tag{4.22}$$

然后，由不等式 (4.22)、引理 2.2 以及 $r = M_1^*$, $a_0 = 0$, $a_1 = D_h$, $a_2 = 0$, $b = 3L_0$, $c = L_3$, $K = 0$ and $T = w_{0,\ 1}^h$ 和 $w_{k,\ j}^h \le \alpha$ ，再结合 ω_h 在 $w_{0,\ 1}^h$ 处的连续性，可得

$$\omega_h(t) \le D_h e^{3L_0\alpha}, \qquad t \in [0, w_{0,1}^h], \quad h \in (0, h_2). \tag{4.23}$$

假设

$$\omega_h(t) \le D_h E_k 2^{j-1} K_4^{j-1} \Big(\sum_{i=0}^{k} (1+L_3)^i\Big)^{j-1} (e^{3L_0\alpha})^j, \qquad t \in [0, w_{k,j}^h), \quad h \in (0, h_2),$$

其中

$$\begin{aligned} &m_0 = 0, \qquad m_k = 2i_0 + \cdots + 2i_{k-1}, \qquad k = 1, \dots, k_0, \\ &E_0 = 1, \qquad E_k = 2^{m_k+k} K_4^{m_k+k} \Big(\sum_{i=0}^{k} (1+L_3)^i\Big)^{m_k - 2i_0 + 2k} (e^{3L_0\alpha})^{m_k+2k}, \qquad k = 1, \dots, k_0, \end{aligned}$$

并考虑下一个区间 $[w_{k,j}^h, w_{k,j+1}^h)$。那么，由 (4.20)、 ω_h 在$w_{k,i}^h$ 处的连续性以及 $i < 2i_k + 2$ 和$K_4 \ge 1$ ，可得如下非常粗略的估计

$$\begin{aligned} \omega_h(t) &\le \omega_h(t_k) + D_h + K_4 \sum_{i=0}^{j} D_h E_k 2^{i-1} K_4^{i-1} \Big(\sum_{i=0}^{k} (1+L_3)^i\Big)^{i-1} (e^{3L_0\alpha})^i + \int_{t_k}^{t} 3L_0 \sup_{-M_1^* \le \zeta \le s} \omega_h(\zeta)\, ds \\ &\le \omega_h(t_k) + D_h E_k \Big(1 + \sum_{i=0}^{j} 2^{i-1}\Big) K_4^j \Big(\sum_{i=0}^{k} (1+L_3)^i\Big)^{j-1} (e^{3L_0\alpha})^j + \int_{t_k}^{t} 3L_0 \sup_{-M_1^* \le \zeta \le s} \omega_h(\zeta)\, ds \\ &\le \omega_h(t_k) + D_h E_k 2^j K_4^j \Big(\sum_{i=0}^{k} (1+L_3)^i\Big)^{j-1} (e^{3L_0\alpha})^j + \int_{t_k}^{t} 3L_0 \sup_{-M_1^* \le \zeta \le s} \omega_h(\zeta)\, ds, \qquad t \in [t_k, w_{k,j+1}^h). \end{aligned} \tag{4.24}$$

那么，由不等式 (4.24) 以及引理 2.2（其中 $r = M_1^*$, $a_0 = 0$, $a_1 = D_h E_k 2^j K_4^j \Big(\sum_{i=0}^{k} (1+L_3)^i\Big)^{j-1} (e^{3L_0\alpha})^j$, $a_2 = 0$, $b = 3L_0$, $c = L_3$, $K = k$ 和 $T = v_{k,j+1}^h$ ），可得

$$\omega_h(t) \le D_h E_k 2^j K_4^j \Big(\sum_{i=0}^{k} (1+L_3)^i\Big)^{j} (e^{3L_0\alpha})^{j+1}, \qquad t \in [0, v_{k,j+1}^h), \quad h \in (0, h_2). \tag{4.25}$$

那么，应用 (4.21)、$1 + L_3 \le \sum_{i=0}^{k} (1+L_3)^i$、(4.25) 以及 E_{k+1}的定义，可得

$$\omega_h(t) \le D_h E_{k+1}, \qquad t \in [0, t_{k+1}], \quad h \in (0, h_2), \quad k = 0, \dots, k^* - 1,$$

且 $k = k^*$ 和 $j = j^*$满足（4.25）。但是

$$\omega_h(t) \le D_h E_{k^*} 2^{j^*} K_4^{j^*} \Big(\sum_{i=0}^{k^*} (1+L_3)^i\Big)^{j^*} (e^{3L_0\alpha})^{j^*+1} \le D_h E^*, \qquad t \in [0, \beta], \quad h \in (0, h_2),$$

这与（4.11）和（4.12）矛盾。因此 $\beta = \alpha$，并且

$$\omega_h(t) \le D_h E^*, \qquad t \in [0, \alpha], \quad h \in (0, h_2) \tag{4.26}$$

成立。T D_h 的定义以及关系式 (4.2) 和 (4.26) 证明了极限关系 (4.1) . □

D_h 的定义和 (4.26) 立即得到以下推论。

推论 *4.2.* 假设 $T>0$ 有限， $\lambda>0$，*(A1)–(A4)* 成立，令 $\alpha>0$ 和 $h^*>0$ 如引理 *3.2* 中所定义。设 (x,τ) 是脉冲初值问题 *(3.1)–(3.5)* 在 $(-\infty,\alpha]$ 上的任意一个解，其中相应的延迟时间函数 $t-\tau(t)$ 在 $[0,\alpha]$ 上分段严格单调，并假设脉冲时刻 $t_k(k=-\ell_0,\ldots,k_0)$ 既不是该延迟时间函数的局部极值，也不是极值点，且 $\dot\tau(0)\neq 1$， $\dot\tau(\alpha-)\neq 1$。设 (x_h,τ_h) 是脉冲初值问题 *(3.7)–(3.11)* 在 $(-\infty,\alpha]$ 上对应于 $0<h<h^*$ 的解。那么存在实常数 $N>0$ 和 $h_1\in(0,h^*)$，使得

$$|x_h(t)-x(t)|\le Nh \qquad and \qquad |\tau_h(t)-\tau(t)|\le Nh, \qquad t\in[0,\alpha], \quad h\in(0,h_1). \tag{4.27}$$

现在，我们针对延迟时间函数分段严格单调的情形，表述关于 IIVP（3.1）的存在唯一性结果的以下 –(3.5) 版本。

定理 4.3。 假设 *(A1)–(A4)*，令 $\lambda>0$，由引理 *3.2* 定义 $\alpha>0$ 和 $h^*>0$，并令 (x_h,τ_h) 为 *IIVP* (3.7)–(3.11) 在 $(-\infty,\alpha]$ （ $0<h<h^*$ 时）上的解。进一步假设存在趋于 *0* 的正数列 h_i，使得

$$\lim_{i\to\infty}|x_{h_i}-x|_{PC([0,\alpha],\mathbb{R}^n)}=0 \qquad and \qquad \lim_{i\to\infty}|\tau_{h_i}-\tau|_{C([0,\alpha],\mathbb{R})}=0$$

对于某些函数 $x\in PC([0,\alpha],\mathbb{R}^n)$ 和 $\tau\in C([0,\alpha],\mathbb{R})$。假设相应的延迟时间函数 $t-\tau(t)$ 在 $[0,\alpha]$ 上分段严格单调，并且脉冲时刻 $t_k(k=-\ell_0,\ldots,k_0)$ 既不是延迟时间函数的局部极值，也不是其极值点，且 $\dot\tau(0)\neq 1$ 以及 $\dot\tau(\alpha-)\neq 1$。则 (x,τ) 是 *IIVP* (3.1)–(3.5) 在 $[0,\alpha]$ 上满足 (3.31)–(3.34) 的唯一解，其中 M_1、M_2 和 M_3 为某些非负常数。

证明。 证明 $(x,\ \tau)$ 是满足 (3.31)–(3.34) 的脉冲初值问题 (3.1)–(3.5) 的一个解，其思路与定理 3.3 的证明相同。关键观察是，若延迟时间函数 $t-\tau(t)$ 分段严格单调，则由 (3.36) 定义的集合 $\mathcal{U}$ 的勒贝格测度为 0，因此关系式 (3.37) 成立。其余论证与定理 3.3 证明中的论证完全相同。

为证明唯一性，假设 $(\bar x,\ \bar\tau)$ 也是脉冲初值问题 (3.1)–(3.5) 的一个解。由定理 4.1 可得

$$\lim_{i\to\infty}|x_{h_i}-\bar x|_{PC([-M_1,\alpha],\mathbb{R}^n)}=0 \qquad \text{and} \qquad \lim_{i\to\infty}|\tau_{h_i}-\bar\tau|_{C([0,\alpha],\mathbb{R})}=0,$$

这意味着 因此 $(x,\ \tau)=(\bar x,\ \bar\tau)$，即 $(x,\ \tau)$ 是脉冲初值问题 (3.1)–(3.5) 的唯一解 . □

5 数值算例

在本节中，我们给出第 两个算例，以说明数值格式 (3.7)–(3.11) 的收敛性 .

例 5.1。 考虑初值问题（初值问题）

$$\dot x(t)=-\Big(x(t-\tau(t))-1\Big)\exp\Big(-0.3(x(t)-1)\sin 5t-2\Big), \qquad t\in[0,4], \tag{5.1}$$

$$\dot\tau(t)=2-\tau(t)+1.5(x(t)-1)\cos 5t, \qquad t\in[0,4], \tag{5.2}$$

$$x(t)=\begin{cases} e^{-t}+1, & t\in(-3,\ 0],\\ e^{3}+1, & t\in\ (-\infty,\ -3], \end{cases} \tag{5.3}$$

$$\tau(t)=2, \qquad t\in(-\infty,\ 0]. \tag{5.4}$$

这里没有与初值问题相关联的脉冲条件。

显然，条件 (A1) (i)–(ii)、(A2) (i)、(iii)、(A3) 以及 (A4) (i)、(ii) 均满足。对于条件 (A2) (ii)，考虑

$$2 + 1.5(u-1)\cos 5t.$$

遗憾的是，它并非对所有 $(t,\ u) \in [0,4] \times \mathbb{R}$ 都为正。但定义函数

$$g(t,u,w) = \begin{cases} 2 - w - 1.5\cos 5t, & u < 0,\ w \in \mathbb{R}, \\ 2 - w + 1.5(u-1)\cos 5t, & u \in [0, 2.3],\ w \in \mathbb{R}, \\ 2 - w + 1.95\cos 5t, & u > 2.3,\ w \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

注意，$0 < \varphi(0) < 2.3$。若将 (5.2) 替换为 $\dot{\tau}(t) = g(t,\ x(t)\ \tau(t))$，则所有条件 (A1)–(A4) 均满足，因此相应的初值问题有唯一解，并且在 $x(t) \in [0, 2.3]$ 之前，该解与初值问题 (5.1)–(5.4) 的解一致。

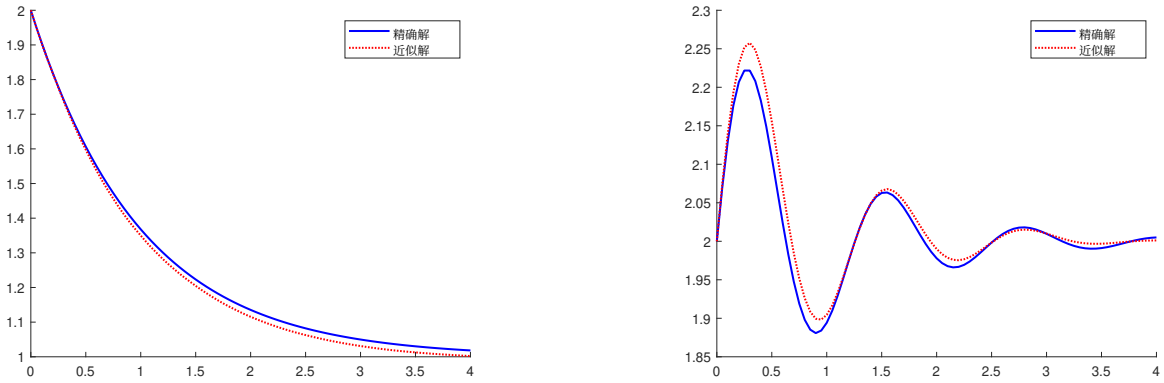
可以验证，初值问题 (5.1)–(5.4) 的精确解为

$$x(t) = e^{-t} + 1, \qquad \tau(t) = 0.3e^{-t}\sin 5t + 2.$$

注意，在这个初值问题中，延迟自变量函数 $t - \tau(t)$ 并非单调递增。我们使用数值逼近格式来近似求解。下表给出了 $h = 0.1$、0.01 和 0.001 对应的数值和误差。我们观察到近似解收敛到精确解，且收敛阶看起来是线性的。在图1中，我们绘制了对应于 $h = 0.05$ 的精确解和近似解。

		$h = 0.1$			
s_i	i	$x_h(s_i)$	$\tau_h(s_i)$	$e_x(s_i)$	$e_\tau(s_i)$
1.0	10	1.32583334	1.91672237	4.205e-02	2.255e-02
2.0	20	1.08942499	2.00168457	4.591e-02	2.377e-02
3.0	30	1.00646891	2.00745845	4.332e-02	2.254e-03
4.0	40	0.97979564	1.99518831	3.852e-02	9.828e-03
		$h = 0.01$			
s_i	i	$x_h(s_i)$	$\tau_h(s_i)$	$e_x(s_i)$	$e_\tau(s_i)$
1.0	100	1.36446215	1.89606294	3.417e-03	1.893e-03
2.0	200	1.13159363	1.98032187	3.742e-03	2.409e-03
3.0	300	1.04629895	2.00991036	3.488e-03	1.976e-04
4.0	400	1.01527840	2.00427610	3.037e-03	7.403e-04
		$h = 0.001$			
s_i	i	$x_h(s_i)$	$\tau_h(s_i)$	$e_x(s_i)$	$e_\tau(s_i)$
1.0	1000	1.36753037	1.89435808	3.491e-04	1.886e-04
2.0	2000	1.13496055	1.97815354	3.747e-04	2.411e-04
3.0	3000	1.04943371	2.00973378	3.534e-04	2.101e-05
4.0	4000	1.01801021	2.00494219	3.054e-04	7.416e-05

表1：近似解　　初值问题 (5.1)–(5.4) 的。$s_i = ih$, $e_x(s_i) = |x_h(s_i) - x(s_i)|$ 和 $e_\tau(s_i) = |\tau_h(s_i) - \tau(s_i\ \ )|$



) 图1.(t)初值问题 (5.1)–(5.4) 的精确解和近似解，$h = 0.05$h(t

例5.2。 考虑脉冲初值问题

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{5}x(t-\tau(t)), \qquad t \in [0,5], \tag{5.5}$$

$$\dot{\tau}(t) = 1 + \frac{1}{4}x(t) - \frac{1}{2}\tau(t), \qquad t \in [0,5], \tag{5.6}$$

$$\Delta x\left(\frac{3}{4}\right) = 2, \qquad \Delta x\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}, \tag{5.7}$$

$$x(t) = 1, \qquad t \in [-3,0], \tag{5.8}$$

$$\tau(t) = 2, \qquad t \in [-3,0]. \tag{5.9}$$

在区域 $u > -4$ 条件 $g(t,\ u,\ 0) > 0$ 成立，因此，与例 5.1 中所用的论证类似，由定理 3.3 可得，脉冲初值问题 (5.5)–(5.9) 在某个 $[0,\alpha]$ 上存在唯一解，其中 $\alpha > 0$。

最初，$t - \tau(t)$ 为负，因此 $x(t-\tau(t)) = 1$。于是，对（5.5）积分并利用 $x(0) = 1$，得到$x(t) = -\frac{1}{5}t + 1$。将此公式代入（5.6），即可求解相应的常微分方程，其初始条件为 $\tau(0) = 2$，从而得到 $\tau(t) = \frac{27}{10} - \frac{1}{10}t - \frac{7}{10}e^{-\frac{1}{2}t}$。可以验证，对于 $t \in [0,3/4]$，$t - \tau(t) < 0$，因此这就是区间 $[0,3/4]$ 上脉冲初值问题的解。

利用（5.7）的第一个脉冲条件，得到 $x(t) = -\frac{1}{5}t+3$，其中 $t \geq 3/4$ 但接近 $3/4$。然后利用初始条件 $\tau(3/4) = \frac{21}{8} - \frac{7}{10}e^{-3/8}$ 求解（5.6），从而得到 $\tau(t) = \frac{37}{10} - \frac{1}{10}t - \frac{1}{10}e^{-\frac{1}{2}t}(10e^{3/8}+7)$。对于 $t \in [3/4, 3/2]$，有 $t - \tau(t) < 0$，因此这就是该区间上的解。

在 $t = \frac{3}{2}$处，我们使用（5.7）的第二个脉冲条件，因此当 $t \geq 3/2$接近 $3/2$时，有 $x(t) = -\frac{1}{5}t + \frac{9}{4}$。然后，求解满足初始条件 $\tau(3/2) = \frac{71}{20} - e^{-3/8} - \frac{7}{10}e^{-3/4}$的相应方程（5.6），得到 $\tau(t) = \frac{133}{40} - \frac{1}{10}t - \frac{1}{40}e^{-\frac{1}{2}t}($ $-15e^{3/4} + 40e^{3/8} + 28)$。我们可以验证，当 $t \in [3/2, T_1)$ 时，$t - \tau(t) < 0$；并且 $T_1 - \tau(T_1) = 0$，其中 $T_1 = 2.702320978$。因此得到（$x(T_1)\ \tau(T_1)$）$= (2.459535804, 2.871755310)$。

因此，对于接近 T_1 的 $t > T_1$，有 $x(t) = -\frac{1}{5}t + 1$。利用这一关系，(5.5) 和 (5.6) 可简化为

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{25} - \frac{1}{25}\tau(t) - \frac{1}{5},$$
$$\dot{\tau}(t) = 1 + \frac{1}{4}x(t) - \frac{1}{5}\tau(t).$$

我们使用 Maple 求解了这个常微分方程组，其初始条件为 $(x(T_1)\ \tau(T_1)) = (2.459535804, 2.871755310)$，从而得到下一个区间上的解的公式：$x(t) = -110.0000000 - 0.1490476191 \cdot$

$\exp(-0.4791287848t) + 112.5160738 \cdot \exp(-0.02087121525t) + 2.000000001t$ 和 $\tau(t) = -55.00000002 + 58.70867993 \cdot \exp(-0.02087121525t) - 1.785325143 \cdot \exp(-0.4791287848t) + 1.000000001t$。我们得到 $0 \le t - \tau(t) < \frac{3}{4}$（当 $t \in [T_1, T_2$ 时）以及 $T_2 - \tau(T_2) = \frac{3}{4}$（当 $T_2 = 3.488254843$ 时）。于是，我们得到区间 $[T_1, T_2]$ 上脉冲初值问题 (5.5)–(5.9) 的解。类似地，我们可以求解下一个区间上的初值问题。由此可得，脉冲初值问题 (5.5)–(5.9) 的精确解公式为

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{5}t + 1, & t \in [0, 0.75), \\ -\frac{1}{5}t + 3, & t \in [0.75, 1.5), \\ -\frac{1}{5}t + \frac{9}{4}, & t \in [1.5, 2.702320978), \\ -110.0000000 - 0.1490476191e^{-0.4791287848t} + 112.5160738e^{-0.02087121525t} \\ \quad +2.000000001t, & t \in [2.702320978, 3.488254843), \\ -130.0000000 - 0.3512993334e^{-0.4791287848t} + 134.0673650e^{-0.02087121525t} \\ \quad +2.000000001t, & t \in [3.488254843, 4.218920247), \\ -122.5000000 - 0.2436621429e^{-0.4791287848t} + 125.8614408e^{-0.02087121525t} \\ \quad +2.000000001t, & t \in [4.218920247, 5], \end{cases}$$

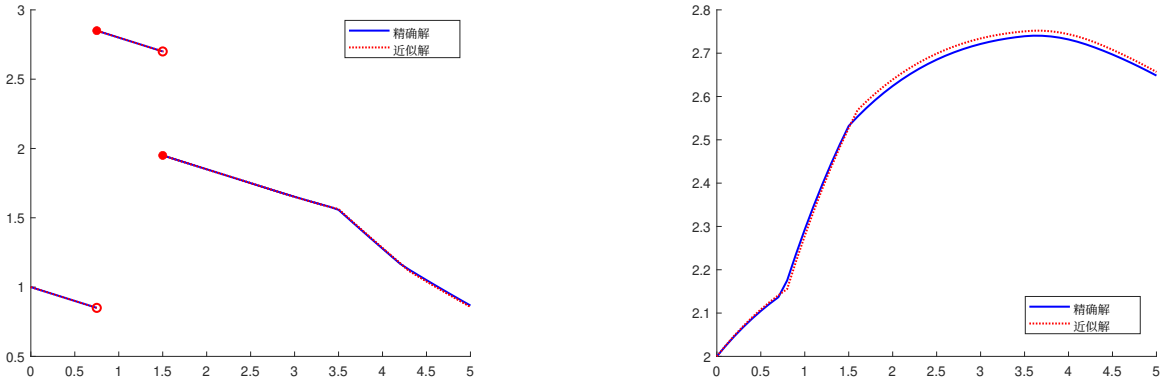
and

$$\tau(t) = \begin{cases} \frac{27}{10} - \frac{1}{10}t - \frac{7}{10}e^{-\frac{1}{2}t}, & t \in [0, 0.75), \\ \frac{37}{10} - \frac{1}{10}t - \frac{1}{10}e^{-\frac{1}{2}t} \cdot (10e^{3/8} + 7), & t \in [0.75, 1.5), \\ \frac{133}{40} - \frac{1}{10}t - \frac{1}{40}e^{-\frac{1}{2}t}(-15e^{3/4} + 40e^{3/8} + 28), & t \in [1.5, 2.702320978), \\ -55.00000002 + 58.70867993e^{-0.02087121525t} - 1.785325143e^{-0.4791287848t} \\ \quad +1.000000001t, & t \in [2.702320978, 3.488254843), \\ -65.00000002 + 69.95372081e^{-0.02087121525t} - 4.207940644e^{-0.4791287848t} \\ \quad +1.000000001t, & t \in [3.488254843, 4.218920247), \\ -61.25000002 + 65.67203060e^{-0.02087121525t} - 2.918638192e^{-0.4791287848t} \\ \quad +1.000000001t, & t \in [4.218920247, 5]. \end{cases}$$

下表2列出了在 $h = 0.1$、0.01 和 0.001 时，脉冲初值问题 (5.5)–(5.9) 的近似解。由于精确解 $x(t)$ 在线段 $[0, 3/4)$、$[3/4, 3/2)$ 和 $[3/2, T_1)$ 上是线性的，近似解 (3.7)–(3.11) 得到的正是精确解。下表中我们看到的舍入误差仅由计算引起。但对于 $t > T_1$ 和 τ 分量，我们发现，当步长 h 减小时，误差也随之减小。图2展示了 $h = 0.1$ 的数值解。即使步长相对较大，近似效果也很好。

s_i	i	$x_h(s_i)$	$\tau_h(s_i)$	$e_x(s_i)$	$e_\tau(s_i)$
			$h = 0.1$		
1.0	10	2.80000000	2.27838414	0.000e+00	1.455e-02
2.0	20	1.85000000	2.63913961	4.441e-16	1.487e-02
3.0	30	1.65120000	2.73410744	4.520e-04	1.277e-02
4.0	40	1.28120000	2.74384615	3.642e-03	1.213e-02
5.0	50	0.85780000	2.65671910	9.131e-03	8.423e-03
			$h = 0.01$		
1.0	100	2.80000000	2.28930718	5.329e-15	3.624e-03
2.0	200	1.85000000	2.62435492	1.599e-14	8.166e-05
3.0	300	1.65165200	2.72176158	3.649e-09	4.283e-04
4.0	400	1.27822400	2.73245016	6.656e-04	7.387e-04
5.0	500	0.86738000	2.64907081	4.490e-04	7.750e-04
			$h = 0.001$		
1.0	1000	2.80000000	2.29257085	2.220e-14	3.608e-04
2.0	2000	1.85000000	2.62428141	4.396e-14	8.156e-06
3.0	3000	1.65165184	2.72137602	1.636e-07	4.270e-05
4.0	4000	1.27825344	2.73185604	6.950e-04	1.446e-04
5.0	5000	0.86745468	2.64851590	5.237e-04	2.201e-04

表2：近似解 脉冲初值问题 (5.5)–(5.9) 的。 $s_i = ih$, $e_x(s_i) = |x_h(s_i) - x(s_i)|$ 和 $e_\tau(s_i) = |\tau_h(s_i) - \tau(s_i)|$



) 图2 (t)初值问题 (5.5)–(5.9) 的精确解和近似解， $h = 0.1\tau_h(t$

6 结论

本文研究了一类具有自适应时滞和脉冲的随机微分延迟方程。利用 Picard–Lindelöf 型论证，我们证明了在延迟时间函数单调或分段严格单调的条件下，解的局部存在性和唯一性。我们借助分段常数自变量方程引入了一种数值格式，并得到一列近似解；在自然条件下，该序列收敛于该随机微分延迟方程的一个解。这种简单的一阶近似格式可用于证明更复杂问题中解的存在性。一个值得进一步研究的问题是：在采用比分段严格单调性更宽松条件的情形下，证明数值近似的收敛性。

最后，我们指出，若将脉冲条件 (3.9) 替换为

$$\Delta x_h([t_k]_h) = I_k(x_h([t_k]_h-)), \qquad k = 1, 2, \ldots, K,$$

那么脉冲时刻就会出现在数值格式的网格点上，从而简化近似解的计算。另一方面，由于精确解和近似解的跳跃时刻通常不同，收敛性的证明会变得更加复杂。这是一个有待未来研究的开放问题。

致谢

作者感谢匈牙利国家研究、发展与创新办公室提供的资助，资助编号为 K139346。

参考文献

[1] B. Ahmad. 脉冲混合状态依赖时滞微分系统的不稳定性。《越南数学杂志》, 35(3):285–298, 2007.[2] M. Akhmet. 《非线性混合连续—离散时间模型》. Atlantis Press, 阿姆斯特丹—巴黎, 2011.[3] O. Arino, K. P. Hadeler, and M. L. Hbid. 状态依赖时滞微分方程周期解的存在性。《微分方程杂志》, 144:263–301, 1990.[4] I. Balázs and T. Krisztin. 一种具有状态依赖排队时滞的微分方程。《*SIAM*数学分析杂志》, 52(4):3697–3737, 2020.[5] F.A. Bartha, Á. Garab, and T. Krisztin. 具有状态依赖时滞的标量微分方程的Morse分解。《*J. Dyn. Diff. Equat.*》, 2025. https://doi.org/10.1007/s10884-025-10414-w.[6] S. Castillo, M. Pinto, and R. Torres. 具有广义型分段常值变元的脉冲微分方程解的渐近公式。《电子微分方程杂志》, 2019(40):1–22, 2019.[7] Y. Chen, Q. Hu, and J. Wu. 关于参数的自适应时滞微分方程二阶可微性。《中国数学前沿》, 5(2):221–286, 2010.[8] K. E. M. Church. 具有状态依赖时滞的脉冲微分方程解的唯一性与线性化稳定性。《微分方程杂志》, 338:415–440, 2022.[9] K. Cooke and S. Busenberg. 具有顺序连续动力学的垂直传播疾病模型。载于《数学科学中的非线性现象：数学科学中的非线性现象国际会议论文集，*1980*年*6*月*16*日至*20*日于阿灵顿德克萨斯大学举行》, 第179–187页，纽约，1982年。Academic Press.

[10] R. D. Driver. 时滞微分系统的存在性理论。微分方程贡献，1:317–336，1961。

[11] T. Faria 和 J. J. Oliveira。带脉冲的周期时滞造血模型的全局渐近稳定性。应用数学建模，79:843–864，2020。

[12] M. Fe˘ckan、S. G. Hristova 和 K. Ivanova。具有状态依赖 p时滞的 y 和非瞬时脉 p冲。数学分析通讯 ，22(2)1–17 ，2019年。

[13] J. Frohberg 和 M. Waurick。 H^1上的状态依赖时滞微分方程。《微分方程杂志》，410:737–771，2024年。[14] A. Ganesan、M. Thangaraj 和 Y.-K. Ma。含脉冲和状态依赖时滞的二阶中立随机系统的指数稳定性。《*Symmetry*》，15(12):2135，2019年。[15] T. Gedeon、A. R. Humphries、M. C. Mackey、H.-O. Walther 和 Z. Wang。状态依赖时滞微分方程的动力学。《电子定性微分方程理论杂志》，2025(37):1–97，2025年。[16] I. Győri。利用分段常数自变量近似时滞微分方程的解。《*Int. J. Math. Math. Sci.*》，14(1):111–126，1991年。[17] I. Győri 和 F. Hartung。关于利用分段常值变元微分方程进行数值近似。《匈牙利数学期刊》，56(1):1–12，2008年。[18] I. Győri、F. Hartung 和 J. Turi。一类含时间与状态依赖时滞的微分方程的数值近似。《数学快报》，8(6):19–24，1995年。[19] F. Hartung。关于一类泛函微分方程的解对参数的可微性。《泛函微分方程》，4(1-2):65–79，1997年。[20] F. Hartung。关于含状态依赖时滞的微分方程对参数的二阶可微性。《动力系统微分方程杂志》，25(4):1089–1138，2013年。[21] F. Hartung。关于具有脉冲自支撑条件的时滞微分方程的数值近似。《应用数学与计算》，418:126818，2022年。[22] F. Hartung。关于具有自适应状态依赖时滞的脉冲微分方程的解对参数的可微性。《微分方程杂志》，413:751–804，2024年。[23] F. Hartung、T. L. Herdman 和 J. Turi。关于含状态依赖时滞的中性方程的存在性、唯一性与数值近似。《应用数值数学》，24:393–409，1997年。[24]F. Hartung、T. Krisztin、H.-O. Walther 和 J. Wu。含状态依赖时滞的泛函微分方程：理论与应用。载于 A. Cañada、P. Drábek 和 A. Fonda 编，《微分方程手册：常微分方程》，第3卷。Elsevier, North-Holland，2006年。[25] E. Hernandez 和 J. Wu。含状态依赖时滞的显式抽象中立微分方程：存在性、唯一性与局部适定性。《微分方程杂志》，365:750–811，2023年。[26] B. Lani-Wayda 和 J. Godoy Mesquita。依赖于过去时刻导数的微分方程的线性化不稳定性。《电子定性微分方程理论杂志》，2023(52):1–52，2023年。[27] X. Li 和 D. Peng。状态依赖时滞非线性系统的一致稳定性。《自动化》，137(110098):1–5，2022年。[28] X. Li 和 S. Song。《含时滞的脉冲系统》。新加坡施普林格，2022年。[29] W. Lu、D. O’Regan 和 Y. Xia。含分段常值变元的微分方程的光滑不变流形与叶状结构。《数学科学通报》，199:1–37，文章编号103579，2025年。[30] W. Ma 和 Y. Li。含状态依赖时滞的脉冲演化方程的半流可微性。《动力系统定性理论》，23(Suppl 1):1–27，文章编号278，2024年。

[31] P. Magal 和 O. Arino. 状态依赖时滞微分方程周期解的存在性。《微分方程杂志》, 165:61–95, 2000. [32] K. Martinovich, G. Stepan, D. Bachrathy 和 A. K. Kiss. 在跟驰模型中引入状态依赖时滞。《非线性动力学》, 113(17):22923–22941, 2025.[33] S. H. Park 和 J. Lefebvre. 具有自适应状态依赖时滞的Kuramoto白质网络模型中的同步与韧性。《数学神经科学杂志》, 10(16):1–25, 2020.[34] W. Rudin. 《数学分析原理》. 麦格劳-希尔公司, 1976.[35] S. H. Saker 和 J. O. Alzabut. 关于具有周期系数的脉冲时滞造血模型。《落基山数学杂志》, 39(5):1657–1688, 2009.[36] J. Shen 和 X. Liu. 脉冲微分方程的整体存在性结果。《数学分析及其应用杂志》, 314(2):546–557, 2006.[37] W. Sun, N. Wang, N. Li, Y. Lv 和 S. Liu. 具有状态依赖成熟期的结构化捕食者–被捕食者模型。《国际分岔与混沌杂志》, 35(10):2550123, 2025.[38] H.-O. Walther. 关于具有离散状态依赖时滞的微分系统的解流形。离散与连续动力系统·*S*辑, 16(3-4):627–638, 2023.[39] J. Wiener. 具有分段常时滞的微分方程。载于非线性微分方程理论与实践的趋势（德克萨斯州阿灵顿，*1982*）, 第547–552页, 美国纽约州纽约市, 1983. 纯粹数学与应用数学讲义第90卷, Dekker.[40] J. Wu. 从动力系统的角度看高维数据聚类。载于 Wayne Nagata 和 Navaratnam Sri Namachchivaya 编, 分岔理论与时空模式形成 , 第 49 卷 *Fields* 研究所通讯 美国数学学会 , 罗德岛州普罗维登斯 , 2006.[41] J. Wu, H. Zivari-Piran, J. D. Hunter 和 J. G. Milton. 使用具有自适应时滞和信号传输损耗的神经网络进行投影聚类。《神经计算》, 23:1568–1604, 2011.