arXiv:2601.01682v1 [math.CO] 4 Jan 2026

U^4 范数的一般逆理论

Luka Milićević†

摘要

本文在一般有限阿贝尔群中，针对 Gowers 均匀范数 $\|\cdot\|_{U^4}$ 发展了一套定量逆理论。范数 $\|\cdot\|_{U^4}$ 在一致性范数的逆理论中发挥了重要作用，因为该领域相关研究中，这种情形下逆定理的证明通常提供了一套总体策略，可推广到更高阶情形。我们确定了一种新的一致性障碍，称为近似三次多项式。Bohr 集 $B(\Gamma, \rho_0)$ 上的近似三次多项式 q是满足以下条件的函数：对每个 $\rho \leq \min\{\rho_0, 1/8\}$，均有

$$\|\Delta_{a,b,c,d} q(x)\|_{\mathbb{T}} \leq 2^{10}\rho$$

对所有 $x, a, b, c, d \in B(\Gamma, \rho)$。

设 $f\colon G \to \mathbb{D}$ 是一个满足 $\|f\|_{U^4} \geq c$ 的函数。我们证明准多项式逆定理：也就是说，

- 当 $(|G|, 6) = 1$时，存在一个近似三次 $q\colon B(\Gamma, \rho)$，适用于 $|\Gamma| \leq \log^{O_{(1)}} c^{-1}$ 和 $\rho \geq \exp(-\log^{O_{(1)}} c^{-1})$，以及一个元素 $t \in G$，使得

$$\Big|\sum_{x\in G} \mathbb{1}_B(x) f(x+t)\, e(q(x))\Big| \geq \exp(-\log^{O(1)} c^{-1})|G|,$$

- 当 $G = (\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$时，存在一个三次多项式 $q\colon G \to \mathbb{T}$，使得

$$\Big|\sum_{x\in G} f(x)\, e(q(x))\Big| \geq \exp(-\log^{O_d(1)} c^{-1})|G|.$$

近似三次多项式具有相当强的刚性。我们展示了它们在循环群的情形下与广义多项式之间存在紧密联系，在有限向量空间的情形下则与经典意义上的多项式存在紧密联系。因此，本文的理论统一处理了 Green、Tao 和 Ziegler 以及 Bergelson、Tao 和 Ziegler 关于 U^4 范数的逆定理；这些定理是在上述环境群的情形下得到证明的。同时，我们回答了 Jamneshan、Shalom 和 Tao 关于有界挠群中的逆理论所提出的问题。

逆定理所依据的核心结果，是关于一般有限阿贝尔群中 Freiman 双同态的一个结构性结果。Freiman 双同态是双线性映射的近似变体。在证明中，我们将此前针对有限向量空间情形的工作中的方法加以推广，借助代数正则性方法和抽象的 Balog-Szemer´edi-Gowers 定理，并引入了关于 Freiman 双同态延拓的新颖思想。在 Freiman 双同态的延拓问题中，一般有限阿贝尔群中会出现有限向量空间情形所没有的真正新现象。

† 塞尔维亚科学与艺术 академия数学研究所 电子邮箱：
luka.milicevic@turing.mi.sanu.ac.rs

§1 引言

我们先回顾一致性范数的定义。这些范数由 Gowers [18, 19]in 在其关于等差数列的 Szemer´edi 定理的定量证明中引入。

定义 1.1. 设 $f\colon G\to\mathbb{C}$ 是有限阿贝尔群 G上的一个函数。带有平移 a的离散乘法导数 是一个算子，它将 f映射为函数 $\partial_a f$，其定义公式为 $\partial_a f(x) = f(x+a)f(x)$。采用这一记号，一致性范数 $\|f\|_{U^k}$ 定义为

$$\Big(|G|^{-k-1}\sum_{x,a_1,\dots,a_k\in G}\partial_{a_1}\dots\partial_{a_k}f(x)\Big)^{2^{-k}}.$$

众所周知，$\|\cdot\|_{U^k}$ 是 $k\geq 2$的一个范数。

这些范数刻画了阿贝尔群上函数所具有的代数结构。Gowers 的一项关键洞见对于证明 Szemer´edi 定理至关重要：考虑一个密度为 $\frac{|A|}{|G|}=\delta$的集合 $A\subseteq G$，若数值 $\|\mathbb{1}_A-\delta\|_{U^k}$ 足够小，那么 A 中长度为 $k+1$ 的等差数列的数量，就近似等于 G 中随机选取一个密度为 δ的子集 A 时的数量，即 $\delta^{k+1}|G|^2$。要完成 Szemer´edi 定理的证明，需要回答一致性范数的逆问题，也就是描述一致性范数较大的函数 $f\colon G\to\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|\leq 1\}$。这一问题已成为加法组合学的核心问题之一，也是高阶傅里叶分析的起点。

在其研究中，Gowers 为逆问题提供了部分答案，这足以完成 Szemer´edi 定理的证明。具体而言，对于循环群 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，他证明了：对于任意函数 $f\colon \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\to\mathbb{D}$满足$\|f\|_{U^k}\geq c$，存在长度至少为 $N^{\delta_{k,c}}$的等差数列 $P_1,\dots,P_m$，其中 $\delta_{k,c}\in(0,1)$ 是仅依赖于 k 和 c 的常数；这些等差数列划分群 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，并且存在次数为 $k-1$ 的多项式 $p_1,\dots,p_m$，使得 f 在局部与这些多项式的相位相关，这意味着

$$\sum_{i\in[m]}\Big|\sum_{x\in P_i}f(x)\,\mathrm{e}(p_i(x))\Big|\geq\Omega_c(N).$$

这种描述并不完整，因为并非所有这类分段相位多项式都具有较大的均匀性范数。

为了获得完整的描述，对于给定的群 G、范数 k 的阶以及范数上界 c，我们希望找到一族函数 $\mathcal{F}=\mathcal{F}_{G,\,k,\,c}$，我们将其中的元素称为一致性障碍，使得每个满足 $\|f\|_{U^k}\geq c$ 的 $f\colon G\to\mathbb{D}$ 都与某个函数 $g\in\mathcal{F}$全局相关，即$|\mathbb{E}_{x\in G}f(x)g(x)|\geq c'$。这里 c' 是依赖于 c 和 k 的参数，在本引言余下部分中，我们将其称为相关性下界；而 $\mathbb{E}_{x\in G}$ 是平均值 $\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}$ 的标准简写。障碍函数族应当在某种意义上是极小的；这些障碍函数

—

预计具有类似多项式的结构，其描述应当便于高效地利用这种结构。因此，答案的一个重要部分是描述障碍族，而逆问题的答案通常取决于环境群。自一致性范数问世以来，关于其逆理论的研究成果已相当丰富，接下来我们将概述其中一些关键结果。

简史。 首个非平凡情形是 $U^3(G)$ 范数。对于群 G 阶为奇数的情形，Green 和 Tao [29], 证明了逆定理；对于 $\mathbb{F}_2^n$的情形，则由 Samorodnitsky [54]证明。最近，Jamneshan 和 Tao [40] 通过给出一个适用于所有有限阿贝尔群的证明，为这一范数建立了统一理论。

对于 $k \geq 4$，一致性范数 U^k 的逆理论要困难得多。特别是，范数 U^4 在某种意义上至关重要，因为其证明通常也会为证明更高阶情形的逆定理提供策略。例如，与 U^3 的情形不同，已知结果分别处理有限向量空间和循环群（或者稍微一般一些，处理低秩群和有界挠群）；截至本文发表之前，还没有逆定理能在一般阿贝尔群中统一这些特殊情形下的强逆定理，哪怕只是定性意义上的统一。

对于一般的 k，关于 $U^k(\mathbb{F}_p^n)$ 范数的逆定理，在所谓的高特征情形（其中 $k \leq p$）下，即障碍函数可以取为多项式相位的情形，是 Bergelson、Tao 和 Ziegler 的一项重要成果 [2, 62]。Tao 和 Ziegler 后来将这一结果扩展 [63], 到低特征情形（$k > p$）。与高特征情形不同，在后一种情况下，需要一类更一般的障碍，称为<sty id='8'>非经典多项式。这类函数恰好是以下极值问题的解：确定 $g : \mathbb{F}_p^n \to \mathbb{D}$ 使得 $\|g\|_{U^k} = 1$。在谱系的另一端，当环境群是循环群时，关于 $U^k(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ 范数的逆定理是 Green、Tao 和 Ziegler 的一项卓越成果 [33, 34], ，也是 Green 和 Tao 计划的关键部分，该计划旨在获得素数中线性构型计数的渐近估计 [31, 32]。对于循环群，可以将幂零序列作为障碍类。

上述结果仅给出了与障碍函数相关性的定性界。例如，Bergelson、Tao 和 Ziegler 的证明中，环境群是有限向量空间，该证明依赖于遍历理论。此外，在推广到低特征情形时，Tao 和 Ziegler 使用了多维 Szemer´edi 定理。在循环群的情形下，Green、Tao 和 Ziegler 的证明涉及正则化过程；他们指出，即使避免使用超滤子语言，该证明仍会导出阿克曼型界[1]。

在讨论一些定量结果之前，我们先指出，源自 Szegedy [58]以及 Camarena 和 Szegedy [6], 的论文的零空间理论，为一致性范数的逆理论提供了另一种途径。零空间理论是一门内容丰富的学科，Candela [7, 8],也对其作了进一步发展

[1]据 Leng、Sah 和 Sawhney [45], 所述，或许只要更加谨慎，Green、Tao 和 Ziegler 的工作本身就已经给出了定量界，其涉及 U^k 范数的 $O(k^2)$ 指数。

Candela 和 Szegedy [12, 13] 以及 Gutman、Manners 和 Varj´u [35, 36, 37]。最近，Candela、Gonz´ález-S´ánchez 和 Szegedy [9]运用这一理论，为 Tao-Ziegler 逆定理给出了新的证明，并在有界挠群 [10] 和一般阿贝尔群 [11]的情形下取得了进展。然而，零空间理论的方法同样具有根本上的无穷性，因此只能得到定性结果。

定量逆定理。鉴于算术组合学中的诸多应用，获得关于与障碍函数相关性的良好上界的逆定理具有重要价值。上界问题出现在 Green 的开放问题列表 [26], 中，并被称为加法组合学中最大的难题之一。

上文提到的 Green 和 Tao 以及 Samorodnitsky 关于 $U^3(G)$ 范数的逆定理已经是定量的。其上界大致为单指数级（更准确地说，是$c' \geq \exp(-c^{-O(1)})$）。Sanders [55] 将这些上界改进为准多项式级（形如$c' \geq \exp(-\log^{O(1)}(2c^{-1}))$ 的上界）。Croot 和 Sisask [15] 的近似周期性结果在该成果中发挥了重要作用。最后，Gowers、Green、Manners 和 Tao [20, 21]在有限向量空间的背景下得到了多项式上界（$c' \geq c^{O(1)}$），这是他们解决 Marton 猜想的结果。

关于高阶范数，在有限向量空间的情形下，Gowers 和作者 [23]首次针对 U^4 （ $p \geq 5$）获得了定量界，其形式为 $c' \geq \exp^{(3)}(\log^{O(1)}(2c^{-1}))$，因此大致是双指数级的。Kim、Li 和 Tidor [42], 以及 Lovett 独立地改进了这些上界，将其降低为单指数级；他们指出， [23],中的证明步骤对容斥原理的低效使用导致了指数级依赖，而这一点可以改进。Gowers 和作者 [25], 证明了高特征下 U^k 范数逆定理的一个定量版本，其上界涉及数量有界的指数函数，且仅取决于 k。低特征下也取得了一些进展 [51, 64]。

最后，作者为 U^4 范数逆定理找到了一个新证明，其关联上界为拟多项式级。

当环境群为循环群时，Manners 取得了突破性进展，他证明了对所有 k，逆定理 [47] 都有双指数上界；Leng [44], 则证明了 U^4 范数情形下的准多项式界。随后，Leng、Sah 和 Sawhney [45], 在 Green、Tao 和 Ziegler 的工作基础上，运用 Leng 改进的幂零序列等分布理论 [43], ，证明了所有阶数下的准多项式界。

新结果。 正如前面的讨论所表明的，对于一般阿贝尔群的一致性范数，目前仍没有一种逆理论，能够同时推广循环群和有限向量空间情形下已知的最佳描述。本文针对有限阿贝尔群的 U^4 范数，建立了一种一般的定量逆理论。为此，我们还定义了一类新的障碍函数，称为近似三次多项式：这类函数为 $\phi\colon B = B(\Gamma, \rho_0) \to \mathbb{T}$，其中

$B(\Gamma, \rho_0)$ 是一个 Bohr 集，并且具有如下性质：对于每个 $\rho \leq \min\{\rho_0, 1/8\}$，都有

$$\|\Delta_{a,b,c,d} q(x)\|_{\mathbb{T}} \leq 2^{10}\rho$$

对所有 x，a，b，c，$d \in B(\Gamma, \rho)$。

下面陈述我们的两个主要逆理论结果。第一个结果涉及阶与 6 互素的有限阿贝尔群。

定理 1.2 (关于U^4 范数的逆定理)。设 G 是一个阶与 6 互素的有限阿贝尔群。设 $f\colon G \to \mathbb{D}$ 满足 $\|f\|_{\mathrm{U}^4} \geq c$。则存在一个余维为$(2\log c^{-1})^{O(1)}$、半径为$\exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)})$的 *Bohr* 集 B，一个元素 $t \in G$ 以及一个近似三次多项式 $\phi\colon B \to \mathbb{T}$，使得

$$\Big| \mathop{\mathbb{E}}_{x\in G} \mathbb{1}_B(x) f(x+t)\, \mathrm{e}(q(x)) \Big| \geq \exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)}).$$

鉴于一致性范数的逆理论源自 Szemer´edi 定理的定量证明，我们想指出，或许可以从我们的工作推出具有与 Leng、Sah 和 Sawhney [46] 相匹配的上界的新变体。例如，可以证明：对于整数 k，密度为 $\frac{1}{k}$ 且包含于 $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n$ 中的集合含有一个长度为 5 的等差数列。这样一组环境群与密度的搭配颇有意义，因为在这种情况下，Szemer´edi 定理无法直接由向量空间或循环群的情形推出。

第二个逆定理针对指数为 2 的幂的群。

定理 1.3 (逆U^4 定理（适用于$\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z}$）^{n}，具有多项式障碍）。固定 $d \in \mathbb{N}$，并令$G = (\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$。假设 $f\colon G \to \mathbb{D}$ 满足 $\|f\|_{\mathrm{U}^4} \geq c$。那么存在一个三次多项式$q : G \to \mathbb{T}$，使得

$$\Big| \mathop{\mathbb{E}}_{x} f(x)\, \mathrm{e}(q(x)) \Big| \geq \exp(-\log^{O_d(1)}(2c^{-1})).$$

值得指出的是，在 [39]（问题 1.9）中，Jamneshan、Shalom 和 Tao 询问，对于有界挠群，能否用次数为 $k-1$ 的多项式作为 U^k 范数的障碍。特别是，这两个定理基本上解决了他们关于 U^4 范数的问题。再多做一些工作，便可以得到一个完全统一的答案；但为了强调低特征情形下对称性论证所面临的额外困难，我们选择以这种方式呈现这些逆定理。就给定的范数而言，定理 1.3 可以说是该问题中最难的情形。

上述逆定理的关键结果是有限阿贝尔群中 Freiman 双同态的结构定理，现回顾其定义。本文中，G_1，G_2 和 H 均为任意有限阿贝尔群。若映射 ϕ：从 $G_1 \times G_2$ 的子集 A 映射到 H，则

称其为 *Freiman* 双同态，如果它保持所有方向加法四元组，即当 $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ 且四个点 (x_i, y) 均属于 A 时，有 $\phi(x_1, y) + \phi(x_2, y) = \phi(x_3, y) + \phi(x_4, y)$；交换 x 和 y 的角色时同样成立。

为了陈述这一结构性结果，我们引入另一个概念，即 E-双同态。具体而言，若对于某个子集 $E \subseteq H$，我们有 $\phi(x_1, y) + \phi(x_2, y) - \phi(x_3, y) - \phi(x_4, y) \in E$，且上述加性四元组满足此条件（当 x 和 y 互换角色时，情况也类似），则称 ϕ 为 E-双同态。最后，若对于某些元素 $a_1, \ldots, a_r \in H$，E 中的每个元素都可写成 $\sum_{i \in [r]} \varepsilon_i a_i$，其中 $\varepsilon \in \{0,1\}^r$，则称 E 的秩至多为 r。注意，当 $E = \{0\}$ 时，这样的映射是 Freiman 双同态。

我们的主要结果是，稠密定义域上的 Freiman 双同态，本质上是定义在 Bohr 集乘积上的 E-双同态的限制，其中集合 E 很小。

定理 1.4. 假设 $\phi\colon A \to H$ 是定义在大小为 $c|G_1||G_2|$ 的集合 $A \subseteq G_1 \times G_2$ 上的 *Freiman* 双同态。那么存在一个秩为 $(2 \log c^{-1})^{O(1)}$ 的集合 E、余维为 $(2 \log c^{-1})^{O(1)}$ 且半径为 $\exp(-(2 \log c^{-1})^{O(1)})$ 的 *Bohr* 集 $B_1 \subseteq G_1, B_2 \subseteq G_2$、元素 $s \in G_1, t \in G_2$，以及一个 E-双同态 $\Phi\colon B_1 \times B_2 \to H$，使得等式 $\Phi(x, y) = \phi(x + s, y + t)$ 对至少 $\exp(-(2 \log c^{-1})^{O(1)})|G_1||G_2|$ 个点 $(x, y) \in B_1 \times B_2$ 成立。

（对于有界挠群，我们可以用 Freiman 双同态替代 E-双同态，例如，参见命题 16.4。）

不同于有限向量空间的情形，在该情形中结构性结果意味着 ϕ 可以与一个全局双线性映射相关联；对于一般有限阿贝尔群，我们需要采用更一般的 E-双同态概念。我们将在证明概述中对此进行更详细的讨论。在此之前，让我们把注意力转向近似三次多项式。

1.1. 障碍函数

首先注意，在有界挠群情形下，证明定理 1.2 时出现的近似三次多项式会化为通常的多项式。设 $q\colon B \to \mathbb{T}$ 是一个近似三次多项式。若 G 的指数为 m，则在定理 1.2 的证明中，q 的取值属于 $\frac{\mathbb{Z}}{m}$（模 1）。于是我们有 $\|\Delta_{a,b,c,d} q(x)\|_{\mathbb{T}} \leq \varepsilon$ 在 B_ε 上成立。然而，对 q 取值的限制意味着 $\Delta_{a,b,c,d} q(x)$ 消失。此外，B_ε 包含 G 的一个稠密子群 U，而在这类群中，可以找到另一个稠密子群 $U' \leq U$，使得 q 能够从其上延拓为一个全局多项式（见命题 16.2）。

原则上，我们可以为所有阿贝尔群证明一个统一的定理，但这会掩盖指数为 2 的幂的群中对称性论证的细节；在这种情况下，即使与低特征的情形相比，也会出现额外的困难（见命题 16.5）。

对于循环群的情形，我们证明，近似三线性形式（它们是近似三次多项式的一种多线性变体，由三重离散加性导数得到）可以在低阶集合上用广义三线性多项式逼近。这正是附录 C 中定理 C.3 的内容。

最后，合理地构造由我们的障碍函数生成的幂零流形，或许可以据此证明 Jamneshan 和 Tao 的一般逆猜想 [40], 不过，鉴于本文篇幅较长，我们不打算在此继续探讨。

然而，我们的工作并非只关注最终障碍函数的精确形式；其中一个关键启示是，存在三类自然的函数，它们大致等价：

- 近似三线性形式，它们是函数 ϕ：$B \times B \times B \to \mathbb{T}$，定义在 Bohr 集 $B = B(\Gamma, \rho_0) \subseteq G$上，并满足：当 $x_1, x_2, y, z \in B(\Gamma, \rho)$ 时，$\|\phi(x_1 + x_2, y, z) - \phi(x_1, y, z) - \phi(x_2, y, z)\|_{\mathbb{T}} \leq O(\rho)$，其中 $\rho \leq \rho_0$，其他变量也类似（在本文中，近似三次多项式以$x \mapsto \phi(x, x, x)$的形式出现），

- E-双线性映射 Φ：$B \times B \to \hat{G}$, 适用于 Bohr 集 B,

- Freiman 双线性映射 Φ：$V \to \hat{G}$，适用于双线性 Bohr 簇 V。

在这些类别之间转换的难度各不相同。给定一个近似三线性形式 ϕ，要得到与 ϕ 相关的一个 E-双线性映射 Φ：$B' \times B' \to \hat{G}$，并不太困难。这涉及研究 Bohr 集上的近似线性映射，并获得 Bohr 集较大的傅里叶系数的相对精确结构。反向转换基本上是显而易见的，只需在 Bohr 集 $B' \cap B(E, \rho)$ 的立方体上定义 $\phi(x, y, z) = \Phi(x, y)(z)$ 即可。

从 E-双线性映射 Φ：$B' \times B' \to \hat{G}$ 得到双线性 Bohr 簇上的 Freiman 双线性映射，可以利用第 5–11 节中的论证[2] 以及双线性 Bogolyubov 论证来完成；反向转换则是第 12 节的内容。

1.2. 证明概述与论文结构

在讨论论文结构之前，我们先简要介绍两个源自前人研究的重要要素。

在有限向量空间中证明拟多项式逆定理时，[50], 我们引入了 Balog-Szemer´edi-Gowers 定理的一个抽象版本。简言之，我们考虑阿贝尔群 A中的一个稠密集 G 以及一系列 $\mathcal{Q}_1 \subseteq \mathcal{Q}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{Q}_{36}$ 中的加性四元组集合，A它们满足三个条件：第一是大性，也就是说 $\mathcal{Q}_1$ 足够稠密；第二是对称性，

[2]这个粗略的推论很可能有更直接的证明，但这样表述是最简洁的方式。

所有 $\mathcal{Q}_i$ 在加性四元组中元素的某些置换下保持不变；第三是弱传递性，也就是说，如果群 A 中的一个加性四元组（a_1、a_2、a_3、a_4）满足（a_1、a_2、b、b'）$\in \mathcal{Q}_i$ 和（b、b'、a_3、a_4）$\in \mathcal{Q}_j$，且（b、b'）有少数几种取法，那么（a_1、a_2、a_3、a_4）$\in \mathcal{Q}_{i+j}$。如果所有这些条件都成立，那么我们可以找到 A 的一个大子集 A'，使得 A' 中每个（不一定是加性的）k 元组，都可以通过将 $\mathcal{Q}_{36}$ 中的加性四元组用作“桥梁”，与 A 中大量的 $3k$ 元组建立关联。加性四元组集合定义上的灵活性至关重要，我们将在论证思路的说明中谈到这一点。在第4节中，我们证明一个稍微一般化的陈述（定理 4.1），该陈述适用于以近似子群而非群作为环境集合的情形。

其次，在该逆定理的证明中，（双线性）代数正则性方法[3] 发挥了重要作用，下面我们将对此作简要介绍（更详细的讨论见 [50] ）。回顾一下，Szemer´edi 正则性引理 [59, 60] 将给定图的顶点集划分为有界数量的部分，使得大多数部分对所诱导的二部图都是拟随机的。该引理与计数引理共同构成了（组合）正则性方法的基础。然而，众所周知，这种方法本质上效率很低 [17]。

在算术背景下，我们研究具有类似双线性簇的强代数结构的图。得益于这种结构，我们可以得到一个高效的代数正则性引理（定理 3.5）。代数正则性方法在 [49]中被推广到一般有限阿贝尔群。该文中的表述略有不精确，但不影响该文的主要结果。我们将在第3节中重新审视并修正这一表述。

现在我们开始证明，并概述和说明本文的组织结构。

本文分为三章。第一章属于预备性质，介绍本文所需的工具，并分为三节。第2节讨论我们所称的“近似线性代数”。在该节中，我们汇总了本文将频繁使用的各种事实和关键对象。因此，我们将详细讨论 Bohr 集和陪集广义等差数列、Bohr 集上的傅里叶分析、定量格理论，以及 Bohr 集和陪集广义等差数列上的各种映射，例如 Freiman 同态、 E-同态和近似线性映射。接下来是第3节，其中重新探讨一般阿贝尔群的代数正则性方法；本章最后以第4节结束，介绍抽象的 Balog-Szemer´edi-Gowers 定理。

第二章专门用于证明我们的主要结果——定理 1.4，下面我们将对其作简要概述。

证明首先沿用了我们先前在有限向量空间情形下的证明策略 [50]。简而言之，在那篇论文中，我们从稠密集 $A \subseteq G_1 \times G_2$ 上的一个 Freiman 双同态 $\phi\colon A \to H$ 出发。证明首先转换视角，转而考虑一个线性系统

[3]高阶代数正则性方法曾用于 [25], ，但其描述起来更加复杂。其背后的核心思想是使用多重线性形式的有效等分布理论 [3, 30, 41, 48, 52] ，取代传统的（超图）正则性引理。

映射 $\phi_x\colon G_2 \to H$，由集合 $X \subseteq G_1$ 编号，并且在以下意义下近似线性：

$$\operatorname{rank}\left(\phi_{x_1} - \phi_{x_2} + \phi_{x_3} - \phi_{x_4}\right) \leq O(1), \tag{1}$$

对于 X 中的许多加性四元组（x_1，x_2，x_3，x_4）。随后首次应用抽象 Balog-Szemer´edi-Gowers 定理，转而考虑子集 $X' \subseteq X$，其中所有加性四元组都按（1）的意义得到保持。接着，稳健 Bogolyubov-Ruzsa 定理使我们能够用子空间 V 替换 X'。

之后，我们从一个关键的新视角出发，考虑部分定义的线性映射ϕ： $U_x \to H$，其中 $U_x \leq G_2$ 是低余维子空间，而不是整个空间 G_2。单独来看，这只会损失结构；但与此同时，我们将保持性的定义改为

$$(\forall y \in U_{x_1} \cap U_{x_2} \cap U_{x_3} \cap U_{x_4})\ \left(\phi_{x_1} - \phi_{x_2} + \phi_{x_3} - \phi_{x_4}\right)(y) = 0, \tag{2}$$

它比先前的定义更强。我们可以转而考虑一组部分定义的线性映射ϕ_x： $U_x \to H$，对所有 $x \in V$ 都成立，其中绝大多数加性四元组都在第二种意义下得到保持。随后应用双线性 Bogolyubov 论证的一个变体，以确保 U_x 关于 x 线性依赖，但代价是转而考虑 V 的一个指标子集；此时我们只能假设有正比例的加性四元组按（2）的意义得到保持。再次应用抽象 Balog-Szemer´edi-Gowers 定理，这次结合代数正则性方法，使我们能够转而考虑一个指标集合，其中所有加性四元组都按（2）的意义得到保持。

将部分线性映射系统视为定义在 $G_1 \times G_2$ 子集上的单个映射，我们便得到双线性簇的一组稠密列上的 Freiman 双同态。值得注意的是，在接下来的每一步中都会应用代数正则性方法。稳健 Bogolyubov-Ruzsa 定理使我们能够将其扩展为定义在整个双线性簇上的 Freiman 双同态。最后，利用一些较早的扩张结果，我们得到一个全局双线性映射。

现在我们来说明本文如何对上述策略加以修改。

与有限向量空间相比的主要区别。 从上述证明可以清楚地看出，该证明严重依赖线性代数（特别是子空间之间的线性映射发挥着重要作用）、抽象 Balog-Szemer´edi-Gowers 定理以及代数正则性方法，因此首要任务是将这些工具推广到任意阿贝尔群。抽象 Balog-Szemer´edi-Gowers 定理的原始形式在 [50] 中已经给出了一个适用于一般阿贝尔群的证明，但更一般的背景要求对其稍作推广。代数正则性方法此前已在 [49]中得到推广。最后，我们不再使用线性映射 ϕ_x： $U_x \to H$，而是使用 Bohr 集上的 Freiman 线性映射。这是自然的推广，因为这类映射会出现在近似同态结构定理中（参见命题 2.13 和定理 2.26）。

然而，证明中最棘手、需要新颖思路的部分，是最后的扩展步骤，下面我们将对此作更详细的介绍。

扩展问题。 映射的延拓是最难克服的障碍，而获得

定理 1.4 中的乘积结构对于完成对称性论证以及推导 U^4 范数的逆定理（定理 1.2 和定理 1.3）至关重要。在有限向量空间中，我们总能将子空间上的线性映射延拓到整个空间，但对于一般的阿贝尔群，这通常并不成立。也就是说，若给定一个秩为 $d \geq 2$ 的对称真广义等差数列 $[-L_1, L_1] \cdot a_1 + \cdots + [-L_d, L_d] \cdot a_d$，Freiman 线性映射由其在 a_1、……、a_d 处的取值确定。元素 a_1、……、a_d 通常会在群中满足某个非平凡的线性组合关系，从而阻碍延拓。此外，即使我们在一个子群上有一个 Freiman 线性映射（即同态），它也未必能延拓到整个群。

我们解决这一问题的方法是**忽略精确性**——此前我们一直坚持精确性——并**允许映射中出现微小且可控的误差**。更具体地说，让我们回到之前考虑过的例子：定义在稠密等差级数 $C = [-L_1, L_1] \cdot a_1 + \cdots + [-L_d, L_d] \cdot a_d$ 上的 Freiman 线性映射 ϕ。假设 $[-kL_1, kL_1] \cdot a_1 + \cdots + [-kL_d, kL_d] \cdot a_d = G$，我们预期当 k 很小时这一条件会成立。我们**直接**扩展 ϕ；对于每个 $x \in G$，任意选取 $y_1, \ldots, y_k \in C$，使得 $x = y_1 + \cdots + \tilde{y_k}$，并令 $\phi(x) = \sum_{i \in [k]} \phi(y_i)$。当然，这样的过程不会给出群上的同态，~但让我们来考察同态性质被破坏得有多严重。尽管 ϕ 取决于~那些相加得到 x 的元组的选择，但 ϕ 的可能取值彼此密切相关。要理解这些可能取值之间的关系，我们需要讨论值的问题

$$\phi(y_1) + \cdots + \phi(y_k) - \phi(z_1) - \cdots - \phi(z_k)$$

在 $y_1 + \cdots + y_k = z_1 + \cdots + z_k$ 的情况下。利用广义等差数列上的坐标，我们最终得到

$$\lambda_1 \phi(a_1) + \cdots + \lambda_d \phi(a_d)$$

其中 $\lambda_i \in [-2kL_i, 2kL_i]$ 和 $\sum_{i \in [d]} \lambda_i a_i = 0$。一个简单的覆盖论证表明，这样的线性组合只有$\mathcal{O}(1)$个。$\Delta_{a,b}\phi$ 可能取哪些值的问题也可以用同样的思路回答，唯一的区别在于它涉及加性 $4d$-元组。这启发了E-同态的概念。

定义 1.5。对于集合 $E \subseteq H$，若函数 $\phi\colon A \to H$ 满足：对所有 $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$，$\phi(x_1) + \phi(x_2) - \phi(x_3) - \phi(x_4) \in E$，则称其为 E-同态。如果将加性四元组条件替换为加性三元组条件，则称其为 E- 线性的 。

因此，我们可以将 Bohr 集上的 Freiman 线性映射扩展为定义在整个群上的 E-线性映射。

借助这一思路，我们可以将定义在双线性 Bohr 簇上的 Freiman 双同态，与定义在 Bohr 集乘积上的E-双同态联系起来。这意味着我们需要同时控制许多朴素的延拓，这依赖于代数正则性方法，以及其原始形式的双线性 Bogolyubov 论证；原始形式与上述证明概述中的论证不同，并且

现在回顾一下。

双线性 Bogolyubov 论证——原始形式。回顾一下，经典的 Bogolyubov 论证 [5] 指出，当 A 是循环群的稠密子集时， $2A-2A$ 包含一个半径较大、余维较小的 Bohr 集。这一事实在 Ruzsa 对 Freiman 定理的新证明 [53]中发挥了重要作用。对于有限向量空间，这一事实的双线性推广见于 [4, 22] ；随后， [38], 对其作出了定量改进，并将其推广到有限阿贝尔群 [49]。现在我们介绍后者这一更一般的版本。我们用 $\mathsf{D}_{\mathsf{hor}}A$表示 $A \subset G_1 \times G_2$ 的水平差集，其定义为 $\mathsf{D}_{\mathsf{hor}}A = \{(x_1 - x_2, y)\colon (x_1, y), (x_2, y) \in A\}$。类似地，我们用 $\mathsf{D}_{\mathsf{ver}}A$ 表示 A 的垂直差集，其定义为 $\mathsf{D}_{\mathsf{ver}}A = \{(x, y_1 - y_2)\colon (x, y_1), (x, y_2) \in A\}$。换言之，水平差集是对每一行分别取差集得到的，而垂直差集则是对每一列分别取差集得到的。迭代方向差集由显然的复合得到，因为 $\mathsf{D}_{\mathsf{hor}}$ 和 $\mathsf{D}_{\mathsf{ver}}$ 只是从幂集 $\mathcal{P}(G \times G)$到其自身的映射。

定理 *1.6*（有限阿贝尔群中的双线性 *Bogolyubov* 论证）。设 G 和 H 为有限阿贝尔群，且 $A \subseteq G \times H$ 为一个密度为 δ 的集合。则存在一个正量 $\rho \geq \exp\left(-\log^{O(1)}(10\delta^{-1})\right)$、集合 $\Gamma \subseteq \hat{G}$、$\Psi \subseteq \hat{H}$，其大小至多为 $\log^{O(1)}(10\delta^{-1})$，以及 *Freiman* 线性映射 L_1、……、$L_r\colon B(\Psi;\rho) \to \hat{G}$，其中某个正整数 $r \leq \log^{O(1)}(10\delta^{-1})$ 使得双线性 *Bohr* 簇

$$\left\{(x, y) \in B(\Gamma;\rho) \times B(\Psi;\rho)\colon x \in B(L_1(y), \dots, L_r(y);\rho)\right\}$$

包含于 $\mathsf{D}_{\mathsf{hor}}\mathsf{D}_{\mathsf{ver}}\mathsf{D}_{\mathsf{ver}}\mathsf{D}_{\mathsf{hor}}\mathsf{D}_{\mathsf{ver}}\mathsf{D}_{\mathsf{hor}}\mathsf{D}_{\mathsf{hor}}A$ 内。

如果我们隐式地指一个双线性 Bohr 簇，就称其具有余维至多 d 且半径为ρ，若 $|\Psi|$， $r \leq d$。

证明概述。 现在我们可以概述定理 1.4 的证明。设 $\varphi\colon A \to H$ 是稠密集 $A \subseteq G_1 \times G_2$ 上的 Freiman 双同态。

步骤 1。 在第 5 节中，我们将作为二元函数的 φ 转化为一族 Freiman 线性映射 $\phi_x\colon B_x \to H$，这些映射定义在余维较低、半径较大的 Bohr 集 B_x 上，并由稠密集 X 中的 $x \in X \subseteq G_1$ 标记，使得 X 中许多加性四元组都得到保持，即

$$\phi_{x_1} - \phi_{x_2} + \phi_{x_3} - \phi_{x_4}$$

在定义域 $\cap_{i\in[4]} B_{x_i}$ 的交集上取有限个值，这是在一般有限阿贝尔群中研究的 (1) 的一种变体。

步骤 2. 在第6节中，我们使用抽象的 Balog-Szemer´edi-Gowers 定理，转而考虑子集 $X' \subseteq X$，其中几乎所有加性16元组都符合上述意义上的要求。

步骤 3. 在第7节中，我们使用稳健 Bogolyubov-Ruzsa 定理，将索引集 X' 替换为一个秩较小、密度较大的对称真陪集进程 C 。

步骤 4。 在第 8 节中，我们从一个至关重要的新视角出发，转而采用第二种相容性概念。具体来说，类似于 (2)，我们称一个加性四元组 $(x_1, \dots, x_4)$ 是*Bohr* 相容的，当且仅当

$$(\forall y \in B_{x_1} \cap B_{x_2} \cap B_{x_3} \cap B_{x_4}) \left(\phi_{x_1} - \phi_{x_2} + \phi_{x_3} - \phi_{x_4}\right)(y) = 0.$$

在这一步中，我们使用依赖随机选择论证来重新定义映射 ϕ_x 的定义域，使得对于某个 $k = O(1)$，绝大多数 $2k$-元组都是 Bohr 相容的，同时不影响索引集 C。

步骤 5。 在第 9 节中，我们使用双线性 Bogolyubov 论证的一种变体，以确保 B_x 在 x 上呈现线性行为。具体来说，我们找到一些 Freiman 线性映射 $\Theta_1, \dots, \Theta_r \colon C \to G_2$，使得 B_x 可以替换为 $B(\Theta_1(x), \dots, \Theta_r(x); \rho)$。这一步的代价是失去索引集中的结构，因此索引集再度退化为一个稠密子集 $X \subseteq C$，其中有正比例的加性四元组是 Bohr 相容的（对于新选取的 Bohr 集）。

步骤 6. 在第 10 节中，我们再次使用抽象 Balog-Szemer´edi-Gowers 定理，转而考虑一个子集，其中所有加性四元组都是 Bohr 相容的。抽象 Balog-Szemer´edi-Gowers 定理的灵活性至关重要，因为我们考虑的加性四元组集合，是在定义域与越来越小的固定 Bohr 集相交之后 Bohr 相容的四元组。为了证明满足抽象 Balog-Szemer´edi-Gowers 定理的条件，我们需要使用代数正则性方法。

步骤 7. 在第 11 节中，我们回到最初的二元函数视角。因此，现在我们有一个定义在双线性 Bohr 簇的稠密列集上的 Freiman 双同态。利用代数正则性方法和稳健 Bogolyubov-Ruzsa 定理，我们可以将该映射扩展到整个双线性 Bohr 簇。

步骤 8. 在第 12 节中，我们将实施一种新颖的延拓论证，该论证基于朴素延拓的思路，即将问题转到 Bohr 集乘积上的一个 E-双同态。此论证由三个子任务组成。回顾一下，到目前为止，我们在某个双线性 Bohr 簇 V 上有一个 Freiman 双线性映射 $\phi\colon V \to H$ 。我们的策略是沿垂直方向朴素地延拓 ϕ ，从而延拓 ϕ 。然而，不同列上的朴素延拓之间是否相关并不显然。

首先，在第12.1小节中，我们证明情况确实如此：也就是说，在对 ϕ 定义域中的 Bohr 簇作适当收缩后，可以假设不同列中出现的误差集相同。这部分论证依赖于原始形式的双线性 Bogolyubov 论证（定理 1.6），以及在比 G_1 和 G_2更大的群中构造一个辅助双线性 Bohr 簇。然而，由于还需要进一步转到双线性 Bohr 簇，我们尚不能假设各列就是整个群 G_2。

其次，在第12.2小节中，我们证明，对各列作朴素延拓会得到一个新的映射，其定义域是另一个双线性 Bohr 簇，而它的各列则是 G_2与某个固定 Bohr 集的交集所形成的稠密子群，且该 Bohr 集与列指标 x线性无关。这部分论证基于一种运用定量格理论的高效正则化过程（见引理 2.32 和定理 2.33），其思路也与代数正则性引理的证明相近。

最后，在第12.3小节中，我们完成向 Bohr 集的乘积的最终延拓。双线性 Bohr 簇各列所对应的子群至关重要；而证明最终延拓良定义且为一个 E-双同态时，会用到某些余循环恒等式的近似版本（见断言 12.11），这些恒等式此前曾用于将多线性映射从多线性簇上延拓出去。

We 请注意，以上三个步骤都大量使用了代数正则性方法 e.

最后，我们在第13节中将所有内容整合起来。

最后一章讨论应用。它包括第14节，我们在其中发展近三线性映射的等分布理论，并以双线性 Bogolyubov 论证为基础；第15节，其中证明定理 1.2；以及第16节，专门讨论定理 1.3。一旦建立了所需的等分布理论，推导出第一个逆定理便只需标准论证，以及 Green 和 Tao 所用的一种对称性论证，其运用方式大体上是经典的。对于第二个逆定理，由于低特征，情况更加微妙；较低指数的子群层层嵌套又使问题进一步复杂化，导致对三次函数导数的描述颇为繁复（定理 A.7）。这也使得对称性论证更加复杂（命题 16.5）。

致谢。 本研究得到塞尔维亚共和国科学、技术发展与创新部通过塞尔维亚科学与艺术学院数学研究所的支持，并得到塞尔维亚共和国科学基金第 11143 号资助项目 高阶近似代数结构：理论、定量方面及应用 - A-PLUS 的支持。

第 1 章：预备知识与工具

本章汇集本文中所需的重要工具和经常使用的辅助事实。首先，我们从“近似线性代数”开始，将各种线性代数概念推广到一般阿贝尔群。核心对象是 Bohr 集和陪集广义等差数列，它们充当子空间的近似版本；此外还有 Freiman 映射和 E-同态，它们推广了线性映射。该部分结合了经典结果与加法组合学理论、加法组合学中一些较新的重要结果、关于一般阿贝尔群的早期研究，以及一些新的材料。其次，我们讨论代数正则性方法，该方法此前已在 [49] 中的有限阿贝尔群背景下被引入。最后，我们在小倍增集合中证明一个抽象的 Balog-Szemerédi-Gowers 定理。最后一个定理源自 [50] ，并且是证明 $U^4(\mathbb{F}_p^n)$ 范数准多项式界时所采用的关键新要素之一。

一般记号。 我们将单位圆盘记为 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$。我们使用标准的期望记号 $\mathbb{E}_{x \in X}$ 作为平均值 $\frac{1}{|X|}\sum_{x \in X}$的简写；在不会引起混淆时，直接写作 $\mathbb{E}_x$。长度为 m 的序列通常记作 $(x_1, \dots, x_m)$，而我们将其写作 $x_{[m]}$；对于 $I \subset [m]$，我们用 x_I 表示指标属于 I的子序列。乘积也采用同样的记号：$G_{[k]}$ 表示$\prod_{i \in [k]} G_i$ 和 $G_I = \prod_{i \in I} G_i$。给定集合 $A \subseteq G_1 \times G_2$，我们将由 x指标化的列 记为 $A_{x\bullet}$，即 $\{y \in G_2 : (x, y) \in A\}$；类似地，我们将由 y指标化的行 记为 $A_{\bullet y} = \{x \in G_1 : (x, y) \in A\}$。

在本文的某些部分，我们使用非标准的渐近记号，将**C** （以及**c**）作为正数常量的占位符，其具体数值并不重要。例如，

$$(\forall x, y > 1)\left(x \geq \mathbf{C}y^{\mathbf{C}} \implies x \geq 100y^2 \log y\right)$$

是.....的简写

$$(\exists C_1, C_2 > 0)(\forall x, y > 1)\left(x \geq C_1 y^{C_2} \implies x \geq 100y^2 \log y\right).$$

我们用**C** 和**c**分别表示足够大的正数常量和足够小的正数常量，尽管从形式逻辑上看，它们是等价的。

§2 近似线性代数

本节将建立在任意阿贝尔群中处理近似子群所需的工具。众所周知，Bohr 集和陪集广义等差数列是这类对象中特别有用的一类。此外，我们还将介绍线性映射的近似版本，即 Freiman 和E-同态。我们首先用一个小节给出主要定义，其中大多数都是标准定义。随后还有五个小节，分别讨论 Bohr 集理论、陪集广义等差数列、Freiman 定理的变体、格理论，最后讨论 Freiman 和 E-同态。

2.1. 基本定义

特征与 Bohr 集。令 G 为有限阿贝尔群。我们将大量运用有限阿贝尔群上的傅里叶分析。下面我们以一种明确的方式来看待对偶群。具体而言，根据有限生成阿贝尔群基本定理，我们可以假设 G 具有如下形式$G = \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/q_2\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/q_d\mathbb{Z}$，其中 q_1、.....、 q_d为自然数，且满足 $q_1|q_2|\ldots|q_k$。 G 的对偶群 G，记作 G，是由 G的特征构成的群，它们是从 G 到圆群 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$的同态。特征的加法在 G上诱导出群结构。就我们的目的而言， G 可以显式地写成如下形式。对偶群 G 同样具有结构 $\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/q_2\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/q_d\mathbb{Z}$。要看出这一点，请注意，对每个 $\chi \in G$，都存在唯一的元素 $\chi_i \in \mathbb{Z}/q_i\mathbb{Z}$ ，对每个 $i \in [d]$，使得

$$\chi(x) = \sum_{i\in[d]} \frac{|\chi_i x_i|_{q_i}}{q_i} + \mathbb{Z},$$

其中 $|\cdot|_q$: $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \{0, 1, \ldots, q-1\} \subseteq \mathbb{Z}$ 是一个映射，它将每个剩余类映射到$\{0, 1, \ldots, q-1\}$ 中唯一一个投影到该剩余类的整数。

记 $\mathbf{e}(t) = \exp(2\pi i t)$ 表示 $t \in \mathbb{R}$。对于 $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ，令 $\|x\|_{\mathbb{T}}$ 为满足$x \in \{-d, d\} + \mathbb{Z}$的元素 $d \in [0, 1/2]$ ，即到 0 的距离。现在我们可以定义 Bohr 集。

ˆ定义 2.1（Bohr 集）。 给定特征集合 $\Gamma \subseteq G$ 和映射 $\rho : \Gamma \to [0, 1)$，我们将频率集为Γ、半径函数为半径函数 ρ的 Bohr 集定义为 $B(\Gamma; \rho) = \{x \in G: (\forall \chi \in \Gamma)\|\chi(x)\|_{\mathbb{T}} \leq \rho(\chi)\}$。通常，函数 ρ 为常数，此时我们直接称 ρ 为半径。我们称 Γ 的大小为 Bohr 集的余维 。

大多数时候，我们会考虑常数半径的 Bohr 集，因为 $B(\Gamma; \rho)$ 包含 $B(\Gamma; \mu)$，其中 $\mu = \min_{\gamma\in\Gamma} \rho(\gamma)$；而我们感兴趣的性质通常可以从更一般的情形 $B(\Gamma; \mu)$ 推导出 $B(\Gamma; \rho)$ 的情形，只有少数例外。

陪集广义等差数列。 陪集广义等差数列由Green和Ruzsa在将Freiman 定理推广到一般阿贝尔群 [28], 时引入；正如他们的定理所证实的那样，从加法组合视角来看，这些对象是对子群（的陪集）的恰当推广。

定义 2.2（陪集广义等差数列）。 阿贝尔群 G中的一个陪集广义等差数列 是形如 $L_1 + \cdots + L_r + H$ 的集合 C ，其中 L_i 是等差数列， $H \leq G$ 是子群。我们称 $L_1 + \cdots + L_r + H$ 为 C 的标准形式 。数 r 称为该陪集广义等差数列的秩 。若陪集广义等差数列 C 满足 $|C| = |L_1|\cdots|L_r||H|$（因此所有 $(r + 1)$-元组的和都互不相同），则称其为真 的；若所有 L_i 均为对称的，即 $L_i = -L_i$，则称 C 为对称 的。我们将等差数列 $L_1, \ldots, L_r$的大小称为 C的长度 ，并将 H称为 C的子群 。

我们将使用同态的近似变体。尽管 Freiman 同态的概念已经相当标准，但我们还需要下文定义的 E-同态。后者是映射

其中允许加性四元组上存在误差（E 表示误差集），但误差受到严格控制。这类映射将在本文后续阶段发挥关键作用。

定义 2.3（Freiman 和 E-同态）。设 G 和 H 为阿贝尔群，且 $A \subseteq G$。映射 $\phi\colon A \to H$ 称为 ***Freiman*** 同态，如果对所有满足 $a+b=c+d$ 的 $a,\ b,\ c,\ d \in A$，都有 $\phi(a)+\phi(b)=\phi(c)+\phi(d)$。若 $0 \in A$ 且 $\phi(0)=0$，则称 ϕ 为 Freiman 线性的。

若 $E \subseteq H$，则称 ϕ 为 E-同态，如果对所有满足 $a+b=c+d$ 的$a,\ b,\ c,\ d \in A$，都有 $\phi(a)+\phi(b)-\phi(c)-\phi(d) \in E$。

因此，映射是 Freiman 同态等价于它是 $\{0\}$-同态。为了获得良好的上界，我们需要高效地描述误差集。鉴于此，我们称集合 E 的秩至多为 r，如果存在一个大小为 r 的集合 S，使得 $E=\langle S\rangle_{\{-1,0,1\}}$。

2.2. Bohr 集理论

让我们回顾一下有关 Bohr 集的最基本事实。首先，我们可以轻松估算 Bohr 集的大小。之后，我们将推出更强有力的结果。

^引理 2.4（[61] 中的引理 4.20）。对于 $\Gamma \subseteq G$ 和 $\rho\colon \Gamma \to (0,1)$ 我们有

$$|B(\Gamma;\rho)| \geq \Big(\prod_{\gamma\in\Gamma}\rho(\gamma)\Big)|G|,$$

and

$$|B(\Gamma;2\rho)| \leq 4^{|\Gamma|}|B(\Gamma;\rho)|.$$

第二个不等式在 [61] 中仅针对常数半径的 Bohr 集给出，但同样的覆盖证明也适用于更一般的情况。

接下来，我们证明，Bohr 集中一个非常稠密子集的差集包含该 Bohr 集的一个略微缩小的版本。

引理 2.5。设 $A \subset B(\Gamma;\ \rho)$ 是一个大小至少为 $(1-4^{-k-1})|B(\Gamma;\ \rho)|$ 的集合，其中 k 是 ***Bohr*** 集的余维。那么 $A-A \supseteq B(\Gamma;\ \rho/2)$。

证明。根据前一个引理，$|B(\Gamma;\rho/2)| \geq 4^{-k}|B(\Gamma;\ \rho)|$。令 $x \in B(\Gamma;\rho/2)$ 为任意元素。于是，$|(A-x) \cap B(\Gamma;\ \rho/2)| = |A \cap (x+B(\Gamma;\ \rho/2))| \geq \frac{3}{4}|B(\Gamma;\ \rho/2)|$。特别地，对于 $x=0$ 同样成立，因此我们有

$$\begin{aligned}|A \cap (A-x) \cap B(\Gamma;\rho/2)| &= |B(\Gamma;\rho/2)| - |B(\Gamma;\rho/2) \setminus (A \cup A-x)| \\ &\geq |B(\Gamma;\rho/2)| - |B(\Gamma;\rho/2) \setminus A| - |B(\Gamma;\rho/2) \setminus (A-x)| \geq \frac{1}{2}|B(\Gamma;\rho/2)|.\end{aligned}$$

特别地，$A \cap (A-x) \neq \emptyset$，因此 $x \in A-A$。 □

下一个初等结果告诉我们，特征能够有效地区分群元素 .

引理 2.6. 设 $S \subseteq G$ 是一个大小为 k的集合。那么存在一个 *Bohr* 集 $B = B(\Gamma, 1/10)$ ，其$|\Gamma| \leq O(\log k)$ ，使得对于所有 $s \in S$ ，平移集 $s + B$ 两两不交。换言之，同态$\chi\colon G \to \mathbb{T}^d$，由 $\{\chi_1, \ldots, \chi_d\} = \Gamma$给出，能以$1\ 10$分离 S中的点。

ˆ证明。令 $\chi \in G$ 为均匀随机选取的一个特征。注意，对于任意 $s \neq t$ 属于 G ，我们都有 $\mathbb{P}(\|\chi(s) - \chi(t)\|_{\mathbb{T}} \geq 1/5) = \mathbb{P}(\|\chi(s-t)\|_{\mathbb{T}} \geq 1/5) \geq 1/2$。我们通过迭代来求得 Γ： 初始时令$P = S^{(2)}$ 为 S 中所有有序对构成的集合，并执行 $\log_2 \binom{|S|}{2}$ 步；每一步中，我们均匀随机地选取一个新的特征 χ ，并从 P 中移除被 χ区分开的那些有序对。根据期望的线性性，每次都能将 P 的大小缩小一半，因此该过程会在所声称的步数内终止。

□

弱正则性。处理 Bohr 集时，往往需要转向半径性质良好的 Bohr 集。通常，这是通过寻找所谓的正则 Bohr 集来实现的。不过，本文采用一种更简单的概念，我们称之为弱正则性。若 Bohr 集$B(\Gamma, \rho)$ 是 (η, ε)- 弱正则 的，则

$$|B(\Gamma, \rho + \eta) \setminus B(\Gamma, \rho)| \leq \varepsilon |G|.$$

正如我们很快将看到的，为了对其傅里叶系数作出有用的近似，我们要求 Bohr 集是弱正则的。

关于弱正则性的第一个结果表明，可以使 Bohr 集变为弱正则，而不改变其作为集合的性质。

ˆ**引理 2.7** (弱正则性 I)。设给定大小为 d 的 $\Gamma \subseteq G$ ，且 $\rho\colon \Gamma \to [0,1]$ 为半径函数。设 $\varepsilon > 0$ 且 $\eta \leq \frac{\varepsilon}{8d}$。那么存在 $\rho' \colon \Gamma \to [0,1]$，满足 $\rho'(\chi) \in [\rho(\chi) - \eta, \rho(\chi) + \eta]$，使得 $B(\Gamma, \rho') = B(\Gamma, \rho)$ 并且

$$|B(\Gamma, \rho' + \eta) \setminus B(\Gamma, \rho' - \eta)| \leq \varepsilon |G|.$$

此外，若 $\chi \in \Gamma$ 的阶至少为 $4d\varepsilon^{-1}$，那么我们可以取 $\rho'(\chi) = \rho(\chi)$。

备注。 ε 的自然选择与 B 在 G中的密度相当，约为 ρ^d。注意，我们可以调整半径函数，但 Bohr 集保持不变。

证明。令 $\Gamma = \{\chi_1, \ldots, \chi_d\}$。设 $K = 4d\varepsilon^{-1}$，于是 $\eta \leq \frac{1}{2K}$。令 $I \subseteq [d]$ 为满足$|\mathrm{Im}\ \chi_i| \leq K$的指标 i 的集合。对于每个这样的 i，由于 $\mathrm{Im}\,\chi_i$ 是一个大小为 $s_i \leq K$的循环群，因此存在一个端点为分母是 s_i的有理数的区间 $[a_i, b_i)$，其中包含 $\rho(\chi_i)$，使得 $\|\chi_i(x)\|_{\mathbb{T}} < b_i$ 蕴含 $\|\chi_i(x)\|_{\mathbb{T}} \leq a_i$。我们定义：若 $\rho(\chi_i) \leq a_i + \eta$，则 $\rho'(\chi_i) = \rho(\chi_i) + \eta$ ；若 $\rho(\chi_i) \geq b_i - \eta$，则 $\rho'(\chi_i) = \rho(\chi_i) - \eta$ ；否则， $\rho'(\chi_i) = \rho(\chi_i)$。对于 $i \notin I$，只需令 $\rho'(\chi_i) = \rho(\chi_i)$。另记 $\rho'_i = \rho'(\chi_i)$，以简化记号。

要完成证明，只需有

$$\left|\chi_i^{-1}\Big((\rho_i'-\eta,\rho_i'+\eta]\Big)\right| \le \frac{\varepsilon}{2d}|G| \tag{3}$$

对每个 $i\in[d]$。如果这些不等式全部成立，那么

$$\begin{aligned}|B(\Gamma,\rho'+\eta)\setminus B(\Gamma,\rho'-\eta)| &\le \sum_{i\in[d]}|B(\Gamma\setminus\{\chi_i\},\rho'|_{\Gamma\setminus\{\chi_i\}}+\eta)\cap\{x\in G:|\chi_i(x)|\in(\rho_i'-\eta,\rho_i'+\eta]\}|\\ &\le \sum_{i\in[d]}|\{x\in G:|\chi_i(x)|\in(\rho_i'-\eta,\rho_i'+\eta]\}|\\ &\le \varepsilon|G|.\end{aligned}$$

假设对某个 $i\in[d]$，不等式 (3) 不成立。如果恰好 $|\mathrm{Im}\ \chi_i|>K$，由于 $\mathrm{Im}\,\chi_i$ 是 $\mathbb{T}$ 的循环子群，且 $2\eta K<1$，我们至少得到 K 个 2η-分离的元素 t_1、……、t_K，它们属于 $\mathrm{Im}\,\chi_i$，因此 $|G|\ge\sum_{j\in[K]}|\chi_i^{-1}(t_j-\eta,\ t_i+\eta)|$，这就产生了矛盾。因此，如果上面的不等式不成立，就有 $|\mathrm{Im}\ \chi_i|\le K$。然而，根据 ρ' 的选取，事实上我们有 $\chi_i^{-1}\Big((\rho_i'-\eta,\ \rho_i'+\eta]\Big)=\emptyset$，所以证明完成。

□

如果我们坚持使用常数半径，那么就无法再保证 Bohr 集本身保持不变，但仍然可以得到类似的结果。证明非常相似。

引理 2.8 (弱正则性 II)。 给定大小为 d 的 $\Gamma\subseteq G$，并令 $\rho>0$ 为半径。令 $\varepsilon>0$，并令 $\eta\le\left(\frac{\varepsilon}{8d}\right)^2$。那么存在 $\rho'\in[\rho-\eta,\rho+\eta]$，使得

$$|B(\Gamma,\rho'+\eta)\setminus B(\Gamma,\rho'-\eta)|\le\varepsilon|G|.$$

此外，若 $\chi\in\Gamma$ 在 $\mathbb{T}$ 中的像至少有 $4d\varepsilon^{-1}$ 个元素，则我们可以取 $\rho'(\chi)=\rho(\chi)$。

证明。令 $\Gamma=\{\chi_1,\dots,\chi_d\}$。设 $K=4d\varepsilon^{-1}$。根据假设，$\eta\le\frac{1}{4K^2}$。令 $I\subseteq[d]$ 为满足 $|\mathrm{Im}\ \chi_i|\le K$ 的指标集合 i。对于每个这样的 i，由于 $\mathrm{Im}\,\chi_i$ 是一个大小为 $s_i\le K$ 的循环群，我们有一个由分母为 s_i 的有理数界定的区间 $[a_i,b_i)$，其中包含 ρ，使得 $\|\chi_i(x)\|_{\mathbb{T}}<b_i$ 蕴含 $\|\chi_i(x)\|_{\mathbb{T}}\le a_i$。我们设 $a=\max_{i\in I}a_i$ 和 $b=\min_{i\in I}b_i$。我们如下定义 ρ'

$$\rho'=\begin{cases}a+\eta, & \text{if } \rho<a+\eta\\ b-\eta, & \text{if } \rho>b-\eta\\ \rho, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

注意，$b\ge a+\frac{1}{K^2}$，因为 a 和 b 是不同的有理数，且分母均属于 $s_1,\dots,s_d$。

与前面的证明一样，只需满足

$$\left|\chi_i^{-1}\Big((\rho'-\eta,\rho'+\eta]\Big)\right|\le\frac{\varepsilon}{2d}|G| \tag{4}$$

对每个 $i \in [d]$ 都成立。若这些不等式全部成立，则

$$\begin{aligned}|B(\Gamma, \rho' + \eta) \setminus B(\Gamma, \rho' - \eta)| \leq & \sum_{i \in [d]} |B(\Gamma \setminus \{\chi_i\}, \rho' + \eta) \cap \{x \in G : |\chi_i(x)| \in (\rho' - \eta, \rho' + \eta]\}| \\ \leq & \sum_{i \in [d]} |\{x \in G : |\chi_i(x)| \in (\rho' - \eta, \rho' + \eta]\}| \\ \leq & \varepsilon |G|.\end{aligned}$$

假设对于某个 $i \in [d]$，不等式 (4) 不成立。如果碰巧 $|\mathrm{Im}\, \chi_i| > K$，由于 $\mathrm{Im}\ \chi_i$ 是群 $\mathbb{T}$ 的循环子群，我们可以在 $\mathrm{Im}\ \chi_i$ 中找到至少 K 2η 个两两间隔开的元素 $t_1, \ldots\ldots, t_{2K}$，从而得到 $|G| \geq \sum_{j \in [K]} |\chi_i^{-1}(t_j - \eta,\ t_i + \eta)|$，这与假设矛盾。因此，如果上述不等式不成立，就有 $|\mathrm{Im}\ \chi_i| \leq K$。然而，根据 ρ' 的选取，实际上我们有 $\chi_i^{-1}\Big((\rho' - \eta,\ \rho' + \eta]\Big) = \emptyset$，故证明完毕。

□

Bohr 集的大谱。现在我们将更详细地讨论 Bohr 集的大小。在本文中，我们常常需要比引理 2.4 所提供的信息更精确的结果。为此，我们推导 Bohr 集示性函数的傅里叶变换取值的一个近似。零特征对应的取值将给出 Bohr 集大小的近似。

对于 $\rho, \eta > 0$，我们引入一个辅助凸起函数 $\mathsf{b}_{\rho,\eta}\colon \mathbb{T} \to [0,1]$，定义如下

$$\mathsf{b}_{\rho,\eta}(x) = \begin{cases} 1, & \text{when } x \in [-\rho, \rho] \\ \frac{\rho + \eta - \|x\|_{\mathbb{T}}}{\eta}, & \text{when } x \in [-\rho - \eta, -\rho] \cup [\rho, \rho + \eta] \\ 0, & \text{when } x \notin [-\rho - \eta, \rho + \eta] \end{cases}, \tag{5}$$

它等于卷积 $\eta^{-1} I * J(x)$，其中 I和 J分别是区间$[-\rho - \eta/2, \rho + \eta/2]$ 和 $[-\eta/2, \eta/2]$的示性函数。凸起函数的傅里叶变换性质非常良好。

事实 2.9 （ [49]中的断言 24 和 25）。 对于任意 $\xi \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，我们有 $|\widehat{\mathsf{b}_{\rho,\eta}}(\xi)| \leq \eta^{-1}/|\xi|^2$。此外，如果 $S \subseteq \mathbb{Z}$ 是任意一个包含区间 $[-L, L]$ 的集合，那么

$$\left| \mathsf{b}_{\rho,\eta}(x) - \sum_{\xi \in S} \widehat{\mathsf{b}_{\rho,\eta}}(\xi)\, \mathrm{e}(\xi x) \right| \leq 2\eta^{-1}/L$$

对所有 $x \in \mathbb{T}$均成立。

现在我们可以陈述关于 Bohr 集傅里叶系数近似的结果。这次我们对 Bohr 集采用略有不同的记号，即对于 γ_1、……、 $\gamma_r \in G$ 和 ρ_1、……、 $\rho_r > 0$，我们将满足 $\|\gamma_i(x)\|_{\mathbb{T}} \leq \rho_i$ 的所有 x 组成的集合记为$B(\gamma_{[r]},\ \rho_{[r]})$。这与函数记法密切相关，但这里采用的记号更为方便，因为我们将关注特征的消失线性组合。

命题 2.10 (Bohr 集的谱)。 存在一个绝对常数$\mathsf{C}_{\mathrm{spec}}$，具有以下性质。设 $r \in \mathbb{N}$，且 η、$\varepsilon > 0$。那么，存在一个正整数 $K \le \mathsf{C}_{\mathrm{spec}} r \varepsilon^{-1} \eta^{-1}$，使得以下结论成立。

ˆ设 γ_1、…、$\gamma_r \in G$ 以及 ρ_1、…、$\rho_r > 0$ 满足

$$|B(\gamma_{[r]}; (\rho_i + \eta)_{i\in[r]}) \setminus B(\gamma_{[r]}; \rho_{[r]})| \le \varepsilon |G|/2. \tag{6}$$

ˆ那么，对于任意 $\tau \in G$ 以及任意 L_1、…、$L_r \ge K$

$$\Big| \widehat{\mathbb{1}_{B(\gamma_{[r]};\rho_{[r]})}}(\tau) - \sum_{\substack{\lambda_1\in[-L_1,L_1],\dots,\\ \lambda_r\in[-L_r,L_r]}} \mathbb{1}\Big(\sum_{i\in[r]} \lambda_i\gamma_i = \tau\Big) \prod_{i\in[r]} \widehat{\mathsf{b}_{\rho_i,\eta}}(\lambda_i) \Big| \le \varepsilon.$$

证明。 记 b_i 为凸起函数 $\mathsf{b}_{\rho_i,\,\eta}$。根据 Bohr 集的定义，乘积

$$\mathsf{b}_1(\gamma_1(x)) \cdots \mathsf{b}_r(\gamma_r(x))$$

当 $x \in B(\gamma_{[r]};\rho_{[r]})$ 时为 1，并在 $x \notin B(\gamma_{[r]}; (\rho_i+\eta)_{i\in[r]})$ 时为零。由假设 (6) 可得

$$\Big| \widehat{\mathbb{1}_{B(\gamma_{[r]};\rho_{[r]})}}(\tau) - \mathop{\mathbb{E}}_{x\in G} \mathsf{b}_1(\gamma_1(x)) \cdots \mathsf{b}_r(\gamma_r(x))\, \mathrm{e}(-\tau(x)) \Big| \le \frac{|B(\gamma_{[r]}; (\rho_i+\eta)_{i\in[r]}) \setminus B(\gamma_{[r]};\rho_{[r]})|}{|G|} \le \varepsilon/2.$$

我们使用单位圆 $\mathbb{T}$ 上的傅里叶分析来估计 $\mathbb{E}_{x\in G} \mathsf{b}_1(\gamma_1(x)) \cdots \mathsf{b}_r(\gamma_r(x))\, \mathrm{e}(-\tau(x))$。令 $K = 4e\eta^{-1}\varepsilon^{-1}r$，其选取满足 $\frac{2\eta^{-1}}{K} \le \frac{\varepsilon}{2er}$。对于每个 $i \in [r]$，令 $s_i(x) = \sum_{\xi\in[-L_i,L_i]} \widehat{\mathsf{b}_i}(\xi)\, \mathrm{e}(\xi x)$。由事实 2.9 可得 $\|\mathsf{b}_i - s_i\|_{L^\infty} \le 2\eta^{-1}/L_i \le 2\eta^{-1}/K$。特别地，$\|s_i\|_{L^\infty} \le 1 + 2\eta^{-1}/K$。因此，由三角不等式

$$\begin{aligned}
&\Big| \mathop{\mathbb{E}}_{x\in G} \mathsf{b}_1(\gamma_1(x)) \cdots \mathsf{b}_r(\gamma_r(x))\, \mathrm{e}(-\tau(x)) - \mathop{\mathbb{E}}_{x\in G} s_1(\gamma_1(x)) \cdots s_r(\gamma_r(x))\, \mathrm{e}(-\tau(x)) \Big| \\
&= \Big| \sum_{i\in[r]} \mathop{\mathbb{E}}_{x\in G} \mathsf{b}_1(\gamma_1(x)) \cdots \mathsf{b}_{i-1}(\gamma_{i-1}(x)) \Big(\mathsf{b}_i(\gamma_i(x)) - s_i(\gamma_i(x))\Big) s_{i+1}(\gamma_{i+1}(x)) \cdots s_r(\gamma_r(x))\, \mathrm{e}(-\tau(x)) \Big| \\
&\le \sum_{i\in[r]} \|\mathsf{b}_1\|_{L^\infty} \cdots \|\mathsf{b}_{i-1}\|_{L^\infty} \|\mathsf{b}_i - s_i\|_{L^\infty} \|s_{i+1}\|_{L^\infty} \cdots \|s_r\|_{L^\infty} \\
&\le \sum_{i\in[r]} \frac{2\eta^{-1}}{K} \Big(1 + \frac{2\eta^{-1}}{K}\Big)^{r-i} \le r \frac{\varepsilon}{2er} (1 + 1/r)^r \le \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

因此，我们得出结论：

$$\Big| \widehat{\mathbb{1}_{B(\gamma_{[r]};\rho_{[r]})}}(\tau) - \mathop{\mathbb{E}}_{x\in G} s_1(\gamma_1(x)) \cdots s_r(\gamma_r(x))\, \mathrm{e}(-\tau(x)) \Big| \le \varepsilon,$$

接下来只需将近似函数改写为所需的形式。展开函数s_i的定义，可得

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G} s_1(\gamma_1(x)) \cdots s_r(\gamma_r(x))\, \mathrm{e}(-\tau(x)) = \mathop{\mathbb{E}}_{x\in G} \prod_{i\in[r]} \Big(\sum_{\xi_i\in[-L_i,L_i]} \widehat{\mathsf{b}_i}(\xi_i)\, \mathrm{e}(\xi_i\gamma_i(x)) \Big) \mathrm{e}(-\tau(x))$$

$$= \sum_{\substack{\xi_1\in[-L_1,L_1],\dots,\\ \xi_r\in[-L_r,L_r]}} \Big(\prod_{i\in[r]} \widehat{\mathsf{b}_i}(\xi_i)\Big) \mathop{\mathbb{E}}_{x\in G} \mathrm{e}\Big(\sum_{i\in[r]} \xi_i\gamma_i(x) - \tau(x)\Big)$$

$$= \sum_{\substack{\xi_1\in[-L_1,L_1],\dots,\\ \xi_r\in[-L_r,L_r]}} \Big(\prod_{i\in[r]} \widehat{\mathsf{b}_i}(\xi_i)\Big) \mathbb{1}\Big(\sum_{i\in[r]} \xi_i\gamma_i = \tau\Big). \qquad \square$$

本文后文将需要考察由 Bohr 集生成的子群。不出所料，这类子群可以用定义 Bohr 集的特征来描述。

命题 2.11. 设 $B = B(\Gamma,\rho)$ 是一个常数半径为 ρ 的 *Bohr* 集，且 $G' \le G$ 是由 B生成的子群。那么存在特征 $\chi_1,\dots,\chi_r \in \langle\Gamma\rangle_K$，其中 $r \le O(|\Gamma|\log\rho^{-1})$ 且$K \le (\rho/2)^{-O(d)}$，使得 $|\mathrm{Im}\,\chi_i| \le \rho^{-d}$ 且 $B' = \cap_{i\in[r]} \ker\chi_i$。

证明. 设 $d = |\Gamma|$。由有限阿贝尔群分类，存在一个单同态$\chi : G/G' \to \mathbb{T}^m$，其中 m 是 G/G' 的秩，因此 $m \le O(\log(|G|/|G'|))$。注意，每个分量 χ_i 都可以延拓为 G 上的一个特征，该特征在 G' 上为零，而且事实上 $G' = \cap_{i\in[m]} \ker\chi_i$。显然，由引理 2.4，$|\mathrm{Im}\,\chi_i| \le |G|/|G'| \le \rho^{-d}$。还需证明每个 χ_i 都是 Γ中元素的线性组合。

我们的目标是应用命题 2.10。不过，我们首先需要找到一个弱正则 Bohr 集。为此，令 $\varepsilon = \frac{1}{4}2^{-d}\rho^d$并设 $\eta = \frac{\varepsilon^2}{2^8 d^2}$。将引理 2.8 应用于 Bohr 集 $B(\Gamma,\ \rho/2)$，其中 η。因此，存在 $\rho' \in [\rho/2-\eta, \rho/2+\eta]$ 使得 $|B(\Gamma,\ \rho'+\eta) \setminus B(\Gamma,\ \rho')| \le \frac{\varepsilon}{2}|G|$。

令 $B' = B(\Gamma,\ \rho/2)$，并任取 χ_i。特别地， χ_i 在 B' 上为零，因此 $|\widehat{\mathbb{1}_{B'}}(\chi_i)| = |B'|/|G| \ge 2^{-d}\rho^d = 4\varepsilon$。由于 B' 是弱正则的，命题 2.10 给出了一个量 $K \le O(d\varepsilon^{-1}\eta^{-1})$，使得当 $\chi_i \notin \langle\Gamma\rangle_{[-K,K]}$ 时， $|\widehat{\mathbb{1}_{B'}}(\chi_i)| \le \varepsilon$。但是 $|\widehat{\mathbb{1}_{B'}}(\chi_i)| \ge 4\varepsilon$，这意味着 $\chi_i \in \langle\Gamma\rangle_{[-K,K]}$，如 desired。 $\square$

现在我们回顾 [49], 中的一个结果，它推广了这样一个事实：向量空间中两个子空间之和的对偶等于它们的对偶的交集。对于阿贝尔群中的元素集合 $\Gamma = \{\gamma_1,\dots,\gamma_k\}$ 和整数集合 S，我们用 $\langle\Gamma\rangle_S$ 表示所有线性组合$\lambda_1\gamma_1 + \cdots + \lambda_k\gamma_k$构成的集合，其中 λ_1、.....、 $\lambda_k \in S$。下一个定理中的 Bohr 集半径为常数。

定理 2.12 （ [49]中的定理 27）。设 Γ_1、 $\Gamma_2 \subset G$ 和 ρ_1、 $\rho_2 \in (0,\ 1)$。那么存在一个正整数 $R \le (2\rho_1^{-1})^{O(|\Gamma_1|)} + (2\rho_2^{-1})^{O(|\Gamma_2|)}$, 使得

$$B(\langle\Gamma_1\rangle_{[-R,R]} \cap \langle\Gamma_2\rangle_{[-R,R]}, 1/4) \subseteq B(\Gamma_1,\rho_1) + B(\Gamma_2,\rho_2).$$

作为该定理的一个特殊情形，我们得出 $B(\langle\Gamma\rangle_{[-R,R]},\ 1/4) \subseteq B(\Gamma,\ \rho)$，这使我们能够用 $1/4$ 替代半径，代价是使用频率集的张成空间。

在本小节中，我们推导了若干关于陪集广义等差数列的结果。令 $C = [-L_1, L_1] \cdot v_1 + \cdots + [-L_d, L_d] \cdot v_d + H$ 是秩为 d、具有标准形式的真对称陪集等差数列。我们称 C' 为一种收缩，如果 C，且 $C' = [-L_1', L_1'] \cdot v_1 + \cdots + [-L_d', L_d'] \cdot v_d + H$ 对某个 $L_i' \leq L_i$ 成立。此外，我们用 $\varepsilon \cdot C$ 表示 C' 的选取，其中 $L_i' = \lfloor \varepsilon L_i \rfloor$。

获得陪集广义等差数列的一种方法是通过 Bohr 集。这是一个标准事实，参见 [61] 中的定理 4.22。本文需要一个稍强的事实：不同半径的 Bohr 集可以与同一个陪集广义等差数列的收缩交织在一起，因此我们将这一结果推迟到格理论小节，因为它更适合放在那里。现在我们引用 [49]中的相关事实：陪集广义等差数列包含较大的 Bohr 集。

命题 2.13 （ [49]中的命题 28）。 设 C 是群 G中的一个秩为 r 、密度为 α 的对称陪集广义等差数列。那么存在一个正整数 $R \leq (r \log(\alpha^{-1}))^{O(1)}$ 以及特征 $\chi_1, \ldots, \chi_R \in \hat{G}$，使得 $B(\chi_1, \ldots, \chi_R; 1/(4R)) \subseteq C$。

如果对于任意满足 a、$b \in A$ 的元素， $a - b \in B$ 都蕴含 $a - b \in A$，我们就称 $A \subseteq B$ 是 B 的 ***Freiman*** 子群。 [49]中的另一个引理表明，陪集广义等差数列 C 的 Freiman 子群与 C密切相关。

引理 2.14 （ [49]中的引理 8）。 设 G 是一个有限阿贝尔群。设 $C = [-N_1, N_1] \cdot v_1 + \cdots + [-N_d, N_d] \cdot v_d + H$ 是其标准形式下秩为 d的真对称陪集广义等差数列。设 $A \subseteq C$ 是 G中一个大小为 $|A| \geq \alpha |C|$ 的 ***Freiman*** 子群。那么 A 包含某个 $[-M_1, M_1] \cdot \ell_1 v_1 + \cdots + [-M_d, M_d] \cdot \ell_d v_d + H'$，其中正整数为 $\ell_1, \ldots, \ell_d \leq 20\alpha^{-1}$, $M_i = \lfloor N_i / \ell_i \rfloor$，且子群 $H' \leq H$ 的大小为 $|H'| \geq \alpha |H|$。

在某处，我们将需要一个关于陪集广义等差数列的铺砌结果，它推广了群可以划分为某个给定子群的陪集这一事实。下面给出一个简单的引理来实现这一点。

引理 2.15。 设 $H_0 \leq G$ 和 $C = a + [0, N_1 - 1] \cdot v_1 + \cdots + [0, N_d - 1] \cdot v_d + H_0$ 是一个真陪集广义等差数列。设 $\eta > 0$ 和 $S = [0, N_1' - 1] \cdot \ell_1 v_1 + \cdots + [0, N_d' - 1] \cdot \ell_d v_d + H_0$ 是另一个陪集广义等差数列。若对每个 $i \in [d]$，都有 $\ell_i N_i' \leq \frac{\eta}{d} N_i$ 或 $N_i' = 1$，则存在一个平移集 $T \subseteq G$，它是秩为 d的广义等差数列，使得 $S + T \subseteq C$、 $|S + T| = |S||T|$ 和 $|S + T| \geq (1 - \eta)|C|$。

对于集合的情形，我们也使用求和记号： $\sum_{i \in I} A_i$ 表示所有满足 $a_i \in A_i$ 的和 $\sum_{i \in I} a_i$ 所构成的集合。

证明。 令 I为所有满足 $N_i' > 1$ 的 $i \in [d]$ 所组成的集合，并令 $T_0 = a + \sum_{i \in I} [0, \ell_i - 1] \cdot v_i$。 注意，当$i \notin I$ 时，我们有 $N_i' = 1$，因此 v_i 不会影响 S 的定义，所以在这种情况下我们可以假设 $\ell_i = 1$。于是 $T_0 + S$ 等于 $a + [0, \ell_1 N_1' - 1] \cdot v_1 + \cdots + [0, \ell_d N_d' - 1] \cdot v_d + H_0$ （注意，当 $i \notin I$ 时， $\ell_i N_i' - 1 = 0$ ）。令 $k_i = \lfloor N_i / (\ell_i N_i') \rfloor$，其中 $i \in I$，并令 $T = T_0 + \sum_{i \in I} \{0, \ell_i N_i', \ldots, (k_i - 1)\ell_i N_i'\} \cdot v_i + \sum_{i \notin I} \{0, 1, \ldots, N_i - 1\} \cdot v_i$。 显然， $S + T \subseteq C$ 且 $|S + T| = |S||T|$。另一方面， $C \setminus (S + T)$ 由线性

组合 $a+\sum_{i\in[d]}\lambda_i v_i+h$ 构成，其中对于某个 $i\in I$ 和 $h\in H_0$，有 $\lambda_i\geq k_i\ell_i N_i'$。这类线性组合的总数至多为

$$|H_0|\sum_{i\in I}(N_i-k_i\ell_i N_i')\prod_{j\neq i}N_j\leq\sum_{i\in I}\frac{N_i-k_i\ell_i N_i'}{N_i}|C|\leq\sum_{i\in I}\frac{\ell_i N_i'}{N_i}|C|\leq\eta|C|.$$ □

一个简单的推论使我们可以转而考虑对称陪集广义等差数列，其迭代和集包含于给定集合的某个平移中。

推论 2.16. 设 C 是秩为 d 的真陪集广义等差数列，$X\subseteq C$ 是一个大小为 $|X|\geq\alpha|C|$ 的集合。设 k 是一个正整数。则存在一个秩为 d、大小为 $|S|\geq(\alpha/100kd)^d|C|$ 的对称真广义等差数列 S，以及一个元素 $t\in G$，使得 $|(t+S)\cap X|\geq\frac{\alpha}{2}|X|$ 且 $t+kS\subseteq C$。 –

证明。设 $a+[0,N_1-1]\cdot v_1+\cdots+[0,N_d-1]\cdot v_d+H_0$ 是 C 的标准形式。对每个 $i\in[d]$，当 $N_i\geq 200kd\alpha^{-1}$ 时定义 $N_i'=\frac{\alpha}{100kd}N_i$，否则定义 $N_i'=0$。定义 $S=[-N_1',N_1']\cdot v_1+\cdots+[-N_d',N_d']\cdot v_d+H_0$，它是对称且真。

令 $C'=a+[kN_1',N_1-1-kN_1']\cdot v_1+\cdots+[kN_d',N_d-1-kN_d']\cdot v_d+H_0$，它是 C 的略微缩小的版本，并满足 $C'+kS\subseteq C$。注意到 $|C\setminus C'|\leq\sum_{i\in[d]}2kN_i'\prod_{j\in[d]\setminus\{i\}}N_j|H_0|\leq 2k\sum_{i\in[d]}\frac{N_i'}{N_i}|C|\leq\frac{\alpha}{4}|C|$，因此得到 $|X\cap C'|\geq\frac{3\alpha}{4}|C|$。 —

应用引理 2.15，找到一组平移集 $T\subseteq G$，使得 $S+T\subseteq C'$、$|S+T|=|S||T|$ 且 $|S+T|\geq(1-\alpha/4)|C'|$。因此，存在一个平移集 $t+S\subseteq C'$，使得 $|X\cap(t+S)|\geq\frac{\alpha}{2}|C|$，如所要求。 –

□

Nex这三个事实是 [49 中出现的陪集广义等差数列的其他基本性质].

命题 2.17 (中的推论 13 [49])。设 G 是一个有限阿贝尔群，含有子群 H。那么存在一个秩至多为 $\log_2|H|$、大小至少为 $|H|^{-2}|G|$ 的陪集广义等差数列 C，使得 $|C+H|=|C||H|$。

定理 2.18 (阿贝尔群中的部分射影性，中的定理 9 [49])。设 G 和 H 是有限阿贝尔群。设 $K\leq H$ 是一个子群。假设 $\phi\colon G\to H/K$ 是一个同态。设 $s\geq 2$。那么存在一个秩至多为 $\log_2|K|$、大小为 $|C|\geq s^{-\log_2|K|}|G|$ 的真陪集广义等差数列 $C\subseteq G$，以及一个 ***Freiman*** s-同态 $\psi\colon C\to H$，使得对所有 $x\in C$，都有 $\phi(x)=\psi(x)+K$。

命题 2.19 ([49]中的推论 12**)**。设 G 和 H 是有限阿贝尔群，且 $C\subseteq G$ 是一个真陪集广义等差数列，其标准形式为 $C=P+K$，其中 $P=v_0+[0,N_1-1]\cdot v_1+\cdots+[0,N_r-1]\cdot v_r$ 且 $K\leq G$。设 $\phi\colon C\to H$ 是一个 ***Freiman*** 同态，满足 $|\phi(C)|\geq\alpha|C|$。那么，存在一个秩为 $\log_2\alpha^{-1}$、大小为 $\alpha^2|K|$ 的更大的真陪集广义等差数列 $D\subseteq K$，一个正整数 $m\leq(8r\alpha^{-1})^r$，以及一个将 $P=P_1\cup\ldots\cup P_m$ 划分为真广义等差数列的划分，使得 ϕ 在每个形如 $k+P_i+D$（其中 $i\in[m]$ 且 $k\in K$）的真陪集广义等差数列上都是单射。

现在我们证明关于陪集广义等差数列上的 Freiman 同态的一些进一步性质。首先，我们证明取值于单位圆的非准随机 Freiman 同态几乎是常值的。其次，我们证明更一般地，这类映射来自特征。回顾一下指数和的标准估计。

事实 2.20. 对于所有 $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Big|\Big(\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}(k\alpha)\Big)\Big| \leq \min\Big\{N, \frac{1}{\|\alpha\|_{\mathbb{T}}}\Big\}.$$

引理 2.21（陪集广义等差数列上的偏置形式）。设 $\phi\colon P+H \to \mathbb{T}$ 是秩为 r 的对称真陪集进程上的 *Freiman* 同态。假设 $\Big|\sum_{x\in P+H}(x)\,\mathrm{e}(\phi(x))\Big| \geq \delta|P+H|$。那么存在一个 P'，它是 P 的收缩，大小为 $|P'|\geq \delta\,(10^5 r)^{-r}|P|$，并具有如下性质。

给定 $\varepsilon > 0$。那么对于 $x \in \varepsilon\cdot P'+H$，有 $\|\phi(x) - \phi(0)\|_{\mathbb{T}} < \varepsilon$ 成立，其中 $\varepsilon\cdot P'$ 是进一步收缩了 ε 倍的结果。

证明。不失一般性，ϕ 是 Freiman 线性的，且 $P = [-L_1, L_1]\cdot a_1 + \cdots + [-L_r, L_r]\cdot a_r$。那么，对于 $\alpha_i = \phi(a_i)$，我们有

$$\Big|\Big(\sum_{x\in H} \mathrm{e}(\phi(x))\Big)\prod_{i\in[r]}\Big(\sum_{k=-L_i}^{L_i} \mathrm{e}(k\alpha_i)\Big)\Big| \geq \delta|H|\prod_{i\in[r]}(2L_i+1).$$

根据事实 2.20，$\prod_{i\in[r]} \max\{\|\alpha_i\|_{\mathbb{T}}, 1/(2L_i+1)\} \leq \delta^{-1}10^r/|P|$ 以及 $\phi = 0$ 在 H 上。令 $L_i' = \min\Big\{\Big\lfloor \frac{1}{1000r\|\alpha_i\|_{\mathbb{T}}}\Big\rfloor,\ L_i\Big\}$ 以及 $P' = [-L_1', L_1']\cdot a_1 + \cdots + [-L_r', L_r']\cdot a_r$。不难验证，$P'$ 具有所需的性质。□

现在我们证明陪集广义等差数列上的 Freiman 同态的近似性质。

引理2.22。设 $P+H$ 是一个秩为 r、密度为 c的对称真陪集进程。设$\psi\colon P+H \to \mathbb{T}^d$ 是一个 *Freiman* 同态。则存在一个 P'，它是 P 的收缩，大小为$|P'|\geq c^2(10^5 r)^{-r}|P|$，并具有以下性质。

设 $\varepsilon > 0$。那么存在一个同态 $\tilde{\psi}\colon G \to \mathbb{T}^d$ 以及一个元素 $u \in \mathbb{T}^d$，使得对所有 $x \in \varepsilon\cdot P'+H$，$\|\psi(x) - \psi(x) - u\|_\infty < \varepsilon$ 成立。

证明。只需证明断言在 $d=1$ 的情形下成立。考虑辅助函数 $f\colon G\to\mathbb{C}$，定义为 $f(x) = \mathbb{1}_{P+H}(x)\,\mathrm{e}(\psi(x))$。那么，由于 ψ 是一个 Freiman 同态

$$\|f\|_{\mathrm{U}^2}^4 = \mathop{\mathbb{E}}_{x,a,b} \partial_{a,b}\mathbb{1}_{P+H}(x) \geq c^4.$$

由 U^2 逆定理可知，存在一个同态 $\tilde{\psi}\colon G\to\mathbb{T}$，使得

$$\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{x} \mathbb{1}_{P+H}(x)\,\mathrm{e}(\psi(x) - \tilde{\psi}(x))\Big| \geq c^2.$$

由引理 2.21 即得。□

2.4. Freiman 定理的变体

本文大量使用了 Sanders 提出的博戈柳博夫-鲁萨引理 [55]。

定理 2.23 (Sanders 的博戈柳博夫-鲁萨引理，中的定理 1.1 [55])。设 G 是一个有限阿贝尔群，且 A、$B \subseteq G$ 是满足 $|A+B| \leq K$ 最小值$\{|A|, |B|\}$ 的子集。那么存在一个对称真陪集进程 $C \subseteq A-A+B-B$，其秩至多为 $\log^{O(1)}(K)$，且大小为$|C| \geq \exp\Big(-\log^{O(1)}(K)\Big)|A+B|$。

下一个变体是 Schoen 和 Sisask 的鲁棒 Bogolyubov-Rusza 引理 [56]。下面的表述可由他们的工作推出，并作为定理 15 出现在 [49] 中。

定理 2.24 (鲁棒 Bogolyubov-Rusza 引理)。设 G 是一个有限阿贝尔群。设 $A \subset G$ 是一个集合，满足 $|A+A| \leq K|A|$。那么存在一个秩至多为$\log^{O(1)}(K)$、大小至少为 $|C| \geq \exp(-\log^{O(1)}(K))|A|$ 的对称真陪集广义等差数列 C，使得对于每个 $x \in C$，至少存在$\frac{1}{64K}|A|^3$个四元组 $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in A^4$ 满足 $x = a_1 + a_2 - a_3 - a_4$。

下一个推论由如下观察得出：低秩陪集广义等差数列的倍增常数较小。该推论见 [49] 中的推论 16。

推论 2.25。设 G 是一个有限阿贝尔群，C 是一个秩为 d的陪集广义等差数列。假设 $A \subseteq C$ 的大小为 $|A| \geq \alpha|C|$。那么存在一个秩至多为$(d\log(\alpha^{-1}))^{O(1)}$、大小至少为 $|C'| \geq \exp\Big(-(d\log(\alpha^{-1}))^{O(1)}\Big)|C|$ 的对称真陪集广义等差数列 C'，使得对于每个 $x \in C'$，至少存在 $\frac{\alpha}{2^{d+6}}$个四元组 $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in A^4$满足 $x = a_1 + a_2 - a_3 - a_4$。

另一个与此密切相关、我们需要的结果是关于有限阿贝尔群之间的近似同态。下面的结果是 [49] 中的定理 17。这一思想的结果最早由 Gowers [18] 在循环群的情形下证明（但上界较弱）。

定理 2.26。设 G 和 H 是有限阿贝尔群，$A \subset G$ 是一个子集，并设 $\phi\colon A \to H$ 是一个函数。假设被 ϕ 保持的加性四元组数量至少为 $\delta|G|^3$。那么存在一个秩至多为 $\log^{O(1)}(\delta^{-1})$ 的真陪集广义等差数列 $Q \subseteq G$，以及一个 ***Freiman*** 同态 $\Phi\colon Q \to H$，使得 $\Phi(x) = \phi(x)$ 对至少 $\exp(-\log^{O(1)}(\delta^{-1}))|G|$ 个元素成立 $x \in A \cap Q$。

不同于之前关于近似子群的结果，我们还需要 Sanders 的 Bogolyubov-Ruzsa 定理的一个进一步推论，该推论使我们能够高效地生成真正的子群。对于集合 A，我们记 $[L] \cdot A = \{\ell a\colon \ell \in [L], a \in A\}$。

命题 2.27。设 $A \subseteq G$ 是密度为 α 的对称集。那么 $r([L] \cdot A)$（它是 r 个 $[L] \cdot A$ 的和）在某个 $r \leq O(\log^{O(1)} \alpha^{-1})$ 和 $L \leq \exp(r)$下是一个子群。

换言之，由 A 生成的子群中的元素都可以表示为 $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r$，其中 $a_1, \ldots, a_r \in A$，r 相当小，而 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ 都足够小。在循环群 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 中的 $[0, \alpha N]$ 这一例子表明，上述表示中需要出现相当大的系数。

在证明命题之前，我们先证明几个特殊情形。第一个是经典事实：倍增非常小的集合在某个子群中具有很高的密度。

引理 2.28。设 $X \subseteq G$ 是满足 $|X - X| \leq 1.01|X|$ 的集合。那么 $X - X$ 是一个群。

证明。令 $d \in X - X$ 为任意一个差。那么 $d = x - y$，其中某个 x，$y \in X$。注意，$x - X$，$y - X \subseteq X - X$ 是两个大小为 $|X|$ 的集合，因此我们有 $|x - X \cap y - X| \geq 0.99|X|$。于是，存在

至少有 $0.99|X|$ 个元素 $z \in G$ 满足 $x-z,\ y-z \in X$。每一对这样的元素之差仍然是$x-y=d$，因此 $X-X$ 中的每个差至少有 $0.99|G|$ 种表示。

任取 $d_1,\ d_2 \in X-X$。令 Y 为所有满足 $y-d_1 \in X$ 的 $y \in X$ 的集合，并令 Z 为所有满足 $z-d_2 \in X$ 的 $z \in X$ 的集合。根据上文的结果，Y 和 Z 是 X 的两个子集，大小至少为 $0.99|G|$。因此，$Y \cap Z$ 非空，任取其中的 w。于是 $w-d_1,\ w-d_2 \in X$，所以我们有 $d_1-d_2=(w-d_2)-(w-d_1) \in X-X$，这表明 $X-X$ 是一个对取差封闭的有限集，因此它是一个群。

□

第二个简单引理涉及环境群非常小的情形。

引理 2.29。设 K 是一个大小至多为 M 、生成集为 A 的有限阿贝尔群。那么，对于某个 $r' \leq$对数$_2\, M$，有$r'([0,M-1]\cdot A)=K$。

证明。设 $a_1,\dots,a_s$ 是 A 的元素。经过重新排列，并在必要时移除，我们可以假设对于每个 $i \in [s]$，都有 $a_i \notin \langle a_1,\dots,a_{i-1}\rangle$，且 $\langle a_1,\dots,a_s\rangle = K$。特别地，这意味着对于每个 $i \in [s]$，都有$|\langle a_1,\dots,a_i\rangle| \geq 2^i$，因此 $s \leq \log_2 M$。此外，由于 $|K| \leq M$，每个元素的阶至多为 M。因此，K 中的每个元素都可以写成线性组合 $\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_s a_s$，其中 $\lambda_i \in [0,M-1]$，证明完毕。

□

现在我们可以证明命题 2.27。

证明。我们应用定理 2.23，得到一个包含在 $2A-2A$ 中的真对称陪集等差数列 $P+K$，其秩为 $d \leq \log^{O(1)}(\alpha^{-1})$，大小为 $|P+K| \geq \exp\left(-\log^{O(1)}(\alpha^{-1})\right)|A|$。由 A 的对称性，我们有 $2A-2A=4A$。令 $L=\left\lceil \frac{|G|}{|P+K|} \right\rceil$。我们先证明 $2d([L]\cdot(P+K))$ 是一个子群。

记作 $P=P_1+\cdots+P_d$，其中 $P_i=[-\ell_i,\ell_i]\cdot a_i$ 是某些对称算术级数（因此 a_i 是 P_i的一个步长），且满足 $|P+K| = |K|\prod_{i\in[d]}|P_i|$。首先注意，对每个 $m \geq 1$，都有 $m(P+K) \subseteq (d+1)([m]\cdot P)+K$。事实上，若 $x_1,\dots,x_m \in P$ 且 $k_1,\dots,k_m \in K$，那么对于 $y_{ij} \in P_j$，我们可以将每个 $x_i=\sum_{j\in[d]} y_{ij}$ 写成相应形式。特别地，对于满足 $|\lambda_i| \leq m\ell_i$ 的整数 λ_i，有 $x_1+\cdots+x_m=\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_d a_d$。对每个 $j \in [d]$，取满足 $|\lambda_j-m\mu_j|<m$ 的 $\mu_j \in [-\ell_j,\ell_j]$。记作 $\nu_j=\lambda_j-m\mu_j$。那么

$$x_1+\cdots+x_m = m(\mu_1 a_1+\cdots+\mu_d a_d)+\nu_1 a_1+\cdots+\nu_d a_d,$$

so

$$(x_1+k_1)+\cdots+(x_m+k_m)=(x_1+\cdots+x_m)+(k_1+\cdots+k_m) \in (d+1)([m]\cdot Q)+K$$

这表明 $m(P+K) \subseteq (d+1)([m]\cdot P)+K$。

因此，只需证明对于足够小的 m，$m(P+K)$ 是一个子群。考虑$m=2^k$。注意，由于 $P+K$ 的对称性，我们有 $2^{k+1}(P+K)=2^k(P+K)-2^k(P+K)$。如果出现 $|2^{k+1}(P+K)| \leq 1.01|2^k(P+K)|$的情况，那么由引理 2.28 可知结论成立。显然，这种情况必定会在某个 $k \leq \log_{1.01} L$ 时发生。因此，对于某个 $m \leq 2^{\log_{1.01} L}$，$m(P+K)$ 是一个子群，从而

$(d+1)([m]\cdot(P+K))$ 包含一个大小至少为 $|P+K|$ 的子群。回到集合 A，我们有 $4(d+1)([m]\cdot A)$ 包含一个密度至少为 L^{-1} 的子群 $H\leq G$。

令 G' 为由 A生成的子群。因此， A 在 G/H 中的投影生成 G'/H，于是由引理 2.29 $r'([L]\cdot(A+H)/H)=K$，其中某个 $r'\leq \log_2 L$。但这意味着 $G'=r'([L]\cdot(A+H))\subseteq(r'(4d+5))([Lm]\cdot A)\subseteq G'$，正如所需。 □

2.5. 格理论

众所周知，格有 $\mathbb{Z}$-基。由格 Λ 的一个 $\mathbb{Z}$-基张成的平行六面体的体积，就是 Λ的余体积，记作 $\operatorname{cov}\Lambda$。由于它等于该基的行列式的绝对值，因此与$\mathbb{Z}$-基的选取无关。

本文还需要一个关于同态 $\chi\colon G\to\mathbb{T}^r$的像的结果。用 Bohr 集来表述，接下来的结果刻画了哪些广义Bohr集非空；这些集合允许以非零值为中心。不过，这个结果本质上是关于格的。

命题 2.30. 设 $\chi\colon G\to\mathbb{T}^r$ 是一个同态。设 $\Lambda=\{\lambda\in\mathbb{Z}^r\colon \lambda\cdot\chi=0\}$ 是 χ的消失线性组合格。那么 $\operatorname{Im}\chi=\{v\in\mathbb{T}^r:(\forall\lambda\in\Lambda)\lambda\cdot v=0\}$。

证明. 由于 χ_i是从 G到 $\mathbb{T}$的同态，我们有 $\operatorname{Im}\chi\subseteq\{(a_1/|G|,\dots,a_r/|G|)\colon a_1,\dots,a_r\in[0,|G|-1]\}$。因此，我们可以转而考虑 $\chi\colon G\to(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$，其中 $n=|G|$。记 $\Lambda^\perp=\{(a_1,\dots,a_r)\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r:(\forall\lambda\in\Lambda)\ \lambda\cdot a=0\}$。令 $a=\chi(g)\in\operatorname{Im}\chi$且 $\lambda\in\Lambda$。那么 $\lambda\cdot a=\lambda\cdot\chi(g)=0$，所以 $\operatorname{Im}\chi\subseteq\Lambda^\perp$。要证明该断言，只需证明 $|\operatorname{Im}\chi|=|\Lambda^\perp|$。

根据群的第一同构定理，我们有 $|\operatorname{Im}\chi|=|G|/|\text{核}\,\chi|$。为了求核的大小，我们使用指数和

$$\begin{aligned}|\ker\chi|&=\sum_{x\in G}\mathbb{1}(\chi(x)=0)=\sum_{x\in G}\mathop{\mathbb{E}}_{\lambda_1,\dots,\lambda_r\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\mathrm{e}\Big(\frac{\lambda_1\chi_1(x)+\cdots+\lambda_r\chi_r(x)}{n}\Big)\\&=\mathop{\mathbb{E}}_{\lambda_1,\dots,\lambda_r\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\sum_{x\in G}\mathrm{e}\Big(\frac{\lambda_1\chi_1(x)+\cdots+\lambda_r\chi_r(x)}{n}\Big)\\&=|G|\mathop{\mathbb{E}}_{\lambda_1,\dots,\lambda_r\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\mathbb{1}(\lambda\cdot\chi=0)\\&=\frac{|\{\lambda\in[0,n-1]^r:\lambda\cdot\chi=0\}|}{n^r}|G|.\end{aligned}$$

注意，对于所有标准基向量 e_i， $ne_i\in\Lambda$。因此，

$$\frac{|\{\lambda\in[0,n-1]^r:\lambda\cdot\chi=0\}|}{n^r}=\frac{|\{\lambda\in[0,Rn-1]^r:\lambda\cdot\chi=0\}|}{R^rn^r}$$

对于所有 $R\in\mathbb{N}$，右端趋于 1 协方差 Λ。 ——

最后，如果 $a_1,\dots,a_r\in\mathbb{Z}^r$ 是 $\mathbb{Z}$ 的一组基，其史密斯标准形是一个对角矩阵，其对角项为

$d_1, \dots, d_r$ 整除 n，由此我们推得 $|\Lambda^\perp| = d_1 d_2 \cdots d_r = \det(a_1, \dots, a_r) = \operatorname{cov} \Lambda$，这就得到$|\operatorname{Im} \chi| = |\Lambda^\perp|$，正如所需。 □

我们还需要这一结果的一个变体，它表明，如果我们只关心同态 $\chi : G \to \mathbb{T}^r$ 的像的近似值，那么只需知道 Λ 中有界的线性组合。

命题 2.31. 存在一个绝对常数 C，使得以下结论成立。设 $\chi: G \to \mathbb{T}^r$ 是一个同态。设 $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{Z}^r : \lambda \cdot \chi = 0\}$ 是 χ 的消失线性组合格。设 K 是给定的正整数。设 $v \in \mathbb{T}^r$ 是任意一个元素，使得对所有 $\lambda \in \Lambda \cap [-K, K]^r$ 都有 $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0$ 成立。那么，只要 $K \geq Cr(2\delta^{-1})^{2r+1}$，就存在一个元素 $x \in G$，使得 $\|\chi(x) - v\|_{\mathbb{T}} \leq \delta$。

证明。设 $\eta = \frac{1}{4}(\delta/2)^{r+1}$。设 $\rho \in [\delta/2, \delta - \eta]$ 满足

$$|B(\chi_1, \dots, \chi_r, \rho + \eta) \setminus B(\chi_1, \dots, \chi_r, \rho)| \leq \frac{1}{4}(\delta/2)^r |G|.$$

根据抽屉原理，这样的 ρ 存在。我们需要这一性质，因为接下来要应用命题 2.10 来完成证明。

反设不存在满足 $\|\chi(x) - v\|_{\mathbb{T}} \leq \delta$ 的 $x \in G$。

回顾隆起函数的定义 (5)，并令 $\mathsf{b} = \mathsf{b}_{\rho,\, \eta}$。由于没有 $x \in G$ 满足 $\|\chi(x) - v\|_{\mathbb{T}} \leq \rho + \eta$，因此我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x \in G} \mathsf{b}(\chi_1(x) - v_1) \cdots \mathsf{b}(\chi_r(x) - v_r) = 0.$$

令 $g(x) = \sum_{a \in [-K,K]} \hat{\mathsf{b}}(a)\, \mathrm{e}(ax)$。根据事实 2.9，对于所有 $x \in \mathbb{T}$，我们有 $|\mathsf{b}(x) - g(x)| \leq 2\eta^{-1}/K$。利用这个不等式，只要 $K \geq 2\eta^{-1} r$，就有 $\|g\|_\infty \leq 1 + 2\eta^{-1}/K \leq 1 + 1/r$，由此得出

$$\Big| \mathop{\mathbb{E}}_{x \in G} g(\chi_1(x) - v_1) \cdots g(\chi_r(x) - v_r) \Big| \leq 2\eta^{-1} r (1 + 1/r)^r / K.$$

将 ε 记作右端的上界。因此，

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\geq \Big| \mathop{\mathbb{E}}_{x \in G} \sum_{a_1, \dots, a_r \in [-K,K]} \hat{\mathsf{b}}(a_1) \cdots \hat{\mathsf{b}}(a_r)\, \mathrm{e}(a_1(\chi_1(x) - v_1) + \cdots + a_r(\chi_r(x) - v_r)) \Big| \\
&= \Big| \sum_{a_1, \dots, a_r \in [-K,K]} \hat{\mathsf{b}}(a_1) \cdots \hat{\mathsf{b}}(a_r)\, \mathrm{e}(-a \cdot v) \Big(\mathop{\mathbb{E}}_{x \in G} \mathrm{e}(a_1\chi_1(x) + \cdots + a_r\chi_r(x)) \Big) \Big| \\
&= \Big| \sum_{a_1, \dots, a_r \in [-K,K]} \hat{\mathsf{b}}(a_1) \cdots \hat{\mathsf{b}}(a_r)\, \mathrm{e}(-a \cdot v) \mathbb{1}(a_1\chi_1 + \cdots + a_r\chi_r = 0) \Big| \\
&= \Big| \sum_{a_1, \dots, a_r \in [-K,K]} \hat{\mathsf{b}}(a_1) \cdots \hat{\mathsf{b}}(a_r) \mathbb{1}(a_1\chi_1 + \cdots + a_r\chi_r = 0) \Big|,
\end{aligned}$$

在最后一步中，利用了对所有属于 $v \in \Lambda \cap [-K,K]^r$ 的 $a \cdot v = 0$ 均成立这一事实。令 C 为命题 2.10 中关于 K 上界的隐含常数。由命题 2.10，最后一项是$|B(\chi_1,\dots,\chi_r;\ \rho)|/|G|$ 的一个近似，误差至多为$1\,2(\delta/2)^r$，前提是 $K \geq 8Cr\eta^{-1}_{-}(\delta/2)^{-r})$。根据引理 2.4，Bohr 集$B(\chi_1,\dots,\chi_r;\ \rho)$的大小至少为 $\rho^r|G|$，从而得到不等式 $\varepsilon \geq \rho^r - \frac{1}{2}(\delta/2)^r$。这就产生了矛盾，因为 $K \geqq 32Cr(2\delta^{-1})^{2r+1}$。

□

[49]中的以下两个结果涉及格的定量理论。

引理 2.32 （ [49]中的引理 29）。 设 k 和 K 为正整数。假设 $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2 \subseteq \dots \subseteq \Lambda_r \subseteq \mathbb{Z}^k$ 是格，使得对于每个 $i \in [r-1]$，集合差 $\Lambda_{i+1} \setminus \Lambda_i$ 都包含盒子 $[-K,K]^k$ 中的一个元素。那么 $r \leq O$（k^2（对数 $k+$对数 K）。

定理 2.33 （格的定量基本定理， [49]中的定理 30）。 设 G 为有限阿贝尔群，令 a_1，……，$a_k \in G$，并令 R 为正整数。假设 $B \subset \langle a_1$，……，$a_k\rangle_R$ 是非空集合。那么，存在正整数 $\ell \leq O$（k^2（对数$k+$对数 R）， $S \leq O$（（$2Rk$）$^{k+3}$） 以及元素 b_1，……，$b_\ell \in B$，使得 $B \subseteq \langle b_1$，……，$b_\ell\rangle_S$。

让我们回顾一下离散约翰定理。对于序列 $L = (L_1$，……，$L_r)$，下面的记号（$-L$，L）$\cdot w$ 表示所有形如 $\sum_{i\in[r]} \lambda_i w_i$ 的和，其中 $\lambda_i \in$ 为整数（$-L_i$，L_i）。

命题 2.34 （离散约翰定理， [61]中的引理 3.36）。 设 B 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个凸对称体，且 Γ 是 $\mathbb{R}^d$ 中秩为 r 的格。那么存在一个 r-元组 $w =$（w_1、……、w_r） $\in \Gamma^r$，其元素是 Γ 中线性无关的向量；还存在一个由正整数组成的 r-元组 $L =$（L_1、……、L_r），使得

$$(r^{-2r} \cdot B) \cap \Gamma \subseteq (-L,L) \cdot w \subseteq B \cap \Gamma \subseteq (-r^{2r}L, r^{2r}L) \cdot w.$$

我们推得，Bohr 集包含陪集广义等差数列，并且它们的收缩可以相互交织。证明与 [61] 中引理 4.22 的证明相同。

命题 2.35。 设 $B(\Gamma,\rho)$ 是余维为 r 的 *Bohr* 集。则存在一个秩至多为 r 的真对称陪集广义等差数列 C，使得 $r^{2r}C$ 也是真集，并且

$$B(\Gamma, r^{-4r}\rho) \subseteq C \subseteq B(\Gamma, r^{-2r}\rho) \subseteq r^{2r}C \subseteq B(\Gamma,\rho).$$

此外，若 $C = [-L_1,L_1]\cdot a_1 + \dots + [-L_r,L_r]\cdot a_r + H$ 是其标准形式，则对所有 $c \in (0,1/2)$，我们都有

$$B(\Gamma, cr^{-4r}\rho) \subseteq [-2cL_1, 2cL_1]\cdot a_1 + \dots + [-2cL_r, 2cL_r]\cdot a_r + H.$$

证明。 设 $\Gamma = \{\chi_1,\dots,\chi_r\}$。同态 $\chi = (\chi_1,\dots,\chi_r)$：$G \to \mathbb{T}^r$ 的像是有限子群 $\chi(G) \leq \mathbb{T}^r$，并且对于任意半径 σ，Bohr 集 $B(\Gamma,\sigma)$ 是立方体 $Q_\sigma = \{x \in \mathbb{T}^r$ 的逆像：$\|x\|_{\mathbb{T}} \leq \sigma\}$。

令 $\Lambda \leq \mathbb{R}^r$ 为格 $\chi(G)+\mathbb{Z}^r$。将命题 2.34 应用于交集 $\Lambda \cap [-r^{-2r}\rho, r^{-2r}\rho]^{r\tilde{}}$，我们得到一个广义等差数列 $P = (-L,L)\cdot w$，其中 $w_1,\dots,w_r \in \Lambda$ 线性无关，满足

$$[-r^{-4r}\rho, r^{-4r}\rho]^r \cap \Lambda \subseteq (-L,L)\cdot w \subseteq [-r^{-2r}\rho, r^{-2r}\rho]^r \cap \Lambda \subseteq (-r^{2r}L, r^{2r}L)\cdot w.$$

注意，我们还有 $(-r^{2r}L, r^{2r}L) \cdot w \subseteq [-\rho,\rho]^r \cap \Lambda$。取 $C = (-L, L) \cdot v + H$，其中 v_i 是 $\chi^{-1}(w_i)$ 中的任意元素，且属于 $H = \text{核}\,\chi$。

为了完成证明，令 $c \in (0, 1/2)$，设 $\sigma = cr^{-4r}\rho$。我们首先证明 $Q_\sigma \cap \Lambda \subseteq (-2cL, 2cL) \cdot w$。也就是说，我们有 $x \in Q_\sigma \cap \Lambda \setminus (-2cL, 2cL) \cdot w$。但是，对于 $k = \lceil c^{-1} \rceil$, $x, kx \in [-r^{-4r}\rho, r^{-4r}\rho]^r \cap \Lambda$，因此 $x, kx \in (-L, L) \cdot w$。于是，存在整数 $\lambda_i, \mu_i \in (-L_i, L_i)$，使得 $x = \sum_{i\in[r]} \lambda_i w_i$ 且 $kx = \sum_{i\in[r]} \mu_i w_i$。然而， $w_1, \ldots, w_r$ 在线性空间 $\mathbb{R}^r$ 中线性无关，因此 $k\lambda_i = \mu_i$。故 $|\lambda_i| < L_i/k \le 2cL_i$。由于 $B(\Gamma, \sigma) = \chi^{-1}(Q_\sigma \cap \Lambda)$，且 $[-2cL_1, 2cL_1] \cdot a_1 + \cdots + [-2cL_r, 2cL_r] \cdot a_r + H$ 包含 $(-2cL, 2cL) \cdot w$ 的逆像，证毕。 □

作为推论，我们展示如何利用 Bohr 集高效地生成子群。

推论 2.36。设 $B = B(\Gamma, \rho)$ 是余维为 d 的 *Bohr* 集，并设 $r \in \mathbb{N}$。那么， $B(\Gamma, \rho/2)$ 中的每个元素都可以写成 $x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^{r-1}x_r$，其中 $x_1, \ldots, x_r \in B$ 至少有 $2^{-d(r+1)^2}\rho^{-dr}|G|^{r-1}$ 种取法。

此外，设 $\rho' = d^{-2d}\rho$ 且 $r' = 1000(d^2 \text{对数 } d + d \text{对数 } \rho^{-1})$。设 G' 是由 $B' = B(\Gamma, \rho')$ 生成的 G 的子群。那么， G' 中的每个元素都可以写成 $x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^{r'-1}x_{r'}$，其中 $x_1, \ldots, x_{r'} \in B'$ 至少有 $2^{-O(dr'^2)}d^{-2d^2r'}\rho^{dr'}|G|^{r'-1}$ 种取法。

证明。对于推论的第一部分，任取 $y \in B(\Gamma, \rho/2)$ 和 $x_i \in B(\Gamma, 2^{-2i-1}\rho)$，其中 $i = 2, \ldots, r$。然后令 $x_1 = y - (2x_2 + \cdots + 2^{r-1}x_r)$。根据元素的选取，我们有 $x_1 \in B(\Gamma, \rho)$。由引理 2.4，我们可以将 y 写成 $x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^{r-1}x_r$，其中 $x_1, \ldots, x_r \in B$ 至少有 $2^{-d(r+1)^2}\rho^{-dr}|G|^{r-1}$ 种取法。

对于结论的第二部分，根据我们选取 ρ' 的方式，由命题 2.35，我们可以找到陪集广义等差数列 C，使得 C 和 $d^{2d}C$ 都是真、对称的，且秩至多为 d，并且满足 $B(\Gamma, d^{-2d}\rho') \subseteq C \subseteq B(\Gamma, \rho') \subseteq d^{2d}C \subseteq B(\Gamma, \rho)$。注意，包含关系 $C \subseteq B(\Gamma, \rho') \subseteq d^{2d}C$ 意味着 C 也生成 G'。

令 $C = [-L_1, L_1] \cdot a_1 + \cdots + [-L_d, L_d] \cdot a_d + H$ 为其标准形式。设 $L_i' = \lceil L_i/2 \rceil$ 和 $L_i'' = \lfloor L_i/2 \rfloor$，并定义另外的对称真陪集进程 C' 和 C''，使得 $C' = [-L_1', L_1'] \cdot a_1 + \cdots + [-L_d', L_d'] \cdot a_d + H$ 和 $C'' = [-L_1'', L_1''] \cdot a_1 + \cdots + [-L_d'', L_d''] \cdot a_d + H$。因此，$C' + C'' = C$，且 $C' \subseteq C \subseteq 2C'$。特别地，由 C' 生成的子群仍为 G'。

我们来验证，对于 $r = 100$（$d^2 \log d + d \log \rho^{-1}$），有 $C' + 2 \cdot C' + \cdots + 2^r \cdot C' = G'$。利用引理 2.28，并注意到 C 是一个对称集，可得 $2^k C'$ 要么是 G 的子群，要么其大小至少为 $1.01^k|C'|$。利用初等不等式 $1.01^{100} > 2$ 和引理 2.4，我们得到，对于某个 $n \le (|G|/|C'|)^{100} \le d^{400d^2}\rho^{-100d}$，有 $nC' = G'$。由于 C' 是一个陪集广义等差数列，且 $r \ge \log_2 n$，因此我们得出 $nC' \subseteq C' + 2 \cdot C' + \cdots + 2^r \cdot C'$。

剩下要证明的是， G' 中的元素有许多种表示。令 $y \in G'$ ，并取满足 $y = z_0 + 2z_1 + \cdots + 2^r z_r$ 的 $z_0, \ldots, z_r \in C'$ 。任取满足 $x_0 + 2x_1 +$ 的 $x_0, \ldots, x_r \in C''$
$\cdots + 2^r x_r = 0$。每一个这样的选择都通过令 $x_i + z_i$ 为 y 提供了另一种表示。另一方面，通过选择 $x_2 \in \frac{1}{8}C''$，……， $x_r \in \frac{1}{2^{2r+1}}C''$，我们得到 $x_1 = -2x_2 - \cdots - 2^r x_r \in C''$，证明完毕。

□

下一个结果讨论这样一类集合：它们是从 Bohr 集到单位圆的 Freiman 同态的逆像，因此可以将其视为“Bohr-Bohr集”。我们将证明，这样的集合实际上接近于通常的 Bohr 集。

命题2.37 (Bohr-Bohr集是 Bohr 集)。 设 $B = B(\Gamma, \rho)$ 是一个 ***Bohr*** 集，并设 $r = |\Gamma|$。令ϕ : $B \to \mathbb{T}^d$ 为一个 ***Freiman*** 线性映射，并设 $\sigma > 0$。那么集合

$$X = \{x \in B : \|\phi(x)\|_{\mathbb{T}} \leq \sigma\}$$

包含一个余维至多为 $d+ (2r\log(\sigma^{-1}\rho^{-1}))^{O(1)}$ 、半径至少为 $\sigma\ (2r\log(\sigma^{-1}\rho^{-1}))^{-O(1)}$ 的 ***Bohr*** 集。

证明。 根据命题 2.35， B 包含一个大小为 $|C| \geq \rho^r r^{-2r^2}|G|$、秩至多为 r的真对称陪集广义等差数列 C 。映射 ϕ 是 C 上的 Freiman 同态，因此由引理2.22可知，存在另一个秩至多为 r 、大小为 $|C'| \geq \sigma^r \rho^{3r}(10^5 r)^{-7r^2}|G|$ 的对称真陪集进程 $C' \subseteq C$ ，以及一个同态 $\tilde{\phi}: G \to \mathbb{T}^d$ ，使得对所有 $x \in C'$，均有 $\|\phi(x) - \tilde{\phi}(x)\|_{\mathbb{T}} \leq \sigma/2$ 。令 $B' = B(\Gamma', 1/4R)$ 为命题 2.13 给出的、包含于 C' 中的 Bohr 集，其中 $R \leq (2r\log(\sigma^{-1}\rho^{-1}))^{O(1)}$ 且 $|\Gamma'| \leq R$。于是 $\tilde{X}$ ˜包含 Bohr 集 $B' \cap B(\phi_1, \ldots, \phi_r, \sigma/2)$。

□

另一项性质涉及 Bohr 集交集的迭代和。

命题 2.38 (广义Bohr集的和)。 存在一个绝对常数 $C > 0$ ，使得以下结论成立。设 Γ、$\Gamma' \subseteq \hat{}G$ 是特征集合，其大小分别为 r 和 r' ，且 ρ、$\rho' > 0$ 为半径。设 $k \in \mathbb{N}$。假设对 $K_0 = 2^{10}(k+4)^2 C^{\mathrm{spec}}(r+r')(\varepsilon^2\rho\rho')^{-2}$， $\langle\Gamma\rangle_{[-K_0,K_0]} \cap \langle\Gamma'\rangle_{[-K_0,K_0]} = \{0\}$ 成立。

设 $x \in G$ 是一个元素，它至少可以用 $\varepsilon|G|^{k+3}$ 种方式表示为 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 2b_1 + \cdots + 2^k b_k$ 对 a_1、……、a_4， b_1， $\ldots b_k \in B(\Gamma;\ \rho)$，对于 $B(\Gamma';\ \rho')$ 也有类似结论。于是 $x \in 4(B(\Gamma;\ 2\rho) \cap B(\Gamma';\ 2\rho')) + 2 \cdot (B(\Gamma; 2\rho) \cap B(\Gamma';\ 2\rho')) + \cdots + 2^k \cdot (B(\Gamma;\ 2\rho) \cap B(\Gamma'; 2\rho'))$。

证明。 令 $A \subseteq G$ 为任意集合。那么，满足 $x = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 2b_1 + \cdots + 2^k b_k$ 的 $a_1, \ldots, a_4, b_1, \ldots b_k \in A$ 的数量等于

$$|G|^{k+3} \mathop{\mathbb{E}}_{a_2,a_3,a_4,b_1,\ldots,b_k \in G} \mathbb{1}_A(x - a_2 - a_3 - a_4 - 2b_1 - \cdots - 2^k b_k)\mathbb{1}_A(a_2)\ldots\mathbb{1}_A(b_k)$$

$$= |G|^{k+3} \mathop{\mathbb{E}}_{a_2,a_3,a_4,b_1,\dots,b_k\in G} \sum_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\xi_1,\dots,\xi_k\in\hat{G}} \widehat{\mathbb{1}_A}(\gamma_1)\,\mathrm{e}(\gamma_1(x-a_2-a_3-a_4-2b_1-\dots-2^kb_k))$$

$$\widehat{\mathbb{1}_A}(\gamma_2)\,\mathrm{e}(\gamma_2(a_2))\widehat{\mathbb{1}_A}(\gamma_3)\,\mathrm{e}(\gamma_3(a_3))\widehat{\mathbb{1}_A}(\gamma_4)\,\mathrm{e}(\gamma_4(a_4))\prod_{i\in[k]}\widehat{\mathbb{1}_A}(\xi_i)\,\mathrm{e}(\chi_i(b_i))$$

$$= |G|^{k+3} \sum_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\xi_1,\dots,\xi_k\in\hat{G}} \widehat{\mathbb{1}_A}(\gamma_1)\widehat{\mathbb{1}_A}(\gamma_2)\widehat{\mathbb{1}_A}(\gamma_3)\widehat{\mathbb{1}_A}(\gamma_4)\widehat{\mathbb{1}_A}(\xi_1)\dots\widehat{\mathbb{1}_A}(\xi_k)$$

$$\mathbb{1}(\gamma_1=\gamma_2)\mathbb{1}(\gamma_1=\gamma_3)\mathbb{1}(\gamma_1=\gamma_4)\mathbb{1}(\xi_1=2\gamma_1)\dots\mathbb{1}(\xi_k=2^k\gamma_1)\,\mathrm{e}(\gamma_1(x))$$

$$= |G|^{k+3}\sum_{\gamma\in\hat{G}} \widehat{\mathbb{1}_A}(\gamma)^4\widehat{\mathbb{1}_A}(2\gamma)\dots\widehat{\mathbb{1}_A}(2^k\gamma)\,\mathrm{e}(\gamma(x)).$$

因此，我们需要证明：如果 $\sum_{\gamma\in\hat{G}} \widehat{\mathbb{1}_A}(\gamma)^4\widehat{\mathbb{1}_A}(2\gamma)\dots\widehat{\mathbb{1}_A}(2^k\gamma)\,\mathrm{e}(\gamma(x))$ 对于 $A=B(\Gamma;\rho)\times B(\Gamma';\rho')$ 至少为 ε，那么它对于 $A=B(\Gamma;2\rho)\cap B(\Gamma';2\rho')$ 为正。

设 $c>0$ 为稍后选取的参数，并设 $S\subseteq G$ 为包含所有特征的任意集合 $\gamma\in G$，使得 $|\mathbb{1}_A(\gamma)|\geq c$（也可能包含一些额外的特征）。那么

$$\Big|\sum_{\gamma\in\hat{G}} \widehat{\mathbb{1}_A}(\gamma)^4\widehat{\mathbb{1}_A}(2\gamma)\dots\widehat{\mathbb{1}_A}(2^k\gamma)\,\mathrm{e}(\gamma(x)) - \sum_{\gamma\in S} \widehat{\mathbb{1}_A}(\gamma)^4\widehat{\mathbb{1}_A}(2\gamma)\dots\widehat{\mathbb{1}_A}(2^k\gamma)\,\mathrm{e}(\gamma(x))\Big|$$
$$\leq \sum_{\gamma\notin S}|\widehat{\mathbb{1}_A}(\gamma)|^4 \leq c^2\sum_{\gamma\notin S}|\widehat{\mathbb{1}_A}(\gamma)|^2 \leq c^2. \tag{7}$$

我们先找出 $\tilde{\rho}\in[\rho,2\rho]$ 和 $\tilde{\rho}'\in[\rho',2\rho']$，使得

$$\Big|B\Big(\Gamma,\tilde{\rho}+\frac{\varepsilon^2}{10000(k+4)}\rho\rho'\Big)\setminus B(\Gamma,\tilde{\rho})\Big| \leq \frac{\varepsilon^2}{2000(k+4)}|G|,$$
$$\Big|B\Big(\Gamma',\tilde{\rho}'+\frac{\varepsilon^2}{10000(k+4)}\rho\rho'\Big)\setminus B(\Gamma,\tilde{\rho}')\Big| \leq \frac{\varepsilon^2}{2000(k+4)}|G|, \text{ and}$$
$$\Big|B\Big(\Gamma,\tilde{\rho}+\frac{\varepsilon^2}{10000(k+4)}\rho\rho'\Big)\cap B\Big(\Gamma',\tilde{\rho}'+\frac{\varepsilon^2}{10000(k+4)}\rho\rho'\Big)\setminus (B(\Gamma,\tilde{\rho})\cap B(\Gamma',\tilde{\rho}'))\Big| \leq \frac{\varepsilon^2}{2000(k+4)}|G|.$$

我们尝试取 $\tilde{\rho}=\rho+i\frac{\varepsilon^2}{10000}\rho\rho'$ 和 $\tilde{\rho}'=\rho'+j\frac{\varepsilon^2}{10000}\rho\rho'$，令 $i,\ j\in[0,10000\varepsilon^{-2}]$。上述每个不等式至多对五分之一的所有配对 $(i,\ j)$ 不成立，因此我们可以找到这样的 $\tilde{\rho}$ 和 $\tilde{\rho}'$。令 $B=B(\Gamma,\ \tilde{\rho})$，并令 $B'=(\Gamma',\ \tilde{\rho}')$。

设 $\mathsf{f}=\mathsf{b}_{\tilde{\rho},\frac{\varepsilon^2}{10000}(k+4)\rho\rho'}$，$\mathsf{g}=\mathsf{b}_{\tilde{\rho}',\frac{\varepsilon^2}{10000}(k+4)\rho\rho'}$ 是凸起函数的傅里叶变换，这些函数用于命题 2.10。应用命题 2.10（在该命题中取 $\eta=\frac{\varepsilon^2}{10000(k+4)}\rho\rho'$），我们得到 $K\leq 10^9(k+4)^2\mathsf{C}_{\mathrm{spec}}(r+r')(\varepsilon^2\rho\rho')^{-2}$，使得

$$\Big|\widehat{\mathbb{1}_B}(\tau)-\sum_{\lambda\in[-K,K]^\Gamma}\mathbb{1}\Big(\sum_{\gamma\in\Gamma}\lambda(\gamma)\gamma=\tau\Big)\prod_{\gamma\in\Gamma}\mathsf{f}(\lambda(\gamma))\Big| \leq \frac{\varepsilon^2}{1000(k+4)},$$

$$\Big|\widehat{\mathbb{1}_{B'}}(\tau)-\sum_{\mu\in[-K,K]^{\Gamma'}}\mathbb{1}(\sum_{\gamma'\in\Gamma'}\mu(\gamma')\gamma'=\tau)\prod_{\gamma'\in\Gamma'}\mathsf{g}(\mu(\gamma'))\Big|\le\frac{\varepsilon^2}{1000(k+4)},\ \text{and}$$

$$\Big|\widehat{\mathbb{1}_{B\cap B'}}(\tau)-\sum_{\substack{\lambda\in[-K,K]^{\Gamma}\\ \mu\in[-K,K]^{\Gamma'}}}\mathbb{1}\Big(\sum_{\gamma\in\Gamma}\lambda(\gamma)\gamma+\sum_{\gamma'\in\Gamma'}\mu(\gamma')\gamma'=\tau\Big)\prod_{\gamma\in\Gamma}\mathsf{f}(\lambda(\gamma))\prod_{\gamma'\in\Gamma'}\mathsf{g}(\mu(\gamma'))\Big|\le\frac{\varepsilon^2}{1000(k+4)}$$

ˆ 对所有 $\tau\in G$ 均成立。

比较 t he 的选择与假设相结合，我们得到 $\langle\Gamma\rangle_{[-10K,10K]}\cap\langle\Gamma'\rangle_{[-10K,10K]}=\{0\}$。

注意，上述不等式表明，$|\widehat{\mathbb{1}_B}(\tau)|\ge\varepsilon/2$ 蕴含 $\tau\in\langle\Gamma\rangle_{[-K,K]}$，而 $|\widehat{\mathbb{1}'_B}(\tau)|\ge\varepsilon/2$ 蕴含$\tau\in\langle\Gamma'\rangle_{[-K,K]}$。特别地，由 (7)，对于 $x\in X$，我们得到

$$\Big|\sum_{\gamma\in\langle\Gamma\rangle_{[-K,K]}}\widehat{\mathbb{1}_B}(\gamma)^4\widehat{\mathbb{1}_B}(2\gamma)\dots\widehat{\mathbb{1}_B}(2^k\gamma)\,\mathrm{e}(\gamma(x))\Big|\ge\varepsilon/2,$$
$$\Big|\sum_{\gamma'\in\langle\Gamma'\rangle_{[-K,K]}}\widehat{\mathbb{1}_{B'}}(\gamma')^4\widehat{\mathbb{1}_{B'}}(2\gamma')\dots\widehat{\mathbb{1}_{B'}}(2^k\gamma')\,\mathrm{e}(\gamma'(x))\Big|\ge\varepsilon/2.$$

此外，

$$\Big|\sum_{\gamma\in\hat{G}}\widehat{\mathbb{1}_{B\cap B'}}(\gamma)^4\widehat{\mathbb{1}_{B\cap B'}}(2\gamma)\dots\widehat{\mathbb{1}_{B\cap B'}}(2^k\gamma)\,\mathrm{e}(\gamma(x))$$
$$-\sum_{\gamma\in\langle\Gamma\cup\Gamma'\rangle_{[-K,K]}}\widehat{\mathbb{1}_{B\cap B'}}(\gamma)^4\widehat{\mathbb{1}_{B\cap B'}}(2\gamma)\dots\widehat{\mathbb{1}_{B\cap B'}}(2^k\gamma)\,\mathrm{e}(\gamma(x))\Big|\le\varepsilon^2/1000(k+4).$$

$\widehat{\ }\ \widehat{\ }\ \widehat{\ }$为了完成证明，我们将傅里叶系数 $\mathbb{1}_B$、 $\mathbb{1}_{B'}$ 和 $\mathbb{1}_{B\cap B'}$联系起来。

命题 2.39。 设 $\xi\in\langle\Gamma、\ \Gamma'\rangle_{[-K,K]}$。那么存在唯一的 $\xi_1\in\langle\Gamma\rangle_{[-K,K]}$ 和 $\xi_2\in\langle\Gamma'\rangle_{[-K,K]}$，使得 $\xi=\xi_1+\xi_2$，且这些特征满足

$$\Big|\widehat{\mathbb{1}_{B\cap B'}}(\xi)-\widehat{\mathbb{1}_B}(\xi_1)\widehat{\mathbb{1}_{B'}}(\xi_2)\Big|\le\frac{\varepsilon^2}{100(k+4)}.$$

证明。 我们利用陈述中的条件 $\langle\Gamma\rangle_{[-2K,2K]}\cap\langle\Gamma'\rangle_{[-2K,2K]}=\{0\}$ 证明分解 $\xi=\xi_1+\xi_2$的唯一性。应用三角不等式，并注意到 $\widehat{\mathbb{1}_{B\cap B'}}(\xi)$的近似项是$\widehat{\ }\ \widehat{\ }\ \widehat{\ }$ $\mathbb{1}_B(\xi_1)$和 $\mathbb{1}_{B'}(\xi_2)$的近似项的乘积。

□

利用上述断言，我们有

$$\sum_{\gamma\in\langle\Gamma\cup\Gamma'\rangle_{[-K,K]}}\widehat{\mathbb{1}_{B\cap B'}}(\gamma)^4\widehat{\mathbb{1}_{B\cap B'}}(2\gamma)\dots\widehat{\mathbb{1}_{B\cap B'}}(2^k\gamma)\,\mathrm{e}(\gamma(x))$$
$$=\sum_{\substack{\gamma_1\in\langle\Gamma\rangle_{[-K,K]}\\ \gamma_2\in\langle\Gamma'\rangle_{[-K,K]}}}\widehat{\mathbb{1}_{B\cap B'}}(\gamma_1+\gamma_2)^4\widehat{\mathbb{1}_{B\cap B'}}(2\gamma_1+2\gamma_2)\dots\widehat{\mathbb{1}_{B\cap B'}}(2^k\gamma_1+2^k\gamma_2)\,\mathrm{e}(\gamma_1(x))\ \mathrm{e}(\gamma_2(x)).$$

由三角不等式可得

$$\Big| \sum_{\substack{\gamma_1\in\langle\Gamma\rangle_{[-K,K]}\\ \gamma_2\in\langle\Gamma'\rangle_{[-K,K]}}} \widehat{\mathbb{1}_{B\cap B'}}(\gamma_1+\gamma_2)^4\widehat{\mathbb{1}_{B\cap B'}}(2\gamma_1+2\gamma_2)\dots\widehat{\mathbb{1}_{B\cap B'}}(2^k\gamma_1+2^k\gamma_2)\,\mathrm{e}(\gamma_1(x))\,\mathrm{e}(\gamma_2(x))$$
$$- \sum_{\substack{\gamma_1\in\langle\Gamma\rangle_{[-K,K]}\\ \gamma_2\in\langle\Gamma'\rangle_{[-K,K]}}} \widehat{\mathbb{1}_B}(\gamma_1)^4\widehat{\mathbb{1}_{B'}}(\gamma_2)^4\widehat{\mathbb{1}_B}(2\gamma_1)\widehat{\mathbb{1}_{B'}}(2\gamma_2)\dots\widehat{\mathbb{1}_B}(2^k\gamma_1)\widehat{\mathbb{1}_{B'}}(2^k\gamma_2)\,\mathrm{e}(\gamma_1(x))\,\mathrm{e}(\gamma_2(x))\Big|$$
$$\le (k+4)\frac{\varepsilon^2}{100(k+4)} = \frac{\varepsilon^2}{100}.$$

但最终表达式为

$$\sum_{\substack{\gamma_1\in\langle\Gamma\rangle_{[-K,K]}\\ \gamma_2\in\langle\Gamma'\rangle_{[-K,K]}}} \widehat{\mathbb{1}_B}(\gamma_1)^4\widehat{\mathbb{1}_{B'}}(\gamma_2)^4\widehat{\mathbb{1}_B}(2\gamma_1)\widehat{\mathbb{1}_{B'}}(2\gamma_2)\dots\widehat{\mathbb{1}_B}(2^k\gamma_1)\widehat{\mathbb{1}_{B'}}(2^k\gamma_2)\,\mathrm{e}(\gamma_1(x))\,\mathrm{e}(\gamma_2(x))$$
$$= \Big(\sum_{\gamma_1\in\langle\Gamma\rangle_{[-K,K]}} \widehat{\mathbb{1}_B}(\gamma_1)^4\widehat{\mathbb{1}_B}(2\gamma_1)\dots\widehat{\mathbb{1}_B}(2^k\gamma_1)\,\mathrm{e}(\gamma_1(x))\Big)$$
$$\Big(\sum_{\gamma_2\in\langle\Gamma'\rangle_{[-K,K]}} \widehat{\mathbb{1}_{B'}}(\gamma_2)^4\widehat{\mathbb{1}_{B'}}(2\gamma_2)\widehat{\mathbb{1}_{B'}}(2^k\gamma_2)\,\mathrm{e}(\gamma_2(x))\Big)$$

其模至少为 $\varepsilon^2/4$。结合上述不等式，我们得到

$$\Big|\sum_{\gamma\in\hat{G}} \widehat{\mathbb{1}_A}(\gamma)^4\widehat{\mathbb{1}_A}(2\gamma)\dots\widehat{\mathbb{1}_A}(2^k\gamma)\,\mathrm{e}(\gamma(x))\Big| \ge \varepsilon^2/8. \qquad \square$$

最后，让我们记录另一个具有类似精神的引理。令 $\mathsf{C}_{\mathrm{lattice}}$ 为命题 2.31 中的常数。

引理2.40。设 Λ、Λ'、$\Gamma \subseteq \hat{}G$ 为大小至多为 d 的特征集合。设 $\rho > 0$。存在$K = 3\mathsf{C}_{\mathrm{lattice}}d(20\rho^{-1})^{6d+1}$，使得以下结论成立。假设 $\sum_{\gamma\in\Gamma} a(\gamma)\gamma + \sum_{\lambda\in\Lambda} b(\lambda)\lambda + \sum_{\lambda'\in\Lambda'} c(\lambda')\lambda' = 0$ 对系数 a、b、$c \in [-K,K]$ 意味着 b 和 c 消失。那么

$$B(\Gamma,\rho/10) \subseteq B(\Gamma\cup\Lambda,\rho) + B(\Gamma\cup\Lambda,\rho').$$

证明。我们依据命题 2.31。令 $x \in B(\Gamma,\rho/10)$。列出 $\Gamma = \{\gamma_1,\dots,\gamma_d\}$、$\Lambda = \{\lambda_1,\dots,\lambda_d\}$ 和 $\Lambda' = \{\lambda'_1,\dots,\lambda'_d\}$。令 $u = (\gamma_1(x),\dots,\gamma_d(x))$、$v = (\lambda_1(x),\dots,\lambda_d(x))$ 以及 $v' = (\lambda'_1(x),\dots,\lambda'_d(x))$。因此，$\|u\|_{\mathbb{T}} \le \rho/10$。

我们断言，存在 $y \in G$，使得 $\|\gamma(y)\|_{\mathbb{T}}$，$\|\lambda(y) - v\|_{\mathbb{T}}$，$\|\lambda'(y)\|_{\mathbb{T}} \le \rho/2$。将向量 $(0,\ v,\ 0)$ 和逼近参数 $\rho/2$ 代入命题 2.31。根据引理的假设，该向量满足命题 2.31 的条件，因此存在所需的 y。于是 $y \in B(\Gamma\cup\Lambda',\ \rho/2)$。另一方面，$x - y$ 满足 $\|\gamma(x-y)\|_{\mathbb{T}}$，$\|\lambda(x-y)\|_{\mathbb{T}} \le \rho$，因此 $x - y \in B(\Gamma\cup\Lambda',\ \rho)$。 $\square$

Bohr 集上的 Freiman 同态。我们主要结果的证明中相当一部分将围绕 Freiman 同态系统展开，这些同态的定义域是 Bohr 集。

记号。设 $\phi_1\colon B_1 \to H, \dots, \phi_k\colon B_k \to H$ 是 Bohr 集 $B_1, \dots, B_k \subseteq G$ 上的 Freiman 同态。我们将表达式 $\psi = \pm\phi_1 \pm \phi_2 \dots \pm \phi_k$ 解释为定义域交集 $\cap_{i\in[k]} B_i$ 上的 Freiman 同态，而该交集本身也是一个 Bohr 集。换言之，我们考虑 Freiman 同态 $\phi\colon B \to H$ 构成的交换幺半群，其运算为 $(\phi_1, B_1)+(\phi_2, B_2) = ((\phi_1+\phi_2)|_{B_1\cap B_2}, B_1\cap B_2)$。

特别重要的一类映射是取值较少的映射，或者几乎等价地说，频繁取零值的映射。

令 $\#\mathrm{Im}\,\phi = |\phi(B)|$ 表示 ϕ 的像的大小。

命题 2.41。设 $\phi\colon B(\Gamma,\rho) \to H$ 是 *Bohr* 集 $B = B(\Gamma,\rho)$ 上的 *Freiman* 线性映射，其余维为 d，半径函数为 $\rho\colon \Gamma \to \hat{G}$，且 $\phi(x) = 0$ 对至少 $\frac{2}{3}|B|$ 个元素成立$x \in B$。那么，对于 $\eta = \frac{1}{100d}\prod_{\gamma\in\Gamma}\rho(\gamma)$，$\phi = 0$ 在 $B(\Gamma,\eta)$上成立。

证明。由命题 2.4 可得 $|B(\Gamma,\rho)| \geq \left(\prod_{\gamma\in\Gamma}\rho(\gamma)\right)|G|$。设 $\eta = \frac{1}{100d}\prod_{\gamma\in\Gamma}\rho(\gamma)$。由命题 2.7，存在半径函数 $\rho'\colon \Gamma \to \hat{G}$，使得 $B(\Gamma,\rho') = B$，$\|\rho'-\rho\|_\infty \leq \eta$，且 $|B(\Gamma,\rho') \setminus \overline{B(\Gamma,\rho'-\eta)}| \leq \frac{1}{10}|B(\Gamma,\rho')|$。

—

设 $Z = \{x \in B\colon \phi(x) = 0\}$ 并记 $B' = B(\Gamma, \eta)$。任取 $x \in B'$。那么 $x + B(\Gamma, \rho'-\eta) \subseteq B$，因此

$$|Z \cap x + Z| \geq |(Z \cap B(\Gamma,\rho'-\eta)) \cap x + (Z \cap B(\Gamma,\rho'-\eta))| \geq |B| - 2|B \setminus (Z \cap B(\Gamma,\rho'-\eta))| > 0$$

因此存在 xist $z_1, z_2 \in Z$ 使得 $x = z_1 - z_2$。由 Freiman 线性，$\phi(x) = \phi(z_1) - \phi(z_2) = 0$. □

现在让我们来证明，与线性代数中的线性映射类似，核大意味着值域小 e.

引理 2.42 (零点多则值域小**)**。假设 $B = B(\Gamma,\rho)$ 是一个余维为d、半径函数为 ρ的 *Bohr* 集。设 $\phi\colon B \to H$ 是一个 *Freiman* 线性映射，且 $\phi(x) = 0$ 对至少$c|B|$ 个元素 $x \in B$成立。那么，ϕ 在 $B(\Gamma, \rho/2)$上至多取$(200dc^{-1})^{d+1}\left(\prod_{\gamma\in\Gamma}\rho(\gamma)\right)^{-d}$个不同值。

证明。令 $\eta = \frac{c}{200d}\prod_{\gamma\in\Gamma}\rho(\gamma)$。根据命题 2.4，有 $\eta \leq \frac{c|B|}{2|G|}$。根据命题 2.7，存在半径函数 $\rho'\colon \Gamma \to \hat{G}$，使得 $B(\Gamma,\rho') = B$, $\|\rho'-\rho\|_\infty \leq \eta$并且 $|B(\Gamma,\rho') \setminus \overline{B(\Gamma,\rho'-\eta)}| \leq \frac{c}{20}|B(\Gamma,\rho')|$。

—

令 $Z = \{x \in B\colon \phi(x) = 0\}$。注意到

$$\sum_{t\in B(\Gamma,\rho'-\eta/2)} |Z \cap (t + B(\Gamma,\eta/2))| = \sum_{t,z\in G} \mathbb{1}_{B(\Gamma,\rho'-\eta/2)}(t)\mathbb{1}_Z(z)\mathbb{1}_{B(\Gamma,\eta/2)}(z-t)$$

$$\geq \sum_{t,z\in G} \mathbb{1}_{B(\Gamma,\rho'-\eta/2)}(z-s)\mathbb{1}_{Z\cap B(\Gamma,\rho'-\eta)}(z)\mathbb{1}_{B(\Gamma,\eta/2)}(s)$$
$$= \sum_{t,z\in G} \mathbb{1}_{Z\cap B(\Gamma,\rho'-\eta)}(z)\mathbb{1}_{B(\Gamma,\eta/2)}(s) = |Z\cap B(\Gamma,\rho'-\eta)||B(\Gamma,\eta/2)|.$$

通过平均，存在某个 $t\in B(\Gamma,\rho'-\eta/2)$，使得

$$|Z\cap(t+B(\Gamma,\eta/2))|\geq \frac{|Z\cap B(\Gamma,\rho'-\eta)|}{|B(\Gamma,\rho'-\eta/2)|}|B(\Gamma,\eta/2)|.$$

注意到 $|Z\cap B(\Gamma,\ \rho'-\eta)|\geq |Z|-|B\setminus B(\Gamma,\ \rho'-\eta)|\geq |Z|-\frac{c}{20}|B|$，因此 $\frac{|Z\cap B\ \Gamma\ \rho'-\eta\ |}{|B\ \Gamma\ \rho'-\eta/2}$ –(，）（，）| $\geq \frac{c}{2}$。因此$|Z\cap(t+B(\Gamma,\ \eta/2))|\geq \frac{c}{2}|B(\Gamma,\ \eta/2)|$。

假设 ϕ在 $B(\Gamma,\ \rho/2)$ 上取 m 个值，分别为 $\phi(x_1)$ ……，$\phi(x_m)$。考虑集合$X_i = x_i + (Z\cap(t+B(\Gamma,\ \eta/2)))$。每个 X_i 都包含在 B 中，并且由于 Freiman 线性，ϕ在 X_i 上等于 $\phi(x_i)$。因此，集合 X_1，……，X_m互不相交，从而 $m\frac{c}{2}|B(\Gamma,\ \eta/2)|\leq |B|$，这意味着$m\leq 2c^{-1}\eta^{-d}$，并证明了该断言。 □

接下来，我们证明，如果一个陪集广义等差数列上的 Freiman 线性映射取值较少，那么它在一个与定义域密切相关的更大的陪集广义等差数列上恒为零。

命题 2.43 （陪集广义等差数列上取值较少的 Freiman 线性映射）。设 $C=[-N_1,N_1]\cdot v_1+\cdots+[-N_d,N_d]\cdot v_d+K$ 是秩为 d 的对称真陪集进程，其形式为标准形式；设 ϕ：$C\to H$ 是一个 *Freiman* 线性映射。假设存在某个 $h\in H$，使得 ϕ（x）$=h$ 对至少 $\alpha|C|$ 个元素 $x\in C$ 成立。那么存在一个更大的对称真陪集进程 $C'=[-M_1,M_1]\cdot\ell_1v_1+\cdots+[-M_d,M_d]\cdot\ell_dv_d+K'\subseteq C$，其秩为 d，满足 $M_i\ell_i\leq N_i$，且大小至少为 $2^{-O(d^2)}\ \alpha^{d+1}|C|$，使得 $\phi=0$ 在 C' 上成立。

证明。 </style}令 $N_i'=\lfloor\alpha N_i/2d\rfloor$，若 $N_i\geq 2\alpha^{-1}d$；否则令 $N_i'=0$。令 $S=[-N_1',N_1']\cdot v_1+\cdots+[-N_d',N_d']\cdot v_d+K$，它也是秩至多为 d 的对称真陪集广义等差数列。陪集广义等差数列 C 和 S 满足引理 2.15 的条件，因此我们可以找到一组平移集 T，使得 $T+S$ 几乎铺砌 C，其中 $|T+S|\geq(1-\alpha/2)|C|$。通过平均，存在一个平移 $t+S$，使得 $\phi(t+s)=v$ 对至少 $\frac{\alpha}{2}|S|$ 个元素 $s\in S$ 成立。由于 S 的秩为 d，我们有 $\frac{\alpha}{2}|S|\geq\frac{\alpha}{2^{d+1}}|S-S|$。固定一个这样的元素 s_0，并利用 Freiman 线性，同时注意到 $S-S\subseteq C$（因为对每个 i，都有 $2N_i'\leq N_i$），可得至少有 $\frac{\alpha}{2^{d+1}}|S-S|$ 个 $S-S$ 中的元素映射为零。但集合 $Z=\{x\in S-S\colon\phi(x)=0\}$ 是 $S-S$ 的 Freiman 子群，因此由引理 2.14 可得所需的陪集广义等差数列。 □

E-同态。不同于向量空间的情形，在向量空间中，我们可以轻松地将子空间上的线性映射延拓到整个空间；而对于一般的阿贝尔群，不可能将定义在子群上的同态延拓出去。不过，如果允许存在小的误差，这类延拓便成为可能。这正是引入 E-同态的动机（回忆定义 2.3）。

命题 2.44（朴素延拓）。设 $\phi\colon\ B(\Gamma,\rho)\ \to H$ 是一个 *Freiman* 线性映射。设 $d=|\Gamma|$、$\rho'=d^{-2d}\rho$ 以及 $G'=\langle B(\Gamma,\rho')\rangle$。设 m 为正整数，使得 $G'=mB(\Gamma,\rho')$。

那么，存在一个大小至多为 $O(d(d$对数 $d+$对数 $m+1)$ 的集合 $S\subseteq H$，具有如下性质。

~定义 $\phi\colon\ G'\to H$ 为 $\phi(y)=\phi(x_1)+\cdots+\phi(x_m)$，其中 x_1、……、$x_m\in B(\Gamma,\rho')$ 任意选取，且满足 $x_1+\cdots+x_m=y$。那么我们有

$$\tilde{\phi}(x_1+\cdots+x_m)-\phi(x_1)-\cdots-\phi(x_m)\in\langle S\rangle_{\{-1,0,1\}} \tag{8}$$

对所有 x_1、……、$x_m\in B(\Gamma,\rho')$，均成立。

~**备注**。在定义 ϕ 时，为了避免上界中的指数损失，我们可以使用 y_i 的许多份副本，因此取 $x=z_1+z_2+z_3+z_4+2y_1+\cdots+2^r y_r$，并定义 $\tilde{\phi}(x)=\sum_{i\in[4]}\phi(z_i)+\sum_{i=1}^m 2^i\phi(y_i)$。

要看出我们需要几个加数，考虑 $X=\{0,1\}^r\times H$ 在 $G=(\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z})^r\times H$ 中。那么，出于平凡的计数理由，$a_1\cdot X+\cdots+a_k\cdot X=G$ 至少需要对数个加数。

证明。由于我们选择 ρ' 的方式，根据命题 2.35，我们可以找到真对称陪集广义等差数列 C，$C'=d^{2d}C$，其秩至多为 d，满足 $B(\Gamma,d^{-2d}\rho')\subseteq C\subseteq B(\Gamma,\rho')\subseteq C'\subseteq B(\Gamma,\rho)$。注意，包含关系 $C\subseteq B(\Gamma,\rho')\subseteq C'$ 意味着 C 也生成 G'。还要注意，Freiman 线性性质在处理陪集广义等差数列时尤其有用；也就是说，如果 $e_1,\dots,e_{d'}$ 是 $C'=d^{2d}P+H$ 中广义等差数列的生成元，那么

$$\phi(\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_{d'}e_{d'}+h)=\lambda_1\phi(e_1)+\cdots+\lambda_{d'}\phi(e_{d'})+\phi(h) \tag{9}$$

由归纳法可轻易得出。

令 L_i 为 P的长度。考虑格 $\Lambda=\{\lambda\in\mathbb{Z}^{d'}\colon\ \lambda_1e_1+\cdots+\lambda_{d'}e_{d'}\in H\}$，它是满秩的。将集合 $[-L_1,L_1]\times\ldots\times[-L_{d'},L_{d'}]$记作 $Q\subseteq\mathbb{Z}^{d'}$。注意到，陪集广义等差数列 C 是真广义等差数列，因为 $\Lambda\cap Q=\{0\}$。

令 μ_1，…，μ_ℓ 为 $\Lambda\cap(2md^{2d})Q$中的极大解离集，即 μ_i 的非平凡 $\{-1,0,1\}$-线性组合均不为零。

断言 2.45。*(i)* 我们有 $\ell\le 2d(2d$对数 $d+10+$对数 $m)$。

(ii) 我们有 $\Lambda\cap(2md^{2d})Q\subseteq\langle\mu_1,\dots,\mu_\ell\rangle_{\{-1,0,1\}}$。

证明。**(i) 的证明**。将 $\frac{1}{2}Q$ 记作盒子 $(-L_1/2,\ L_1/2]\times\ldots\times(-L_{d'}/2,\ L_{d'}/2]$，我们断言，对于所有 $I\subseteq[\ell]$，平移集 $\sum_{i\in I}\mu_i+\frac{1}{2}Q$ 两两不相交。否则，对于某个 $I\ne J$，有 $\sum_{i\in I}\mu_i-\sum_{i\in J}\mu_j\in Q$，但 $Q\cap\Lambda=\{0\}$ 会导致矛盾。这些平移集包含在 $(2md^{2d}+1)Q$中，因此有 $2^\ell\le(4md^{2d}+2)^{d'}$，于是 $\ell\le 2d(2d\log\ d+10+\log\ m)$。

命题 (ii) 的证明。这是因为 $\mu_1,\dots,\mu_\ell$ 是 $\Lambda\cap(2m)Q$ 中的一个极大解离集。

□

对每个 $i \in [\ell]$，定义 $\sigma_i = \sum_{j\in[d']} \mu_{ij}\,\phi(e_j)$ 和 $\sigma'_i = \phi\Big(\sum_{j\in[d']} \mu_{ij}\,e_j\Big)$。注意，定义 σ'_i，$\sum_{j\in[d']} \mu_{ij}\,e_j$ 中的论证属于 H。最后，令 $S = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_\ell\}$。

回顾，对于 $P = [-L_1, L_1]e_1 + \cdots + [-L_{d'}, L_{d'}]e_{d'}$，有 $C = P + H$。令 $x_1, \ldots\ldots, x_{2m} \in B(\Gamma, \rho')$ 满足 $\sum_{i\in[2m]} x_i = 0$。还要回顾，$B(\Gamma, \rho') \subseteq C' = d^{2d}C$，因此我们可以写成 $x_i = \sum_{j\in[d']} \lambda_{ij}e_j + h_i$，其中 $|\lambda_{ij}| \leq d^{2d}L_j$ 以及 $h_i \in H$。于是，

$$\sum_{j\in[d']} \Big(\sum_{i\in[2m]} \lambda_{ij}\Big)e_j = -\sum_{i\in[2m]} h_i \in H. \tag{10}$$

由于 λ_{ij} 的上界，这给出了 H 内 e_j 的线性组合，其中 e_j 的系数的绝对值至多为 $2md^{2d}L_j$。因此，(10) 中的每个线性组合都给出了 $\Lambda \cap (2md^{2d})Q$ 中的一个点。按照我们构造 $\mu_1, \ldots\ldots, \mu_\ell$ 的方式，存在元素 $\xi_1, \ldots\ldots, \xi_\ell \in \{-1, 0, 1\}$，使得对于所有 $j \in [d']$，都有 $\sum_{i\in[2m]} \lambda_{ij} = \sum_{i\in[\ell]} \xi_i\mu_{ij}$。对 C' (9) 使用几次 Freiman 线性，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{i\in[2m]} \phi(x_i) &= \sum_{i\in[2m]} \phi\Big(\sum_{j\in[d']} \lambda_{ij}e_j + h_i\Big) = \Big(\sum_{i\in[2m]} \Big(\sum_{j\in[d']} \lambda_{ij}\phi(e_j)\Big)\Big) + \phi\Big(\sum_{i\in[2m]} h_i\Big)\\ &= \sum_{j\in[d']} \Big(\sum_{i\in[2m]} \lambda_{ij}\phi(e_j)\Big) + \phi\Big(\sum_{i\in[2m]} h_i\Big).\end{aligned}$$

利用 λ 与 μ之间的关系，我们得到

$$\sum_{j\in[d']} \Big(\sum_{i\in[2m]} \lambda_{ij}\phi(e_j)\Big) = \sum_{j\in[d']} \Big(\sum_{i\in[\ell]} \xi_i\mu_{ij}\phi(e_j)\Big) = \sum_{i\in[\ell]} \xi_i\Big(\sum_{j\in[d']} \mu_{ij}\phi(e_j)\Big) = \sum_{i\in[\ell]} \xi_i\sigma_i.$$

同理，

$$\sum_{i\in[2m]} h_i = -\sum_{j\in[d']} \Big(\sum_{i\in[2m]} \lambda_{ij}\Big)e_j = -\sum_{j\in[d]'} \sum_{i\in[\ell]} \xi_i\mu_{ij}e_j = -\sum_{i\in[\ell]} \xi_i\Big(\sum_{j\in[d']} \mu_{ij}e_j\Big)$$

且每个 $\sum_{j\in[d']} \mu_{ij}e_j$ 都属于 H。在 H上应用 Freiman 线性，我们得到

$$\phi\Big(\sum_{i\in[2m]} h_i\Big) = -\sum_{i\in[\ell]} \xi_i\phi\Big(\sum_{j\in[d']} \mu_{ij}e_j\Big) = -\sum_{j\in[d']} \xi_i\sigma'_i.$$

因此，

$$\sum_{i\in[2m]} \phi(x_i) = \sum_{i\in[\ell]} \xi_i(\sigma_i - \sigma'_i) \in \langle S\rangle_{\{-1,0,1\}}. \tag{11}$$

˜取命题中所述的任意 ϕ。令 $y \in G'$ 任意。于是，存在 $y_1, \ldots, y_m \in B(\Gamma, \rho')$，使得 $y_1 + \cdots + y_m = y$，其中 $\tilde{\phi}(y) = \sum_{i\in[m]} \phi(y_i)$。

˜还需验证性质 (8)。取任意 $x_1, \ldots, x_m \in B(\Gamma, \rho')$。值 $\tilde{\phi}(x_1 + \cdots + x_m)$定义为某个 $y_1, \ldots, y_m \in B(\Gamma, \rho')$对应的 $\sum_{i\in[m]} \phi(y_i)$，其中 $y_1 + \cdots + y_m = x_1 + \cdots + x_m$。因此

$$\tilde{\phi}(x_1 + \cdots + x_m) - \sum_{i\in[m]} \phi(x_i) = \sum_{i\in[m]} \phi(y_i) + \sum_{i\in[m]} \phi(-x_i).$$

但 $y_1 + \cdots + y_m + (-x_1) + \ldots (-x_m) = 0$，因此由 (11) 可得 $\sum_{i\in[m]} \phi(y_i) + \sum_{i\in[m]} \phi(-x_i) \in \langle S\rangle_{\{-1,0,1\}}$。 □

我们还需要 关于将子群上的 E-同态延拓到整个群的一个结果 p.

命题 2.46. 设 $H = \text{核}\chi \leq G$ 是一个指标为 M 的子群，它由同态 $\chi \in G^r$的核给出。设 $B(\Gamma, \rho)$ 是一个余维为 d 的 ***Bohr*** 集，使得 $\langle \chi_1, \ldots, \chi_r \rangle_{[-M,M]} \cap \langle \Gamma \rangle_R = \{0\}$，其中 $R = \mathsf{C}_{\mathrm{spec}} d 2^{10d+8} \rho^{-2d-1} M^{4d+2r}$。

设 ϕ： $H \cap B(\Gamma, \rho) \to K$ 是一个 E-同态。那么， ϕ 可延拓为定义在$B(\Gamma, \rho/16)$ 上的 E'-同态，其中

$$E' = m(E + \{0, \phi(0)\}) - m(E + \{0, \phi(0)\}) + \langle k_1, \ldots, k_m \rangle_{\{-1,0,1\}},$$

对于 $m \leq O$（对数 M） 以及某些元素 k_1，……， $k_m \in K$。

证明。我们可以假设 $r \leq \log_2 M$。记 ℓ_i为 χ_i的阶，该阶至多为 M。我们首先证明， $B(\Gamma, \rho/16M^2)$ 与子群 H的每个陪集都有交集。证明将通过傅里叶分析进行，并将应用命题 2.10，因此我们需要确保 Bohr 集是弱正则的。为此，令 $\varepsilon = \frac{\rho^d}{2^{5d+4} M^{2d+r}}, \eta = \rho\varepsilon/4$。引理 2.4 蕴含 $|B(\Gamma, \rho/16M^2)| \geq \frac{\rho^d}{2^{4d} M^{2d}} |G|$。根据抽~~屉原理，~~存在 $\rho' \in [\rho/32M^2, \rho/16M^2]$使得 $|B(\Gamma, \rho' + \eta) \setminus B(\Gamma, \rho')| \leq \varepsilon |G|/2$。注意 $R \geq \mathsf{C}_{\mathrm{spec}} d\eta^{-1}\varepsilon^{-1}$。应用命题 2.10，我们推得不等式 $|\widehat{\mathbb{1}_{B(\Gamma,\rho')}}(\tau)| > \varepsilon$蕴含 $\tau \in \langle \Gamma \rangle_{[-R,R]}$。现在我们证明 $B(\Gamma, \rho')$（从而 $B(\Gamma, \rho/16M^2)$）与 H的每个陪集都有交集。

反设， $t + H \cap B(\Gamma, \rho') = \emptyset$。于是

$$0 = \mathop{\mathbb{E}}_{x \in G} \mathbb{1}_{B(\Gamma,\rho')}(x) \mathbb{1}_H(x - t) = \mathop{\mathbb{E}}_{x \in G} \mathbb{1}_{B(\Gamma,\rho')}(x) \prod_{i \in [r]} \mathbb{1}(\chi_i(x - t) = 0)$$

$$= \mathop{\mathbb{E}}_{x \in G} \mathbb{1}_{B(\Gamma,\rho')}(x) \prod_{i \in [r]} \Big(\ell_i^{-1} \sum_{\lambda_i \in [0, \ell_i - 1]} \mathrm{e}\Big(-\lambda_i \chi_i(x - t) \Big) \Big)$$

$$= \frac{1}{\ell_1 \cdots \ell_r} \sum_{\lambda \in [0,\ell_1 - 1] \times \cdots \times [0, \ell_r - 1]} \mathop{\mathbb{E}}_{x \in G} \mathbb{1}_{B(\Gamma,\rho')}(x) \, \mathrm{e}\Big(-\sum_{i \in [r]} \lambda_i \chi_i(x - t) \Big)$$

$$= \frac{1}{\ell_1 \cdots \ell_r} \sum_{\lambda \in [0,\ell_1 - 1] \times \cdots \times [0, \ell_r - 1]} \widehat{\mathbb{1}_{B(\Gamma,\rho')}}\Big(\sum_{i \in [r]} \lambda_i \chi_i \Big) \, \mathrm{e}\Big(\sum_{i \in [r]} \lambda_i \chi_i(t) \Big).$$

上面求和中满足 λ 且 $\lambda \cdot \chi = 0$ 的项为 $\frac{1}{\ell_1 \ldots \ell_r} |B(\Gamma, \rho')| \geq 2^{-5d} M^{-2d-r} \rho^d$，）。对其余的 λ $\lambda \cdot \chi \neq 0$ $\Big|\widehat{\mathbb{1}_{B(\Gamma,\rho')}}\Big(\sum_{i \in [r]} \lambda_i \chi_i \Big)\Big| \geq$ 取平均，可知存在这样的 $2^{-5d} M^{-2d-r} \rho^d$ $\lambda_1 \chi_1 + \cdots + \lambda_r \chi_r \in \langle \Gamma \rangle_{[-R,R]}$ $\lambda_1 \ldots \lambda_r$，使得）。上述性质表明，对某个 ， ，成立。但此和属于 $\langle \chi_1, \ldots, \chi_r \rangle_{[-M,M]} \cap \langle \Gamma \rangle_{[-R,R]}$，其中只含有零。因此 $\lambda_1 \chi_1 + \cdots + \lambda_r \chi_r = 0$，这就产生了矛盾。因此， $B(\Gamma, \rho/16M^2)$ 与 H 的每个陪集都有交集，断言得证。

根据有限阿贝尔群分类，我们有 $G/H \cong C_{d_1} \oplus \ldots \oplus C_{d_m}$，其中某个直和由循环群构成。注意，$m \leq \log_2 M$。取直和中各循环群的生成元 $x_i + H$。

注意，我们可以通过加上 H 中的任意元素来修改 x_i，因此特别地，我们可以将 x_i 替换为 $x_i + H \cap B(\Gamma, \rho/16M^2)$ 中的一个元素；我们知道该集合非空，因此不失一般性，可保证 $x_i \in B(\Gamma, \rho/16M^2)$。于是我们找到了元素 $x_1, \ldots, x_m \in B(\Gamma, \rho/16M^2)$，使得当 λ_i 遍历 $[0, d_i - 1]$ 且 $d_i x_i \in H$ 对所有 i 成立时，$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m + H$ 恰好覆盖 H 的所有陪集。

特别地，对于每个 $g \in G$，都存在唯一的系数 $\lambda_i(g) \in [0, d_i - 1]$，使得 $g - \tilde{\sum}_{i\in[m]} \lambda_i(g) x_i \in H$。将这个差记为 $\pi(g)$。令 $h_i = d_i x_i$，并注意到 $h_i \in B(\Gamma, \rho/16M)$。虽然映射 $\pi\colon G \to H$ 不一定是同态，但事实证明它近似为一个同态，下面将对此加以说明。另请注意，$\sum_{i\in[m]} \lambda_i(g) x_i \in B(\Gamma, \rho/16)$，所以若 $g \in B(\Gamma, \rho/16)$，则 $\pi(g) \in B(\Gamma, \rho/8)$。

断言。 设 $g, g' \in G$。则 $\pi(g + g') \in \pi(g) + \pi(g') + \langle h_1, \ldots, h_m \rangle_{\{0,1\}}$。

证明。 令 $g, g' \in G$。那么 $g + g'$ 属于陪集 $(g + H) + (g' + H)$，这与 $\sum_{i\in[m]} \Big(\lambda_i(g) + \lambda_i(g')\Big) x_i + H$ 相同。这意味着，$\lambda_i(g + g')$ 是 $[0, d_i - 1]$ 中与 $\lambda_i(g) + \lambda_i(g')$ 模 d_i 同余的唯一整数。因此，对于某个 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$，有 $\lambda_i(g + g') = \lambda_i(g) + \lambda_i(g') - \varepsilon_i d_i$，

$$\pi(g+g') = g+g' - \sum_{i\in[m]} \lambda_i(g+g') x_i = g+g' - \sum_{i\in[m]} (\lambda_i(g)+\lambda_i(g') - \varepsilon_i d_i) x_i = \pi(g)+\pi(g') + \sum_{i\in[m]} \varepsilon_i \tilde{h}_i. \quad \square$$

我们还记录了 ϕ 中关于更多项的部分线性性。

断言。 对于任意 $g_1, \ldots, g_\ell \in B(\Gamma, \rho) \cap H$，使得前 $i \in [\ell]$ 个元素的所有和也属于 $B(\Gamma, \rho)$。则有

$$\phi(g_1 + \cdots + g_\ell) \in \sum_{i\in[\ell]} \phi(g_i) - (\ell - 1)\phi(0) + (\ell - 1)E.$$

证明。 我们对 ℓ 使用归纳法来证明该断言。基例显然成立。假设该断言对 ℓ 成立，并设给定了 $g_1, \ldots, g_{\ell+1} \in G$。还要注意，$g_i$ 的所有和都属于 H。于是

$$\phi(g_1 + \cdots + g_{\ell+1}) - \phi(g_1 + \cdots + g_\ell) - \phi(g_{\ell+1}) + \phi(0) \in E,$$

因此由归纳假设可知

$$\phi(g_1 + \cdots + g_{\ell+1}) \in \phi(g_1 + \cdots + g_\ell) + \phi(g_{\ell+1}) - \phi(0) + E \subseteq \sum_{i\in[\ell+1]} \phi(g_i) - \ell\phi(0) + \ell E. \qquad \square$$

考虑 $\tilde{\phi}\colon B(\Gamma, \rho/16) \to K$ 由 $\tilde{\phi} = \phi \circ \pi$ 给出。由于对所有 $x \in G$，$\pi(x) \in H$，且只要 $x \in B(\Gamma, \rho/16)$，就有 $\pi(x) \in B(\Gamma, \rho/8)$，因此这是一个良定义的映射。设 x、a、$b \in G$ 为满足 $x + a + b$、$x + a$、$x + b$、$x \in B(\Gamma, \rho/2)$ 的元素。根据上文关于 π 的断言，我们有 ε_i、$\varepsilon_i' \in \{0, 1\}$ 使得

$$\pi(x + a + b) - \pi(x + a) - \pi(b) = \sum_{i\in[m]} \varepsilon_i \tilde{h}_i, \qquad \pi(x + b) - \pi(x) - \pi(b) = \sum_{i\in[m]} \varepsilon_i' \tilde{h}_i.$$

设 $I=\{i\in[m]:\ \varepsilon_i=1\}$ 且 $I'=\{i\in[m]:\ \varepsilon'_i=1\}$。注意，由于 $\pi(x+a)\ \pi(b)\in B(\Gamma,\ \rho/8)$ 且 $h_i\in B(\Gamma,\ \rho/16M)$，$\pi(x+a)+\pi(b)+\sum_{i\in[m]}\varepsilon_i h_i$ 中的所有部分和都属于 $B(\Gamma,\ \rho)$，而上文的第二个断言意味着

$$\begin{aligned}\phi(\pi(x+a+b))-\phi(\pi(x+a)) =&\phi\Big(\pi(x+a)+\pi(b)+\sum_{i\in[m]}\varepsilon_i\tilde{h}_i\Big)-\phi(\pi(x+a))\\ \in&\phi(\pi(b))+\sum_{i\in I}\phi(\tilde{h}_i)-(|I|+1)\phi(0)+(|I|+1)E.\end{aligned}$$

注意到 $0\in E$（由于 $\partial_{0,\ 0}\phi(0)=0$），因此我们可以将 $(|I|+1)\phi(0)+(|I|+1)E$ 替换为 $(m+1)(E+\{0,\phi(0)\})$。

Then

$$\begin{aligned}\Delta_{a,b}\tilde{\phi}(x) =&\Big(\phi(\pi(x+a+b))-\phi(\pi(x+a))-\phi(\pi(b))\Big)-\Big(\phi(\pi(x+b))-\phi(\pi(x))-\phi(\pi(b))\Big)\\ \in&\sum_{i\in I}\phi(\tilde{h}_i)-\sum_{i\in I'}\phi(h_i)+(m+1)(E+\{0,\phi(0)\})-(m+1)(E+\{0,\phi(0)\}).\end{aligned}$$

滥用记号，将 $m+1$ 替换为 m，这不会影响上界，并记作 $k_i=\phi(h_i)$。

□

§3 一般阿贝尔群上的代数正则性方法

（双线性的）代数正则性方法起源于 [23]，，其中首次得到了 $U^4(\mathbb{F}_p^n)$ 范数的定量界。在加法组合学中，对于双线性情形，自然会考虑用代数方式定义的图。例如，对于有限向量空间的情形，我们可以考虑一个二部图，其顶点类是 $\mathbb{F}_p^n$ 的副本；若双线性映射 $\beta:\mathbb{F}_p^n\times\mathbb{F}_p^n\to\mathbb{F}_p^r$ 满足 $\beta(x,\ y)=0$，则 xy 为一条边。事实证明，可以为这类图证明代数正则性引理，将其顶点类划分为有界数量的部分，每部分都是某个固定低余维子空间的陪集，并且这些部分的成对组合会诱导出准随机图。在这种情形下，这样的引理取代了 Szemer´edi 正则性引理 [59, 60]，并且可以像组合正则性方法那样加以使用。关键在于，由于图具有代数结构，我们仍能得到正则性引理的良好上界，以及若干其他附加性质。一般阿贝尔群上的代数正则性引理的一个版本见于 [49]。

为了利用代数正则性引理，我们需要拟随机二部图理论，下面的小节将对此作简要回顾。在再下一个小节中，我们将重新介绍代数正则性引理（定理 3.5）。

3.1. 二部图的拟随机性

主要概念及相关结果的表述取自 [49]。

在本小节中，G 表示一个顶点类为 X 和 Y 的二部图。我们也将其视为

G 同时也是定义在乘积 $X \times Y$ 上的一个取值于 $\{0,1\}$ 的函数。令 $\|\cdot\|_{\square}=\|\cdot\|_{\square(X,Y)}$ 表示盒范数，其定义为

$$\|f\|_{\square(X,Y)}=\Big(\mathop{\mathbb{E}}_{x_0,x_1\in X}\mathop{\mathbb{E}}_{y_0,y_1\in Y} f(x_0,y_0)\,\overline{f(x_1,y_0)}\,\overline{f(x_0,y_1)}\,f(x_1,y_1)\Big)^{1/4}.$$

引理 3.1 (引理 41 出自 [49])。设 $f\colon X\times Y\to\mathbb{C}$、$u\colon X\to\mathbb{C}$ 和 $v\colon Y\to\mathbb{C}$ 是函数。n

$$\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in X,y\in Y} f(x,y)u(x)v(y)\Big|\le\|f\|_{\square}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}.$$

给定一个顶点类为 X 和 Y 的二部图 G，其密度 δ 定义为 $\mathbb{E}_{x\in X,\ y\in Y}G(x,\ y)$。若 $\|G-\delta\|_{\square}\le\varepsilon$，则称 G 是 ε-准随机 的。准随机图的表现就像从给定密度下随机选取的图一样。

引理 3.2 (引理 42 出自 [49])。设 k 是正整数，且 G 是一个密度为 δ、顶点类为 X 和 Y 的 ε-准随机二部图。均匀且相互独立地随机选取 x_1、……、$x_k\in X$。设 $\eta>0$ 是一个正实数。则

$$\mathbb{P}\Big(\Big||N_{x_1}\cap\ldots\cap N_{x_k}|-\delta^k|Y|\Big|\ge\eta|Y|\Big)\le 4k\eta^{-2}\varepsilon.$$

引理 3.3 (引理 43 出自 [49])。设 k 和 m 是正整数，且 G 是一个密度为 δ、顶点类为 X 和 Y 的 ε- 准随机二部图。设 $M\subseteq Y^m$ 是 Y 中由 m- 元组构成的集合。均匀且相互独立地随机选取 x_1、……、$x_k\in X$。设 $\eta>0$ 是一个正实数。则

$$\mathbb{P}\Big(\Big||N_{x_1}^m\cap\ldots\cap N_{x_k}^m\cap M|-\delta^{mk}|M|\Big|\ge\eta|Y|^m\Big)\le 4km\eta^{-2}\varepsilon.$$

引理 3.4 （ [49]中的引理 44）。设 $\delta,\varepsilon\in[0,1]$。假设 G 是一个二部图，其顶点类为 X 和 Y，满足

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x\in X}\Big||N_x|-\delta|Y|\Big|\le\varepsilon|Y| \tag{12}$$

and

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x,x'\in X}\Big||N_x\cap N_{x'}|-\delta^2|Y|\Big|\le\varepsilon|Y|. \tag{13}$$

那么，G 的密度 δ' 满足 $|\delta-\delta'|\le\varepsilon$，且图 G 是 $3\sqrt[8]{\varepsilon}$-准随机的。

3.2. 一般代数正则性引理

现在我们证明一般阿贝尔群上的代数正则性引理。以下结果见于 [49],，但表述略有不准确。具体而言，在下文的定理 3.5 中，[49], 原版里的 Bohr 集 $B(\chi_1、\ldots\ldots、\chi_r;\ \rho')$ 不依赖于陪集广义等差数列 C' 的平移 t。我们在此作出修正，不过该论文的主要结果——一般有限阿贝尔群上的双线性 Bogolyubov 论证——保持不变。[4] 此外，与先前版本不同，

[4]事实上，在那篇论文中，我们可以对 $t=0$ 使用代数正则性引理，从而得到一个对称陪集广义等差数列 C'，随后双线性 Bogolyubov 论证的证明保持不变。

在本文中，我们需要的是带半径函数的 Bohr 集，而不是只有单个半径的 Bohr 集。在我们希望两个双线性 Bohr 簇同时具有拟随机性的应用中，使用半径函数至关重要。我们将在第 12 节对此作进一步说明。

定理 3.5（双线性 Bohr 簇的代数正则性引理）。设 G 和 H 是有限阿贝尔ˆ群。设 C 是群 H 中秩为 d 的真陪集广义等差数列，且 $L_1,\ldots,L_r\colon C\to G$ 是 *Freiman* 同态。设 $\rho\colon [r]\to(0,1)$ 是一个半径函数，并给定 $\eta>0$。

那么，我们可以找到一个秩至多为 d 的真陪集广义等差数列 C'，以及一个秩为 d 的广义等差数列集合 T，其大小至多为

$$\exp\Big(d^{O(1)}r^{O(1)}\log^{O(1)}(\eta^{-1})\log^{O(1)}(\rho(1)^{-1}\cdots\rho(r)^{-1})\Big),$$

使得 $C'+T\subseteq C$, $|C'||T|=|C'+T|\geq(1-\eta)|C|$，且每个 $t+C'$ 都以如下意义诱导出双线性 *Bohr* 簇的一个拟随机部分。

给定 $t\in T$，取特征 $\chi_1=L_1(t)\ldots,\chi_r=L_r(t)$，存在实数 $\delta>0$ 和 $\rho'\colon [r]\to(0,1)$，满足 $\rho'(i)\in[\rho(i)/4,\rho(i)/2]$ 对所有 $i\in[r]$ 均成立，使得

(i) 对于至少 $1-\eta$ 比例的所有元素 $x\in t+C'$，我们有

$$\Big||B(\chi_1,\ldots,\chi_r,\rho')\cap B(L_1(x)-\chi_1,\ldots,L_r(x)-\chi_r;\rho')|-\delta|B(\chi_1,\ldots,\chi_r;\rho')|\Big|\leq\eta|G|,$$

(ii) 对于至少 $1-\eta$ 比例的所有数对 $(x,x')\in(t+C')\times(t+C')$，我们有

$$\Big||B(\chi_1,\ldots,\chi_r,\rho')\cap B(L_1(x)-\chi_1,\ldots,L_r(x)-\chi_r,\rho')\cap B(L_1(x')-\chi_1,\ldots,L_r(x')-\chi_r;\rho')|$$
$$-\delta^2|B(\chi_1,\ldots,\chi_r;\rho')|\Big|\leq\eta|G|.$$

此外，如果 $C=a+[0,N_1-1]\cdot v_1+\cdots+[0,N_d-1]\cdot v_d+K$ 是 C的标准形式，那么我们可以取 C' 为 $[-N_1',N_1']\cdot\ell_1v_1+\cdots+[-N_d',N_d']\cdot\ell_dv_d+K'$、$\ell_iN_i'\leq N_i$和 $K'\leq K$的形式；如果 C还具有对称性，那么我们可以假设 C' 是对称的，且 $0\in T$。

证明与 [49], 中提出的证明非常相似，但加入了修正。

证明。令 $C=a+[0,N_1-1]\cdot v_1+\cdots+[0,N_d-1]\cdot v_d+H_0$ 为 C 的标准形式。我们首先将映射 L_i 线性化。定义 $\tilde{a}=a+\sum_{i\in[d]}\lfloor N_i/2\rfloor v_i$ 和映射 $L_i'\colon C-\tilde{a}\to\hat{}G$，使得 $L_i'(x)=L_i(x+\tilde{a})-L_i(\tilde{a})$，它们是 Freiman 线性的。

证明将采用迭代方式，在每一步中我们都将跟踪一个对称陪集广义等差数列 S和一个格 Λ。它们的关键性质如下。

- 陪集广义等差数列 S将具有 $[-N_1',N_1']\cdot\ell_1v_1+\cdots+[-N_d',N_d']\cdot\ell_dv_d+H'$、$\ell_iN_i'\leq N_i$和 $H'\leq H_0$ 的形式，并将作为 C'的候选选择。

• 格 Λ 中的每个元素 λ 都将满足 $\lambda \cdot L'(x) = 0$，对所有 $x \in S$均如此，不过 Λ 可能不包含所有此类线性组合。

为了最终能够几乎铺砌 C 与 S，我们需要对广义等差数列的长度稍加注意。首先，当 $N_i \geq 2\eta^{-1}d$ 时，我们定义 $N_i' = \lfloor \eta N_i/2d \rfloor$；否则定义 $N_i' = 0$。我们还令 $S = a + [-N_1', N_1'] \cdot v_1 + \cdots + [-N_d', N_d'] \cdot v_d + H_0$ 和 $\Lambda = \{0\}$。

在证明过程中，陪集广义等差数列只会被替换为它的子等差数列。特别地，在证明的每一步，S 都满足引理 2.15 的条件，因此我们能够用 S 几乎铺砌 C。

此外，在迭代的每一步，我们都将扩张格 Λ。后一性质将保证该过程迅速终止。

假设我们已经完成该过程的一步，并来考察所述对象。任取一个满足 $t + S \subseteq C$ 的 $t \in C$。令 $\chi_1 = L_1(t), \ldots, \chi_r = L_r(t)$，并记作$\Gamma = \{\chi_1, \ldots, \chi_r\}$。令 $M = \{\lambda \in \mathbb{Z}^r : \lambda \cdot \chi = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^r$ 为 $\chi_1, \ldots, \chi_r$ 的湮灭子格。

确保弱正则性。令 $\mu = \min_{j \in [r]} \rho(j)$。我们首先找出一个合适的半径函数 $\rho' \in [\rho/4, \rho/2]$。考虑 $\rho/2 - \frac{j\eta^2\mu}{2000}$ for $j \in [500\eta^{-2}]$作为 ρ'的候选项。根据抽屉原理，存在这样一个 ρ' 值，使得对于至少 $1 - \frac{\eta}{10}$ 比例的 $x \in S$，我们有

$$\Big|\Big(B\Big(\Gamma, \rho' + \frac{\eta^2\mu}{2000}\Big) \cap B\Big(L_1'(x), \ldots, L_r'(x); \rho' + \frac{\eta^2\mu}{2000}\Big)\Big) \setminus \Big(B\Big(\Gamma; \rho'\Big) \cap B\Big(L_1'(x), \ldots, L_r'(x); \rho'\Big)\Big)\Big| \leq \frac{\eta}{10}|G|, \tag{14}$$

对于至少 $1 - \frac{\eta}{10}$比例的数对 $(x, x') \in S \times S$，我们有

$$\Big|\Big(B\Big(\Gamma, \rho' + \frac{\eta^2\mu}{2000}\Big) \cap B\Big(L_1'(x), \ldots, L_r'(x); \rho' + \frac{\eta^2\mu}{2000}\Big) \cap B\Big(L_1'(x'), \ldots, L_r'(x'); \rho' + \frac{\eta^2\mu}{2000}\Big)\Big) \setminus \Big(B\Big(\Gamma; \rho'\Big) \cap B\Big(L_1'(x), \ldots, L_r'(x); \rho'\Big) \cap B\Big(L_1'(x'), \ldots, L_r'(x'); \rho'\Big)\Big)\Big| \leq \frac{\eta}{10}|G| \tag{15}$$

and

$$\Big|B\Big(\Gamma; \rho' + \frac{\eta^2\mu}{2000}\Big) \setminus B(\Gamma; \rho')\Big| \leq \frac{\eta}{10}|G|. \tag{16}$$

寻找新的消失线性组合。下一个断言表明，$t + S$ 会产生一个拟随机部分，除非我们得到由映射 $L_1', \ldots, L_r'$ 在 S 上的取值所给出的新的特征标消失线性组合。

令 $K = O(r\eta^{-3}\mu^{-1})$ 为命题 2.10 给出的量，使得只要 $\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell \in \hat{G}$ 是群 $\ell \leq 3r$ 和子群 σ 的特征：$[\ell] \to (0,1)$ 是具有弱正则性性质的半径函数

$$\Big||B(\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell; \sigma + \eta^2\mu/2000)| - |B(\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell; \sigma)|\Big| \leq \frac{\eta}{10}|G| \tag{17}$$

then

$$\left||B(\gamma_1,\dots,\gamma_\ell;\sigma)|-\sum_{a_1,\dots,a_\ell\in[-K,K]}\mathbb{1}(a_1\gamma_1+\dots+a_\ell\gamma_\ell=0)c_{1,a_1}\dots c_{\ell,a_\ell}|G|\right|\le\frac{\eta}{5}|G|, \tag{18}$$

其中，我们将 $c_{i,a}$ 记为式 (5) 中定义的隆起函数在 a 处的傅里叶系数值 $\mathbf{b}_{\sigma(i),\eta^2\mu/2000}(a)$。

我们注意到，在论证的所有阶段， K 都相同；特别是，它不依赖于S，也不依赖于其大小。这一点对于说明该过程能够在合理短的时间内终止至关重要。

此外，我们将选择 σ 为 ρ'，或为拼接项（ρ'， ρ'）和（ρ'， ρ'， ρ'），因此实际上$c_{i,\ a}$ 变为 $\mathbf{b}_{\rho'(i')\ \eta^2\mu/2000}(a)$，其中 $i'\in[r]$ 是模 r与 i 同余的整数。注意，对于所有半径函数的选择，$c_{i,\ a}$ 的含义都相同；唯一的区别在于，我们可能只能使用前 r 个或 $2r$ 个系数，而不是全部 $3r$ 个系数。特别是，我们可以用$c_{i,\ a}$ 代替$c_{i+r,\ a}$ 和$c_{i+2r,\ a}$。

断言 3.6。假设所有数对$(x,x')\in S\times S$中至少有 $1-\frac{\eta}{10}$ 的比例满足以下性质：如果等式

$$\nu_1\chi_1+\dots+\nu_r\chi_r+\lambda_1L_1'(x)+\dots+\lambda_rL_r'(x)+\lambda_1'L_1'(x')+\dots+\lambda_r'L_r'(x')=0 \tag{19}$$

对某些 $\nu,\lambda,\lambda'\in[-K,K]^r$成立，则 $\nu\in M$和 $\lambda,\lambda'\in\Lambda$。于是，性质 ***(i)*** 和 ***(ii)*** 在$t+S$上成立，其中 $\delta=\sum_{\lambda\in\Lambda\cap[-K,K]^r}c_{1,\lambda_1}\dots c_{r,\lambda_r}$。

证明。定义 δ_0 为

$$\delta_0=\sum_{\nu\in M\cap[-K,K]^r}c_{1,\nu_1}\dots c_{r,\nu_r}$$

并将 δ_1 定义为

$$\delta_1=\sum_{\lambda\in\Lambda\cap[-K,K]^r}c_{1,\lambda_1}\dots c_{r,\lambda_r}.$$

我们注意到 (19) 的两个推论。具体来说，取任意满足 (19) 的 (x,x')，令 $\lambda=\lambda'=0$，并注意到 $0\in\Lambda$，可推得 $\nu\in[-K,K]^r$和 $\nu_1\chi_1+\dots+\nu_r\chi_r=0$蕴含 $\nu\in M$。此外，通过平均，至少有 $(1-\eta)|S|$ 个元素 $x\in S$，对每个这样的元素，都存在 $x'\in S$，使得数对 (x,x') 具有性质 (19)。取 $\lambda'=0$，我们看到，如果等式

$$\nu_1\chi_1+\dots+\nu_r\chi_r+\lambda_1L_1'(x)+\dots+\lambda_rL_r'(x)=0$$

对某些 $\nu,\lambda\in[-K,K]^r$成立，因此 $\nu\in M$和 $\lambda\in\Lambda$。现在我们来证明这个断言。

由不等式 (16) 和 (18) 可得

$$\left||B(\Gamma;\rho')|-\sum_{\nu\in[-K,K]^r}\mathbb{1}(\nu_1\chi_1+\dots+\nu_r\chi_r=0)c_{1,\nu_1}\dots c_{r,\nu_r}|G|\right|\le\frac{\eta}{5}|G|.$$

如前所述，(19) 的一个特殊情形意味着，所有对求和有贡献的 ν 都属于 M。因此，由于对于所有 $\nu \in M$， $\nu \cdot \chi = 0$

$$\Big||B(\Gamma;\rho')|-\delta_0|G|\Big| \le \frac{\eta}{5}|G|.$$

注意，所有 $x \in S$ 中至少有 $1-\eta/5$ 比例满足 (14) 以及由 (19) 推出的第二个性质。对于这样的 x，Bohr 集 $B(\Gamma \cup \{L_1'(x)\dots, L_r'(x)\};\ \rho')$ 满足条件 (17)，因此不等式 (18) 给出

$$\Big||B(\Gamma \cup \{L_1'(x),\dots,L_r'(x)\};(\rho',\rho'))| - \sum_{a,\nu\in[-K,K]^{[r]}} \mathbb{1}\Big(\sum_{i\in[r]} \nu_i\chi_i + a_iL_i'(x) = 0\Big)$$
$$c_{1,\nu_1}\dots c_{r,\nu_r}c_{r+1,a_1}\dots c_{2r,a_r}|G|\Big| \le \frac{\eta}{5}|G|,$$

同时，利用 (19) 的一个特殊情形，以及对所有 $\lambda \in \Lambda$ 和 $x \in S$ 都有 $\lambda \cdot L'(x) = 0$ 成立这一事实，我们得到等式

$$\begin{aligned}\sum_{a,\nu\in[-K,K]^r} &\mathbb{1}\Big(\sum_{i\in[r]} \nu_i\chi_i + a_iL_i'(x) = 0\Big)c_{1,\nu_1}\dots c_{r,\nu_r}c_{1,a_1}\dots c_{r,a_r}\\ &= \sum_{a,\nu\in[-K,K]^r} \mathbb{1}(a\in\Lambda)\mathbb{1}(\nu\in M)c_{1,\nu_1}\dots c_{r,\nu_r}c_{1,a_1}\dots c_{r,a_r}\\ &= \delta_0\delta_1.\end{aligned}$$

因此，

$$\Big||B(\Gamma \cup \{L_1'(x),\dots,L_r'(x)\};(\rho',\rho'))|-\delta_1|B(\Gamma;\rho')|\Big| \le \frac{\eta}{5}|G|.$$

最后，回想 $\chi_i = L_i(t)$，并注意到 $L_i'(x) = L_i(x+\tilde{a}) - L_i(\tilde{a}) = L_i(t+x) - L_i(t) = L_i(t+x) - \chi_i$。于是

$$B(\Gamma \cup \{L_1'(x),\dots,L_r'(x)\};(\rho',\rho')) = B(\Gamma;\rho') \cap B(L_1(t+x)-\chi_1,\dots,L_r(t+x)-\chi_r;\rho')$$

pr证明了断言的第一部分，其中 $\delta = \delta_1$。第二个性质的证明类似 . □

假设 $t+S$ 在如下意义下不是准随机的：对于半径函数 ρ'，性质 **(i)** 和 **(ii)** 并非同时成立。那么断言 3.6 中的两个假设至少有一个不成立，但无论哪种情况，我们都可以得出结论：至少有 $\frac{\eta}{10}|S|^2$ 对 $(x,x') \in S\times S$ 满足等式 —

$$\sum_{i\in[r]} \nu_i\chi_i + \lambda_iL_i'(x) + \lambda_i'L_r'(x') = 0$$

其中，$\nu \notin M, \lambda \notin \Lambda$ 和 $\lambda' \notin \Lambda$ 至少有一个成立，且所有系数都属于 $[-K,K]$。通过平均，我们得到这样一个线性组合，它对 S 中至少 $10^{-\eta_{(2K+1)_{3r}}}|S|^2$ 对元素 (x,x') 成立。~~我们~~固定这样一个线性组合。

首先，假设 $\lambda, \lambda' \in \Lambda$。那么 $\sum_{i\in[r]} \lambda_i L_i'(x) + \lambda_i' L_i'(x') = 0$，因此 $\sum_{i\in[r]} \nu_i \chi_i = 0$，这意味着 $\nu \in M$，从而矛盾。因此，不失一般性，我们可以假设 $\lambda \notin \Lambda$。对 $x' \in S$ 求平均后，我们得到这样一个元素，使得 $\lambda \cdot L'(x) = -(\nu \cdot \chi + \lambda' \cdot L'(x'))$ 至少对 $10^{\eta (2K+1)^{3r}} |S|$ 个 $x \in S$ 的选择成立。

将引理 2.43 应用于 S 上的 Freiman 线性映射 $\lambda' \cdot L'$，可找到一个形状相同、大小为

$$|S'| \geq 2^{-O(d^2)} \Big(\frac{\eta}{10(2K+1)^{3r}} \Big)^{d+1} |S|$$

且 $\lambda \cdot L'$ 在其上消失的对称陪集广义等差数列 S。用 S' 代替 S，并用 $\Lambda' = \Lambda + \langle \lambda \rangle_{\mathbb{Z}}$ 代替 Λ。

回想一下，在论证的每一步中，K 都相同。由于集合 $(\Lambda' \setminus \Lambda) \cap [-K, K]^r$ 在每一步都非空（因为它包含上文选取的 r-元组 λ），引理 2.32 将证明中的步骤数限制为 $O(r^2(\log r + \log K))$。

找到所需的陪集广义等差数列 S 后，我们令 $C' = S$，并且如证明开头所述，使用引理 2.15 找到一个平移集 $T \subseteq C$，使得 $|S||T| = |S+T| \geq (1-\eta)|C|$ 且 $S + T \subseteq C$。

□

§4 抽象 Balog-Szemer´edi-Gowers 定理

经典的 Balog-Szemer´edi-Gowers 定理 [1, 18] 表明，若环境阿贝尔群中的有限集 A 含有许多加性四元组，那么它就有一个倍增较小的大子集。该定理的抽象版本在 [50], 中得到证明，使我们能够考虑比群的元素更一般的对象；对于这些对象，通常形式的 Balog-Szemer´edi-Gowers 定理并不适用。例如，在 [50], 中，我们考虑由环境向量空间中的元素索引的部分定义线性映射 $\phi_x \colon U_x \to \mathbb{F}_p^n$ 的四元组，其中加性四元组的概念（x、y、z、w），即 $x - y + z - w = 0$，被 $\phi_x - \phi_y + \phi_z - \phi_w = 0$ 在 $U_x \cap U_y \cap U_z \cap U_w$ 上所取代。因此，我们以部分定义线性映射构成的幺半群取代群，其中加法定义为 $(\phi_1 \colon U_1 \to \mathbb{F}_p^n) + (\phi_2 \colon U_2 \to \mathbb{F}_p^n) = (\phi_1 + \phi_2 \colon U_1 \cap U_2 \to \mathbb{F}_p^n)$。

为避免在处理加性四元组时产生混淆，我们引入额外的记号来标明我们所考虑的符号选择。在变量上方加粗点号，表示该变量取负号。也就是说，写作 $(\dot{a}, b, \dot{c}, d)$ 意味着

.我们有 $a + c = b + d$，而 $(\dot{a}, b, c, d)$ 意味着我们有 $a + d = b + c$。

与原始版本相比，我们考虑小倍增的稠密集，而不是群的稠密集。

定理 4.1（抽象 Balog-Szemer´edi-Gowers 定理）。设 $X \subseteq G$ 是一个集合，使得 $|X - X| \leq K|X|$，并设 $A \subseteq X$。假设对于每个 $i \in [36]$，我们都有一个加性四元组集合 $\mathcal{Q}_i$

位于 A 中，并满足以下性质：

(i) （大性） $|\mathcal{Q}_1| \geq c|X|^3$,

(ii) （对称性）对于每个 $i \in [36]$，如果 $(\dot{a}_1, a_2, a_3, \dot{a}_4) \in \mathcal{Q}_i$，那么

(S1) $(\dot{a}_3, a_4, a_1, \dot{a}_2) \in \mathcal{Q}_i$，并且***(S2)*** $(\dot{a}_2, a_1, a_4, \dot{a}_3) \in \mathcal{Q}_i$，***(S3)*** $(\dot{a}_1, a_3, a_2, \dot{a}_4) \in \mathcal{Q}_i$，

(iii) （弱传递性）对于所有指标 i、$j \in [36]$、$i+j \leq 36$，对于任意加性四元组 $(\dot{a}_1, a_2, a_3, \dot{a}_4) \in A^4$，如果存在至少 $c'|X|$ 对 $(b, b') \in A^2$ 满足 $(\dot{a}_1, a_2, b, b') \in \mathcal{Q}_i$ 且 $(b, b', a_3, \dot{a}_4) \in \mathcal{Q}_j$，那么 $(\dot{a}_1, a_2, a_3, \dot{a}_4) \in \mathcal{Q}_{i+j}$。

固定一个整数 k。那么，只要 $c' \leq (cK^{-1}/2)^{C_k}$ 且 $|X| \geq 8c^{-1}K$，就存在一个大小为 $|A'| \geq (c/2K)^{O(1)}|X|$ 的子集 $A' \subseteq A$，满足以下性质。对于 $\ell \in [k]$，给定一个 ℓ-元组 $a_{[\ell]} \in A'^{\ell}$，递归地定义一个集合 $\mathcal{Z}^{(a_{[\ell]})}{}_{\ell}$，其中包含 A 中的 (3ℓ)-元组（依赖于元素 $a_{[\ell]}$），定义如下。对于 $\ell = 1$，$\mathcal{Z}^{(a_1)}$，它由所有满足 $(\dot{a}_1, y_1, y_3, \dot{y}_2) \in \mathcal{Q}_{36}$ 的三元组 $(y_1, y_2, y_3) \in A^3$ 组成。对于 $\ell \geq 2$，集合 $\mathcal{Z}^{(a_{[\ell]})}{}_{\ell}$ 由所有满足以下条件的 3ℓ-元组 $(y_1, \ldots, y_{3\ell}) \in A^{3\ell}$ 组成：

- $\sum_{i\in[\ell]}(-1)^i a_i = \sum_{i\in[3\ell]}(-1)^i y_i$,
- $(\dot{a}_\ell, a_\ell + y_{3\ell-1} - y_{3\ell}, y_{3\ell}, \dot{y}_{3\ell-1}) \in \mathcal{Q}_{36}$,
- $\Big((y_{3\ell-3})^{\cdot}, y_{3\ell-3} - y_{3\ell-2} + y_{3\ell-1} - y_{3\ell} + a_\ell, y_{3\ell-2}, (y_{3\ell-1} - y_{3\ell} + a_\ell)^{\cdot}\Big) \in \mathcal{Q}_{36}$, *and,*
- $(y_1, \ldots, y_{3\ell-4}, a_\ell + y_{3\ell-3} - y_{3\ell-2} + y_{3\ell-1} - y_{3\ell}) \in \mathcal{Z}_{\ell-1}^{(a_{[\ell-1]})}$.

那么，对所有 $\ell \in [k]$，我们有 $|\mathcal{Z}^{(a_{[\ell]})}{}_{\ell}| \geq (c/2K)^{O_\ell(1)}|X|^{3\ell-1}$。

备注。对于 $i \in [5]$，我们对点对（$\mathcal{Q}_1$，$\mathcal{Q}_i$）使用弱传递性；对于 $i \in [5]$，则对点对（$\mathcal{Q}_6$，$\mathcal{Q}_{6i}$）使用弱传递性。我们很可能可以修改证明，使其只需对 $i \in [35]$ 使用点对（$\mathcal{Q}_1$，$\mathcal{Q}_i$），但本文不需要精确控制应用弱传递性的点对（$\mathcal{Q}_i$，$\mathcal{Q}_j$）。

下面的引理源自 Gowers 在 [18]，中的论证，表明稠密图包含稳健连通的子图。类似的陈述可见于 [57]。下面的表述取自 [50]，在那里它以引理 6 的形式出现。

引理 4.2。设 G 是一个有 n 个顶点、至少有 cn^2 条边的图。则存在一个顶点子集 X，其大小至少为 $2^{-5}cn$，并且其中任意两个顶点之间至少有 $2^{-35}c^9n^5$ 条长度为 *6* 的路径。

我们接下来证明定理 4.1。

定理 4.1 的证明。在证明中，我们重点考察集合 A^2 中的（有序）对。若 $(\dot{x}, x', y, \dot{y}')$ 是 $\mathcal{Q}_1$ 中的一个加性四元组，我们就称一对对 $\Big((x,x'),(y,y')\Big)$ 为良好的。根据大性假设，至少存在 $c|X|^3$ 个良好对偶。对于 $d \in X-X$，记 $\pi(d)$ 为形如 $\Big((x'+d,x'),(y'+d,y')\Big)$ 的良好对偶的数量，也就是说，差为 d 的对偶。(x',y') 至多有 $|X|^2$ 种选择，因此 $\pi(d) \le |X|^2$。另一方面，由于每个良好对偶 $\Big((x,x'),(y,y')\Big)$ 都可以在 $d=x-x'$ 的条件下写成上述形式，我们得到 $\sum_{d\in X-X}\pi(d) \ge c|X|^3$。回想假设 $|X-X|\le K|X|$，由平均可知，存在一个大小为 $|D|\ge \frac{c}{2}|X|$ 的集合 $D \subseteq X-X$，使得至少有 $\frac{c}{2K}|X|^2$ 个形如 $\Big((x+d,x),(y+d,y)\Big)$ 的良好对偶。

注意到，对称性假设 (S1) 意味着，如果 $\Big((x+d,x),(y+d,y)\Big)$ 是良好对偶，那么 $\Big((y+d,y),(x+d,x)\Big)$ 也是。因此，对于任意给定的 $d \in D$，我们可以定义图 Γ_d，其顶点集为 $V_d=\{(x+d,x): x\in A\cap A-d\}$，边为所有良好对偶 $\Big((x+d,x),(y+d,y)\Big)$ 对应的 $(x+d,x)(y+d,y)$。特别地，Γ_d 是一个图，其顶点集大小至多为 $|X|$，由 A^2 中的一些对组成。根据 D 的定义，至少有 $\frac{c}{4K}|X|^2-|X|$ 条边，因为每条边至多来自两对，而我们需要忽略形如 $\Big((x+d,x),(x+d,x)\Big)$ 的对。边数的上界也保证了 $|V_d|\ge \frac{c}{4K}|X|-1$。由于 $|X|\ge 8c^{-1}K$，我们可以简化上述上界。具体而言，我们看到至少有 $\frac{c}{8K}|X|^2$ 条边，并且 $|X|\ge|V_d|\ge\frac{c}{8K}|X|$。

对于每个 $d \in D$，将引理 4.2 应用于图 Γ_d，得到一个大小为 $|P_d|\ge\Omega(c^2K^{-2})|X|$ 的对的集合 $P_d \subseteq V_d$，使得对于任意一对 $(x+d,\ x)$、$(y+d,\ y) \in P_d$，图 Γ_d 中至少存在 $\Omega(c^{14}K^{-14})|X|^5$ 条 6- 路径 $(x+d,\ x)$、$(z_1+d,\ z_1)$.....$(z_5+d,\ z_5)$、$(y+d,\ y)$。换言之，上述序列中任意两个连续的对都构成良好对偶。

断言 4.3. 给定任意两对 $(x+d,x)$、$(y+d,y) \in P_d$，我们有 $(\dot{x}+d,x,y+d,\dot{y}) \in \mathcal{Q}_6$，条件是$c' \le$ **c** $c^{14}K^{-14}$。

证明。对 $i\in[6]$ 使用归纳法，我们证明至少存在 $\Omega(c^{14}K^{-14})|X|^{6-i}$ 个 $(x_i,x_{i+1},\dots,x_5) \in X^{6-i}$ 的选择，使得 $(\dot{x}+d,x,x_i+d,\dot{x}_i) \in \mathcal{Q}_i$，且 $(\dot{x}_i+d,x_i,x_{i+1}+d,\dot{x}_{i+1})\dots,(\dot{x}_5+d,x_5,y+d,\dot{y}) \in \mathcal{Q}_1$。情形 $i=6$ 解释为 $(\dot{x}+d,x,y+d,\dot{y}) \in \mathcal{Q}_6$。注意，基例由 P_d 的性质成立。

现在假设断言对某个 $i\le 5$ 成立。令 T 为上述元组 $(x_i,x_{i+1},\dots,x_5) \in X^{6-i}$ 的集合。通过平均，至少存在 $\Omega(c^{14}K^{-14})|X|^{6-i-1}$ 个 $(x_{i+1},\dots,x_5) \in X^{6-i-1}$ 的选择，使得对至少 $\Omega(c^{14}K^{-14})|X|$ 个元素 $x_i\in X$，有 $(x_i,x_{i+1},\dots,x_5)\in T$。然而，对于至少 $\Omega(c^{14}K^{-14})|X|$ 个 x_i 的选择，$(\dot{x}+d,x,x_i+d,\dot{x}_i) \in \mathcal{Q}_i$ 和 $(\dot{x}_i+d,x_i,x_{i+1}+d,\dot{x}_{i+1}) \in \mathcal{Q}_1$ 均成立。由弱传递性可得 $(\dot{x}+d,x,x_{i+1}+d,\dot{x}_{i+1}) \in \mathcal{Q}_{i+1}$。归纳步骤的证明至此完成。

□

接下来，我们用上面得到的配对来定义另一个图，这次图的顶点集为 A。为确保边是对称的，我们为每个配对 $\{d,-d\}$ 选取一个 $d\in D$，然后重新定义P_{-d}，使其成为所有满足条件的 $(x,\ x+d)$ 的集合，其中 $(x+d,\ x) \in P_d$。请注意，P_{-d} 中每一对配对仍然

由于对称性假设(**S2**)而属于 $\mathcal{Q}_6$。因此，定义 P 为所有 P_d的并集；它是对称的，大小为 $|P|\geq \Omega(c^3K^{-3})|X|^2$，并且

每当 $(x,\ x')$，$(y,\ y')\in P$具有相同的差 $x-x'=y-y'$时，那么 $(\dot{x},\ x',\ y,\ \dot{y}')\in\mathcal{Q}_6$. (20)

定义一个图 Π，其顶点集为 A，边为 P 中的点对。由引理 4.2，我们找到一个大小为 $c_1|X|$ 的集合 $B\subseteq A$，使得在图 Π 中，B 中任意两个顶点之间至少有 $c_2|X|^5$ 6 条路径，其中 $c_1,\ c_2\geq \Omega((cK^{-1})^{O(1)})$。

集合 B 的关键性质在于，它处处都具有丰富的算术结构；也就是说，在它所有足够稠密的子集中，都有许多属于 $\mathcal{Q}_{36}$ 的加性四元组。

断言 4.4。设 $\beta_1,\beta_2>0$。假设 $c'\leq \mathbf{c}(\beta_1\beta_2c_2)^2K^{-6}$。设 $B_1,B_2\subseteq B$ 是大小为 $\beta_1|X|$ 和 $\beta_2|X|$。那么，至少存在 $c_3(\beta_1\beta_2c_2)^2K^{-6}|X|^3$ 个加性四元组 $(b_1,b_1',b_2,b_2')\in(B_1\times B_1\times B_2\times B_2)\cap\mathcal{Q}_{36}$，其中某个 $c_3\geq\Omega(1)$。

证明。任取元素 $b_1\in B_1$ 和 $b_2\in B_2$。由于 $b_1,\ b_2\in B$ 图 Π 中 b_1 与 b_2之间至少存在 $c_2|X|^5$ 6-条路径。对 b_1 和 b_2求和，我们得出至少存在 $\beta_1\beta_2c_2|X|^7$ 7-元组 $(b_1,\ z_1,\ .....,\ z_5,\ b_2)\in A^7$，满足以下性质：$b_1\in B_1,\ b_2\in B_2$ 以及 $(b_1,\ z_1)$，$(z_1,\ z_2)$.....，$(z_4,\ z_5)$，$(z_5,\ b_2)\in P$。

令 $d_1=b_1-z_1,d_2=z_1-z_2,\ldots,d_5=z_4-z_5,d_6=z_5-b_2$，并用它们替代 $z_1,\ldots,z_5,b_2$，从而进行变量替换。注意 $d_1,\ldots,d_6\in X-X$。由柯西-施瓦茨不等式和倍增假设 $|X-X|\leq K|X|$，至少存在 $(\beta_1\beta_2c_2)^2K^{-6}|X|^8$ 8-元组 $(b_1,b_1',d_1,\ldots,d_6)$，使得 $b_1,b_1'\in B_1,b_1-d_1-\cdots-d_6,$ $b_1'-d_1-\cdots-d_6\in B_2$并且

$$(b_1-d_1-\cdots-d_{i-1},b_1-d_1-\cdots-d_i),(b_1'-d_1-\cdots-d_{i-1},b_1'-d_1-\cdots-d_i)\in P$$

对所有 $i\in[6]$都成立。

我们再进行一次变量替换，将 $z_i=b_1-d_1-\cdots-d_i,z_i'=b_1'-d_1-\cdots-d_i$写作 $i\in[5]$，并将 $b_2=b_1-d_1-\cdots-d_6,b_2'=b_1'-d_1-\cdots-d_6$写作。根据上述推导，我们得到至少 $(\beta_1\beta_2c_2)^2K^{-6}|X|^8$ 14-元组 $(b_1,b_1',b_2,b_2',z_{[5]},z'_{[5]})\in A^{14}$，使得

- $b_1-b_1'=z_1-z_1'=z_2-z_2'=\cdots=z_5-z_5'=b_2-b_2'$，以及
- $(b_1,z_1),\ (z_1,z_2)\ldots,\ (z_4,z_5),\ (z_5,b_2),\ (b_1',z_1')\ldots,\ (z_5',b_2')\in P$。

根据集合 P 的性质 (20)，我们有

$$(\dot{b_1},z_1,b_1',\dot{z_1}'),(\dot{z_1},z_2,z_1',\dot{z_2}'),\ldots,(\dot{z_5},b_2,z_5',\dot{b_2}')\in\mathcal{Q}_6.$$

利用对称性条件 (**S3**)，我们得到

$$(\dot{b_1},b_1',z_1,\dot{z_1}'),(\dot{z_1},z_1',z_2,\dot{z_2}'),\ldots,(\dot{z_5},z_5',b_2,\dot{b_2}')\in\mathcal{Q}_6.$$

像证明断言 4.3 中那样，多次进行平均并利用弱传递性即可证明该断言，前提是 $c' \le \mathbf{c}(\beta_1\beta_2 c_2)^2 K^{-6}$。 □

令 $B' \subseteq B$ 为所有满足以下条件的元素 $a \in B$ 构成的集合：对于至少 $2^{-10}c_3 c_1^4 c_2^2 K^{-6}|X|^2$ 个三元组 $(b, c, d) \in B^3$，有 $(a, b, c, d) \in \mathcal{Q}_{36}$。我们断言 $|B \setminus B'| \le \frac{c_1}{2}|X|$。否则，对集合 $B \setminus B'$ 应用断言 4.4，因此 $\beta_1, \beta_2 \ge c_1/2$，可知 $\mathcal{Q}_{36} \cap (B \setminus B')^4$ 中至少有 $2^{-10}c_1^6 4c_2^2|X|^3$ 个加性四元组，这就产生了矛盾。因此，$|B'| \ge |B| - \frac{c_1}{2}|X| \ge \frac{c_1}{2}|X|$。我们断言 B' 具有所需的性质（即，我们可以取 $A' = B'$）。此外，我们将集合 $\mathcal{Z}^{(a_{[\ell]})}_{\ell}$ 限制为 $B^{3\ell}$ 的子集。

为完成证明，我们对 ℓ 使用归纳法，证明对于所有属于 B' 的 $a_{[\ell]}$，$|\mathcal{Z}^{(a_{[\ell]})}_{\ell}| \ge (c/2K)^{O_\ell(1)}|G|^{3\ell-1}$ 都成立。根据 B' 的定义，基例 $\ell = 1$ 显然成立。假设该断言对某个 ℓ 成立，并令 $a_{[\ell+1]}$ 为 B' 中任意一个 $(\ell+1)$-元组。为简化记号，记 $Z = \mathcal{Z}^{(a_{[\ell]})}_{\ell}$，并记 $Z' = \mathcal{Z}^{(a_{\ell+1})}_{1}$。根据归纳假设，这两个集合的大小分别为 $|Z| \ge \delta|X|^{3\ell-1}$ 和 $|Z'| \ge \delta|X|^2$，其中某个 $\delta \ge$ 满足 $c/2K^{O_\ell(1)}$。

令 W 为所有满足以下条件的 $y_{3\ell} \in B$ 构成的集合：Z 中至少有 $\frac{1}{2}\delta|X|^{3\ell-2}$ 个 3ℓ-元组以 $y_{3\ell}$ 为最后一个元素。令 W' 为所有在 Z' 中至少 $\frac{\delta}{2}|X|$ 个三元组里作为第一个元素出现的 $z_1 \in B$ 构成的集合。因此，$|W|, |W'| \ge \frac{\delta}{2}|X|$。

对这些集合应用断言 4.4（由此得到定理陈述中对 k 的依赖条件 $c' \le (cK^{-1}/2)^{\mathbf{c}_k}$），从而找到一个由加性四元组构成的集合 Q

$$(y_{3\ell}+t, y_{3\ell}, z_1+t, z_1) \in (W \times W \times W' \times W') \cap \mathcal{Q}_{36} \tag{21}$$

其大小为 $|Q| \ge c_3 2^{-4} c_2^2 K^{-6}\delta^4|X|^3$。因此，我们至少有 $2^{-6}c_3 c_2^2 K^{-6}\delta^6|X|^{3\ell-2+1+3}$ 种 $(3\ell+4)$-元组 $(t, y_{[3\ell]}, z_1, z_2, z_3) \in B^{3\ell+4}$ 选取方式，使得

- $y_{[3\ell]} \in Z$,
- $z_{[3]} \in Z'$,
- $(y_{3\ell}+t, y_{3\ell}, z_1+t, z_1) \in \mathcal{Q}_{36}$.

对于每一种这样的选取，我们断言，$3(\ell+1)$-元组 $y'_{[3\ell+3]} = (y_1, \ldots, y_{3\ell-1}, y_{3\ell}+t, z_1+t, z_2, z_3)$ 属于 $\mathcal{Z}^{(a_{[\ell+1]})}_{\ell+1}$。我们需要检验定理中所述的集合 $\mathcal{Z}^{(a_{[\ell+1]})}_{\ell+1}$ 定义所描述的性质。

首先，由于 $y_{[3\ell]} \in Z$，我们有

$$\sum_{i\in[\ell+1]}(-1)^i a_i = \sum_{i\in[\ell]}(-1)^i a_i + (-1)^{\ell+1}a_{\ell+1} = \sum_{i\in[3\ell]}(-1)^i y_i + (-1)^{\ell+1}a_{\ell+1}.$$

这进一步等于

$$\sum_{i\in[3\ell-1]}(-1)^i y_i + (-1)^{\ell}(y_{3\ell} - a_{\ell+1}) = \sum_{i\in[3\ell-1]}(-1)^i y_i + (-1)^{3\ell}(y_{3\ell}+t) + (-1)^{\ell+1}(t + z_1 - z_2 + z_3)$$

其中我们使用了 $z_{[3]} \in Z'$。该表达式等于

$$\sum_{i\in[3\ell-1]} (-1)^i y_i + (-1)^{3\ell}(y_{3\ell}+t) + (-1)^{3\ell+1}(z_1+t) + (-1)^{3\ell+2} z_2 + (-1)^{3\ell+3} z_3 = \sum_{i\in[3\ell+3]} (-1)^i y'_i,$$

如所期望的。

其次，展开定义并回忆 $z_{[3]} \in Z'$，

$$(\dot{a_{\ell+1}}, a_{\ell+1} + y'_{3\ell+2} - y'_{3\ell+3}, y'_{3\ell+3}, \dot{y'_{3\ell+2}}) = (\dot{a_{\ell+1}}, z_1, z_3, \dot{z_2}) \in \mathcal{Q}_{36},$$

并且，经过代数运算并回忆式（21），

$$\left((y'_{3\ell})^{\cdot}, y'_{3\ell} - y'_{3\ell+1} + y'_{3\ell+2} - y'_{3\ell+3} + a_{\ell+1}, y'_{3\ell+1}, (y'_{3\ell+2} - y'_{3\ell+3} + a_{\ell+1})^{\cdot}\right) = (\dot{y_{3\ell}}+t, y_{3\ell}, z_1+t, \dot{z_1}) \in \mathcal{Q}_{36}.$$

最后，$y_{3\ell} = a_{\ell+1} + (y_{3\ell}+t) - (z_1+t) + z_2 - z_3 = a_{\ell+1} + y'_{3\ell} - y'_{3\ell+1} + y'_{3\ell+2} - y'_{3\ell+3}$且元组 $3\ell\, y_{[3\ell]}$属于 $\mathcal{Z}^{(a_{[\ell]})}\,\ell$，其中 $y'_i = y_i$ 适用于 $i \in [3\ell-1]$。四个条件均成立，证明至此完成。 □

第2章：Freiman 双同态的结构

本章开始研究 Freiman 双同态。证明遵循引言中的思路。

§5 Freiman 双同态与小秩条件

首先，我们将 Freiman 双同态转化为由 Freiman 线性映射组成的近似线性系统。

命题 5.1。 设 $\varphi\colon A \to H$ 是定义在密度为c的集合 $A \subseteq G_1 \times G_2$ 上的 ***Freiman*** 双同态。则存在量 $c' \geq \exp(-\log^{O(1)}(2c^{-1}))$ 、 $K \leq \exp(\log^{O(1)}(2c^{-1}))$，一个集合 $X \subseteq G_1$，以及一组 ***Freiman*** 线性映射 $\phi_x\colon B_x \to H$，其中 B_x 是群 G G_2 中的一个 ***Bohr*** 集，其余维至多为$\log^{O(1)}(2c^{-1})$ ，半径至少为 $\exp(-\log^{O(1)}(2c^{-1}))$，使得

(i) $|X| \geq c'|G_1|$,

(ii) 对于每个 $x \in X$ 和所有 $y \in B_x$，至少存在 $c'|G_2|^3$ 个三元组 $(z_1, z_2, z_3) \in G_2^3$，使得点$(x, z_1)$、$(x, z_2)$、$(x, z_3)$ 和$(x, z_1 + z_2 - z_3 - y)$ 属于 A，并且

$$\phi_x(y) = \varphi(x, z_1) + \varphi(x, z_2) - \varphi(x, z_3) - \varphi(x, z_1 + z_2 - z_3 - y),$$

(iii) 对于 X 中至少 $c'|G|^3$ 的加性四元组(x_1, x_2, x_3, x_4) ，有

$$\#\mathrm{Im}\left(\phi_{x_1} - \phi_{x_2} + \phi_{x_3} - \phi_{x_4}\right) \leq K.$$

证明。令 $X \subseteq G_1$ 为集合 A 中在 G_2 内至少是 $c/2$-稠密的列所组成的集合，即满足 $|A_x| \geq \frac{c}{2}|G_2|$ 的 $x \in G_1$ 的集合。由平均可得 $|X| \geq \frac{c}{2}|G_1|$。由于 φ-是 Freiman 双同态，对于每个 $x \in X$，我们可以对定义域为 A_x. 的映射 $y \mapsto \varphi(x, y)$ 应用定理 2.26，从而找到一个秩至多为 $\log^{O(1)}(2c^{-1})$ 的真陪集广义等差数列 $Q_x \subseteq G_2$ 、一个大小为$|S_x| \geq \exp(-\log^{O(1)}(2c^{-1}))|G_2|$ 的集合 $S_x \subseteq Q_x \cap A_x$. ，以及一个 Freiman 同态 $\psi_x\colon Q_x \to H$ ，使得对所有 $x \in S_x$， $\varphi(x, y) = \psi_x(y)$ 成立。

应用推论 2.16，我们可以找到另一个秩至多为 $\log^{O(1)}(2c^{-1})$ 的陪集广义等差数列 Q'_x ，它是真且对称的，并满足 $|S_x \cap (t + Q'_x)| \geq \exp(-\log^{O(1)}(2c^{-1}))|G_2|$ 且 $t + 4Q'_x \subseteq Q_x$。定义映射 $\phi_x\colon Q'_x \to H$ ，使得 $\phi_x(y) = \psi_x(t + y) - \psi_x(t)$，该映射是 Freiman 线性的。对集合 $S_x \cap (t + Q'_x)$ 应用定理 2.24，并对 $S_x \cap (t + Q'_x)$ 应用引理 2.13，可找到一个余维至多为 $\log^{O(1)}(2c^{-1})$、半径至少为 $\exp(-\log^{O(1)}(2c^{-1}))$ 的 Bohr 集 $B_x \subseteq G_2$，使得对每个 $y \in B_x$ ，存在至少 $\exp(-\log^{O(1)}(2c^{-1}))|G_2|^4$ 个四元组 (z_1, z_2, z_3, z_4)，其元素属于 $S_x \cap (t + Q'_x)$，且满足$y = z_1 + z_2 - z_3 z_4$。对于每个这样的选择 (z_1, z_2, z_3, z_4)，我们有

$$\phi_x(y) = \psi_x(t+y) - \psi_x(t) = \psi_x(z_1) + \psi_x(z_2) - \psi_x(z_3) - \psi_x(z_4) = \varphi(x, z_1) + \varphi(x, z_2) - \varphi(x, z_3) - \varphi(x, z_4),$$

从而得到性质 (ii)。接下来需要推出性质 (iii)。

为此，对每个 $x \in X$，定义 T_x 为所有四元组 $(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)$ 的集合，其中各元素属于$S_x \cap (t+Q'_x)$，且满足 $z_1+z_2-z_3-z_4 \in B_x$，以及 $\phi_x(z_1+z_2-z_3-z_4) = \varphi(x,\ z_1)+\varphi(x,\ z_2)-\varphi(x,\ z_3)-\varphi(x,\ z_4)$。由上述论证可得 $|T_x| \geq \exp(-\log^{O(1)}(2c^{-1}))|G_2|^4$。

经过几次柯西-施瓦茨不等式的应用，我们得到

$$\begin{aligned}
\exp(-\log^{O(1)}(2c^{-1})) &\leq \Big(\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1} \mathbb{1}_X(x) \mathop{\mathbb{E}}_{z_1,z_2,z_3,z_4\in G_2} \mathbb{1}_{T_x}(z_1,z_2,z_3,z_4)\Big)^4 \\
&\leq \Big(\mathop{\mathbb{E}}_{z_1,z_2,z_3,z_4\in G_2} \Big(\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1} \mathbb{1}_X(x)\mathbb{1}_{T_x}(z_1,z_2,z_3,z_4)\Big)\Big)^4 \\
&\leq \Big(\mathop{\mathbb{E}}_{z_1,z_2,z_3,z_4\in G_2} \Big(\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G_1} \mathbb{1}_X(x)\mathbb{1}_{T_x}(z_1,z_2,z_3,z_4)\Big)^2\Big)^2 \\
&= \Big(\mathop{\mathbb{E}}_{z_1,z_2,z_3,z_4\in G_2} \mathop{\mathbb{E}}_{x,a\in G_1} \mathbb{1}_X(x)\mathbb{1}_X(x+a)\mathbb{1}_{T_x}(z_1,z_2,z_3,z_4)\mathbb{1}_{T_{x+a}}(z_1,z_2,z_3,z_4)\Big)^2 \\
&\leq \mathop{\mathbb{E}}_{z_1,z_2,z_3,z_4\in G_2} \Big(\mathop{\mathbb{E}}_{x,a\in G_1} \mathbb{1}_X(x)\mathbb{1}_X(x+a)\mathbb{1}_{T_x}(z_1,z_2,z_3,z_4)\mathbb{1}_{T_{x+a}}(z_1,z_2,z_3,z_4)\Big)^2 \\
&= \mathop{\mathbb{E}}_{z_1,z_2,z_3,z_4\in G_2} \mathop{\mathbb{E}}_{x_1,x_2,a\in G_1} \mathbb{1}_X(x_1)\mathbb{1}_X(x_2)\mathbb{1}_X(x_1+a)\mathbb{1}_X(x_2+a) \\
&\qquad \mathbb{1}_{T_{x_1}}(z_1,z_2,z_3,z_4)\mathbb{1}_{T_{x_1+a}}(z_1,z_2,z_3,z_4)\mathbb{1}_{T_{x_2}}(z_1,z_2,z_3,z_4)\mathbb{1}_{T_{x_2+a}}(z_1,z_2,z_3,z_4).
\end{aligned}$$

因此，在 X 中至少有 $\exp(-\log^{O(1)}(2c^{-1}))|G_1|^3$ 个加性四元组 $(\dot{x_1}, x_2, \dot{x_3}, x_4)$，其中存在至少 $\exp(-\log^{O(1)}(2c^{-1}))|G_2|^4$ 个四元组 (z_1, z_2, z_3, z_4)，它们全都 $(x_i, z_j) \in A$，并且满足

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in[4]}(-1)^i\phi_{x_i}(z_1+z_2-z_3-z_4) = \sum_{i\in[4]}(-1)^i\Big(\varphi(x_i,z_1)+\varphi(x_i,z_2)-\varphi(x_i,z_3)-\varphi(x_i,z_4))\Big) \\
&= \Big(\sum_{i\in[4]}(-1)^i\varphi(x_i,z_1)\Big)+\Big(\sum_{i\in[4]}(-1)^i\varphi(x_i,z_2)\Big)-\Big(\sum_{i\in[4]}(-1)^i\varphi(x_i,z_3)\Big)-\Big(\sum_{i\in[4]}(-1)^i\varphi(x_i,z_4)\Big),
\end{aligned}$$

由于 φ 是 Freiman 双同态，因此该式为零。应用引理 2.42 后即可得到该命题。

□

§6 一个包含几乎所有虚部较小的加性16元组的子集 E

到目前为止，我们已经得到了一组定义在 Bohr 集上的 Freiman 线性映射 $\phi_x : B_x \to H$，其中许多指标的加性四元组对应的映射线性组合具有较小的值域。在本节中，我们使用抽象的 Balog-Szemer´edi-Gowers 定理和依赖随机选择论证，将其转化为

一个指标子集，使得其中几乎所有加性 16 元组对应的映射线性组合都具有较小的值域。结论中出现 16 元组而非四元组，是因为下一节将应用稳健 Bogolyubov-Ruzsa 定理。

命题 6.1. 设给定集合 $X \subseteq G_1$ 以及一组 *Freiman* 线性映射 $\phi_x : B_x \to H$，其中 B_x 是群 G G_2 中的 *Bohr* 集，其余维为 d，半径为 ρ，并且满足

$$\#\mathrm{Im}\left(\phi_{x_1} - \phi_{x_2} + \phi_{x_3} - \phi_{x_4}\right) \le K$$

至少对 X^4 中的 $c|G_1|^3$ 个加性四元组 $(\dot{x_1}, x_2, \dot{x_3}, x_4)$ 成立。设 $\varepsilon > 0$ 给定，则存在一个大小为 $\exp(-(2d\log(\rho^{-1}c^{-1}K))^{O(1)})|G_1|$ 的子集 $\tilde{X} \subseteq X$，使得

$$\#\mathrm{Im}\Big(\sum_{i\in[16]} (-1)^i \phi_{x_i}\Big|_{\cap_{i\in[16]} B'_{x_i}}\Big) \le \exp((2d\log(\varepsilon^{-1}\rho^{-1}K))^{O(1)})$$

对 $\tilde{X}$ 中除至多 $\varepsilon|G_1|^{15}$ 个加性*16*元组 $x_{[16]}$ 以外的所有元组均成立，其中 B'_x 是与 B_x 具有相同频率集、但半径小一倍的 *Bohr* 集。

˜**备注**。至关重要的是，大小 X 不依赖于参数 ε；该参数只会影响结论中像的大小上界。

证明。定义 $\mathcal{Q}_i$ 为 X 中所有满足以下条件的加性四元组 $(\dot{x_1}, x_2, x_3, \dot{x_4})$ 的集合：

$$\#\mathrm{Im}\left(\phi_{x_1} - \phi_{x_2} - \phi_{x_3} + \phi_{x_4}\right) \le K^i.$$

容易验证，定理 4.1 的所有条件都成立。特别地，只要 $|G| \ge (2c^{-1})^{-\mathsf{C}}$，弱传递性就成立；我们不妨假设这一点，否则命题显然成立。因此，我们可以对 $k = 16$ 应用定理 4.1，得到一个大小为 $|X'| \ge (c/2)^{O(1)}|G_1|$ 的集合 X'，它满足该定理结论中的条件。

断言 6.2。对于每个加性 16 元组 $x_{[16]} \in {X'}^{16}$，至少存在 $(c/2)^{O(1)}|G_1|^{47}$ 个加性 *48* 元组 $y_{[48]} \in X^{48}$，使得

$$\#\mathrm{Im}\Big(\sum_{i\in[16]} (-1)^i \phi_{x_i} - \sum_{i\in[48]} (-1)^i \phi_{y_i}\Big) \le (2K)^{O(1)}.$$

证明。展开定理 4.1 的结论，可得 $|\mathcal{Z}^{(x_{[16]})}{}_{16}| \ge (c/2)^{O(1)}|G_1|^{47}$。对于每个 48 元组 $y_{[48]} \in \mathcal{Z}^{(x_{[16]})}_{16}$，我们有 $\sum_{i\in[48]}(-1)^i y_i = \sum_{i\in[16]}(-1)^i x_i = 0$，因此它是一个加性 48 元组。为了完成证明，我们对 $\ell \in [16]$ 使用归纳法，证明

$$\#\mathrm{Im}\Big(\sum_{i\in[\ell]} (-1)^i \phi_{x_i} - \sum_{i\in[3\ell]} (-1)^i \phi_{y_i}\Big) \le (2K)^{O(1)}$$

对所有 $y_{[3\ell]} \in \mathcal{Z}_\ell^{(x_{[\ell]})}$ 均成立。

根据 $\mathcal{Q}_{36}$ 和 $\mathcal{Z}^{(x_1)}{}_1$ 的定义，基例 $\ell = 1$ 成立。

现在假设断言对某个 $\ell \geq 1$ 成立，并令 $y_{[3\ell+3]} \in \mathcal{Z}_{\ell+1}^{(x_{[\ell+1]})}$。根据 $\mathcal{Z}^{(x_{[\ell+1]})}$ $\ell+1$ 的定义，我们有

$$(y_1, \ldots, y_{3\ell-1}, x_{\ell+1} + y_{3\ell} - y_{3\ell+1} + y_{3\ell+2} - y_{3\ell+3}) \in \mathcal{Z}_{\ell}^{(x_{[\ell]})}$$

因此，根据归纳假设

$$\#\mathrm{Im}\Big(\sum_{i\in[\ell]}(-1)^i\phi_{x_i} - \Big(\sum_{i\in[3\ell-1]}(-1)^i\phi_{y_i}\Big) - (-1)^{3\ell}\phi_{x_{\ell+1}+y_{3\ell}-y_{3\ell+1}+y_{3\ell+2}-y_{3\ell+3}}\Big) \leq (2K)^{O(1)}.$$

我们还有

$$(\dot{x_{\ell+1}}, x_{\ell+1} + y_{3\ell+2} - y_{3\ell+3}, y_{3\ell+3}, \dot{y_{3\ell+2}}) \in \mathcal{Q}_{36}$$

and

$$\Big((y_{3\ell})^{\cdot}, y_{3\ell} - y_{3\ell+1} + y_{3\ell+2} - y_{3\ell+3} + x_{\ell+1}, y_{3\ell+1}, (y_{3\ell+2} - y_{3\ell+3} + x_{\ell+1})^{\cdot}\Big) \in \mathcal{Q}_{36}.$$

因此

$$\begin{aligned}
&\#\mathrm{Im}\Big(\sum_{i\in[\ell+1]}(-1)^i\phi_{x_i} - \sum_{i\in[3\ell+3]}(-1)^i\phi_{y_i}\Big)\\
&\quad\leq \#\mathrm{Im}\Big(\sum_{i\in[\ell]}(-1)^i\phi_{x_i} - \sum_{i\in[3\ell-1]}(-1)^i\phi_{y_i} - (-1)^{3\ell}\phi_{x_{\ell+1}+y_{3\ell}-y_{3\ell+1}+y_{3\ell+2}-y_{3\ell+3}}\Big)\\
&\qquad\cdot \#\mathrm{Im}\Big((-1)^{3\ell+1}\Big(\phi_{y_{3\ell}} - \phi_{y_{3\ell}-y_{3\ell+1}+y_{3\ell+2}-y_{3\ell+3}+x_{\ell+1}} - \phi_{y_{3\ell+1}} + \phi_{y_{3\ell+2}-y_{3\ell+3}+x_{\ell+1}}\Big)\Big)\\
&\qquad\cdot \#\mathrm{Im}\Big((-1)^{\ell+1}\Big(\phi_{x_{\ell+1}} - \phi_{x_{\ell+1}+y_{3\ell+2}-y_{3\ell+3}} - \phi_{y_{3\ell+3}} + \phi_{y_{3\ell+2}})\Big)\Big) \leq (2K)^{O(1)}. \qquad \square
\end{aligned}$$

对于每个属于 X' 的加性 16 元组 $x_{[16]}$，令 $Y_{x_{[16]}}$ 为上述断言给出的 X 中的加性 48 元组集合。令 $Z_1, \ldots, Z_m$ 是 $Y_{x_{[16]}}$ 中一个极大不相交集合族，则 $m \leq (2c^{-1})^{O(1)}$。由于对于每个属于 X' 的加性 16 元组 $x_{[16]}$，$Y_{x_{[16]}}$ 都与某个 Z_i 相交，因此我们可以将 X' 中的加性 16 元组划分为集合 $Q_1, \ldots, Q_m$，使得若 $x_{[16]} \in Q_i$，则 $Y_{x_{[16]}} \cap Z_i \neq \emptyset$。特别地，我们得到某个 $K' \leq (2K)^{O(1)}$，使得

$$\#\mathrm{Im}\Big(\sum_{j\in[16]}(-1)^j\phi_{x_j} - \sum_{j\in[16]}(-1)^j\phi_{x'_j}\Big) \leq K'$$

对于属于同一个 Q_i 的任意 $x_{[16]}$ 和 $x'_{[16]}$。

~为了得到所需的集合 X，我们采用三步概率论证。令 $r, s \in \mathbb{N}$ 和 $\eta > 0$ 为稍后选取的参数。首先，我们将选取一个形如 $E = \langle e_1, \ldots, e_r\rangle_{\{0,1\}}$ 的集合 E，其中 $e_i \in G_2$，然后利用它来寻找一个辅助子集 $X'' \subseteq X'$。其次，我们将找到一个同态 $\chi : H \to \mathbb{T}^s$，它将在 $\mathbb{T}^s$ 内分离由像 $\phi_x(e_i)$~ 的某些线性组合构成的集合。最后，我们将找到所需的集合 X。

^ 记为 $B_x = B(\Gamma_x, \rho)$，其中 $\Gamma_x \subseteq G_2$ 的大小至多为 d。

定义集合 E 和 X''。独立且均匀随机地选取元素 $e_1, \ldots, e_r \in G_2$。根据 $E = \langle e_1, \ldots, e_r\rangle_{\{0,1\}}$，我们定义一个集合 $X'' \subseteq X'$ 以及坏的加性

四元组在 X'中，定义如下。

定义 X'' 为所有满足以下条件的 $x \in X'$ 的集合：所有 e_i 都属于 $B(\Gamma_x, \rho/100r)$。

若元素 $x_{[16]}$ 构成的加性16元组满足 $|Z(\sum_{i\in[16]}(-1)^i\phi_{x_i})| \le \eta|G_2|$ 且$\langle e_i : i \in [r]\rangle_{\{-1,0,1\}} \cap Z\Big(\sum_{i\in[16]}(-1)^i\phi_{x_i}\Big) \neq \{0\}$，则称其为坏的。令 Q_{bad} 为X'中所有坏的加性16元组构成的集合。注意，我们将此定义为 X'中元素的一种性质，而不论它们最终是否属于 X''。

断言 6.3。若 $\eta \le \frac{\varepsilon}{4\cdot 3^r}(\rho/100r)^{rd}$ 且 $|G_2| \ge 8\cdot 3^r(\rho/100r)^{-rd}$，则存在 $e_1, \dots, e_r$，使得$|E| = 2^r$，$|X''| \ge (\rho/200r)^{rd}|G_1|$ 且$|Q_{\mathrm{bad}}| \le \frac{\varepsilon}{2}|G_1|^{15}$。

证明。注意到，根据 X'' 成为 $x \in X'$ 的元素的概率至少为

$$(|B(\Gamma_x, \rho/100r|/|G_2|)^r \ge (\rho/100r)^{rd},$$

根据引理 2.4。另一方面，如果圆环群 X' 中的一个加性 16 元组 $x_{[16]}$ 满足

$$\Big|Z\Big(\sum_{i\in[16]}(-1)^i\phi_{x_i}\Big)\Big| \le \eta|G_2|$$

那么 它变成坏的的概率至多为 $3^r\eta$。因此，根据期望的线性性，

$$\mathbb{E}\Big(\frac{|X''|}{|G_1|} - 2\varepsilon^{-1}\frac{|Q_{\mathrm{bad}}|}{|G_1|^{15}}\Big) \ge (\rho/100r)^{rd} - 2\varepsilon^{-1}3^r\eta \ge \frac{1}{2}(\rho/100r)^{rd},$$

因为 $\eta \le \frac{\varepsilon}{4\cdot 3^r}(\rho/100r)^{rd}$。

因此，$\mathbb{P}\Big(\frac{|X''|}{|G_1|} - 2\varepsilon^{-1}\frac{|Q_{\mathrm{bad}}|}{|G_1|^{15}} \ge \frac{1}{4}(\rho/100r)^{rd}\Big) \ge \frac{1}{4}(\rho/100r)^{rd}$。另一方面，

$$\mathbb{P}(|E| = 2^r) \ge 1 - \sum_{\lambda,\mu\in\{0,1\}^r,\lambda\neq\mu}\mathbb{P}(\lambda\cdot e = \mu\cdot e) \ge 1 - \frac{3^r}{|G_2|}.$$

该断言由这两个概率不等式和假设 $|G_2| \ge 8\cdot 3^r(\rho/100r)^{-rd}$ 得出。

□

令 $e_1, \dots, e_r$ 由该断言给出，并令 E, X'' 和 Q_{bad} 由该选择诱导。

定义同态 χ**.** 令 I 为所有满足以下条件的 $i \in [m]$ 的集合： Q_i 在 X'' 中至少有一个不坏的加性 16 元组 $x_{[16]}$。对每个 $i \in I$，固定这样一个 16 元组 $y^{(i)}_{[16]}$。

利用引理 2.6，我们可以找到 $s \le O(r + \log m)$，使得 χ： $H \to \mathbb{T}^s$ $\frac{1}{10}$-将$\cup_{i\in I}\Big(\sum_{j\in[16]}(-1)^j\phi_{y^{(i)}_j}\Big)(E)$ 中的所有元素分离。

定义集合 $\tilde{X}$。 均匀且相互独立地随机取 $t \in \mathbb{T}^{[s]\times[r]}$，并令

$$\tilde{X} = \Big\{x \in X'' : (\forall i \in [s], j \in [r])\ \|\chi_i(\phi_x(e_j)) - t_{i,j}\|_{\mathbb{T}} \leq \frac{1}{10000r}\Big\}.$$

根据期望的线性性，我们可以选择 t使得 $|\tilde{X}| \geq (10000r)^{-rs}|X''| \geq (10000r)^{-rs}(\rho/200r)^{rd}|G_1|$。为了完成证明，我们需要验证， X 中的绝大多数加性16元组都会给出像较小的映射的线性组合。

断言6.4。 如果 $2^r > K'$ 且 $x_{[16]}$ 是 X 中的一个并非坏的加性 *16* 元组，那么

$$\Big|Z\Big(\sum_{i\in[16]}(-1)^i\phi_{x_i}\Big)\Big| \geq \eta|G_2|.$$

证明。 反设 $\Big|Z\Big(\sum_{i\in[16]}(-1)^i\phi_{x_i}\Big)\Big| \leq \eta|G_2|$。 令 i 为满足$x_{[16]} \in Q_i$的指标。由于 $x_{[16]}$ 并非坏的，且其元素属于 X''，我们有 $i \in I$。此外，同样由于 $x_{[16]}$ 并非坏的，我们有 $\langle e_i : i \in [r]\rangle_{\{-1,0,1\}} \cap Z\Big(\sum_{i\in[16]}(-1)^i\phi_{x_i}\Big) = \{0\}$。

由于 $x_{[16]} \in Q_i$，我们有

$$\#\mathrm{Im}\Big(\sum_{j\in[16]}(-1)^j\phi_{x_j} - \sum_{j\in[16]}(-1)^j\phi_{y_j^{(i)}}\Big) \leq K'.$$

X''的选择保证了 $e_i \in B(\Gamma_x,\ \rho/100r)$。因此， $\langle e_1,\ \ldots\ldots,\ e_r\rangle_{\{-1,0,1\}} \subseteq B(\Gamma_x,\ \rho/100)$。特别地，对于每个 $x \in X''$， ϕ_x在 $\langle e_1,\ \ldots\ldots,\ e_r\rangle_{\{-1,0,1\}}$的所有元素处都有定义。

根据抽屉原理和不等式 $|E| = 2^r > K'$，存在两个不同的元素 $u,\ u' \in E$，使得

$$\sum_{j\in[16]}(-1)^j\phi_{x_j}(u) - \sum_{j\in[16]}(-1)^j\phi_{y_j^{(i)}}(u) = \sum_{j\in[16]}(-1)^j\phi_{x_j}(u') - \sum_{j\in[16]}(-1)^j\phi_{y_j^{(i)}}(u').$$

重新整理可得

$$\sum_{j\in[16]}(-1)^j\phi_{x_j}(u) - \sum_{j\in[16]}(-1)^j\phi_{x_j}(u') = \sum_{j\in[16]}(-1)^j\phi_{y_j^{(i)}}(u) - \sum_{j\in[16]}(-1)^j\phi_{y_j^{(i)}}(u').$$

记 $u - u' = \sum_{i\in[r]}\lambda_i e_i$对于某个 $\lambda_i \in \{-1,0,1\}$。根据 X的定义，对每个 $j \in [s]$，我们有

$$\begin{aligned}\Big\|\chi_j\Big(\sum_{k\in[16]}(-1)^k\phi_{x_k}(u-u')\Big)\Big\|_{\mathbb{T}} &= \Big\|\chi_j\Big(\sum_{k\in[16],\ell\in[r]}(-1)^k\lambda_\ell\phi_{x_k}(e_\ell)\Big)\Big\|_{\mathbb{T}}\\ &\leq \sum_{\ell\in[r]}\Big\|\sum_{k\in[16]}(-1)^k\chi_j(\phi_{x_k}(e_\ell))\Big\|_{\mathbb{T}}\\ &\leq r\cdot 16\cdot\frac{1}{10000r},\end{aligned}$$

其中我们在最后一个不等式中使用了 $\|\chi_j(\phi_{x_k}(e_\ell)) - t_{j,\ \ell}\|_{\mathbb{T}} \leq 1/10000r$。

这意味着

$$\Big\|\chi\Big(\sum_{j\in[16]}(-1)^j\phi_{x_j}(u) - \sum_{j\in[16]}(-1)^j\phi_{x_j}(u')\Big)\Big\|_\infty \leq \frac{1}{100}.$$

由于 $i \in I$, χ $\frac{1}{10}$ 将 $\Big(\sum_{j\in[16]}(-1)^j\phi_{y_j^{(i)}}\Big)(E)$ 中的元素分离，而上述不等式给出

$$\sum_{j\in[16]}(-1)^j\phi_{y_j^{(i)}}(u) = \sum_{j\in[16]}(-1)^j\phi_{y_j^{(i)}}(u')$$

so

$$\sum_{j\in[16]}(-1)^j\phi_{x_j}(u) = \sum_{j\in[16]}(-1)^j\phi_{x_j}(u')$$

因此 $u-u' \in Z\Big(\sum_{j\in[16]}(-1)^j\phi_{x_j}\Big)$。然而，这意味着 $x_{[16]}$ 是坏的，这与假设矛盾。

□

为完成证明，选取 $r = \lceil \log_2(2K')\rceil$ 和 $\eta = \frac{\varepsilon}{4\cdot 3^r}(\rho/100r)^{rd}$，使得上述对这些参数的条件成立；回忆 $s \le O(r+\log m)$，并应用引理 2.42。 □

§7 沿陪集广义等差数列的四元组小像

在本节中，我们利用鲁棒 Bogolyubov-Ruzsa 定理，通过使用一个结构化集合而非仅仅一个稠密集 X，来加强命题 6.1。

命题 7.1. 设给定一个密度为 c 的集合 $X \subseteq G_1$，以及一组 *Freiman* 线性映射 $\phi_x : B_x \to H$，其中 B_x 是圆环群 G_2 中余维为 d、半径为 ρ 的 *Bohr* 集，使得

$$\#\mathrm{Im}\Big(\sum_{i\in[16]}(-1)^i\phi_{x_i}\Big) \le K \tag{22}$$

对除至多 $\varepsilon|G_1|^{15}$ 个加性*16*元组 $x_{[16]}$ 外的所有 X 中的加性*16*元组均成立。

假设 $\varepsilon \le \exp(-(2\log c^{-1})^{C})$。那么存在一个对称真陪集进程 $C \subseteq G_1$，其大小为 $\exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)})|G_1|$，秩至多为 $(2\log c^{-1})^{O(1)}$，余维为$O(d)$ 且半径至少为 $\Omega(\rho)$ 的 *Bohr* 集 B'_x，以及 *Freiman* 线性映射 $\psi_x : B'_x \to H$，对所有满足下述条件的 $x \in C$

$$\#\mathrm{Im}\Big(\psi_{x_1}-\psi_{x_2}+\psi_{x_3}-\psi_{x_4}\Big) \le \exp((2d\log(\rho^{-1}K))^{O(1)})$$

对 C 中所有加性四元组(x_1, x_2, x_3, x_4) 均成立，并且对所有 $x \in C$,

$$\#\mathrm{Im}\Big(\psi_x-\phi_{x_1}+\phi_{x_2}-\cdots-\phi_{x_7}+\phi_{x_8}\Big) \le \exp((2d\log(\rho^{-1}K))^{O(1)})$$

对至少 $\exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)})|G_1|^7$ *8* 个元组$(x_1, x_2, \ldots, x_8) \in X^8$ 成立，其中 $\sum_{i\in[8]}(-1)^{i+1}x_i = x$。

证明。 将定理 2.24 应用于 X，可得到一个秩为 $r \le (2\log c^{-1})^{O(1)}$、大小为 $|C| \ge \exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)})|G_1|$ 的对称真陪集进程 C，使得对每个 $x \in C$，在 X 中至少有 $c_1|G_1|^3$ 个四元组 (x_1, x_2, x_3, x_4) 满足 $x = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$，其中 $c_1 = (c/2)^{O(1)}$。令 Q_x 为所有此类四元组构成的集合。

Let S 为 X 中使 (22) 不成立的加性 16 元组集合。因此 $|S| \le \varepsilon|G_1|^{15}$.

对于每个 $x \in C$，通过均匀随机地选取 $(x_1, \ldots, x_4)$ 来定义 θ_x 和 B'_x，并令 $\theta_x = \phi_{x_1} - \phi_{x_2} + \phi_{x_3} - \phi_{x_4}$ 和 $B'_x = B_{x_1} \cap B_{x_2} \cap B_{x_3} \cap B_{x_4}$。

命题 7.2。 存在一组适用于 $x \in C$ 的 B'_x 和 θ_x，使得对于 C 中除至多 $\sqrt{\varepsilon}\exp((2\log c^{-1})^{O(1)})|G_1|^3$ 个加性四元组 $(\dot{x_1}, x_2, \dot{x_3}, x_4)$ 之外的所有加性四元组，都有

(i) 不等式

$$\#\mathrm{Im}\left(\theta_{x_1} - \theta_{x_2} + \theta_{x_3} - \theta_{x_4}\right) \leq K, \tag{23}$$

and

(ii) 对每个 $i \in [4]$，$\#\mathrm{Im}(\theta_{x_i} - \phi_{y_1} + \phi_{y_2} - \phi_{y_3} + \phi_{y_4}) \leq K^2$ 至少对 $\exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)})|G_1|^3$ 个四元组 $(y_1, \ldots, y_4)$ 在 X 中成立，且满足 $y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = x_i$。

证明。 C 中的每个加性四元组 $(\dot{x_1}, x_2, \dot{x_3}, x_4)$ 都会产生 $c_1^4|G_1|^{12}$ 16 个元组 $(y_{ij})_{i,j\in[4]}$，使得 $(y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, y_{i4}) \in Q_{x_i}$ 且 $\sum_{i\in[16]}(-1)^{i+j}y_{ij} = 0$。令 $S_{x_{[4]}}$ 为满足以下条件的此类 16元组：

$$\#\mathrm{Im}\Big(\sum_{i\in[16]}(-1)^{i+j}\phi_{y_{ij}}\Big) \leq K.$$

根据命题的假设， C中除至多 $\sqrt{\varepsilon}\exp((2\log c^{-1})^{O(1)})|G_1|^3$ 个加性四元组外，其余都满足 $|S_{x_{[4]}}| \geq (1-\sqrt{\varepsilon})|Q_{x_1}^-||Q_{x_2}||Q_{x_3}||Q_{x_4}|$。任取一个这样的加性四元组。那么，$\#\mathrm{Im}\left(\theta_{x_1} - \theta_{x_2} + \theta_{x_3} - \theta_{x_4}\right) \leq K$ 至少为 $1-\sqrt{\varepsilon}$ 的概率成立，由此证明了该断言。另一性质的证明类似。

□

设 C' 是 C 的一个收缩，且仍为对称的真集合，并且 $16C' \subseteq C$ 和 $|C'| \geq \exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)})|G_1|$。注意，对于所有 $a \in 8C'$，都有 $|C \cap a + C| \geq |8C'|$。因此，对于每个 $a \in 8C'$，我们至少有 $\exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)})|G_1|^2$ 个在 C 中差为 a 的加性四元组。

如果 $\dot{x}$、y、$\dot{z}$、w 中的一个加性四元组在 C 中满足以下条件，我们称其为 (θ, s, K')-受尊重的：

$$\#\mathrm{Im}\left(\theta_x - \theta_y + \theta_z - \theta_w|_{B'_x\cap B'_y\cap B'_z\cap B'_w\cap B(\Gamma,\rho)}\right) \leq K',$$

对于某个余维至多为 s 的 Bohr 集 $B(\Gamma, \rho)$，以下条件成立（注意，半径 ρ 与陈述中的相同）。

如果 C 中形如 $(\dot{x}, y, \dot{z}, w)$ 的加性四元组中，除至多 $\sqrt[4]{\varepsilon}|G_1|^-$个以外，均为 $(\theta, 0, K)$-受尊重的，我们称成对的 $(x, y) \in 4C' \times 4C'$ 为良好。否则，我们称其为坏的。

命题 7.3。 设 $(\dot{x}, y, \dot{z}, w)$ 是 $4C'$ 中的元素加性四元组，且 (x, y) 和 (z, w) 均为良好。则 C 中的 $(\dot{x}, y, \dot{z}, w)$ 是 $(\theta, 8d, K^2)$-受尊重的。

证明。 由于 $x, y, z, w \in 4C'$，我们有 $a = x - y = w - z \in 8C'$。因此，至少有 $\exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)})|G_1|$ 个元素 $u \in C \cap C - a$。于是，存在 u，使得 $(\dot{x}, y, \dot{u}, u + a)$ 和 $(\dot{u}, u + a, \dot{w}, z)$ 都是 $(\psi, 0, K)$-受尊重的，从而

$$\#\mathrm{Im}\left(\theta_x - \theta_y + \theta_z - \theta_w|_{B'_x\cap B'_y\cap B'_z\cap B'_w\cap B'_{u+a}\cap B'_u}\right) \leq K^2$$

证明该断言。 □

通过平均，集合 $4C'$ 中至多有 $\sqrt[4]{\varepsilon}\exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)})|G_1|^2$ 对不是良好的。因此，存在一个集合 $S \subseteq 4C'$，使得 $|4C' \setminus S| \leq \sqrt[8]{\varepsilon}\exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)})|G_1|$，且每个 $x \in S$ 至多属于 $\sqrt[8]{\varepsilon}|G_1|$ 个坏对。此外，我们可以假设每个 $x \in S$ 都具有命题 7.2 的 (ii)性质。

C断言 7.4. 群 G 中的每个加性8元组 $x_{[8]}$ 都是$(\psi, O(r)\ K^{O(1)})$-良好相容的。

证明。我们首先证明，群 G 中的所有加性四元组都是 $(\psi, 24d, K^4)$-良好相容的。给定群 G 中的一个加性四元组 $(\dot{x_1}, x_2, x_3, \dot{x_4})$，选取 $y, z \in 4C'$，使得 (x_1, y)、(z, x_2)、(x_3, y) 和 (z, x_4) 都是良好的，并且 $x_1 - y = x_3 - z$。由前一个断言可知，$(\dot{x_1}, y, \dot{z}, x_2)$ 和 $(\dot{x_3}, y, \dot{z}, x_4)$ 都是 $(\psi, 8d, K^2)$-良好相容的，从而证明了该断言。

一旦所有加性四元 组都良好相容，证明更长的元组也如此便不难了。 □

现在我们可以为所有 $a \in C'$ 定义 ψ_a。对于任意满足 x，$x + a \in S$ 的 x，我们将定义域为 $B''_a = B'_{x+a} \cap B'_x$ 的 ψ_a 定义为 $\theta_{x+a} - \theta_x$。由于所有加性八元组在 S 中都是相容的，我们便完成了。应用引理 2.42，从条件中去掉多余的 Bohr 集。 □

§8 获取大量 Bohr-尊重的加性四元组

本节中，我们将进行关键的视角转换。到目前为止，我们一直在考虑 Bohr 集 ϕ_x 上的 Freiman 线性映射系统：$B_x \to H$，其中相容加性四元组的概念由 $\#\mathrm{Im}\left(\sum_{i\in[4]}(-1)^i\phi_{x_i}\right) \leq K$ 给出。现在我们采用另一种概念：若加性四元组 $x_{[4]}$ 满足 $(-1)^i\phi_{x_i}$ 在 $\cap_{i\in[4]}B_{x_i}$ 上消失，则称其为***Bohr*** 相容 。

命题 8.1. 假设对于每个 $x \in C$，$\phi_x : B_x \to H$ 都是 ***Freiman*** 线性映射，其中 C 是一个对称真陪集进程，半径均为 ρ，余维至多为 d，并且满足

$$\#\mathrm{Im}\Big(\sum_{i\in 2k]}(-1)^i\phi_{x_i}\Big) \leq K$$

对 C 中所有加性 $2k$-元组 $x_{[2k]}$ 均成立。令 $\varepsilon > 0$。

对于 $\ell \in [2, 2k]$，设 $Q_\ell \subseteq C^{2\ell}$ 是 C 中由若干个加性 2ℓ-元组构成的集合，其大小为 $|Q_\ell| \geq c|C|^{2\ell-1}$。

那么存在 ***Bohr*** 集 $B'_x \subseteq B_x$，其余维为$(2d\log(kK\varepsilon^{-1}c^{-1}\rho^{-1}))^{O(1)}$，半径为$(2kd\log(\rho^{-1}))^{-O(1)}$，使得对于每个 $2 \leq \ell \leq k$，所有位于 Q_ℓ 中的加性(2ℓ)-元组 $x_{[2\ell]}$ 中，有 $1-\varepsilon$ 的比例满足

$$\sum_{i\in[2\ell]}(-1)^i\phi_{x_i} = 0$$

关于 $\cap_{i\in[2\ell]}B'_{x_i}$。

备注。 注意，参数 ε 只影响该命题所产生的 Bohr 集的余维。

ˆ证明。令 $m \in \mathbb{N}$ 为一个稍后选定的正整数。均匀且线性无关地选取随机特征 χ_1，……，$\chi_m \in H$。对于每个 $x \in C$，进一步定义集合

$$U_x = \{y \in B_x : (\forall i \in [m])\ \chi_i(\phi_x(y)) \in (-1/20k, 1/20k)\}.$$

注意，这些本身并不是 Bohr 集；我们将在后文证明，它们包含所需的 Bohr 集 B'_x。此外，注意 C 不会因这一选择而改变。

断言 8.2。对于所有加性 2ℓ-元组 $x^{[2\ell]}$，在 C 中我们有

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{i\in[2\ell]}(-1)^i\phi_{x_i}(y) = 0 \ holds\ on\ \cap_{i\in[2\ell]}U_{x_i}\Big) \geq 1 - K2^{-m}.$$

证明。设 $A = \mathrm{Im}\left(\sum_{i\in[2\ell]}(-1)^i\phi_{x_i}\right)$，根据假设，其大小至多为 K。任取一个非零的 $h \in A$。如果映射 $\sum_{i\in[2\ell]}(-1)^i\phi_{x_i}$ 在 $\cap_{i\in[2\ell]}U_{x_i}$ 上取到 h，那么存在某个 $y \in G_2$，使得对所有 $i \in [2\ell]$，$\chi(\phi_{x_i})(y) \in (-1/20k, 1/20k)^m$，且 $h = \sum_{i\in[2\ell]}(-1)^i\phi_{x_i}(y)$。由此可得 $\chi(h) \in (-1/10, 1/10)^m$。换言之，如果 $\chi(h) \notin (-1/10, 1/10)^m$，那么所考虑的线性组合在 $\cap_{i\in[2\ell]}U_{x_i}$ 上不会取到 h。因此，所需概率至少为

$$1 - \sum_{h\in A\setminus\{0\}}\mathbb{P}\Big(\chi(h) \in (-1/10, 1/10)^m\Big) \geq 1 - K2^{-m}. \qquad \square$$

令 E_ℓ 表示那些在 $\cap_{i\in[2\ell]}U_{x_i}$ 上 $\sum_{i\in[2\ell]}(-1)^i\phi_{x_i}$ 不为零的、属于 Q_ℓ 的加性 2ℓ-元组 $x^{[2\ell]}$。由期望的线性性，我们有

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{\ell\in[2,k]}|E_\ell|/|C|^{2\ell-1}\Big) \leq \sum_{\ell\in[2,k]}K2^{-m}|Q_\ell|/|C|^{2\ell-1} \leq kK2^{-m}.$$

我们可以选取 $m = O(\log(kK\varepsilon^{-1}c^{-1}))$，使得上面的最后一个上界小于 εc。因此，所需比例的加性元组在 $\cap_{i\in[2\ell]}U_{x_i}$ 上具有消失性质。

剩下要证明集合 U_x 包含大的 Bohr 集。注意，映射 $\chi_i \circ \phi_x$ 是从 B_x 到 $\mathbb{T}$ 的 Freiman 线性映射。应用引理 2.37 即可完成证明。 $\square$

§9 双线性 Bogolyubov 论证

在证明的下一步中，我们使用一种双线性 Bogolyubov 类型的论证。关键思想是，给定一个博尔集系统 $(B_x)_{x\in C}$，由 $(B_{x_a+a} \cap B_{x_a}) + (B_{y_a+a} \cap B_{y_a})$ 给出的新系统在 a 中表现出线性行为，也就是说，所得 Bohr 集的频率集由在 a 处取值的 Freiman 线性映射给出。

在陈述主要结果之前，我们需要一个预备引理，它推广了一个简单的线性代数事实：定义在向量空间 V 的子空间 U_1 和 U_2 上的两个线性映射 α_1 和 α_2，若

它们在定义域 $U_1 \cap U_2$ 的交集上相等，就可以同时扩展为 $U_1 + U_2$ 上的一个线性映射。

回顾记号 $B^{(\delta)}$，它表示 Bohr 集 $B = B(\Gamma, \rho)$，是 $B(\Gamma, \delta\rho)$ 的简写。

引理 9.1。设 $\phi_1 : B_1 \to H$ 和 $\phi_2 : B_2 \to H$ 是分别定义在 *Bohr* 集 B_1 和 B_2 上的 *Freiman* 线性映射。假设 $\phi_1 = \phi_2$ 在 $B_1 \cap B_2$ 上成立。那么存在 *Freiman* 线性映射 $\psi : D = B_1^{(1/3)} + B_2^{(1/3)} \to H$，使得 $\psi = \phi_1$ 在 $D \cap B_1^{(2/3)}$ 上成立，且 $\psi = \phi_2$ 在 $D \cap B_2^{(2/3)}$ 上成立。

证明。我们如下定义 ψ。任取 $d \in D$。存在 $x \in B_1^{(1/3)}$ 和 $y \in B_2^{(1/3)}$，使得 $d = x + y$。我们令 $\psi(d) = \phi_1(x) + \phi_2(y)$。在证明余下部分，我们将说明 ψ 是良定义的，在适当的集合上与 ϕ_1 和 ϕ_2 一致，并且是 Freiman 线性的。

设对于 $x' \in B_1^{(1/3)}$ 和 $y' \in B_2^{(1/3)}$ 的另一种选择，有 $d = x' + y'$。那么 $x - x' = y' - y \in B_1 \cap B_2$，因此 $\phi_1(x) - \phi_1(x') = \phi_1(x - x') = \phi_2(y' - y) = \phi_2(y') - \phi_2(y)$。于是 $\phi_1(x) + \phi_2(y) = \phi_1(x') + \phi_2(y')$，如所需。

现在令 $z \in D \cap B_1^{(2/3)}$。那么对于 $x \in B_1^{(1/3)}$ 和 $y \in B_2^{(1/3)}$，有 $z = x + y$，并且我们有 $\psi(z) = \phi_1(x) + \phi_2(y)$。但是 $y = z - x \in B_1$，所以 $\phi_2(y) = \phi_1(y)$，从而 $\psi(z) = \phi_1(x) + \phi_1(y) = \phi_1(x + y) = \phi_1(z)$。类似的论证表明，$\psi = \phi_2$ 在 $D \cap B_2^{(2/3)}$ 上成立。

现在我们来证明 ψ 是 Freiman 线性的。为此，设对某个 $d_1, d_2, d_3 \in D$，有 $d_1 + d_2 = d_3$ 成立。因此，我们有 $x_1, x_2, x_3 \in B_1^{(1/3)}$ 以及 $y_1, y_2, y_3 \in B_2^{(1/3)}$，使得 $x_i + y_i = d_i$。特别地，$x_1 + x_2 - x_3 = y_3 - y_1 - y_2$ 是 $B_1 \cap B_2$的一个元素，所以 $\phi_1(x_1 + x_2 - x_3) = \phi_2(y_3 - y_1 - y_2)$。利用 Freiman 线性性，我们得到

$$\begin{aligned}\phi_1(x_1) + \phi_1(x_2) - \phi_1(x_3) &= \phi_1(x_1 + x_2) - \phi_1(x_3) = \phi_1(x_1 + x_2 - x_3) \\ &= \phi_2(y_3 - y_1 - y_2) = \phi_2(y_3) - \phi_2(y_1 + y_2) = \phi_2(y_3) - \phi_2(y_1) - \phi_2(y_2),\end{aligned}$$

so

$$\psi(d_1) + \psi(d_2) = \phi_1(x_1) + \phi_2(y_1) + \phi_1(x_2) + \phi_2(y_2) = \phi_1(x_3) + \phi_2(y_3) = \psi(d_3). \qquad \square$$

此外，我们还需要一个关于近似同态的结构定理的受限版本。

引理 9.2。设 $\psi_{[8]}$、$\psi'_{[8]}$ 是从集合 $C \subseteq G$ 到 G'的映射。假设我们有一个由参数组成的集合Q，其中包含至少 $c|G|^{11}$ 个参数 $(a_1, a_2, a_3, x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$，且每个参数都满足

$$\begin{aligned}&\psi_1(x_1 + a_1) - \psi_2(x_1) + \psi_3(x_2 + a_2) - \psi_4(x_2) + \psi_5(x_3 + a_3) - \psi_6(x_3) + \psi_7(x_4 + a_1 + a_2 - a_3) - \psi_8(x_4) \\ &\quad = \psi'_1(y_1 + a_1) - \psi'_2(y_1) + \psi'_3(y_2 + a_2) - \psi'_4(y_2) + \psi'_5(y_3 + a_3) - \psi'_6(y_3) + \psi'_7(y_4 + a_1 + a_2 - a_3) - \psi'_8(y_4).\end{aligned}$$

那么存在 *Freiman* 同态 $\theta_i : C'_i \to G$，其中 C'_i 是一个大小为$\exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)})|G|$、秩为$(2\log c^{-1})^{O(1)}$的陪集广义等差数列，满足 $i \in [8]$，且存在元素 $u_{[8]}$ 属于 G，使得以下 *16* 个等式成立

$$\psi_1(x_1 + a_1) = \theta_1(x_1 + a_1), \psi_2(x_1) = \theta_1(x_1) + u_1, \psi_3(x_2 + a_2) = \theta_2(x_2 + a_2), \psi_4(x_2) = \theta_2(x_2) + u_2,$$

$$\psi_5(x_3+a_3) = \theta_3(x_3+a_3)\ \psi_6(x_3) = \theta_3(x_3) + u_3,$$
$$\psi_7(x_4+a_1+a_2-a_3) = \theta_4(x_4+a_1+a_2-a_3), \psi_8(x_4) = \theta_4(x_4)+u_4,$$
$$\psi_1'(y_1+a_1) = \theta_5(y_1+a_1)\ \psi_2'(y_1) = \theta_5(y_1) + u_5, \psi_3'(y_2+a_2) = \theta_6(y_2+a_2)\ \psi_4'(y_2) = \theta_6(y_2) + u_6,$$
$$\psi_5'(y_3+a_3) = \theta_7(y_3+a_3)\ \psi_6'(y_3) = \theta_7(y_3) + u_7,$$
$$\psi_7'(y_4+a_1+a_2-a_3) = \theta_8(y_4+a_1+a_2-a_3), \psi_8'(y_4) = \theta_8(y_4)+u_8,$$

对于 Q 中至少 $\exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)})|G|^{11}$ 个 ***11*元组（且各参数属于相应函数的定义域）。**

证明。 首先，我们证明每个 ψ_i 都可以假设为在某个合适定义域上的 Freiman 同态，然后得出结论：其中一些映射彼此密切相关。

由于 $|Q|\geq c|G|^{11}$，满足 $z=x_1+a_1$ 的取值 z 所组成的集合 Z，对于 Q 中至少 $\frac{c}{2}|G|^{10}$ 11 个元组（$a_1,\dots,y_4$），其大小至少为 $\frac{c}{2}|G|$。转而考虑那些满足 $x_1+a_1\in Z$ 的 11元组 Q'，于是 $|Q'|\geq \frac{c^2}{4}|G|^{11}$。根据柯西-施瓦茨不等式，至少有 $\frac{c^4}{16}|G|^{12}$ 种 $(a_1,a_2,a_3,x_1,x_1',x_2,\dots,y_4)$ 的选取，使得 11 元组 $(a_1,\dots,y_4)$ 和 $(a_1,a_2,a_3,x_1',x_2,\dots,y_4)$ 都属于 Q'，特别地 $x_1+a_1, x_1'+a_1\in Z$。将这些 11元组对应的等式相减，得到

$$\psi_1(x_1+a_1)-\psi_2(x_1) = \psi_1(x_1'+a_1)-\psi_2(x_1').$$

因此，对于至少 $\frac{c^4}{16}|G|^3$ 种 x_1、x_1'、a_1，以及另外的 x_1+a_1、$x_1'+a_1\in Z$，这个等式成立。再应用一次柯西-施瓦茨步骤可知，

$$\psi_1(x_1+a_1)-\psi_1(x_1+b_1) = \psi_1(x_1'+a_1)-\psi_1(x_1'+b_1)$$

对于至少 $2^{-8}c^8|G|^4$ 个 $(x_1、x_1'、a_1、b_1)\in G^4$，该等式成立。应用定理 2.26，可得到一个 Freiman 同态 ρ_1，它定义在一个秩至多为 $(2\log c^{-1})^{O(1)}$ 的真陪集广义等差数列上，并且在大小为 $|Z'|\geq \exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)})|G|$ 的集合 $Z'\subseteq Z$ 上与 ψ_1 一致。转而考虑那些满足 $x_1+a_1\in Z'$ 的 11 元组，因此仍有至少 $\exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)})|G|^{11}$ 个这样的 11 元组。

由于该方程具有对称性，同样的论证也适用于对 ψ_i 或 ψ_i' 的任何其他选择。因此，总共经过 16 步后，我们可以假设存在定义在秩至多为 $(2\log c^{-1})^{O(1)}$ ρ_i 的真陪集广义等差数列上的 Freiman 同态：$C_i'\to G'$ 和 ρ_i'：$C_i''\to G'$，以及一个 11元组集合$Q'\subseteq Q$，使得 $|Q'|\geq \exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)})|G|^{11}$，并且对于每个 $(a_1、\dots、y_4)\in Q'$，我们还有

$$\psi_1(x_1+a_1)=\rho_1(x_1+a_1),\dots,\psi_8'(y_4)=\rho_8'(y_4).$$

剩下的任务是关联 ρ_i、ρ_i' 的某些对。与上文相同的第一步表明

$$\rho_1(x_1+a_1)-\rho_2(x_1)=\rho_1(x_1'+a_1)-\rho_2(x_1')$$

对于 $-(2\log c^{-1})^{O(1)})|G|^3$ 种 x_1，x_1'，a_1的选择。因此 $\mathrm{rk}(\rho_1^{\mathrm{lin}}-\rho_2^{\mathrm{lin}})\leq O(\log c^{-1})$，其中 ρ_i^{lin}是 Freiman 线性部分，即 $\rho_i-\rho_i(0)$。取 $K=\ker(\rho_1^{\mathrm{lin}}-\rho_2^{\mathrm{lin}})$ 并进行平均，我们可以找到另一个

大小为 $|Q''|\geq (c/2)^{O(1)}|G|^{11}$ 的子集 $Q''\subseteq Q'$，此外，其中所有 x_1 都属于同一个陪集 $s+K$。令 $u_1=\rho_2(s)-\rho_1(s)$。因此，每当一个 11 元组 $(a_1,\ldots\ldots,y_4)$ 属于 Q'' 时，我们有

$$\psi_2(x_1)=\rho_2(x_1)=\rho_2^{\mathrm{lin}}(x_1-s)+\rho_2(s)=\rho_1^{\mathrm{lin}}(x_1-s)+\rho_1(s)+u_1=\rho_1(x_1)+u_1,$$

利用这一事实 $x_1-s\in K$，即可得到所述结论。

最后，对 ρ_3、……、ρ_8' 中其余 7 对仿射映射应用类似论证。 □

现在我们可以陈述并证明本节的主要结果了。该结果表明，我们可以转而考虑 Bohr 集上的另一组 Freiman 线性映射，使得 Bohr 集的频率集呈现线性行为。

命题 9.3。设 $\varepsilon\leq 10^{-10d}$。设 $C\subseteq G_1$ 是一个秩为 d 的对称真陪集广义等差数列。定义一个收缩 $C^0=\frac{1}{10}\cdot C$，它是一个对称真陪集广义等差数列。对于 $\ell\in\{2,3,4\}$，令Q_ℓ 为 C 中满足 $x_{2i-1}-x_{2i}\in C^0$ 的加性 2ℓ-元组 $x^{[2\ell]}$ 的集合。

对于每个 $x\in C$，令 B_x 为一个半径为 ρ、余维为 d 的 ***Bohr*** 集，并令 $\phi_x\colon\ B_x\to H$ 为一个 ***Freiman*** 线性映射，使得对于每个 $\ell\in\{2,3,4\}$，$1-\varepsilon$ 比例的 Q_ℓ 中的加性 2ℓ-元组满足

$$\Big(\sum_{i\in[2\ell]}(-1)^i\phi_{x_i}\Big)|_{\cap_{i\in[2\ell]}B_{x_i}}=0.$$

于是，存在量 d'和 c'、一个集合 X、***Freiman*** 同态 $\theta_1,\ldots,\theta_{d'}$，定义在秩至多为 d' 且密度至少为 c'的陪集进程 C' 上；还存在一个大小至少为 $c'|G_1|$的集合 $X\subseteq C'$，以及 ***Freiman*** 线性映射 $\psi_a\colon\ V_a\to H$，其中 $a\in X$，使得 $V_a=B(\theta_i(a):\ i\in[d'],c')$ 满足

- 对于每个 $a\in X$，至少有 $c'|G_1|$种 $z\in C\cap C-a$的取值，使得 $|Z(\psi_a-\phi_{z+a}-\phi_z)|\geq(\rho/4)^{4d}|G_2|$，
- 在 X 中，至少有 $c'|X|^3$ 个加性四元组$x^{[4]}$ 与系统$(\psi_a\colon\ V_a\to H)$ ***Bohr*** 相容。

ˆ证明。令 $B_x=B(\Gamma_x,\ \rho)$，其中 $\Gamma_x\subseteq G_1$ 是一个大小为 d 的特征集合。另请注意，对于每个 $\ell\in\{2,3,4\}$，都有 $|Q_\ell|\geq 10^{-d\ell}|C|^{2\ell-1}$。

定义 R 为定理 2.12 中的量，其中该定理应用于余维为 $8d$、半径为 ρ 的两个 Bohr 集，因此 $R\leq(2\rho^{-1})^{O(d)}$。在证明过程中，我们将记录一列 ˆ ˆ Freiman 同态 $\theta_1\colon\ C_1\to G_2$，……，$\theta_m\colon\ C_m\to G_2$，它们定义在陪集广义等差数列 C_i 上，并在每一步加入一个新的 θ_i；对于每个 $x,\ y\in C$，我们将维护一个指标集合 $I_{x,\ y}\subseteq[m]$，使得集合 $\{\theta_i(x-y):\ i\in I_{x,\ y}\}$（其中对于所有 $i\in I_{x,\ y}$ 均有 $x-y\in C_i$）是 $\{-1,0,1\}$-线性无关的，并且

$$\{\theta_i(x-y):i\in I_{x,y}\}\subseteq\langle\Gamma_x\cup\Gamma_y\rangle_R.$$

这个包含关系使我们能够给出 $I_{x,y}$ 大小的上界。记 $s=|I_{x,y}|$。具体而言，由于 $\{-1,0,1\}$-独立性，我们有 $|\langle\theta_i(x-y):i\in I_{x,y}\rangle_{\{0,1\}}|=2^s$ 且

$$\langle\theta_i(x-y):i\in I_{x,y}\rangle_{\{0,1\}}\subseteq\langle\Gamma_x\cup\Gamma_y\rangle_{sR}.$$

因此， $2^s \le (2sR+1)^{2d}$。将 s_0 记为满足 $2^{s_0} > (2s_0R+1)^{2d}$ 的最小自然数，由此可得 $|I_{x,y}| \le s_0$ 且 $s_0 \le (d+\log\rho^{-1})^{O(1)}$。

断言 9.4. 设 $0 < \sigma < 1/8s_0$。假设目前

$$B(\theta_i(a) : i \in I_{x+a,x} \cup I_{y+a,y}, \sigma) \subseteq (B_{x+a} \cap B_x) + (B_{y+a} \cap B_y) \tag{24}$$

对至少 个三元组 (x,y,a) $x,y,x+a,y+a \in C$成立。那么存在一个秩为 $(2d\log(\delta^{-1}R))^{O(1)}$ 的陪集广义等差数列C'，以及一个 *Freiman* 同态 $\theta' :\ C' \to \hat{}G_1$，使得

$$\theta'(x-y) \in \langle \Gamma_x \cup \Gamma_y \rangle_R \setminus \langle \theta_i(x-y) : i \in I_{x,y} \rangle_{\{-1,0,1\}}$$

对 C^2 中至少 $\exp(-(2d\log(\delta^{-1}R))^{O(1)})|C|^2$ 个对 (x,y) 成立。

断言 *9.4* 的证明。 应用定理 2.12 可得

$$B(\langle \Gamma_{x+a} \cup \Gamma_x \rangle_R \cap \langle \Gamma_{y+a} \cup \Gamma_y \rangle_R, 1/4) \subseteq (B_{x+a} \cap B_x) + (B_{y+a} \cap B_y),$$

（回想一下， R 的定义考虑了定理 2.12 的应用。）

由三角不等式，因为 $\sigma \le \frac{1}{4(|I_{x+a,x}|+|I_{y+a,y}|)}$，我们有

$$B(\theta_i(a) : i \in I_{x+a,x} \cup I_{y+a,y}, \sigma) \subseteq B(\langle \theta_i(a) : i \in I_{x+a,x} \cup I_{y+a,y} \rangle_{\{-1,0,1\}}, 1/4).$$

我们得出

$$B(\langle \theta_i(a) : i \in I_{x+a,x} \cup I_{y+a,y} \rangle_{\{-1,0,1\}}, 1/4) \not\subseteq B(\langle \Gamma_{x+a} \cup \Gamma_x \rangle_R \cap \langle \Gamma_{y+a} \cup \Gamma_y \rangle_R, 1/4)$$

因此

$$\langle \Gamma_{x+a} \cup \Gamma_x \rangle_R \cap \langle \Gamma_{y+a} \cup \Gamma_y \rangle_R \not\subseteq \langle \theta_i(a) : i \in I_{x+a,x} \cup I_{y+a,y} \rangle_{\{-1,0,1\}}.$$

$\hat{}$ 定义映射 ψ_1、ψ_2、ψ_3、ψ_4：$C \to G_2$ 如下。对于每个 $x \in C$，我们均匀随机地选择一个线性组合$\lambda \in [-R,R]^{\Gamma_x}$，且对于不同的元素 x彼此独立，并令 $\psi_i(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma_x} \lambda_\gamma \gamma$。因此，当 x、$x+a$、y、$y+a$ 为互不相同的元素时，发生这一情况的概率至少为

$$\psi_1(x+a) - \psi_2(x) = \psi_3(y+a) - \psi_4(y) \notin \langle \theta_i(a) : i \in I_{x+a,x} \cup I_{y+a,y} \rangle_{\{-1,0,1\}} \tag{25}$$

$(2R+1)^{-4d}$。

$\hat{}$ 因此，存在一组选定的函数 ψ_1、ψ_2、ψ_3、ψ_4：$C \to G_2$，使得（25）对于 C 中至少$\frac{\delta}{2}($ $2R+1)^{-4d}|C|^3$ 个四元组成立。断言由引理 9.2 得证。 □

对于更复杂的索引元素排列，我们需要一个类似的结果。

命题 9.5。 设 $0<\sigma<1/32s_0$。假设目前

$$\bigcap_{j\in[4]} B(\theta_i(a_j): i\in I_{x_j+a_j,x_j}\cup I_{y_j+a_j,y_j},\sigma)\subseteq \Big(\bigcap_{j\in[4]}(B_{x_j+a_j}\cap B_{x_j})\Big)+\Big(\bigcap_{j\in[4]}(B_{y_j+a_j}\cap B_{y_j})\Big) \tag{26}$$

对至少 $\delta|C|^{11}$ 个 *12* 元组$(x_{[4]},y_{[4]},a_{[4]})$ 而言， $a_1+a_2=a_3+a_4$。T 那么存在一个秩为$(2d\log(\delta^{-1}R))^{O(1)}$ 的陪集广义等差数列 C' ，以及一个 *Freiman* 同态 $\theta':C'\to \hat{}G_1$ ，使得

$$\theta'(x-y)\in\langle\Gamma_x\cup\Gamma_y\rangle_R\setminus\langle\theta_i(x-y):i\in I_{x,y}\rangle_{\{-1,0,1\}}$$

对至少$\exp(-(2d\log(\delta^{-1}R))^{O(1)})|C|^2$ 个(x,y) 有序对， C^2中均成立。

证明。 证明与前一个证明类似，因此这里只强调其中的修改。我们应用定理 2.12 得到

$$B\Big(\langle\bigcup_{j\in[4]}\Gamma_{x_j+a_j}\cup\Gamma_{x_j}\rangle_R\cap\langle\bigcup_{j\in[4]}\Gamma_{y_j+a_j}\cup\Gamma_{y_j}\rangle_R,1/4\Big)\subseteq\Big(\bigcap_{j\in[4]}(B_{x_j+a_j}\cap B_{x_j})\Big)+\Big(\bigcap_{j\in[4]}(B_{y_j+a_j}\cap B_{y_j})\Big).$$

由三角不等式，因为 $\sigma\le\frac{1}{4\left(\sum_{j\in[4]}|I_{x_j+a_j,x_j}|+|I_{y_j+a_j,y_j}|\right)}$，我们有

$$\bigcap_{j\in[4]} B(\theta_i(a_j): i\in I_{x_j+a_j,x_j}\cup I_{y_j+a_j,y_j},\sigma)\subseteq B(\langle\theta_i(a_j):j\in[4],i\in I_{x_j+a_j,x_j}\cup I_{y_j+a_j,y_j}\rangle_{\{-1,0,1\}},1/4).$$

由此可得

$$B(\langle\theta_i(a_j):j\in[4],i\in I_{x_j+a_j,x_j}\cup I_{y_j+a_j,y_j}\rangle_{\{-1,0,1\}},1/4)\not\subseteq B\Big(\langle\bigcup_{j\in[4]}\Gamma_{x_j+a_j}\cup\Gamma_{x_j}\rangle_R\cap\langle\bigcup_{j\in[4]}\Gamma_{y_j+a_j}\cup\Gamma_{y_j}\rangle_R,1/4\Big)$$

从而

$$\Big\langle\bigcup_{j\in[4]}\Gamma_{x_j+a_j}\cup\Gamma_{x_j}\Big\rangle_R\cap\Big\langle\bigcup_{j\in[4]}\Gamma_{y_j+a_j}\cup\Gamma_{y_j}\Big\rangle_R\not\subseteq\langle\theta_i(a_j):j\in[4],i\in I_{x_j+a_j,x_j}\cup I_{y_j+a_j,y_j}\rangle_{\{-1,0,1\}}.$$

证明的其余部分是类似的，并由引理 9.2 得出。 □

反复应用命题 9.4 和 9.5，直到 $1-\varepsilon$ 比例的 C 中的加性四元组满足 (24)，且 $1-\varepsilon$ 比例的 C 中所描述的 12-元组满足 (26)。

回顾一下， $1-\varepsilon$ 比例的 Q_2 中的加性四元组是 Bohr 相容的。注意，对于 $a\in C^0$，有 $|C|\ge|C\cap C-a|\ge 2^{-d}|C|$。因此，我们可以找到一个集合 $A\subseteq C^0$，其大小至少为 $(1-2^{2d}\sqrt{\varepsilon})|C^0|$，使得对于每个 $a\in A$，满足 Bohr 相容的加性四元组 $(x+a,x,y+a,y)$ 的数量至少为 $(1-\sqrt[4]{\varepsilon})|C\cap C-a|^2$。此外，对于 $a\in A$，令 X_a 为所有 $x\in C\cap C-a$ 的集合，使得 $(x+a,x,y+a,y)$ 对至少 $(1-\sqrt[8]{\varepsilon})|C\cap C-a|$ 个 $y\in C\cap C-a$ 是 Bohr 相容的。于是$|X_a|\ge(1-\sqrt[8]{\varepsilon})|C\cap C-a|$。

此外，令 $A'\subseteq A$ 为满足 (24) 至少对于 $(1-2\sqrt{\varepsilon})|C\cap C-a$ 的 $a\in A$ 集合 $|^2$

对 $(x,\ y) \in (C \cap C - a)^2$ 的集合。因此，$|A'| \geq (1 - 2^{2d+1}\sqrt{\varepsilon})|C^0|$。

对每个 $a \in A'$，独立地从 $(C \cap C - a)^2$，中均匀随机选取一对 $(x_a,\ y_a)$。如果满足以下条件，我们就称 $(x_a,\ y_a)$ 是良好的：

- $(x_a + a,\ x_a,\ y_a + a,\ y_a)$ 与 Bohr 相容，
- $x_a,\ y_a \in X_a$，并且
- $B(\theta_i(a): i \in I_{x_a+a,\ x_a} \cup I_{y_a+a,\ y_a},\ \sigma) \subseteq (B_{x_a+a} \cap B_{x_a}) + (B_{y_a+a} \cap B_{y_a})$。

A' 的定义表明，对于任意给定的 $a \in A'$，$(x_a,\ y_a)$ 是良好的概率至少为 $1 - 2^{2d+3}\sqrt[8]{\varepsilon}$。

若这些条件成立，我们可以应用引理 9.1 来定义一个 Freiman 线性映射 $\psi_a :\ U_a \to H$，它在 $B^{(2/3)}_{x_a+a} \cap B^{(2/3)}_{x_a} \cap U_a$ 上与 $\phi_{x_a+a} - \phi_{x_a}$ 一致，在 $B^{(2/3)}_{y_a+a} \cap B^{(2/3)}_{y_a} \cap U_a$ 上与 $\phi_{y_a+a} - \phi_{y_a}$ 一致。

将 ψ 关联回 ϕ。 由于 $x_a \in X_a$，我们有 $(x_a + a, x_a, z + a, z)$ 对 $\frac{1}{2}|C \cap C - a|$ 的 $z \in C \cap C - a$ 是 Bohr 相容的，因此可得 $|Z(\psi_a - \phi_{z+a} - \phi_z)| \geq (\rho/4)^{4d}|G_2|$。

现在我们来证明，在 (ψ_a, U_a) 中 Bohr 相容的加性四元组的期望数量很大。令 Q 为所有满足以下条件的四元组 $a_{[4]}$ 的集合：它们属于 A' 且满足 $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$；对于至少 $(1 - \sqrt{\varepsilon})\prod_{i\in[4]}|C \cap C - a_i|$ 个四元组 $x_{[4]}$，加性 8 元组 $(x_1 + a_1, x_1, \ldots, x_4 + a_4, x_4)$ 相对于系统 ϕ 是 Bohr 相容的；并且 (26) 对 $(\prod_{i\in[4]}|C \cap C - a_i|) \times (\prod_{i\in[4]}|C \cap C - a_i|)$ 中至少 $(1 - \sqrt{\varepsilon})\prod_{i\in[4]}|C \cap C - a_i|^2$ 个 $x_{[4]}, y_{[4]}$ 成立。因此 $|Q| \geq (1 - 2^{8d}\sqrt[4]{\varepsilon})|C^0|^3$。由此可知，在 (ψ_a, U_a) 中 Bohr 相容的加性四元组的期望数量至少为 $(1 - 2^{9d}\sqrt[4]{\varepsilon})|C^0|^3$。我们选取 ψ_a：令 $U_a \to H$，其中 $a \in A'$，使得上述性质成立。

最后，我们转而取一个子集 $A \subseteq A'$，在该子集上，U_a 表现出线性行为。由于 $U_a = B(\theta_i(a) : i \in I_{x+a,\ x} \cup I_{y+a,\ y},\ \sigma/4)$ 且 $|I_{x+a,\ x} \cup I_{y+a,\ y}| \leq 2s_0$，让我们在所有满足这些条件的集合中均匀随机地选取一个大小为 $8s_0$ 的 $J \subseteq [m]$，并令 A 为所有满足 $I_{x+a,\ x} \cup I_{y+a,\ y} \subseteq J$ 的 $a \in A'$ 的集合。因此，a 被选中的概率至少为 $\binom{m}{8s_0}^{-1}$；由期望的线性性，存在一个 J 的取值使得 $|\tilde{A}| \geq \binom{m}{8s_0}^{-1}|A'| \geq m^{-8s_0}|A'|$。令 $U'_a = B(\theta_i(a) :\ i \in J,\ \sigma/4)$ 作为 $a \in \tilde{A}$ 的 ψ_a 的定义域，即可完成证明。 □

§10 含有许多 Bohr-尊重的加性四元组的双线性 Bohr 簇

在这一步中，我们再次使用抽象的 Balog-Szemerédi-Gowers 定理，找出一个指标子集，使其中所有加性四元组都 Bohr 相容。不过，这一步比

第6节中涉及抽象 Balog-Szemer´edi-Gowers 定理的前一步更为复杂，因为我们需要确保系统中 Freiman 线性映射的定义域构成一个拟随机双线性 Bohr 簇，因此我们依赖代数正则性引理。

命题 *10.1.* 设 $C \subseteq G_1$ 是一个秩为 d 的陪集广义等差数列，$B = B(\Gamma, \rho) \subseteq G_2$ 是一个 *Bohr* 集 ˆ，并设 $\Theta_1, \dots, \Theta_r \colon C \to G_2$ 是 *Freiman* 同态。设 $V_x = B \cap B(\Theta_1(x) \dots, \Theta_r(x); \rho)$。假设我们还给定了 *Freiman* 线性映射 $\phi_x : V_x \to H$，对每个 $x \in X$, $X \subseteq C$ 均成立，并且 X 中至少有 $c|C|^3$ 个加性四元组是 *Bohr* 相容的。那么存在一个大小为 $\exp(-(2dr \log \rho^{-1}))|C|$ 的集合 $X' \subseteq X$，以及另一个 *Bohr* 集 B'，使得 X' 中所有加性四元组都与系统 $\phi_x|_{B' \cap V_x}$ 相容。

证明。令 $\eta > 0$ 为稍后选定的参数。我们通过对误差参数 η应用代数正则性引理（定理 3.5）来开始证明。由此得到一个进一步的真陪集广义等差数列C'，其秩至多为 d，以及一个大小至多为

$$\exp\left(d^{O(1)} r^{O(1)} \log^{O(1)}(\eta^{-1}) \log^{O(1)}(\rho^{-1})\right),$$

的集合 $C' + T \subseteq C$，使得 $|C'||T| = |C' + T| \geq (1 - \eta)|C|$，并且每个 $t + C'$按照该定理的意义诱导出双线性 Bohr 簇的一个拟随机部分。令 $X_t = X \cap t + C$，其中 $t \in T$。令 Q 为 X中所有 Bohr-尊重的加性四元组组成的集合。令 $\mathcal{T}$为所有四元组 $(t_1, \dots, t_4) \in T^4$组成的集合，满足在 $(t_1 + C') \times (t_2 + C') \times (t_3 + C') \times (t_4 + C')$ 内存在一个来自 Q 的元素。我们断言 $|\mathcal{T}| \leq 2^{5d}|T|^3$。否则，我们可以选取 $t_2, t_3, t_4 \in T$，使得对于一组可能的 t_1，其大小大于 2^{5d}，有 $(t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathcal{T}$。但于是，对每个 $t_1 \in T'$，都有 $t_1 - t_2 + t_3 - t_4 \in 4C'$。由于不同 t_1对应的 $t_1 + C'$ 两两不相交，且都包含于 $5C' + t_2 - t_3 + t_4$，因此有 $|T'| \leq 2^{5d}$，这就产生了矛盾。因此，我们可以选取 t_1, t_2, t_3, t_4，使得 $(t_1 + C') \times (t_2 + C') \times (t_3 + C') \times (t_4 + C')$ 中至少有 $2^{-5d}c|C'|^3$ 个加性四元组。但稍微重新定义 Bohr 集 B，便可假设所有 t_i都相等。具体而言，取 $x_3 \in t_3 + C'$和 $x_4 \in t_4 + C'$，使得对于许多种 (x_1, x_2) 的选择，(x_1, x_2, x_3, x_4) 都是 Bohr 相容的。再取另一对这样的元素，我们得到

$$\phi_{x_1} - \phi_{x_2} - \phi_{x_1'} + \phi_{x_2'} = \left(\phi_{x_1} - \phi_{x_2} + \phi_{x_3} - \phi_{x_4}\right) - \left(\phi_{x_1'} - \phi_{x_2'} + \phi_{x_3} - \phi_{x_4}\right)$$

在 $V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap V_{x_1'} \cap V_{x_2'} \cap V_{x_3} \cap V_{x_4}$ 上为零，因此只需与 B 取交集。再应用一次这样的步骤，得到一个单独的陪集广义等差数列 $t + C$，并假设 Bohr 相容的加性四元组数量至少为 $2^{-20d}c^4|C'|^3$。

滥用记号，我们转而考虑一个陪集广义等差数列 C'，在其上该双线性簇是充分准随机的。我们的目标是应用抽象的 Balog-Szemerédi-Gowers 定理。对于半径 σ，令$V_{(\sigma)x} = B(\Gamma; \sigma) \cap B(\Theta_1(x)\dots\dots, \Theta_r(x); \sigma)$。

令 ρ_i 定义为 $3^{-i}\rho$。为简化记号，写作 $V_x^{(i)} = V_{(\rho_i)x}$，这是一个略微缩小的 Bohr 集。令 $\mathcal{Q}_i$ 为所有满足以下条件的加性四元组（$\dot{a}_1$、a_2、a_3、$\dot{a}_4$）的集合：

$$\phi_{a_1} - \phi_{a_2} - \phi_{a_3} + \phi_{a_4} = 0$$

在 $V_{(i)\,a_1} \cap V_{(i}$ $_{a_2} \cap V^{(i)}_{a_3} \cap V^{)}$ $_{(i)\,a_4}$ 上。显然， $\mathcal{Q}_i \subseteq \mathcal{Q}_{i+1}$，因此所有集合 $\mathcal{Q}_i$ 都很大。它们也都是对称的。为了应用该定理，我们需要验证弱传递性。

断言 10.2。设 $x+a$、x、$y+a$、y 是 X 的元素，满足 $(\dot{x+a}$、x、$z+a$、$\dot{z})$、$(\dot{z+a}$、z、$y+a$、$\dot{y}) \in \mathcal{Q}_i$ 对至少 $c'|C|$ 个 $z \in X$ 的选择成立。那么 $(\dot{x+a}$、x、$y+a$、$\dot{y}) \in \mathcal{Q}_{i+1}$。

证明。令 Z 为所描述元素 $z \in X$ 的集合。对于每个这样的 $z \in Z$，根据 Bohr 相容性，我们有

$$\begin{aligned}\phi_{x+a}(w) - \phi_x(w) - \phi_{y+a}(w) + \phi_y(w) =& \Big(\phi_{x+a}(w) - \phi_x(w) - \phi_{z+a}(w) + \phi_z(w)\Big) \\ &+ \Big(\phi_{z+a}(w) - \phi_z(w) - \phi_{y+a}(w) + \phi_y(w)\Big) = 0,\end{aligned}$$

每当 $w \in V_{(i)\,x+a} \cap V_{(i)x} \cap V_{(i)\,y+a} \cap V_{(i)y} \cap V_{(i)\,z+a} \cap V_{(i)z}$ 时。写作 $S = V_{(i+1)\,x+a} \cap V_{(i+1)\,x} \cap V_{(i+1)\,y+a} \cap V_{(i+1)y}$，并注意到 $S \cap V_{(i+1)z} \subseteq V_{(i)\,z+a}$。事实上，如果 w 属于左侧的集合，那么对于所有相关特征，$\|\chi(w)\|_{\mathbb{T}} \leq \rho_{i+1}$，因此 $\|\theta_i(z+a)(w)\|_{\mathbb{T}} \leq 3\rho_{i+1} \leq \rho_i$。于是，$\phi_{x+a}(w) - \phi_x(w) - \phi_{y+a}(w) + \phi_y(w) = 0$ 在 $\cup_{z\in Z} S \cap V_{(i+1)z}$ 上。

利用拟随机性可推得，对于至少$1 - 4^{-k}$比例的 $w \in V_{(i+1)\,x+a} \cap V_{(i+1)x} \cap V_{(}$ $_{i+1}$ $_{y+a} \cap V^{(i+1))}_{y}$，$\phi_{x+a}(w) - \phi_x(w) - \phi_{y+a}(w) + \phi_y(w) = 0$ 成立。根据引理 2.5，只要$\rho_{i+1} \leq \frac{1}{2}\rho_i$，我们便完成了证明。 □

应用定理 4.1，得到一个集合 $X' \subseteq X$。类似地，再次应用定理 4.1，找到一个进一步的子集 $X'' \subseteq X'$。特别地，存在某个 $c' \geq (c/2^d)^{O(1)}|C'|$，使得对于每个属于 X'' 的加法 12 元组 $a_{[12]}$，至少有 $c'|C'|^{35}$ 个加性 36 元组 $y_{[36]}$ 属于 X'，满足 $|X'|, |X''| \geq c'|C'|$

$$\sum_{i\in[12]} (-1)^i a_i = \sum_{i\in[36]} (-1)^i y_i$$

and

$$\sum_{i\in[12]} (-1)^i \phi_{a_i} = \sum_{i\in[36]} (-1)^i \phi_{y_i} \tag{27}$$

在 $\Big(\bigcap_{i\in[12]} V_{(}$ $_{a_i}^{\sigma}$ $\Big) \cap \Big(\bigcap_{i\in[36]} V^{)(}$ $_{y_i}^{\sigma}$ $\Big)$ 上成立，其中某个 $\sigma \geq \Omega(\rho)$ 如此，且对所有属于 X' 的加性加性 36 元组 $y_{[36]}$ 也有类似结论；我们将其与属于 X 的加性 108 元组$z_{[36]}$ 联系起来。这里我们多次使用了$V_{(\tau/3)x_1} \cap V_{(\tau/3)x_2} \cap V_{(\tau/3)x_3} \subseteq V_{(\tau)x_4}$，用于加性四元组 $(x_1, \ldots, x_4)$。

断言 10.3。给定 $\eta \leq (2^d \delta cc')^{\mathsf{C}}$，以下结论成立。设 Q 是 X' 中一个大小为 $\delta|C'|^{35}$ 的加性加性 36 元组集合。那么存在一个实数 $\rho' \geq \Omega(\rho)$ 以及一个 *Freiman* 线性映射 $\psi\colon B(\Gamma, \rho') \to H$，使得

$$\Big(\sum_{i\in[36]} (-1)^i \phi_{y_i}\Big)\Big|_{\cap_{i\in[36]} V^{(\rho')}_{y_i}} = \psi|_{\cap_{i\in[36]} V^{(\rho')}_{y_i}}$$

对至少 $cc'\delta$ 个 $y_{[36]} \in Q$ 的 $^{O(1)}|C'|^{35}$ 成立。

证明。考虑一个二部图，其顶点类分别为 Q 和 X' 中所有加性 108 元组构成的集合。若 $y_{[36]} \in Q$ 和 $z_{[108]}$ 满足以下条件，则在它们之间连一条边：

$$\sum_{i\in[36]} (-1)^i \phi_{y_i} = \sum_{i\in[108]} (-1)^i \phi_{z_i}$$

在 $\left(\bigcap_{i\in[36]} V_{y_i}^{(\sigma)}\right) \cap \left(\bigcap_{i\in[108]} V_{z_i}^{(\sigma)}\right)$上成立。根据定理 4.1 所保证的性质，$Q$ 中的每个顶点的次数至少为 $c'|C'|^{107}$，因此该图是稠密的。

利用双线性 Bohr 簇的拟随机性和引理2.40，我们可以得出，对于绝大多数 $y_{[36]}, y'_{[36]} \in Q$ 以及加性 108 元组 $z_{[108]}, z'_{[108]}$，有

$$\begin{aligned}
B(\Gamma, \sigma/300) \subseteq & (\cap_{i\in[108]} V_{z_i}^{(\sigma/30)}) + (\cap_{i\in[108]} V_{z'_i}^{(\sigma/30)}) \\
(\cap_{i\in[108]} V_{z_i}^{(\sigma/10)}) \cap (\cap_{i\in[108]} V_{z'_i}^{(\sigma/10)}) \subseteq & \Big((\cap_{i\in[108]} V_{z_i}^{(\sigma)}) \cap (\cap_{i\in[108]} V_{z'_i}^{(\sigma)}) \cap (\cap_{i\in[36]} V_{y_i}^{(\sigma)})\Big) \\
& + \Big((\cap_{i\in[108]} V_{z_i}^{(\sigma)}) \cap (\cap_{i\in[108]} V_{z_{\prime i}}^{(\sigma)}) \cap (\cap_{i\in[36]} V_{y'_i}^{(\sigma)})\Big) \\
(\cap_{i\in[36]} V_{y_i}^{(\sigma/3000)}) \subseteq & \Big((\cap_{i\in[108]} V_{z_i}^{(\sigma/300)}) \cap (\cap_{i\in[36]} V_{y_i}^{(\sigma/300)})\Big) \\
& + \Big((\cap_{i\in[108]} V_{z_{\prime i}}^{(\sigma/300)}) \cap (\cap_{i\in[36]} V_{y_i}^{(\sigma/300)})\Big) \\
(\cap_{i\in[36]} V_{y'_i}^{(\sigma/3000)}) \subseteq & \Big((\cap_{i\in[108]} V_{z_i}^{(\sigma/300)}) \cap (\cap_{i\in[36]} V_{y'_i}^{(\sigma/300)})\Big) \\
& + \Big((\cap_{i\in[108]} V_{z_{\prime i}}^{(\sigma/300)}) \cap (\cap_{i\in[36]} V_{y'_i}^{(\sigma/300)})\Big).
\end{aligned}$$

我们首先选取 $z_{[108]}, z'_{[108]}$，使得 $y_{[36]}, y'_{[36]} \in Q$ 中的大多数满足上述包含关系，并且其中的正比例在我们所考虑的二部图中构成一个长度为4的环。令 $K = \cap_{i\in[108]} V^{(\sigma)}_{z_i}$, $K' = \cap_{i\in[108]} V^{(\sigma)}_{z_{\prime i}}$, $L =$, $L' =$，并令 $\alpha\colon K \to H$, $\alpha'\colon K' \to H$, $\beta\colon L \to H$,$\beta'\colon L' \to H$ 为由 $\alpha = \sum_{i\in[108]}(-1)^i\phi_{z_i}$, $\alpha' = \sum_{i\in[108]}(-1)^i\phi_{z'_i}$, $\beta = \sum_{i\in[36]}(-1)^i\phi_{y_i}$和 $\beta' = \sum_{i\in[36]}(-1)^i\phi_{y'_i}$定义的映射。我们首先证明 $\alpha = \alpha'$在 $K\cap K'$上成立。注意到 $\alpha = \beta$在 $K\cap L$上成立，且 $\alpha' = \beta$在 $K\cap L$上成立，因此 $\alpha = \alpha'$在 $K\cap K'\cap L$上成立。用 β'代替 β，我们得到 $\alpha = \alpha'$在 $(K\cap K'\cap L)+(K\cap K'\cap L')$上成立。只要取适当的 $y_{[36]}, y'_{[36]}$，利用上面的第二个包含关系，我们就得到 $\alpha = \alpha'$ 在 $(K\cap K')^{1/10}$ 上成立。

利用引理 9.1，将 α 和 α' 同时延拓为 ψ，定义在 $(K+K')^{1/30}$ 上，其中包含 $B(\Gamma, \sigma/300)$。因此，在 $\cap_{i\in[108]} V_{z_i}^{(\sigma/300)}$ 上为 $\psi = \beta) \cap (\cap_{i\in[36]} V^{(\sigma/300)}_{y_i})$，并且在 $\cap_{i\in[108]} V^{(\sigma/300)}_{z'_i}) \cap (\cap_{i\in[36]} V^{(\sigma/300)}_{y_i})$，所以它们在包含 $\cap_{i\in[36]} V_{y_i}^{(\sigma/3000)}$ 的和集上重合。 □

因此，对于每个加法 12 元组 $q = x_{[12]}$ in X''，都有 $c'|C'|^{35}$ 个加性 36 元组属于 X'，使得（27）成立。将上述断言应用于这组加性 36 元组，可得到一个 Freiman 线性映射$\psi_q\colon B(\Gamma, \rho') \to H$，使得

$$\Big(\sum_{i\in[36]} (-1)^i \phi_{y_i}\Big)\Big|_{\cap_{i\in[36]} V_{y_i}^{(\rho')}} = \psi|_{\cap_{i\in[36]} V_{y_i}^{(\rho')}}$$

对 X' 中上述所考虑的加性 36 元组中的一个集合 $\mathcal{Z}_q$，$y_{[36]}$ 成立；该集合的大小至少为$c_2|C'|^{35}$，其中某个 $c_2 \geq (cc')^{O(1)}$。

取一个极大集合族 $q_1, \ldots, q_m$，其中包含 X'' 中的加法 12 元组 $q = x_{[12]}$，且满足 $|\mathcal{Z}_{q_i} \cap \mathcal{Z}_{q_j}| \leq \frac{1}{2}c_2^2|C'|^{35}$。根据初等双重计数论证，我们有 $m \leq (c_2^{-1}/2)^{O(1)}$。另记 ψ_i 为 ψ_{q_i}。

断言 10.4. 对于 X'' 中的每个加法 *12* 元组 $x_{[12]}$，存在某个 $j \in [m]$，使得

$$\Big(\sum_{i \in [12]} (-1)^i \phi_{x_i} \Big) = \psi_j$$

在 $\cap_{i \in [12]} V_{x_i}^{(\rho'/10)}$ 上成立。

证明。 根据我们对 $q_1, \ldots, q_m$ 的选取，存在 q_j 使得 $|\mathcal{Z}_{q_j} \cap \mathcal{Z}_q| \geq \frac{1}{2}c_2^2|C'|^{35}$。对于交集中的每个加法 36 元组$y_{[36]}$，我们有

$$\sum_{i \in [36]} (-1)^i \phi_{y_i} = \sum_{i \in [12]} (-1)^i \phi_{x_i}$$

在交集 $\Big(\cap_{i \in [36]} V^{(\rho'}_{y_i} \Big) \cap \Big(\cap_{i \in [12]} V^{(}_{x_i}{}^{\rho'} \Big))$ 上成立，且

$$\sum_{i \in [36]} (-1)^i \phi_{y_i} = \psi_j$$

在 $\cap_{i \in [36]} V_{y_i}^{(\rho'})$上。因此，

$$\Big(\sum_{i \in [12]} (-1)^i \phi_{x_i} \Big) = \psi_j$$

在许多 $\frac{1}{2}c_2^2|C'|^{35}$ 加性 36 元组 $y_{[36]}$ 上，对 $\Big(\cap_{i \in [12]} V_{x_i}^{(}{}^{\rho'/10} \Big) \cap \Big(\cap_{i \in [36]} V^{)(}_{y_i}{}^{\rho'} \Big)$成立。由拟随机性可得断言。

□

依赖随机选择论证。为完成证明，我们使用一个概率论证，实质上将问题化归到情形 $\psi_j = 0$。首先，我们迭代地随机定义 $(\chi_1, t_1) \ldots, (\chi_\ell, t_\ell) \in \hat{} H \times B(\Gamma, \rho'/100)$。令 $J \subseteq [m]$ 为满足 ψ_j 在整个 $B(\Gamma, \rho'/10^6)$ 上不为零的 j 的集合。于是，ψ_j 在 $B(\Gamma, \rho'/100)$ 上至少有 1 10 的非零值比例。每一步都随机选取 χ_i, t_i，并移除满足 $\|\chi_i(\psi_j(t_i))\|_{\mathbb{T}} \geq 1/100$ 的指标 j，然后转到子集 $X'' \cap V_{\cdot t_1}^{\rho'/10} \ldots \cap V_{\cdot t_i}^{\rho'/10}$。以正概率，$J$ 会按常数因子递减，而 X'' 在每一步都保持相当大，因此经过对数数量的步骤后即可完成。令 X 为 X'' 中剩余的元素。

为完成论证，取一个边长为 $1/10000$、位于 $\mathbb{T}^\ell$ 内部的随机立方体 I，并取由所有满足 $(\chi_1(\phi_x(t_1)) \ldots, \chi_\ell(\phi_x(t_\ell)) \in I$ 的 $x \in X$ 组成的集合 ~。事实证明，最终集合中的所有加性 12- 元组都是 Bohr 相容的，正如所需。

□

§11 将定义域扩展到完整的双线性簇

从本节开始，我们将采用另一种重要的视角转换。我们不再考虑 Freiman 线性映射系统，而是考虑定义在双线性 Bohr 簇上的映射，这些映射具有双线性结构。

既然某个稠密集中的所有加性四元组都与 Bohr 相容，我们再次应用强健的 Bogolyubov-Ruzsa 定理，以确保指标集合是一个陪集广义等差数列。然而，与前一节一样，情况比第 7 节中的情况更加复杂，因此我们需要使用代数正则性引理。

为了能够将新得到的映射与旧映射联系起来，我们引入排列的概念。排列是 $G_1 \times G_2$ 中点的某些序列，而它们的长度将是一个单点。$\emptyset$-排列就是由一个点组成的单元素序列（x，y），而（x，y）是其长度。更一般地，（d_1，$\dots$，d_r）-排列的长度为（ℓ_1，ℓ_2），它是若干个 d_r（d_1，$\dots$，d_{r-1}）-排列的连接，这些排列的长度分别为（a_1，ℓ_2）$\dots$，（a_{d_r}，ℓ_2），其中 $a_1 - a_2 +$

$\cdots + (-1)^{d_r-1} a_{d_r} = \ell_1$，或（$\ell_1$，$b_1$）……，（$\ell_1$，$b_{d_r}$），其中 $b_1 - b_2 + \cdots + (-1)^{d_r-1} b_{d_r} = \ell_2$。从几何角度看，排列产生于进行方向卷积的过程中，并且在扩展近似双线性映射时自然出现。我们将 $G_1 \times G_2$ 中所有（d_1，……，d_r）-排列的集合记为 $\mathcal{A}_{d_1,\ \dots\dots,\ d_r}$，长度为（$\ell_1$，$\ell_2$）的排列记为 $\mathcal{A}_{d_1,\ \dots\dots,\ d_r}(\ell_1,\ \ell_2)$。注意，作为一个序列，任意（$d_1$，……，$d_r$）-排列恰好由 $d_1 \dots d_r$ 个点组成。

命题 11.1。设 $C \subseteq G_1$ 是秩为 d 的对称真陪集广义等差数列，设 $X \subseteq C$ 是一个大小为 $|X| \geq c|C|$ 的 $\hat{}$ 集。设 B（Γ，ρ）$\subseteq G_2$ 是余维为 r 的 ***Bohr*** 集，并设 Θ_1，……，Θ_s：$C \to G_2$ 是 ***Freiman*** 线性映射。设 V 是双线性 ***Bohr*** 簇

$$V = \Big\{(x,y) \in G_1 \times G_2 : x \in C, y \in B \cap B(\Theta_1(x), \dots, \Theta_s(x); \rho)\Big\}.$$

假设 $\phi : (X \times B) \cap V \to H$ 是一个保留所有水平加性 *36* 元组、且在垂直方向上为 ***Freiman*** 线性的映射。

那么存在一个正量

$$c' \geq \exp\Big(-d^{O(1)} r^{O(1)} s^{O(1)} \log^{O(1)}(\rho^{-1})\Big)$$

一个秩为 d（与 C 相同）、大小为 $|C'| \geq c'|C|$ 的对称真陪集进程 $C' \subseteq C$，一个正量 $\rho' \geq \Omega(\rho)$，以及一个映射 $\psi : V' \to H$，对应一个双线性 ***Bohr*** 簇

$$V' = \Big\{(x,y) \in G_1 \times G_2 : x \in C, y \in B \cap B(\Theta_1(x), \dots, \Theta_s(x); \rho')\Big\},$$

它是 ***Freiman*** 双线性映射，并且满足恒等式

$$\psi(x,y) = \sum_{i \in [36]} \nu_i \phi(a_i, b_i). \tag{28}$$

成立，且所有论证均属于 V，对于至少 $c'|C|^{29}|G_2|^6$ 种长度为(x,y)的 ***(4,3,3)*-排列**，其中 $\nu_i \in \{-1,0,1\}$ 是一些固定系数，使得在张量积 $G_1 \otimes G_2$ 中等式成立

$$x \otimes y = \sum_{i \in [36]} \nu_i a_i \otimes b_i.$$

继续这一步之前，我们先记录一个预备引理；它将在多个地方派上用场，并可用于填补定义在双线性 Bohr 簇上的近似双线性映射的定义域中的空缺。

ˆ引理 11.2. 设 $C \subseteq G_1$ 是余维为 d 的对称真陪集广义等差数列，$\Gamma \subseteq G_2$ 是一个大小为 d 的ˆ集合，且 $\Theta_1, \dots, \Theta_r \colon C \to G_2$ 是 ***Freiman*** 线性映射。对于一个量 $\sigma > 0$，定义双线性 ***Bohr*** 簇 $V^\sigma = \bigcup_{x \in C} \{x\} \times B(\Gamma, \Theta_1(x) \dots, \Theta_r(x); \sigma)$。

设 $X \subseteq V^\rho$ 是双线性 ***Bohr*** 簇的一个子集，其大小为 $|X| \geq (1-\varepsilon)|V^\rho|$；设 $\phi \colon X \to H$ 是一个映射，且 $E \subseteq H$ 是一个集合。假设对于定义域 X 中除至多 $\varepsilon|G_1|^3|G_2|$ 个水平加性四元组以外的所有四元组，都有 $\phi(x_1,y) - \phi(x_2,y) + \phi(x_3,y) - \phi(x_4,y) \in E$ 成立；并且对于定义域 X 中除至多 $\varepsilon|G_1||G_2|^3$ 个垂直加法四元组以外的所有四元组，都有 $\phi(x,y_1) - \phi(x,y_2) + \phi(x,y_3) - \phi(x,y_4) \in E$ 成立。那么，只要 $\varepsilon \leq 2^{-\mathbf{C}(r+d)}\rho^{\mathbf{C}r}$ 成立，就存在一个 $10000E$-双同态 ψ，其定义域为$D = (\frac{1}{20000}C \times G_2) \cap V^{\rho/20000}$、值域为 H，以及一个大小为 $|X'| \geq (1-\varepsilon^{1/8}(2\rho^{-1})^{O(r+d)})|D|$ 的子集 $X' \subseteq D \cap X$，使得对于每个 $(x,y) \in X'$，都有 $\psi(x,y) = \phi(x,y)$。

此外，对于每个 $(x,y) \in D$，我们至少有 $2^{-O(r+d)}\rho^{O(r)}|C|^2|B(\Gamma,\rho)|^6$ 种 $(x_1,x_2,y_{1,1},y_{1,2},y_{2,1},y_{2,2},y_{3,1},y_{3,2}) \in C^2 \times B(\Gamma,\rho)^6$ 的选择，使得对于 $x_3 = x_1 + x_2 - x$，$y_{i,3} = y_{i,1} + y_{i,2} - y$，

$$\begin{aligned}\psi(x,y) = &\phi(x_1,y_{1,1}) + \phi(x_1,y_{1,2}) - \phi(x_1,y_{1,3}) \\ &+ \phi(x_2,y_{2,1}) + \phi(x_2,y_{2,2}) - \phi(x_2,y_{2,3}) \\ &- \phi(x_3,y_{3,1}) - \phi(x_3,y_{3,2}) + \phi(x_3,y_{3,3}) \end{aligned} \tag{29}$$

且参数中的所有点都属于 X。

证明。 如果水平或垂直加性四元组满足引理陈述中的条件，即其相应的线性组合值满足该条件，我们就称其为 E-**尊重** 。该引理的证明很初等，分为四个阶段。

步骤 1。 首先，我们从定义域中移除少量点，直到所有垂直和水平加性四元组都满足 E-尊重条件。

步骤 2。 我们进一步移除一个较小的点集，直到新定义域的所有列和行都相当稠密。

步骤 3. 我们按列扩展这个映射，并注意到扩展后的映射仍然保留所有方向加法四元组 $O(1)E$。

步骤 4. 最后，我们将其扩展到所声称的定义域。

为了同时处理行和列，我们使用 Bohr 集的抽象版本，即 Green 和 Sanders [27] 引入的 Bourgain 系统。我们采用了他们定义的一个略作修改的版本。有限阿贝尔群 G 中由实数 $t \in [0,1]$ 索引的一个集合族 $B^{(t)}$，如果满足以下性质，则称为密度为 c、余维为 k 的 Bourgain 系统：

- (嵌套) $B_{(t_1)} \subseteq B_{(t_2)}$ 对于 $t_1 \leq t_2$,
- (零) $0 \in B_{(t)}$,
- (对称性) $-B_{(t)} = B_{(t)}$,
- (加法) $B_{(t_1)} + B_{(t_2)} \subseteq B_{(t_1+t_2)}$ 对于 $t_1 + t_2 \leq 1$,
- (倍增) $|B_{(t)}| \geq ct^k|B^{(1)}|$。

我们断言，双线性 Bohr 簇的行和列构成 Bourgain 系统 .

断言*11.3.* 对每个 $x \in C$，集合 $B^{(t)}$ *col* $= B(\Gamma, \Theta_1(x) \ldots, \Theta_r(x); t\rho)$ 是一个密度为 $(\rho/4)^{r+d}$、余维为 $r+d$ 的 *Bourgain* 系统 $_x$。对每个 $y \in B(\Gamma, \rho)$，集合 $B^{(t)}_{\mathrm{row}} = \{x \in t \cdot C : (\forall i \in [r])\ \Theta_i(x)(y) \|_{\mathbb{T}} \leq t\sigma\}$ 是一个密度为 $4^{-r-d}\rho^r$、余维为 $r+d$ 的 *Bourgain*$_y$ 系统。

证明。**列的情形**。每一列都是一个余维为 $r+d$ 的 Bohr 集。根据引理 2.4，其密度至少为ρ^{r+d}，因此我们得到一个 Bourgain 系统。

行的情形。前两个性质显然。对称性和加法性质源于Θ_i 是 Freiman 线性的这一事实。对于倍增界，将 $\mathbb{T}^r$ 划分为 $m \leq (4t^{-1}\rho^{-1})^r$ 个边长至多为 $\frac{1}{2}t\rho$ 的长方体 I_1，.....，I_m。根据抽屉原理，存在某个 I_i，使得 $A = \{x \in \frac{t}{2}C : \Theta(x)(y) \in I_i\}$ 的大小至少为 $(2t^{-1})^{-d}m^{-1}|C|$。然后，由于 Θ_i 的 Freiman 线性，我们有 $A - A \subseteq B^{(t)}_{\mathrm{row}}$，因此$_y$

$$|B^{(t)}_{\underset{y}{\mathrm{row}}}| \geq (2t^{-1})^{-d}m^{-1}|C| \geq \rho^r(t/4)^{d+r}|B^{(1)}_{\underset{y}{\mathrm{row}}}|. \qquad \square$$

注意，证明还表明，在 V^ρ 内，每一行的大小至少为 $2^{-d}4^{-r}\rho^r|C|$，每一列的大小至少为 $2^{-d-r}\rho^r|B(\Gamma, \rho)|$。

步骤 1. 第一步，我们从 Bourgain 系统上的几乎 E-同态出发，删除少量点后得到真正的 E-同态。

断言 11.4. 设$(B^{(t)})_{t\in[0,1]}$ 是一个密度为 c、余维为 k的 *Bourgain* 系统。设 $D \subseteq B^{(1)}$ 是一个大小为 $|D| \geq (1-\eta)|B^{(1)}|$ 的集合，且 $\gamma\colon D \to H$ 是一个映射，在 D中除至多 $\eta|B^{(1)}|^3$个加性四元组外，对所有加性四元组都满足 E-尊重。那么，只要 $\varepsilon \leq c^3 2^{-(36k+20)}$，就存在一个子集 $D' \subseteq D \cap B^{(1/1000)}$，使得 $|D'| \geq (1 - \eta c^{-3}2^{36k+20})|B^{(1/1000)}|$，且在该子集上对所有加性 *12*-元组都满足 γ $24E$-尊重。

证明。设 $A \subseteq B^{(1/8)} \cap D$ 是所有出现在至少 $c^2 2^{-(6k+4)}|B^{(1)}|^2$ 个未被 E-尊重的加性四元组中的 $a \in B^{(1/8)} \cap D$ 的集合。因此 $|A| \leq \eta c^{-2} 2^{6k+4}|B^{(1)}|$。

我们注意到，每个在 $B^{(1/8)} \cap D$ 中不受$4E$尊重的加性四元组，都有一个元素位于A中。事实上，若 x_1，x_2，x_3，x_4不受 $4E$尊重，则对每个 $z \in B^{(1/8)} \cap D \cap (D - x_1 + x_2)$，我们有$\gamma(x_1) - \gamma(x_2) + \gamma(z) - \gamma(z + x_1 - x_2) \notin 2E$，或者 $\gamma(x_3) - \gamma(x_4) + \gamma(z) - \gamma(z + x_3 - x_4) \notin 2E$。不失一般性地，第一种情况至少有一半的情形成立，因此至少有

$$|B^{(1/8)} \cap D \cap (D - x_1 + x_2)| \geq |B^{(1/8)}| - 2|B^{(1)} \setminus D| \geq (c2^{-3k} - 2\eta)|B^{(1)}|$$

个加性四元组位于 $B^{(3/8)} \cap D$ 中，且满足 x_1 和 x_2。我们可以将其改写为 $\gamma(x_1) - \gamma(z + x_1 - x_2) + \gamma(z) - \gamma(x_2) \notin 2E$。重复同样的步骤可推出 $x_1 \in A$ 或 $x_2 \in A$。

我们断言，γ $10E$ 尊重 $(B^{(1/1000)} \cap D) \setminus A$ 上的所有加性 12 元组。事实上，若 $x_1, \ldots, x_{12} \in (B^{(1/1000)} \cap D) \setminus A$ 且 $\sum_{i \in [12]} (-1)^i x_i = 0$，那么我们可以找到 $z_1, \ldots, z_6 \in (B^{(1/8)} \cap D) \setminus A$，使得 $z_i - z_{i+1} = x_{2i} - x_{2i+1}$对 $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$成立。也就是说，我们只需找到 $z_1 \in (B^{(1/1000)} \cap D) \setminus A$，使得 $z_2 = z_1 + x_3 - x_2, z_3 = z_1 + x_5 - x_4 + x_3 - x_2, \ldots \in D \setminus A$。但是，由于 $|B^{(1/1000)}| \geq 10|B^{(1)} \setminus D| + 10|B^{(1)} \setminus A|$，我们可以做到这一点。

注意到我们有

$$z_6 - z_1 = (z_6 - z_5) + (z_5 - z_4) + \cdots + (z_2 - z_1) = x_{11} - x_{10} + x_9 - x_8 + \cdots + x_3 - x_2 = x_{12} - x_1.$$

然后，利用加性四元组的 $4E$-保持性

$$\sum_{i \in [12]} (-1)^i \phi(x_i) \in \sum_{i \in [6]} (\phi(z_i) - \phi(z_{i+1}) + 4E) = 24E. \qquad \square$$

对所有大小为 $|X_{\cdot y}| \geq (1 - \sqrt{\varepsilon})|V_y^\rho|$ 的行应用上述断言，再对所有密度足够大的列应用该断言，最终得到一个大小为 $|X_1| \geq (1 - \varepsilon_1)|V^{(\rho/1000)}|$ 的子集 $X_1 \subseteq X$，在其上 ϕ 是一个 E-双同态，且 $\varepsilon_1 \leq 2^{O(d+r)} \rho^{-O(r)} \sqrt{\varepsilon}$。 –

步骤 2. 首先移除所有大小小于 $(1 - \sqrt{\varepsilon_1})|(V^{(\rho/1000)})_{\cdot y}|$ 的行 $(X_1)_{\cdot y}$。每个被移除的行至少有 $\sqrt{\varepsilon_1} 2^{-O(d+r)} \rho^{O(r)}|C|$ 个点，因此，只要 $\varepsilon \leq 2^{-\mathbf{C}(r+d)} \rho^{\mathbf{C}r}$，我们至多移除 $\sqrt[4]{\varepsilon}|B(\Gamma, \rho)|$ 行，每列的大小也至多减少 $\sqrt[4]{\varepsilon}|B(\Gamma, \rho)|$。对列重复同样的论证，并注意到所有行受到的影响都可以忽略不计。因此，只要 $\varepsilon \leq 2^{-\mathbf{C}(r+d)} \rho^{\mathbf{C}r}$，我们就得到一个集合 $X_2 \subseteq X$，在其上 ϕ 是一个 E-双同态，并且所有非空列和行在 $V^{\rho/10000}$ 和 $\varepsilon_2 \leq \sqrt[8]{\varepsilon}$ 的相应列和行中密度至少为 $1 - \varepsilon_2$。

–

Step 3. 我们证明 Bourgain 系统上 E-同态的一般延拓断言 s.

命题 11.5. 设 $(B^{(t)})_{t\in[0,1]}$ 是一个密度为 c、余维为 k的 *Bourgain* 系统。设 $D \subseteq B^{(1)}$ 是一个大小为 $|D| \geq (1-\eta)|B^{(1)}|$ 的集合，并设 $\gamma\colon D \to H$ 是一个映射，它对D中的所有加性 *12*-元组都 E-保持。假设 $c4^{-k-1} \geq \eta$。那么存在一个 $5E$-同态 $\gamma^{\mathrm{ext}}\colon B^{(1/2)} \to H$，它延拓了 γ。

证明。任取 $y_0 \in D \cap B^{(1/4)}$，由于 $|B^{(1/4)}| \geq c4^{-k}|B^{(1)}| > |B^{(1)} \setminus D|$，它非空。任取 $x \in B^{(1/4)}$。于是 x 可写成 $x_1 - x_2 + y_0$，其中 $x_1 \in B^{(1/2)} \cap D$ 和 $x_2 \in D$ 属于$|D \cap ((B^{(1/2)} \cap D) - x + y_0)|$，且有多种表示方式。利用 Bourgain 系统的性质，我们得到

$$\begin{aligned}|D \cap ((B^{(1/2)} \cap D) - x + y_0)| &= |D| + |B^{(1/2)} \cap D| - |D \cup ((B^{(1/2)} \cap D) - x + y_0)| \\ &\geq |B^{(1)}| + |B^{(1/2)}| - 2|B^{(1)} \setminus D| - |B^{(1)}| \geq |B^{(1/2)}| - 2|B^{(1)} \setminus D| \\ &\geq (c2^{-k} - 2\eta)|B^{(1)}| > 0.\end{aligned}$$

因此，对任意满足$x = x_1 - x_2 + y_0$ 的 $x_1 \in B^{(1/2)} \cap D$ 和 $x_2 \in D$，定义 $\gamma^{\mathrm{ext}}(x) = \gamma(x_1) - \gamma(x_2) + \gamma(y_0)$，即可得到一个良定义的 E-同态扩张到 $B^{(1/4)}$。 □

步骤 4。给定 $\varepsilon \leq 2^{-\mathbf{C}(r+d)}\rho^{\mathbf{C}r}$，至少有 $(1 - \sqrt[16]{\varepsilon_1})|C|$ 列可以应用上述断言，从而延拓至 $V^{\rho/20000}$。该延拓在垂直方向上是 $120E$-同态。然而，对于位于某个 y 所索引的行内的任意水平加性 12-元组 $x_{[12]}$，我们有所有列 $(X_2)_{x_i}$ 都具有很高的密度，因此 $\cap_{i\in[12]}(X_2)_{x_i}$ 在 $\cap_{i\in[12]}(V^{\rho/10000})_{x_i}$ 内的密度至少为 $1 - \sqrt[32]{\varepsilon_1}$；在此基础上，$\sum_{i\in[12]}(-1)\phi_{x_i}$ 同样可以唯一延拓，这表明水平加性 12-元组受到 $1000E$ 的尊重。在水平方向上使用该断言，并采用与上述相同的论证，可得一个 $10000E$-双同态。最终的关系式 (29) 来自本步骤中的两次延拓。

□

类似的论证可用于证明，E-双同态可以与 E-双线性映射联系起来。

引理 11.6。设 C、Γ、V^σ 如前一个引理所述，并设 $\phi\colon V^\rho \to H$ 是一个 E-双同态。那么存在一个 $9E$-双线性映射 $\psi\colon V^{\rho/10000} \to H$，使得对于每个 $(x, y) \in V^{\rho/10000}$，至少有 $2^{-O(r+d)}\rho^{O(r)}|C||B(\Gamma, \rho)|^2$ 种 (a, b_1, b_2) 的取法满足

$$\psi(x,y) = \phi(a+x, b_2+y) - \phi(a+x, b_2) - \phi(a, b_1+y) + \phi(a, b_1)$$

并且 ϕ 的自变量中的所有点都属于 V^ρ。

证明。断言 11.4 的证明末尾附近的相同论证表明，在 $V^{\rho/1000}$ 上，所有方向加性八元组都满足 $3E$。因此，我们可以先沿垂直方向进行卷积，并定义一个 $3E$-双同态 ϕ_1，使得此外，对所有 $x \in \frac{1}{1000}C$，$\phi_1(x, 0) \in E$ 成立。再沿水平方向卷积，得到另一个 E-双同态 ϕ_2，使得 $\phi_2(0, y) \in E$。因此，ϕ_2 是 E-双线性的，并具有所需性质。

□

命题 *11.1* 的证明。我们首先应用代数正则性引理来证明。设 η 是一个稍后将予以指定的正数。对双线性 Bohr 簇应用定理 3.5，该簇与 V 相同，只是将半径 ρ 替换为 $\rho/100$，误差参数为 η；由此得到一个秩至多为 d 的陪集广义等差数列 C'，其少数平移集基本覆盖 C，并将双线性 Bohr 簇 V 划分为拟随机部分。通过平均，存在一个陪集广义等差数列 $t+C'$，使得 $|X\cap t+C'|\geq \frac{c}{2}|C'|$ 和 $|C'|\geq c'|C|$，其中

$$c' \geq \exp\Big(-d^{O(1)}r^{O(1)}s^{O(1)}\log^{O(1)}(\eta^{-1})\log^{O(1)}(\rho^{-1})\Big).$$

我们姑且滥用记号，用 C' 代替 $t+C'$。设 $\sigma\in[\rho/200,\rho/100]$ 是由 C' 导出的拟随机双线性 Bohr 簇 $V'\subseteq C'\times B'$ 的半径，其中 C' 来自一个适当的 Bohr 集 B'，其余维为 r、半径为 σ；设 δ 为相关密度。由引理 2.4，$\delta\geq\rho/200^{r+s}$，前提是 $\eta\leq\frac{1}{2}\rho/200^{r+s}$。

对 $X\cap C'$ 应用推论 2.25，可找到一个秩至多为 $(d\log c^{-1})^{O(1)}$、大小为 $|C''|\geq\exp\Big(-(d\log c^{-1})^{O(1)}\Big)|C'|$ 的对称真陪集进程 C''，使得对每个 $u\in C''$，至少有 $\frac{c}{2^{d+7}}$ 个四元组 $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in X^4$ 满足 $u=x_1+x_2-x_3-x_4$。令 T_u 为给定 $u\in C''$下所有此类 $(x_1,x_2,x_3)\in X^3$ 组成的集合。证明的其余部分将把映射扩展到整个双线性 Bohr 簇 V'上，其中 $V'=\{(x,y)\in C''\times B:\ y\in B(\Theta_1(x)\ldots,\Theta_s(x);\sigma)\}$。这将分两步完成：首先，我们将在 V' 的大部分上定义该映射；然后，第二步将其扩展到整个簇上。

令 $S_1\subseteq V'$ 为所有满足 $|T_u\cap(V'_y)^3|\geq\frac{1}{2}\delta^3|T_u|$ 的 $(u,y)\in V'$ 的集合。由引理 3.3，得到 $|S_1|\geq(1-200\delta^{-6}\eta^{\frac{1}{8}})|V'|$。对每个 $(u,y)\in S_1$，定义

$$\psi(u,y)=\phi(x_1,y)+\phi(x_2,y)-\phi(x_3,y)-\phi(x_1+x_2-x_3-u,y) \tag{30}$$

) 对于 $(x_1,x_2,x_3)\in T_u$。由于 ϕ 保持所有水平加性 36 元组，因此 ψ 良定义，并保持所有水平加性 12 元组。

令 $u\in C''$ 任意。接下来我们证明，ψ 尊重V'_u上的绝大多数垂直加性三元组。为此，固定任意的 y_1、y_2、$y_3\in V'_u$，使得 $y_1+y_2=y_3$，并且满足（u、y_1）、（u、y_2）、（u、y_3）$\in S_1$。假设 $T_u\cap(V'_{y_1})^3\cap(V'_{y_2})^3\neq\emptyset$。取一个属于该集合的三元组（$x_1$、$x_2$、$x_3$），并注意到（$x_1$、$y_3$）、（$x_2$、$y_3$）、（$x_3$、$y_3$）$\in V$，这是由三角不等式以及 $\sigma\leq\rho/100$的选取推出的。根据 ψ 的定义，我们得到

$$\begin{aligned}\psi(u,y_3)=&\phi(x_1,y_3)+\phi(x_2,y_3)-\phi(x_3,y_3)-\phi(x_1+x_2-x_3-u,y_3)\\=&\phi(x_1,y_1)+\phi(x_2,y_1)-\phi(x_3,y_1)-\phi(x_1+x_2-x_3-u,y_1)\\&+\phi(x_1,y_2)+\phi(x_2,y_2)-\phi(x_3,y_2)-\phi(x_1+x_2-x_3-u,y_2)\\=&\psi(u,y_1)+\psi(u,y_2),\end{aligned}$$

因此，该垂直加性三元组得到了尊重。

由 Bohr 簇 V' 的拟随机性，根据引理 3.3，对于除至多 $1000(\rho/100)^{-100d}\delta^{-12}\eta^{\frac{1}{8}}$ 个 $(U,\ y_1,\ y_2) \in C'' \times B' \times B'$ 选择以外的所有选择，集合 $T_u^- \cap (V_{\cdot y_1}^{\sigma})^3 \cap (V_{\cdot y_2}^{\sigma})^3$ 非空且很大。

应用引理 11.6，并取误差集 $E = 0$，即可完成证明。 □

§12 在结构化乘积上获得 E-双同态

本节的目标是将定义在双线性 Bohr 簇上的 Freiman 双线性映射，转化为 Bohr 集乘积上的 E-双同态。获得所需的 E-双同态分为三个步骤。首先，我们证明，经过在列指标集上取一个合适的子等差数列后，可以假设朴素延拓产生的误差与列无关。利用这一信息，我们在列为子群的双线性 Bohr 簇上得到一个 E-双同态。最后，我们将定义域延拓到 Bohr 集的乘积上。

12.1. 控制列中的误差

命题 12.1. 设 C 是秩为 d、密度为 c的对称真陪集广义等差数列，且位于群 G G_1中。设$\hat{\Theta}_1, \dots, \Theta_d \colon C \to G_2$ 是 *Freiman* 线性映射。设 $\Gamma \subseteq G_2$ 是一个大小为 d 的特征集合，并令 $\rho > 0$。设 V为如下双线性 *Bohr* 簇：

$$V = \bigcup_{x \in C} \{x\} \times \Big(B(\Gamma, \rho) \cap B(\Theta_{[d]}(x), \rho) \Big). \tag{31}$$

设 $\phi \colon V \to H$ 是定义在 V上的 *Freiman* 双线性映射。

设 r为正整数，并设 $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{Z}$为固定系数，满足 最大公因数$(u_1, \dots, u_r) = 1$。记 $U = \sum_{i \in [r]} |u_i|$。对于 $x \in C$和 $\tau, \tau' > 0$，令 $E_x(\tau, \tau')$为以下各值构成的集合：

$$\sum_{i=1}^{r} u_i \phi(x, y_i) - \sum_{i=1}^{r} u_i \phi(x, z_i)$$

遍历所有满足 $\sum_{i=1}^{r} u_i y_i = \sum_{i=1}^{r} u_i z_i$的选择 $y_i, z_i \in B(\Theta_{[d]}(x)\ \tau) \cap B(\Gamma, \tau')$。那么，存在：

- 一个秩至多为 d、大小为 $|C_1| \geq \exp(-(2rd\log(c^{-1}\rho^{-1}U))^{O_{(1)}})|G_1|$ 的陪集广义等差数列 $C' \subseteq C$，
- 一个元素 $x_0 \in C'$，
- 一个半径 $\tilde{\rho} \in [\rho/100, \rho/20]$，以及
- 一个半径 $\tilde{\sigma} \in [\rho/100U, \rho/20U]$，

使得 $E_x(\tilde{\rho}, \tilde{\sigma}) \subseteq E_{x_0}(10\tilde{\rho}, 10\tilde{\sigma})$对所有 $x \in C'$均成立。

备注。 注意，对于 C的秩、 Θ_i 的映射数量和 Γ的大小，我们使用相同的 d 。这些量属于同一个数量级，因此这并不失去一般性，但简化了记号。类似地，我们使用单一的半径。

还要注意， $\tilde{\rho}$的上界与 r线性无关，这一点稍后会至关重要。

˜证明。 为了控制列中产生的误差集，我们在 $C \times \mathcal{D}$ 内定义辅助双线性 Bohr 簇 V，其中包含一个较大的阿贝尔群 $\mathcal{D}$ ，相关的垂直元组自然嵌入其中。我们将˜考虑 V 上的一个 Freiman 双线性映射，其取值由列中元组上的误差给出。˜我们将证明，这样的映射在 V的某个合适的双线性 Bohr 子簇上只取少数几个值。在原双线性 Bohr 簇的背景下重新诠释所得结论后，即可得到该命题。

考虑群 $\mathcal{D}$，其中

$$\mathcal{D} = \Big\{(y_{[r]}, z_{[r]}) \in G_2^{2r} : \sum_{i\in[r]} u_i y_i = \sum_{i\in[r]} u_i z_i\Big\}.$$

换言之，两个 r-元组$y_{[r]}$ 和$z_{[r]}$ 在产生给定线性组合的值时，构成 $\mathcal{D}$ 的一个元素。

注意，最大公因数$(u_1$、.....、 $u_r) = 1$ 意味着 $|\mathcal{D}| = |G_1|^{2r-1}$。
接下来，对于所有 $\gamma \in \Gamma$ 和 $i \in [r]$，定义特征 $\tilde{\gamma}_i$， $\tilde{\gamma}_i' \in \hat{}\mathcal{D}$ 如下：

$$\tilde{\gamma}_i(y_{[r]}, z_{[r]}) = \gamma(y_i), \qquad \tilde{\gamma}_i'(y_{[r]}, z_{[r]}) = \gamma(z_i),$$

˜ ^，并将这些 $2rd$ 特征的集合记为 Γ 。对于 $\ell \in [d]$ 和 $i \in [2r]$，我们定义映射 $\Xi_{\ell,\, i} \colon C \to \mathcal{D}$，如下：

$$\Xi_{\ell,i}(x)\Big(y_{[2r]}\Big) = \Theta_\ell(x)(y_i).$$

^**断言 12.2**。 对于 $\ell \in [d]$ 和 $i \in [2r]$，映射 $\Xi_{\ell,\, i}$： $C \to \mathcal{D}$ 是良定义的，并且是 *Freiman* 线性的。
证明。显然，对于所有 $\ell \in [d]$、 $i \in [2r]$ 和 $x \in C$，映射 $y_{[2r]} \mapsto \Xi_{\ell,i}(x)\Big(y_{[2r]}\Big)$ 是从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathbb{T}$ 的同态，即 $\Xi_{\ell,i}$ 确实是从 C 到 ^$\mathcal{D}$ 的映射。为证明 Freiman 线性，取 x、 $x' \in C$ 使得 $x+x' \in C$。于是 $\Xi_{\ell,i}(x + x')\Big(y_{[2r]}\Big) = \Theta_\ell(x + x')(y_i) = \Theta_\ell(x)(y_i) + \Theta_\ell(x')(y_i) = \Xi_{\ell,i}(x)\Big(y_{[2r]}\Big) + \Xi_{\ell,i}(x')\Big(y_{[2r]}\Big)$。这对所有 $y_{[2r]} \in \mathcal{D}$ 都成立，因此 $\Xi_{\ell,i}(x + x') = \Xi_{\ell,i}(x) + \Xi_{\ell,i}(x')$，从而证明 $\Xi_{\ell,i}$ 是 Freiman 线性的。 □

˜考虑由列给出的 $C \times \mathcal{D}$ 中的双线性 Bohr 簇 V

$$B(\Xi_{[d]\times[2r]}(x); \rho) \cap B(\tilde{\Gamma}, \rho).$$

˜通过设定以下内容，在 V 上定义映射 ϕ^{err}

$$\phi^{\mathrm{err}}(x; y_{[r]}, z_{[r]}) = \sum_{i\in[r]} u_i \phi(x, y_i) - \sum_{i\in[r]} u_i \phi(x, z_i). \tag{32}$$

因此， $\phi^{\mathrm{err}}(x; y_{[r]}, z_{[r]})$控制了列指标为 x 的元组 $y_{[r]}$ 和 $z_{[r]}$ 的朴素延拓误差。

˜**断言 12.3**。 ϕ^{err} 是 V上的良定义 *Freiman* 双线性映射。

证明。要证明 ϕ^{err} 良定义，我们只需确保（32）中的 ϕ 的所有参数都属于˜ V。若 $(x; y_{[r]}, z_{[r]}) \in V$，则 $\|\Xi_{\ell,i}(x)(y_{[r]}, z_{[r]})\|_{\mathbb{T}} \leq \rho$，因此对于所有 $\ell \in [d]$， $\|\Theta_\ell(x)(y_i)\|_{\mathbb{T}} \leq \rho$，从而 $y_i \in B(\Theta_{[d]}(x) \rho)$。此外，对于所有 $\gamma \in \Gamma$ $\|\tilde{\gamma}_\ell(y_{[r]}, z_{[r]})\|_{\mathbb{T}} \leq \rho$，所以 $\|\gamma(y_i)\|_{\mathbb{T}} \leq \rho$，进而 $y_i \in B(\Gamma, \rho)$。对于 z_i，同样成立。

验证 ϕ^{err} 是 Freiman 双线性的过程很直接。具体而言，首先假设 x， $x' \in C$ 满足˜$(x; y_{[r]}$， $z_{[r]})$，$(x'; y_{[r]}$， $z_{[r]})$，$(x + x'; y_{[r]}$， $z_{[r]}) \in V$。那么

$$\begin{aligned}\phi^{\mathrm{err}}(x + x'; y_{[r]}, z_{[r]}) &= \sum_{i\in[r]} u_i \phi(x + x', y_i) - \sum_{i\in[r]} u_i \phi(x + x', z_i) \\ &= \sum_{i\in[r]} u_i \phi(x, y_i) + \sum_{i\in[r]} u_i \phi(x', y_i) - \sum_{i\in[r]} u_i \phi(x, z_i) - \sum_{i\in[r]} u_i \phi(x', z_i)\end{aligned}$$

因为 ϕ 本身是 Freiman 双线性的，且 ϕ 的各个自变量中的点都属于 V。最后一个表达式等于$\phi^{\mathrm{err}}(x; y_{[r]}$， $z_{[r]}) + \phi^{\mathrm{err}}(x'; y_{[r]}$， $z_{[r]})$。
最后，类似的代数运算表明， ϕ^{err} 在垂直方向上是 Freiman 线性的。具体而言，假设 $x \in C$ 以及 $($ $y_{[r]}$， $z_{[r]})$，$(y'_{[r]}$， $z'_{[r]}) \in \mathcal{D}$ 满足 $(x; y_{[r]}$， $z_{[r]})$，$(x; y'_{[r]}$， $z'_{[r]})$，$(x; (y+y')_{[r]}$，$(z+z')_{[r]}) \in V$。那么

$$\begin{aligned}\phi^{\mathrm{err}}(x; (y + y')_{[r]}, (z + z')_{[r]}) &= \sum_{i\in[r]} u_i \phi(x, y_i + y'_i) - \sum_{i\in[r]} u_i \phi(x, z_i + z'_i) \\ &= \sum_{i\in[r]} u_i \phi(x, y_i) + \sum_{i\in[r]} u_i \phi(x, y'_i) - \sum_{i\in[r]} u_i \phi(x, z_i) - \sum_{i\in[r]} u_i \phi(x, z'_i) \\ &= \phi^{\mathrm{err}}(x; y_{[r]}, z_{[r]}) + \phi^{\mathrm{err}}(x; y'_{[r]}, z'_{[r]})\end{aligned}$$

再一次，因为 ϕ 本身是 Freiman 双线性的，且 ϕ 各个论证中的点都属于 V。 □

˜设 $\sigma = \rho/2U$（回忆一下，$U = \sum_{i\in[r]} |u_i|$），并令 Z 为 V 的子簇，其列对于$x \in C$为

$$B(\Xi_{[d]\times[2r]}(x); \sigma) \cap B(\tilde{\Gamma}, \sigma),$$

也就是说，列中的 Bohr 集由半径 σ 而非 ρ给出。于是 ϕ^{err} 在 Z上消失。

断言 12.4。映射 ϕ^{err} 在 Z上消失。

证明。 若 $(x;y_{[r]},z_{[r]}) \in Z$，则对所有系数 $0 \le \lambda_i \le u_i$， $\sum_{i\in[r]}\lambda_i y_i \in V_x$.都成立，因此根据垂直方向上的 Freiman 线性，$\sum_{i\in[r]} u_i\phi(x,y_i) = \phi(x,\sum_{i\in[r]} u_i y_i)$ 成立。由于 $\sum_{i\in[r]} u_i y_i = \sum_{i\in[r]} u_i z_i$，将 y_i替换为 z_i 会得到相同的值，因此我们得到 $\phi^{\mathrm{err}}(x;y_{[r]},z_{[r]}) = 0$。

□

~ ~我们断言，对于某个半径 $\sigma' > 0$ 和某个略小的陪集广义等差数列 $C' \subseteq C$， ϕ^{err} 在 $V \cap (C' \times B(\Gamma,\ \sigma'))$上取值很少。证明依赖于代数正则性引理（定理 3.5）。~我们希望应用代数正则性引理，使双线性 Bohr 簇 V 和 Z 同时成为准随机的。然而，该引理针对的是单个双线性 Bohr 簇，因此我们需要考虑一个额外的辅助簇。

~寻找 V 和 Z的拟随机部分。令 $\varepsilon > 0$ 为一个稍后选定的参数。考虑$G_1^2 \times \mathcal{D}^2$内的联合簇$\mathcal{J} = \bigcup_{(x,y)\in C\times C}\{(x,y)\} \times \tilde{V}_x. \times Z_y.$。误差参数为 ε的代数正则性引理给出半径 $\rho' \in [\rho/4,\rho/2]$、$\sigma' \in [\sigma/4,\sigma/2]$ 以及另一个对称陪集广义等差数列 $C' \subseteq C$ ，其秩至多为 d ，大小为 $|C'| \ge \exp(-(2d\log(c^{-1}\rho^{-1}\sigma^{-1}\varepsilon^{-1}))^{O(1)})|G_1|$，使得 $\mathcal{J}' \cap \Big((C' \times C') \times (B(\tilde{\Gamma},\rho') \times B(\tilde{\Gamma},\sigma'))\Big)$ 按照定理中的含义是 ε-准随机的，其中$\mathcal{J}'_{(x,y)} = B(\Xi_{[d]\times[2r]}(x);\ \rho') \times B(\Xi_{[d]\times[2r]}(y);\ \sigma')$，也就是说， $\mathcal{J}$的各列都略微缩小了。强调一下，由于定理 3.5 陈述的最后一部分，我们可以假设所得的陪集广义等差数列具有乘积结构 $C' \times C'$。

~ ~ ~现在来检验，根据定理 3.5， $V \cap (C' \times B(\Gamma,\ \rho'))$ 和 $Z \cap (C' \times B(\Gamma,\ \sigma'))$ 是否以误差参数 $\varepsilon' = 2(4\sigma^{-1})^{2rd}\varepsilon$ 准随机。通过平均，存在 y_0 ，使得至少有 $(1-\varepsilon)|C'|^2$ 对 $(x,\ x') \in C' \times C'$ 满足

$$\Big||B(\Xi_{[d]\times[2r]}(x);\rho')\cap B(\tilde{\Gamma},\rho')||B(\Xi_{[d]\times[2r]}(y_0);\sigma') \cap B(\tilde{\Gamma},\sigma')| - |B(\Xi_{[d]\times[2r]}(x');\rho') \cap B(\tilde{\Gamma},\rho')||B(\Xi_{[d]\times[2r]}(y_0);\sigma') \cap B(\tilde{\Gamma},\sigma')|\Big| \le 2\varepsilon|\mathcal{D}|^2.$$

由引理 2.4， $|B(\Xi_{[d]\times[2r]}(y_0);\ \sigma') \cap B(\tilde{\Gamma},\ \sigma')| \ge \sigma'^{4rd}|\mathcal{D}|$，因此

$$\Big||B(\Xi_{[d]\times[2r]}(x);\rho') \cap B(\tilde{\Gamma},\rho')| - |B(\Xi_{[d]\times[2r]}(x');\rho') \cap B(\tilde{\Gamma},\rho')|\Big| \le 2\varepsilon\sigma'^{-4rd}|\mathcal{D}|^2.$$

因此，存在一个值 $v \ge 0$ ，使得 $\Big||B(\Xi_{[d]\times[2r]}(x);\rho') \cap B(\tilde{\Gamma},\ \rho')| - v\Big| \le \varepsilon'|\mathcal{D}|$，所以我们可以将密度参数记作 $\delta_{\tilde{V}}$，并取为$\overset{v}{|B\ \tilde{\Gamma}(.\ ,\ \rho')|}$，从而得到定理的性质 (i)。其他性质可类似推出，其中 Z 的密度参数记作 δ_Z。注意， $\delta_{\tilde{V}} \ge (\rho/4)^{4rd}$ 和 $\delta_Z \ge (\sigma/4)^{4rd}$。

请注意一个关键事实：定义准随机-~ ~部分中各行的 Bohr 集的余维，即 $B(\Gamma,\ \rho')$ 和 $B(\Gamma,\ \sigma')$，与拟随机性参数 ε 无关。该

参数 ε 将非常小（即 $\varepsilon \le (2^{-r}\rho^{O(1)})$），以确保即使与 $C' \times B(\Gamma, \sigma')$ 相交，$\tilde{V}$ 仍然高度准随-˜机。

为了完成证明，我们利用拟随机性证明，ϕ^{err} 取到的每个值在 $V \cap (C' \times B')$ 的略微收缩版本中都出现得相当频繁。这将意味着这些值组成的集合很小。此外，我们还将证明，每个值都出现在绝大多数列中。于是，随机选取一列便能取到所有值。现在让我们来看具体细节。

的取值十分常见。回顾命题陈述中的集合 $E_x(\tau, \tau')$ 的定义。由于 ϕ 在 V 上是 Freiman 双线性的，因此对所有满足 $\tau_1 + \tau_2, \tau_1' + \tau_2' \le \rho$ 的 $\tau_1, \tau_2, \tau_1', \tau_2' \ge 0$，都有 $E_x(\tau_1, \tau_1') + E_x(\tau_2, \tau_2') \subseteq E_x(\tau_1 + \tau_2, \tau_1' + \tau_2')$；此外，由断言 12.4 还可得 $E_x(\sigma, \sigma) = \{0\}$。

断言 12.5. 对于每个 $x \in C$，我们有 $|E_x(\rho/2, \rho/2)| \le \sigma^{-4rd}$。

证明。设 $y_i, z_i \in B(\Theta_{[d]}(x)\ \rho/2) \cap B(\Gamma, \rho/2)$ 满足 $\sum_{i=1}^r u_i y_i = \sum_{i=1}^r u_i z_i$。记 $w = \sum_{i=1}^r u_i \phi(x, y_i) - \sum_{i=1}^r u_i \phi(x, z_i)$。

任取 $y_i', z_i' \in \Big(B(\Theta_{[d]}(x)\ \sigma) \cap B(\Gamma, \sigma)\Big)$，使得 $\sum_{i=1}^r u_i y_i' = \sum_{i=1}^r u_i z_i'$。根据断言 12.4 中的论证，我们有 $\sum_{i=1}^r u_i \phi(x, y_i') = \sum_{i=1}^r u_i \phi(x, z_i')$。于是 $y_i + y_i', z_i + z_i' \in \Big(B(\Theta_{[d]}(x)\ \rho) \cap B(\Gamma, \rho)\Big)$并且

$$\sum_{i=1}^r u_i \phi(x, y_i + y_i') - \sum_{i=1}^r u_i \phi(x, z_i + z_i') = \Big(\sum_{i=1}^r u_i \phi(x, y_i) - \sum_{i=1}^r u_i \phi(x, z_i)\Big) + \Big(\sum_{i=1}^r u_i \phi(x, y_i') - \sum_{i=1}^r u_i \phi(x, z_i')\Big) = w.$$

根据引理 2.4 和柯西-施瓦茨不等式，上述 $2r$-元组 $(y_{[r]}', z_{[r]}')$ 的数量至少为$\sigma^{4rd}|G_1|^{2r-1}$。因此，w 对至少 $\sigma^{4rd}|G_1|^{2r-1}$ $2r$ 个 B 中的元素元组（$\Theta_{[d]}(x)\ \rho$）$\cap B(\Gamma,\ \rho)$ 取到，每个元组都满足固定的线性组合。因此 $|E_x(\rho/2,\ \rho/2)| \le \sigma^{-4rd}$。 □

任取 $x \in \frac{1}{10} \cdot C'$，回想一下 $\frac{1}{k} \cdot C' = \{a \in G :\ ka \in C'\}$。我们断言，对于这样的 x，$E_x(\rho'/10, \sigma'/10)$ 中的每个值，都会出现在绝大多数 $x' \in \frac{1}{10} \cdot C'$ 对应的 $E_{x'}(\rho',\ \sigma')$ 中。 —

考虑任意值 $w \in E_x(\rho'/10,\ \sigma'/10)$。令 Y为所有满足 $\phi^{\mathrm{err}}(y_{[r]},\ z_{[r]}) = w$ 的 $(y_{[r]},\ z_{[r]}) \in B(\Xi_{[d]\times[2r]}(x); \rho'/5) \cap B(\tilde{\Gamma},\ \sigma'/5)$ 的集合。与前一个断言中一样，我们有 $|Y| \ge (\sigma'/10)^{4rd}|\mathcal{D}|$。

考虑 $t \in \frac{1}{2} \cdot C'$。断言 12.4 意味着，对于所有 $(y_{[r]},\ z_{[r]}) \in B(\Xi_{[d]\times[2r]}(t);\ \sigma') \cap$ ˜ $B(\Gamma,\ \sigma')$，都有 $\phi^{\mathrm{err}}(x; y_{[r]},\ z_{[r]}) = 0$。注意 $Y \subseteq B(\Gamma,\ \sigma')$。由引理 3.3 和 3.4，我们有

$$|Y \cap B(\Xi_{[d]\times[2r]}(t); \sigma')| \ge \frac{1}{2}\delta_Z |Y|$$

除至多 $O(\varepsilon^{\frac{1}{8}}(\sigma'/10)^{-8rd})\delta_Z^{-2}|C'|$ 个元素 $t \in \frac{1}{2} \cdot C'$ 外。任取一个满足 t 的元素。则 $w \in E_{x+t}(\rho',\ \sigma')$。事实上，任取 $(y_{[r]},\ z_{[r]}) \in Y \cap B(\Xi_{[d]\times[2r]}(t); \sigma')$，我们得到

$$\phi^{\mathrm{err}}(x + t; y_{[r]}, z_{[r]}) = \phi^{\mathrm{err}}(x; y_{[r]}, z_{[r]}) + \phi^{\mathrm{err}}(t; y_{[r]}, z_{[r]}) = \phi^{\mathrm{err}}(x; y_{[r]}, z_{[r]}) = w.$$

特别地，我们可以得到 $\frac{1}{10}\cdot C'$ 中除至多 $O(\varepsilon^{\frac{1}{8}}(\sigma'/10)^{-16rd}))|C'|$ 个元素外的所有元素，它们均为某个如上所述的 t 对应的 $x+t$。因此， ϕ^{err} 的取值总数至多为 $2(\sigma'/10)^{-4rd}$。若我们选择 $\varepsilon = c(\sigma'/10)^{128rd})100^{-8d}$，就能得到一列，其中出现了所有取值，从而证明该断言。我们令 $\tilde{\rho}=\rho'/10$, $\tilde{\sigma}=\sigma'/10$，并得到最终的列集合 $\frac{1}{10}\cdot C'$。 — □

12.2. 在列中获得子群

在本小节中，我们确保 Bohr 簇的各列成为子群。

回忆一下，若存在一个大小为 r 的集合 S，使得 $E=\langle S\rangle_{\{-1,0,1\}}$，则集合 E 的秩至多为 r。

命题 12.6。设 C 是群 G_1 中秩为 d、密度为 c 的对称真陪集广义等差数列。设 $\hat{\Theta}_1,\dots,\Theta_d\colon C\to G_2$ 为 *Freiman* 线性映射。设 $\Gamma\subseteq G_2$ 是一个由 d 个特征组成的集合，并令 $\rho>0$。设 V 为如下给出的双线性 *Bohr* 簇：

$$V=\bigcup_{x\in C}\{x\}\times\Big(B(\Gamma,\rho)\cap B(\Theta_{[d]}(x),\rho)\Big). \tag{33}$$

设 $\phi\colon V\to H$ 是定义在 V 上的 *Freiman* 双线性映射。

存在一个大小至多为 $O((2d\log\rho^{-1})^{O(1)})$ 的集合 $A\subset[-R,R]^d$，其中 $R\le\exp((2d\log\rho^{-1})^{O(1)})$；一个陪集广义等差数列 $C'\subseteq C$；一个半径为 $\sigma\ge\exp(-(2d\log(c^{-1}\rho^{-1}))^{O(1)})$ 的半径 $\sigma\ge$；以及一个 E-双同态 $\psi\colon V'\to H$，其中 V' 的列为 $B(\Gamma,\sigma)\cap\cap_{\lambda\in A}$ 的核 $\lambda\cdot\Theta(x)$，对 $x\in C'$，对于一个秩为 $(2d\log(c^{-1}\rho^{-1}))^{O(1)}$ 的集合 E，使得

$$\psi(x,y_0+2y_1+\cdots+2^ry_r)-\sum_{i=0}^{r}2^i\phi(x,y_i)\in E$$

对所有（x、y_i）$\in V\cap$（$C'\times B$（Γ、σ））。

证明。设 $r=(2d\log\rho^{-1})^{O(1)}$ 和 $\rho'=(2d)^{-4d}\rho$ 是推论 2.36 中出现的量，且具有如下性质：对于任意余维为 $2d$、半径为 $\rho'/100$ 的 Bohr 集 B，子群 $\langle B\rangle$ 等于 $4B+2\cdot B+\cdots+2^{r-4}\cdot B$、[5]，并且每个元素 $x\in\langle B\rangle$ 都至少有 $\alpha|G_2|^{r-1}$ 种表示形式 $y_1+y_2+y_3+y_4+2y_5+\cdots+2^{r-4}y_r$，其中 $y_i\in B$，且 $\alpha=\exp(-(2d\log\rho^{-1})^{O(1)})$。定义系数 $u_1=u_2=u_3=u_4=1$，$u_i=2^{i-4}$，其中 $i\in[5,r]$。

注意到系数之和至多为 2^r，应用命题 12.1 可得一个秩至多为 d、大小为 $|C'|\ge\exp(-(2rd\log(c^{-1}\rho^{-1}))^{O(1)})|G_1|$ 的陪集广义等差数列 $C'\subseteq C$，一个元素 $x_0\in C'$、一个半径 $\tilde{\rho}\in[\rho'/100,\rho'/20]$，以及一个半径 $\tilde{\sigma}\in[\rho'/(100\cdot 2^r)\ \rho'/(20\cdot 2^r)],$，使得 $E_x(\tilde{\rho},\ \tilde{\sigma})\subseteq E_{x_0}(10\tilde{\rho},\ 10\tilde{\sigma})$，其中

[5]注意，我们将 r 替换为 $r-4$。这样做是为了让线性组合包含 r 个加数，从而稍微简化记号。

所有 $x \in C'$，其中命题中定义了 $E_x(\tau,\ \tau')$。

取值属于 ϕ^{err} 一个秩较小的集合。令 $E = E_{x_0}(10\tilde{\rho},\ 10\tilde{\sigma})$。由于我们转而考虑$\rho'$ 而非 ρ，因此可以对定义域为$B(\Gamma,\ 10\tilde{\rho})$ 的 Freiman 线性映射 $y \mapsto \phi(x_0,\ y)$ 应用命题 2.44 $\cap B(\Theta(x_0)\ 10\tilde{\rho})$，从而可知，稍大的集合 $E(10\tilde{\rho},\ 10\tilde{\rho})$ 包含于一个秩至多为 $(r+d)^{O(1)} \leq (2d\log\ \rho^{-1})^{O(1)}$ 的集合 E 中。

由于 $E_x(\tilde{\rho},\ \tilde{\sigma}) \subseteq E$，我们得出：每当 y_1，……，$z_r \in \Big(B(\Theta(x);\ \tilde{\rho}) \cap B(\Gamma,\ \tilde{\sigma})\Big)$ 满足 $\sum_{i\in[r]} u_i y_i = \sum_{i\in[r]} u_i z_i$ 时，那么

$$\sum_{i\in[r]} u_i \phi(x, y_i) - \sum_{i\in[r]} u_i \phi(x, z_i) \in E.$$

换句话说，我们可以将 ϕ 天真地扩展为列 x 中到集合的一个 E-同态

$$4\Big(B(\Theta(x);\tilde{\rho}/2)\cap B(\Gamma,\tilde{\sigma}/2)\Big)+2\cdot\Big(B(\Theta(x);\tilde{\rho}/2)\cap B(\Gamma,\tilde{\sigma}/2)\Big)\Big)+\cdots+2^{r-4}\cdot\Big(B(\Theta(x);\tilde{\rho}/2)\cap B(\Gamma,\tilde{\sigma}/2)\Big)\Big). \tag{34}$$

推论 2.36 意味着，$B(\Gamma,\ \tilde{\sigma}/4)$ 中的每个元素都至少可以用 $\alpha'|G_2|^{r-1}$ 种方式表示为 $x = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 2y_5 + \cdots + 2^{r-4}y_r$，其中 y_1，……，$y_r \in B(\Gamma,\ \tilde{\sigma}/2)$ 是元素；而 $S_x = \langle B(\Theta(x)\ \tilde{\rho}/2)\rangle$ 中的每个元素也至少可以用 $\alpha'|G_2|^{r-1}$ 种类似的求和方式表示，所用元素来自 $B(\Theta(x)\ \tilde{\rho}/2)$，其中某个 $\alpha' \geq \exp(-(2d\log\ \rho^{-1})^{O(1)})$。我们滥用了记号，用 α 代替 $\min(\alpha,\ \alpha')$。

令 $K = 2^{20}r^2\mathsf{C}_{\mathrm{spec}}d(\alpha^4\tilde{\rho}\tilde{\sigma})^{-2}$。命题 2.38 蕴含，如果

$$\langle\Gamma\rangle_{[-K,K]} \cap \langle\Theta(x)\rangle_{[-K,K]} = \{0\}, \tag{35}$$

那么 (34) 中的集合包含 $S_x \cap B(\Gamma,\ \tilde{\sigma}/4)$。

现在我们转而考虑一个秩相同的子等差数列 $C'' \subseteq C'$，其中绝大多数列具有所需的结构。我们进行迭代论证，初始令 $C'' = C'$。我们跟踪一个格 $\Lambda \leq \mathbb{Z}^d$，它由元素 λ_1、……、$\lambda_s \in [-K,K]^d$ 在经过 s^{th} 步后生成，并且对所有 $x \in C''$ 和 $\lambda \in \Lambda$ 都满足 $\lambda \cdot \Theta(x) = 0$。此外，为了控制列中子群的行为，我们还跟踪另一个格 $M \leq \mathbb{Z}^d$。我们的最终目标是使得

$$\cap_{\mu\in M\cap[-K,K]^d} \ker\mu \cdot \Theta(x) \subseteq \langle B(\Theta(x);\tilde{\rho}/10000)\rangle \tag{36}$$

除至多 $\eta|C''|$ 个 C'' 的元素外，M 由满足以下性质的向量 μ 生成：对某个 $a \in$，$a\mu \in \Lambda\exp((2d\ \log\ \rho^{-1})^{O(1)})$。

确保 (35) 和 (36) 成立。 令 $\eta > 0$ 为稍后选取的参数。出于技术原因，我们考虑一个稍微一般化的条件：

$$\langle \Gamma \rangle_{[-K,K]} \cap \langle \Theta(x), \Theta(y), \Theta(z) \rangle_{[-K,K]} = \{0\}, \tag{37}$$

and

$$(\forall \lambda, \mu, \nu \in [-K,K]^d)\ \lambda \cdot \Theta(x) + \mu \cdot \Theta(y) + \nu \cdot \Theta(z) = 0 \implies \lambda, \mu, \nu \in \Lambda, \tag{38}$$

除至多 $\eta |C''|^3$ 个 x，y，$z \in C''$ 外，对所有情况都成立。假设目前还不成立。通过取平均，我们得到 $\eta (2K)^{-4d} |C''|$ 个元素 $x \in C''$、一个线性组合 $\lambda \in [-K,K]^d \setminus \Lambda$ 和一个元素 $\hat{} v \in G_2$，使得 $\lambda \cdot \Theta(x) = v$。根据引理 2.43，我们可以进一步取一个形状相同的子等差数列，其大小缩小因子为 $2^{-O(d^2)} (\eta K^{-4d})^{d+1}$，在该子等差数列上 $\lambda \cdot \Theta$ 消失，因此可以用 $\Lambda + \langle \lambda \rangle$ 替换 Λ。

另一方面，若 (36) 不成立，根据命题 2.11，存在 m，$R \leq \exp((2d \log\ \rho^{-1})^{O(1)})$ 和 $\mu \in [-R,R]^d$，使得对于至少 $\exp(-(2d \log\ \rho^{-1})^{O(1)}) |C''|$ 个元素 $x \in C''$，有 $\langle B(\Theta(x); \rho'/10000) \rangle \subseteq \ker \mu \cdot \Theta(x)$ 且 $m\mu \cdot \Theta(x) = 0$。若 $m\mu \notin \Lambda$，则将 $m\mu$ 加到 Λ 中，将 μ 加到 M 中，并取 C'' 的一个收缩，使得在其上 $m\mu \cdot \Theta(x) = 0$。否则，将 μ 加到 M 中。

根据引理 2.32，由于每一步中 M 或 Λ 都会增加，该过程至多经过 $O(d^2(\log\ d + \log\ K))$ 步便会终止。此外，将每一步满足 $m\mu \in \Lambda$ 的所有 m 相乘，可得存在 $\tilde{m} \leq \exp(O(d \log(K\rho^{-1}))^{O(1)})$，使得对所有 $\mu \in M$，都有 $\tilde{m}\mu \in \Lambda$。

转到所需的陪集广义等差数列 C''后，我们得出结论：ϕ 可以直接扩展为定义在每一列子群上的 ψ。剩下只需检验其在水平方向上的 E-同态性质。

对于任意 $y \in S_{x_1} \cap S_{x_2} \cap S_{x_3} \cap S_{x_4} \cap B(\Gamma, \sigma')$，其中 $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$，只需找到一个属于全部 4 列 $B(\Theta(x_i); \rho'') \cap B(\Gamma, \sigma')$ 的公共 r-元组。将半径 ρ'' 和 σ' 缩小为原来的三分之一后，可以保证该 r-元组属于第四列。使用 (37)。根据前面的论证，一个公共元组就足够了；前面的论证表明，所有 m-元组给出的值都大致相同。

断言 12.7. 假设三元组 (x_1, x_2, x_3) 满足 (38)。那么

$$S_{x_1} \cap S_{x_2} \cap S_{x_3} = \langle B(\Theta(x_1), \Theta(x_2), \Theta(x_3); \tilde{\rho}/2) \rangle.$$

证明。 由于 $B(\Theta(x_1)\ \Theta(x_2)\ \Theta(x_3);\ \tilde{\rho}/2) \subseteq S_{x_i}$，我们有 $\langle B(\Theta(x_1)\ \Theta(x_2)\ \Theta(x_3);\ \tilde{\rho}/2) \rangle \subseteq S_{x_1} \cap S_{x_2} \cap S_{x_3}$，因此需要证明反向包含。于是，任取 $y \in S_{x_1} \cap S_{x_2} \cap S_{x_3}$。我们知道，$y$可以写成 $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + +2z_1 + \cdots + 2^{r-4} z_{r-4}$，其中 $y_1, \ldots, z_{r-4} \in B(\Theta(x_i)\ \tilde{\rho}/2)$ 至少有 $\alpha |G_2|^{r-1}$ 种表示方式。由命题 2.38，得到所需的包含关系。 □

断言 12.8。 设 x_1、x_2、x_3 满足 (37)。则

$$\langle B(\Theta(x_1), \Theta(x_2), \Theta(x_3); \tilde{\rho}) \rangle \cap B(\Gamma, \sigma'/2) \subseteq 4(B(\Theta(x), \Theta(y), \Theta(z); \tilde{\rho}) \cap B(\Gamma, \sigma'))$$

$$+2\cdot(B(\Theta(x),\Theta(y),\Theta(z);\tilde{\rho})\cap B(\Gamma,\sigma'))+\dots$$
$$+2^{r-4}\cdot(B(\Theta(x),\Theta(y),\Theta(z);\tilde{\rho})\cap B(\Gamma,\sigma')).$$

证明。同样地，我们依赖于 (37) 和命题 2.38。 □

现在我们可以证明，只要 x_1,x_2,x_3 满足 (37) 和 (38)，那么对于所有 $y\in S_{x_1}\cap S_{x_2}\cap S_{x_3}\cap S_{x_4}\cap B(\Gamma,\sigma'/2)$，$\psi(x_1,y)+\psi(x_2,y)-\psi(x_3,y)-\psi(x_4,y)\in 2E-2E$ 都成立。任取这样的 y。由断言 12.7 可知，$y\in\langle B(\Theta(x)\ \Theta(y)\ \Theta(z);\tilde{\rho})\rangle\cap B(\Gamma,\sigma')$。由断言 12.8 可知，存在 $z_1,\dots,z_r\in B(\Theta(x_1)\ \Theta(x_2)\ \Theta(x_3);\tilde{\rho})\cap B(\Gamma,\sigma')$，使得 $z_1+\dots+z_4+2z_5+\dots+2^{r-4}z_r=y$。于是 $(x_4,z_i)\in B(\Theta(x_4);\tilde{\rho})\cap B(\Gamma,\sigma')$，它属于 ϕ 的定义域。因此

$$\begin{aligned}\psi(x_1,y)+\psi(x_2,y)-\psi(x_3,y)-\psi(x_4,y)&\\ \in\Big(\sum_{i\in[r]}u_i\phi(x_1,z_i)\Big)+\Big(\sum_{i\in[r]}u_i\phi(x_2,z_i)\Big)-\Big(\sum_{i\in[r]}u_i\phi(x_3,z_i)\Big)&\\ -\Big(\sum_{i\in[r]}u_i\phi(x_4,z_i)\Big)+(2E-2E)=2E-2E.&\end{aligned}$$

由此可知，ψ 在簇的大部分上有定义。下面证明群 S_x 具有所声称的结构。由 (36) 可得 $\cap_{\mu\in M\cap[-K,K]^d}$ 核 $\lambda\cdot\Theta(x)\subseteq S_x$。根据定理 2.33，我们可以找到一个生成集 A，它是 $M\cap[-K,K]^d$ 的生成集，且大小符合要求。

最后，选取合适的 η，并应用命题 11.2 完成证明。 □

12.3. 将定义域扩展到结构化乘积

在本小节中，我们将定义域扩展到 Bohr 集与陪集广义等差数列的乘积。

命题 12.9. 设 $\Theta_1,\dots,\Theta_d\colon C\to G_2$ 是对称真陪集进程 C 上的 *Freiman* 线性映射，其秩为 d、密度为 c，且 C 位于 G_1 内；并假设存在 m，使得对于所有 $x\in C, i\in[d]$，$m\Theta_i(x)=0$ˆ成立。设 $\Gamma\subseteq G_2$ 是一个大小为 r 的集合，并设 $\rho>0$。定义一个双线性 ***Bohr*** 簇$V\subseteq C\times G_2$，其列为

$$\Big(\bigcap_{i\in[d]}\ker\Theta_i(x)\Big)\cap B(\Gamma,\rho)$$

对于 $x\in C$。设 $\phi\colon\ V\to H$ 是一个 E-双同态，满足 $\phi(x,0)\in E$，其中集合 E 的秩为 d'。那么，存在

- 一个秩至多为 d、密度为 $\exp(-2rd\log(c^{-1}\rho^{-1})^{O(1)})$ 的陪集广义等差数列 $C'\subseteq C$，
- 一个大小至多为 $2rd\log(c^{-1}\rho^{-1})^{O(1)}$ 的集合 $\Gamma'\subseteq$ ˆG_2，
- 一个 E'-双同态 ϕ，定义在 $C'\times B(\Gamma\cup\Gamma',\rho/100)$ 上；一个 E'-同态 $\psi\colon B(\Gamma\cup\Gamma',\rho/2)\to H$，以及一个元素 $x_0\in G_1$，使得对定义域中的每个 (x,y)，都有

$$\tilde{\phi}(x,y)\in\phi(x,y-z)+\psi(z)+\phi(x-x_0,z)+E'.$$

证明。记 $S_x = \cap_{i\in[d]} \ker \Theta_i(x)$ 为定义 x 列的子群与$B(\Gamma,\rho)$相交后所得的子群。由于对所有 $x \in C$，$m\Theta_i(x) = 0$ 都成立，因此有 $|G_2 : S_x| \le m^d$。我们将按如下方式定义˜延拓映射 ϕ。任取一个元素 $x_0 \in C$，利用命题 2.46 将其列上的 ϕ_x. 延拓到 $B(\Gamma,\rho/16)$，得到一个 E'-同态 ψ，其中某个集合 E' 的秩至多为$O(dd'\log m)$。然后，对任意 $x \in C$，给定由 $\Theta(x)(\cdot) = t$ 定义的 S_x 的一个陪集，我们取一个元素 $z \in S_{x-x_0} \cap \{\Theta(x)(\cdot) = t\} \cap B(\Gamma,\rho/32)$，将 ϕ_x. 延拓到$\Theta(x)^{-1}(t) \cap B(\Gamma,\rho/128)$，然后定义

$$\tilde{\phi}(x,y) = \phi(x,y-z) + \psi(z) + \phi(x-x_0,z). \tag{39}$$

注意，$(x,y-z)$,$(x-x_0,z) \in V$并注意，$\Theta(x_0)(z) = \Theta(x_0-x)(z) + \Theta(x)(z) = t$，第一项为 0，另一项为 t。

现在我们来讨论细节。令 $\varepsilon > 0$ 为一个稍后选定的正参数。我们应用代数正则性引理（定理 3.5），误差参数为 ε，由此得到一个秩为 d 、大小为

$$|C'| \ge \exp\Big(-d^{O(1)} r^{O(1)} \log^{O(1)}(\varepsilon^{-1}) \log^{O(1)}(\rho^{-1}) \log^{O(1)} m\Big)|C|,$$

使得双线性 Bohr 簇在 $C' \times B(\Gamma,\rho')$ 上具有足够的准随机性，其中 $\rho' \in [\rho/2,\rho]$。

令 $R_1 = \mathsf{C}_{\mathrm{spec}} r 2^{20r+8} \rho^{-2r-1} m^{4r^2+2rd}$，这是由命题 2.46 得出的量。我们还将在某处应用命题 2.10，从而得到 $R_2 = \mathsf{C}_{\mathrm{spec}} 2^{10+12r} r\rho^{-2d} m^{2d}$。令$R = \{R_1, R_2\}$。

注意，定理 3.5 的证明表明，Λ 关于$\Theta(x)$的消失线性组合所构成的格，除至多 $(1-\varepsilon)|C'|$ 个点外，在 C' 中的所有点处都相同。证明还表明，回顾$m\Theta(x) = 0$，对于 C' 中至少 $(1-\varepsilon)|C'|$ 个点，$\langle \Theta_1(x)\dots,\Theta_r(x)\rangle_{[0,m-1]} \cap \langle\Gamma\rangle_R = \{0\}$。令 $X_0 \subseteq C'$ 为满足这两个性质的所有点构成的集合。因此，对于 X_0 中的所有点，$\mathrm{Im}\,\Theta(x)$ 都是同一个子群 $T \le \mathbb{T}^d$。注意，对所有 $t \in T$，都有 $mt = 0$。

如果对于所有 $t \in T$ 都有下式成立，我们就称 $X_0 \cap \frac{1}{2}C'$ 中的一对 (x_0,x) 是良好 的:

$$|S_{x-x_0} \cap \Theta(x)^{-1}(t) \cap B(\Gamma,\rho/32)| \ge \frac{1}{4} m^{-2d} (\rho/32)^r |G_2|. \tag{40}$$

利用拟随机性，我们证明绝大多数配对都是良好的。

命题 12.10。除了至多 $10002^{12r} m^{2d} \rho^{-2r} \sqrt[8]{\varepsilon}$ 个配对 (x_0,x) 外，$X_0 \cap \frac{1}{2}C'$ 中的配对都是良好的。

证明。稍微更一般地说，只需给出满足条件 $S_{x_1} \cap \Theta(x_2)^{-1}(t) \cap B(\Gamma,\rho/32)$ 较小的配对 $(x_1,x_2) \in C' \times C'$ 的数量上界。首先，我们证明 $\Theta(x_2)^{-1}(t) \cap B(\Gamma,\rho/32)$ 在大多数情况下大小至少为$\frac{1}{2}m^{-d}(\rho/32)^r|G_2|$。取满足 $B(\Gamma,\tilde{\rho})$ 弱正则的 $\tilde{\rho} \in [\rho/64,\rho/32]$。根据命题 2.10，所有满足 $|\widehat{\mathbb{1}_{B(\Gamma,\tilde{\rho})}}| \ge \frac{1}{2}m^{-d}|B_{\frac{(\Gamma\ \tilde{\rho}\ |,)}{|G_2|}}$ 的傅里叶系数 χ 都落在张成空间 $\langle\Gamma\rangle_{R_2}$ 中。

现在我们证明 $\Theta(x_2)^{-1}(t)\cap B(\Gamma,\rho/32)$ 很大。也就是说，若 $\langle\Theta_1(x_2)\dots,\Theta_r(x_2)\rangle_{[0,m-1]}\cap\langle\Gamma\rangle_R=\{0\}$，则有

$$\begin{aligned}|\Theta(x_2)^{-1}(t)\cap B(\Gamma,\tilde{\rho})|&=|G_2|\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G_2}\mathbb{1}(\Theta(x_2)(y)=t)\mathbb{1}_{B(\Gamma,\tilde{\rho})}(y)\\&=m^{-d}|G_2|\sum_{a_1,\dots,a_d\in[0,m-1]}\mathbb{1}_{B(\Gamma,\tilde{\rho})}(y)\,\mathrm{e}\Big(\sum_{i\in[d]}a_i\Theta(x_2)(y)\Big)\\&=m^{-d}|G_2|\sum_{a_1,\dots,a_d\in[0,m-1]}\widehat{\mathbb{1}_{B(\Gamma,\tilde{\rho})}}\Big(\sum_{i\in[d]}a_i\Theta(x_2)\Big)\end{aligned}$$

而 $a_1,\dots,a_d=0$ 的贡献为 $m^{-d}|B(\Gamma,\tilde{\rho})|$，其余部分的绝对值总和至多为 $\frac{1}{2}m^{-d}|B(\Gamma,\tilde{\rho})|$。

现在取一个 x_2，使得 $\Theta(x_2)^{-1}(t)\cap B(\Gamma,\rho/32)$ 很大。由引理 3.3 和 3.4，即得结论 . □

我们从 $\frac{1}{2}C'$ 中均匀随机地选取 x_0。因此，以高概率，对于几乎所有 $x\in X_0\cap\frac{1}{2}C'$，$(x_0,x)$ 都是良好的。更准确地说，若 X_1 是满足 (x_0,x) 良好的所有 $x\in X_0\cap\frac{1}{2}C'$ 构成的集合，那么只要 $2^{-12r-2d-10}m^{-2d}\rho^{2r}\geq\sqrt[16]{\varepsilon}$，我们就以至少 $1-\sqrt[32]{\varepsilon}$ 的概率有 $|X_1|\geq(1-\sqrt[32]{\varepsilon})|\frac{1}{2}C'|$。利用命题 2.46，将 ψ 定义为到 $B(\Gamma,\rho/16)$ 的任意扩展。因此，根据定义 (39)，我们可以将 ϕ 扩展到 $x\in X_1$ 的所有列。为此，在按照 (39) 进行扩展时，我们从 $S_{x-x_0}\cap\Theta(x)^{-1}(t)\cap B(\Gamma,\rho/32)$ 内均匀随机地选取一个元素 z。剩下要检验的是，$\tilde{\phi}$ 以高概率具有所需性质。此外，我们将行限制在 S_{x_0} 上，因此定义域变为

$$\Big(X_1\times(S_{x_0}\cap B(\Gamma,\rho/128))\Big)\cap\Big(\bigcap_{x\in C'}\{x\}\times S_x\Big).$$

竖直检查。令 $x\in X_1$，$y_1,y_2,y_3\in B(\Gamma,\rho/128)$ 满足 $y_3=y_1+y_2$。根据定义，取某个 $z_1,z_2,z_3\in B(\Gamma,\rho/32)\cap S_{x-x_0}$ 使得 $y_i-z_i\in S_x$，并令

$$\tilde{\phi}(x,y_i)=\phi(x,y_i-z_i)+\psi(z_i)+\phi(x-x_0,z_i).$$

首先注意到，由于下面所有元素都属于 $\{x\}\times(V_x)$

$$\phi(x,y_1-z_1)+\phi(x,y_2-z_2)-\phi(x,y_3-z_3)\in\phi(x,y_1+y_2-y_3-z_1-z_2+z_3)+E=\phi(x,z_3-z_1-z_2)+E.$$

还要强调的是，$z_3-z_1-z_2\in S_x$。此外，我们有 $z_1,z_2,z_3\in S_{x-x_0}\cap B(\Gamma,\rho/32)$，因此有 $z_1+z_2-z_3\in S_{x-x_0}\cap B(\Gamma,\rho/2)$，于是

$$\phi(x-x_0,z_1)+\phi(x-x_0,z_2)-\phi(x-x_0,z_3)\in\phi(x-x_0,z_1+z_2-z_3)+E.$$

但 $\Theta_i(x)(z_1+z_2-z_3)=0$ 和 $\Theta_i(x-x_0)(z_1+z_2-z_3)=0$ 也意味着 $\Theta_i(x_0)(z_1+z_2-z_3)=0$，因此 $(x_0,z_1+z_2-z_3)\in V$。于是，$\psi(z_1+z_2-z_3)-\phi(x_0,z_1+z_2-z_3)\in E'$。综合以上各点，我们得到

$$\tilde{\phi}(x,y_1)+\tilde{\phi}(x,y_2)-\tilde{\phi}(x,y_3)$$

$$\in (\phi(x, z_3 - z_1 - z_2) + E) + (\phi(x_0, z_1 + z_2 - z_3) + 2E') + (\phi(x - x_0, z_1 + z_2 - z_3) + E)$$
$$\subseteq 2E' + 4E,$$

这里我们利用了对称性 $\phi(x,-t) + \phi(x,t) - \phi(x,0) \in E$ 和 $\phi(x,0) \in E$。

水平检查。 论证的这一部分比前一次检查更微妙，我们首先需要一个近似余循环恒等式。 [24], 中证明了一个类似的结果，见引理 10。

断言 *12.11.* 设给定 $x, z, u \in -\frac{1}{3}C'$ 和 $y, w, v \in B(\Gamma, \rho/10)$。假设 $\Theta(x) \quad (y) \quad = \Theta(z) \quad (w) \quad = \Theta(u) \quad (v)$，并且对于 $\{x, z, u\} \times \{y, w, v\}$ 中剩余的 6 个点 (a, b)，有 $\Theta(a) \quad (b) \quad = 0$。那么我们有如下恒等式（且所有论证都属于 V）

$$\phi(x, w) \in \phi(x + z, -y + w) + \phi(x - u, y + v) - \phi(z - u, w + v)$$
$$- \phi(x, v) + \phi(z, y) + \phi(u, y) + \phi(z, v) - \phi(u, w) + 5E.$$

证明。 利用 ϕ 是 E-双线性的事实，我们得到

$$\begin{aligned}
\phi(x, w) &\in \phi(x, w + v) - \phi(x, v) + E \\
&\subseteq \phi(x + z - u, w + v) - \phi(z - u, w + v) - \phi(x, v) + 2E \\
&\subseteq \phi(x + z - u, -y + w) + \phi(x + z - u, y + v) - \phi(z - u, w + v) - \phi(x, v) + 3E \\
&\subseteq \phi(x + z - u, -y + w) + \phi(x - u, y + v) + \phi(z, y) + \phi(z, v) - \phi(z - u, w + v) - \phi(x, v) + 4E \\
&\subseteq \phi(x + z, -y + w) + \phi(u, y) - \phi(u, w) + \phi(x - u, y + v) \\
&\qquad + \phi(z, y) + \phi(z, v) - \phi(z - u, w + v) - \phi(x, v) + 5E \\
&= \phi(x + z, -y + w) + \phi(x - u, y + v) - \phi(z - u, w + v) \\
&\qquad - \phi(x, v) + \phi(z, y) + \phi(u, y) + \phi(z, v) - \phi(u, w) + 5E.
\end{aligned}$$

□

任取满足 $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ 的加性四元组 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in C'$。设给定 $y \in B(\Gamma, \rho/128)$。我们证明，相应的水平加性四元组以高概率得到保持。然后我们使用元素 z_1, z_2, z_3, z_4，在这些点处扩展 ϕ，使得 $y - z_i \in S_{x_i}$ 且 $z_i \in S_{x_i - x_0} \cap B(\Gamma, \rho/32)$。注意

$$\Theta(x_0)(z_1 - z_2 + z_3 - z_4) = \sum_{i \in [4]} (-1)^{i+1} \Theta(x_0)(z_i) = \sum_{i \in [4]} (-1)^{i+1} \Theta(x_i)(z_i) = \sum_{i \in [4]} (-1)^{i+1} \Theta(x_i)(y) = 0,$$

因此 $(x_0, \ z_1 - z_2 + z_3 - z_4) \in V$。由此可得 $\sum_{i \in [4]} (-1)^{i+1} \psi(z_i) \in \psi(z_1 - z_2 + z_3 - z_4) + 3E' = \phi(x_0, z_1 - z_2 + z_3 - z_4) + 3E'$。

因此，我们需要检查余循环表达式

$$\sum_{i \in [4]} (-1)^{i+1} \phi(x_i, y - z_i) + \sum_{i \in [4]} (-1)^{i+1} \phi(x_i - x_0, z_i) + \phi(x_0, z_1 - z_2 + z_3 - z_4) \tag{41}$$

属于 $O(1)E'$ 当 $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ 时。

化归到特殊情形。设 $t_i = \Theta(x_i)(y)$。那么我们还有 $\Theta(x_i)(z_i) = \Theta(x_0)(z_i) = t_i$。因此，$t = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ 是 T 中的一个加性四元组。为了完成证明，我们将问题化归到这样的情形：t有两个零，另一个值出现两次。

进一步定义四元组 $\tilde{t}^1 = (t_1, t_1, 0, 0)$ $\tilde{t}^2 = (0, 0, t_4, t_4)$，它们与 $\tilde{t}^3 = (0, t_2 - t_1, t_2 - t_1, 0)$ 相加得到 t。利用拟随机性，我们注意到，以至少 $1 - \sqrt[32]{\varepsilon}$ 的概率，可以找到$\tilde{z}_i^j, \tilde{y}^j \in B(\Gamma, \rho/128)$，其中 $j \in [2], i \in [4]$ 满足 $\Theta(x_0)(\tilde{y}^j) = 0$，且 $\tilde{t}_i^j = \Theta(x_i)(\tilde{y}^j) = \Theta(x_i)(\tilde{z}_i^j) = \Theta(x_0)(\tilde{z}_i^j)$。这由引理 3.3 和 3.4 得出；此外，只要 $2^{-\mathbf{C}(r+d+1)} m^{-\mathbf{C}d} \rho^{\mathbf{C}r} \geq \varepsilon$，我们至少有 $2^{-20} m^{-26d} (\rho/128)^{10r} |G_2|^{10}$ 个这样的 10 元组可供选择。

此外，令 $\tilde{z}_i^3 = z_i - \tilde{z}_i^1 - \tilde{z}_i^2$和 $\tilde{y}^3 = y - \tilde{y}^1 - \tilde{y}^2$满足 $\tilde{t}_i^3 = \Theta(x_i)(\tilde{y}^3) = \Theta(x_i)(\tilde{z}_i^3) = \Theta(x_0)(\tilde{z}_i^3)$。如果我们能控制 $(\tilde{y}^j, \tilde{z}_{[4]}^j)$ 对应的余循环表达式 (41)，而不是 $(y, z_{[4]})$，就完成了。因此，不失一般性，$t_1 = t_2 = t$ 和 $t_3 = t_4 = 0$。

证明近似余循环恒等式。我们首先需要找到 $u_1, u_2 \in \frac{1}{4}C'$ 和 $v \in B(\Gamma, \rho/128)$ 使得

$$\Theta(u_1)(v) = t, \Theta(u_2)(v) = 0, \Theta(u_1)(y) = \Theta(u_2)(y) = \Theta(u_1)(z_1) = \Theta(u_2)(z_1) = \cdots = \Theta(u_2)(z_4) = 0$$

and

$$\Theta(x_0)(v) = \Theta(x_1)(v) = \cdots = \Theta(x_4)(v) = 0.$$

根据引理 3.3 和 3.4，以至少 $1 - \sqrt[32]{\varepsilon}$ 的概率，我们可以先找到 $u_1, u_2 \in \frac{1}{4}C'$，使得 at

$$\Theta(u_1)(y) = \Theta(u_2)(y) = \Theta(u_1)(z_1) = \Theta(u_2)(z_1) = \cdots = \Theta(u_2)(z_4) = 0.$$

于是，以至少 $1 - \sqrt[32]{\varepsilon}$ 的概率，我们可以找到 v，使得其余条件 ho ld.

因此，回想起 $y \in S_{x_0}$，于是 $\Theta(x_0)(y) = 0$，并且等式

$$\Theta(x_1)(y) = \Theta(x_1)(z_1) = \Theta(x_0)(z_1) = t,\ \Theta(x_2)(y) = \Theta(x_2)(z_2) = \Theta(x_0)(z_2) = t,$$
$$\Theta(x_3)(y) = \Theta(x_3)(z_3) = \Theta(x_0)(z_3) = 0,\ \Theta(x_4)(y) = \Theta(x_4)(z_4) = \Theta(x_0)(z_4) = 0,$$

断言 12.11 适用于以下四组三元组对：$\Big((x_1 - x_0, x_0, u_1), (y, z_1, v)\Big)$, $\Big((x_2 - x_0, x_0, u_1), (y, z_2, v)\Big)$,$\Big((x_3 - x_0, x_0, u_2), (y, z_3, v)\Big)$ 以及 $\Big((x_4 - x_0, x_0, u_2), (y, z_4, v)\Big)$。因此，从断言 12.11 中减去前两组对应的近似恒等式，得到

$$\begin{aligned}
&\phi(x_1 - x_0, z_1) - \phi(x_2 - x_0, z_2) - \phi(x_1, z_1 - y) + \phi(x_2, z_2 - y) \\
&\quad \in \ \phi(x_1 - x_2, y + v) - \phi(x_0 - u_1, z_1 - z_2) - \phi(x_1 - x_2, v) - \phi(u_1, z_1 - z_2) + 10E \\
&\quad = \ \phi(x_1 - x_2, y + v) - \phi(x_0, z_1 - z_2) - \phi(x_1 - x_2, v) + 10E
\end{aligned}$$

第二组也同理

$$\begin{aligned}\phi(x_3-x_0,z_3)-&\phi(x_4-x_0,z_4)-\phi(x_3,z_3-y)+\phi(x_4,z_4-y)\\ &\in\ \phi(x_3-x_4,y+v)-\phi(x_0,z_3-z_4)-\phi(x_3-x_4,v)+10E.\end{aligned}$$

因此，将这些表达式相加，并回想起 $x_1-x_2+x_3-x_4=0$，便得到所需条件。我们选取 $\varepsilon=2^{-\mathbf{C}(r+d+1)}m^{-\mathbf{C}d}\rho^{\mathbf{C}r}$，使相关上界成立，从而得到˜一个映射 ϕ。应用引理 11.2 即可完成证明。

□

§13 Freiman 双齐态射逆定理

现在我们已经可以证明本文的主要结构性结果了。

定理 *1.4* 的证明。 证明只需梳理本章的主要结果即可。定量方面大多显而易见，也就是说，所有对象的余维数和秩都至多为 (2log c^{-1})$^{O(1)}$，而 Bohr 集的半径以及各种密度都至少为 exp(–(2 log c^{-1})$^{O(1)}$)。唯一需要谨慎处理的两点是命题 6.1 和 8.1 的应用。

设 $\Phi\colon A\to H$ 为给定的 Freiman 双同态。首先应用命题 5.1，转而考虑由稠密集 X 中的元素索引的一组 Freiman 线性映射 ϕ_x，其中许多加性四元组都是像相容的（即 #Im($\phi_{x_1}-\phi_{x_2}+\phi_{x_3}-\phi_{x_4}$) 很小）。设 c_1 为 X 的密度。接着应用命题 6.1，取误差参数 $\varepsilon=$exp(–(2log c_1^{-1})$^K_1$)，其中正数常数 K_1 相对于命题 7.1 中关于 ε 的技术条件充分大，从而转而考虑一个子集 $X'\subseteq X$，其中除极少数外，所有加性 16 元组都是像相容的。由命题 7.1，因 K_1 充分大，我们还可以假设映射组 ϕ_x 由一个陪集广义等差数列 C 索引，且其中所有加性四元组都像相容。

现在我们转换一下视角：若$\phi_{x_1}-\phi_{x_2}+\phi_{x_3}-\phi_{x_4}$ 在它们定义域的交集上为零，则称一个加性四元组是 Bohr 相容的。应用命题 8.1，取误差参数 10^{-10d}，其中 d 是陪集广义等差数列 C的秩，由此可推得绝大多数加性16元组都是 Bohr 相容的。根据命题 9.3，我们可以假设映射 ϕ_x的定义域是双线性 Bohr 簇的列，但此时只有稠密的加性四元组集合是 Bohr 相容的。再次应用命题 10.1，得到一个指标集合，使得其中所有加性四元组都是 Bohr 相容的。

我们再次转换视角，现在将 ϕ 视为定义在 $G_1\times G_2$的一个子集上的二元函数。应用命题 11.1，可推出我们有一个定义在双线性 Bohr 簇上的 Freiman 双线性映射。应用命题 12.1、12.6 和 12.9，可得到所需的 E-双同态$\Phi\colon C_1\times B_1\to H$，它满足以下性质：对每个($x$, y)，至少存在 exp(–(2 log c^{-1})$^{O(1)}$)

比例的所有$(d_1, \ldots\ldots, d_k)$-排列$(a_1, b_1)\ldots\ldots, (a_m, b_m)$，其中 $m = d_1 \cdots d_k$、 $k = O(1)$、$d_1, \ldots\ldots, d_k \leq (2 \log c^{-1})^{O(1)}$，其长度为$(x, y)$，且满足适当的 $\pm$-线性组合 $\varphi(a_i, b_i)$ 等于 $\Phi(x, y)$。通过平均和定理 2.26 可得结论。 □

第3章：U^4 范数的逆理论

本章将从 Freiman 双同态的结构性结果出发，推导 U^4 范数的逆定理。我们首先建立近似三线性形式的等分布理论。

§14 近似三线性形式的等分布理论

本节研究近似多重线性形式。具体而言，对于定义在 Bohr 集 B 的 k 重笛卡尔积上的映射 $\phi: B^k \to \mathbb{T}$，我们称其为 **ε-多重线性形式**，如果对于指标 $i \in [k]$ 和元素 $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k \in B$ 的所有选择，映射 $\psi(y) = \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_k)$ 都满足 ε- 线性，即只要 $y, z, y+z \in B$，就有 $\|\psi(y+z) - \psi(y) - \psi(z)\|_{\mathbb{T}} \leq \varepsilon$。

在本节和下一节中，我们需要用到 Bohr 集正则性的标准概念及相关事实，现先回顾一下。

14.1. 正则 Bohr 集

在陈述关键定义和结果之前，我们先来看看关于指数映射的几个有用的初等不等式。

引理 14.1. 令 $t \in [-1/2, 1/2]$。则

- $4|t| \leq |\mathrm{e}(t) - 1| = 2\sin(\pi|t|) \leq 2\pi|t|$，并且
- $1 - \mathrm{Re}(\mathrm{e}(t)) \geq 8t^2$。

证明。第一个不等式是标准结果。对于第二个，我们有 $1 - \mathrm{Re}(\mathrm{e}(t)) = 1 - \cos(2\pi t) = 2\sin^2(\pi t) \geq 8|t|^2$。 □

对于余维为 d 的 Bohr 集 $B = B(\Gamma, \rho)$，记 B_δ 为它的 δ-膨胀，即 $B_\delta = B(\Gamma, \delta\rho)$。按照 [61]（定义 4.24），我们称 B 是**正则的**，如果

$$1 - 100d\delta \leq \frac{|B_{1+\delta}|}{|B|} \leq 1 + 100d\delta$$

对所有 $|\delta| \leq \frac{1}{100d}$ 都成立。

Bourgain 提出的一个关键事实（例如，参见 [61] 中的引理 4.25）是，存在 $\delta \in [1/2, 1]$ 使得 B_δ 是正则的。

备注。 需要指出的是，在本小节及后续小节的大部分内容中，我们使用群上的求和而不是平均。这会影响卷积的定义，以及 ℓ^p 范数的选择

而不是 L^p。

我们需要一些事实，以便能够在 Bohr 集上进行常见的表达式操作，例如平均和变量替换。这些论证都是标准的。

引理14.2 (Bohr集的卷积)。 设 B 是余维为 d 、半径为 ρ 的正则 *Bohr* 集。那么，对于所有 $\delta \leq 1/200d$

$$\left\| \mathbb{1}_B - \frac{1}{|B_\delta|} \mathbb{1}_{B_\delta} * \mathbb{1}_{B_{1-\delta}} \right\|_{\ell^1} \leq 200\delta d|B|.$$

证明。 注意， $\mathbb{1}_B(x) - \frac{1}{|B_\delta|}\mathbb{1}_{B_\delta} * \mathbb{1}_{B_{1-\delta}}(x)$ 的取值始终属于 $[0,1]$，并且在 B 之外以及 $B_{1-2\delta}$ 内部都等于 0。因此

$$\left\| \mathbb{1}_B - \frac{1}{|B_\delta|} \mathbb{1}_{B_\delta} * \mathbb{1}_{B_{1-\delta}} \right\|_{\ell^1} \leq |B \setminus B_{1-2\delta}| \leq 200d\delta|B|,$$

根据 Bohr 集 B 的正则性。 □

引理 14.3 (半径缩减)。 设 B 是余维为 d 的 *Bohr* 集，设 $\delta_1, \ldots, \delta_r \in (0,1]$。设$F\colon B^r \to \mathbb{D}$ 是一个满足以下条件的函数

$$\Big| \sum_{x_1 \in B_{\delta_1}, \ldots, x_r \in B_{\delta_r}} F(x_1, \ldots, x_r) \Big| \geq c|B_{\delta_1}| \ldots |B_{\delta_r}|.$$

设 $\varepsilon > 0$，设 $\delta_i' \leq \frac{\varepsilon \delta_i}{200d}$ 对某个指标 i 成立，并假设 B_{δ_i} 是正则的。那么存在一个元素$t \in B_{\delta_i - \delta_i'}$，使得

$$\Big| \sum_{\substack{x_1 \in B_{\delta_1}, \ldots, x_{i-1} \in B_{\delta_{i-1}}, \\ x_i \in B_{\delta_i'}, x_{i+1} \in B_{\delta_{i+1}}, \ldots, x_r \in B_{\delta_r}}} F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \ldots, x_r) \Big| \geq (c - \varepsilon) \frac{|B_{\delta_i'}|}{|B_{\delta_i}|} |B_{\delta_1}| \ldots |B_{\delta_r}|.$$

证明。 不失一般性， $i = r$。我们有

$$\begin{aligned}
&\Big| \sum_{x_1, \ldots, x_r \in G} \mathbb{1}_{B_{\delta_1}}(x_1) \ldots \mathbb{1}_{B_{\delta_r}}(x_r) F(x_1, \ldots, x_r) \\
&\qquad - \frac{1}{|B_{\delta_r'}|} \Big| \sum_{x_1, \ldots, x_r \in G, t \in G} \mathbb{1}_{B_{\delta_1}}(x_1) \ldots \mathbb{1}_{B_{\delta_{r-1}}}(x_{r-1}) \mathbb{1}_{B_{\delta_r'}}(x_r) \mathbb{1}_{B_{\delta_r - \delta_r'}}(t) F(x_1, \ldots, x_r + t) \Big| \\
&= \Big| \sum_{x_1, \ldots, x_r \in G} \mathbb{1}_{B_{\delta_1}}(x_1) \ldots \mathbb{1}_{B_{\delta_{r-1}}}(x_{r-1}) \Big(\mathbb{1}_{B_{\delta_r}}(x_r) - \frac{1}{|B_{\delta_r'}|} \mathbb{1}_{B_{\delta_r'}} * \mathbb{1}_{B_{\delta_r - \delta_r'}}(x_r) \Big) F(x_1, \ldots, x_r) \Big| \\
&\leq |B_{\delta_1}| \ldots |B_{\delta_{r-1}}| \Big\| \mathbb{1}_{B_{\delta_r}}(x_r) - \frac{1}{|B_{\delta_r'}|} \mathbb{1}_{B_{\delta_r'}} * \mathbb{1}_{B_{\delta_r - \delta_r'}}(x_r) \Big\|_{\ell^1}.
\end{aligned}$$

根据前一个引理，上述表达式至多为 $200d\delta_r'\delta_r^{-1}|B_{\delta_1}| \ldots |B_{\delta_r}| \leq \varepsilon |B_{\delta_1}| \ldots |B_{\delta_r}|$，由关于 δ_r'的假设可知。

根据三角不等式，我们得到

$$\Big|\frac{1}{|B_{\delta_r'}|}|\sum_{x_1,\dots,x_r\in G,t\in G}\mathbb{1}_{B_{\delta_1}}(x_1)\dots\mathbb{1}_{B_{\delta_{r-1}}}(x_{r-1})\mathbb{1}_{B_{\delta_r'}}(x_r)\mathbb{1}_{B_{\delta_r-\delta_r'}}(t)F(x_1,\dots,x_r+t)\Big|\geq(c-\varepsilon)|B_{\delta_1}|\dots|B_{\delta_r}|$$

对 t取平均后，即可得出该断言。 □

引理 14.4（变量替换）。设 B 是余维为 d 的 ***Bohr*** 集，设 δ_1、…、δ_r、$\rho\in(0,1/2]$、$\varepsilon>0$ 和 λ_1、…、$\lambda_r\in\mathbb{Z}$。设 $F\colon\ B^{r+1}\to\mathbb{D}$ 是一个函数。若对每个 $i\in[r]$ 都有 $|\lambda_i|\delta_i\leq\frac{\varepsilon\rho}{200dr}$，且 B_ρ 是正则的，则

$$\Big|\sum_{\substack{x_1\in B_{\delta_1},\dots,\\ x_r\in B_{\delta_r},y\in B_\rho}}F(x_1,\dots,x_r,y)-\sum_{\substack{x_1\in B_{\delta_1},\dots,\\ x_r\in B_{\delta_r},y\in B_\rho}}F(x_1,\dots,x_r,y+\lambda_1x_1+\dots+\lambda_rx_r)\Big|\leq\varepsilon|B_{\delta_1}|\dots|B_{\delta_r}||B_\rho|.$$

证明。固定 $x_1\in B_{\delta_1}$、…、$x_r\in B_{\delta_r}$，并记 $f(y)=F(x_1,\dots,x_r,y)$。对于 $t=\lambda_1x_1+\dots+\lambda_rx_r$，我们有

$$\Big|\sum_{y\in B_\rho}f(y)-\sum_{y\in B_\rho}f(y+\lambda_1x_1+\dots+\lambda_rx_r)\Big|\leq2|B_\rho\setminus(B_\rho+t)|.$$

设 $\delta'=|\lambda_1|\delta_1+\dots+|\lambda_r|\delta_r$。由于 $B_{\rho-\delta'}\subseteq B_\rho+t$，我们有 $|B_\rho\setminus(B_\rho+t)|\leq|B_\rho\setminus(B_{\rho-\delta'})|\leq100d\rho^{-1}\delta'|B_\rho|$。对 x_1、…、x_r 求和，并应用三角不等式，即得断言。 □

14.2. 对称性论证

本小节推导近似双线性形式的对称性论证。该论证源自 Green 和 Tao 的论文 [29]，是一致性范数逆理论中的重要组成部分。Tidor 给出了一个尤为简洁的对称性论证表述，我们将沿用这一表述。

引理 14.5（对称性论证）。设 $\theta\colon\ B_{2\rho}\times B_{2\rho}\to\mathbb{T}$ 是定义在余维为 d 的正则 ***Bohr*** 集 B_ρ 上的 ε-双线性映射，并假设

$$\Big|\sum_{x,y\in B_\rho}f_1(x)f_2(y)f_3(x+y)\,\mathrm{e}(\theta(x,y))\Big|\geq c|B|^2$$

对某些函数 f_1、f_2、$f_3\colon\ B_{2\rho}\to\mathbb{D}$ 成立。设 $\rho_1\leq\frac{c^2\rho}{2000d}$ 满足 B_{ρ_1} 正则。那么，只要 $\varepsilon\leq2^{-20}c^8$，我们就有

$$\mathrm{Re}\Big(\sum_{y_1,y_2\in B_{2\rho_1}}\mathbb{1}_{B_{\rho_1}}*\mathbb{1}_{B_{\rho_1}}(y_1)\mathbb{1}_{B_{\rho_1}}*\mathbb{1}_{B_{\rho_1}}(y_2)\,\mathrm{e}\Big(\theta(y_1,y_2)-\theta(y_2,y_1)\Big)\Big)\geq2^{-13}c^8|B_{\rho_1}|^4.$$

证明。由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\sum_{x,y_1,y_2\in B_\rho}f_2(y_1)f_3(x+y_1)\overline{f_2(y_2)f_3(x+y_2)}\,\mathrm{e}(\theta(x,y_1)-\theta(x,y_2))\geq c^2|B_\rho|^3.$$

我们应用 Le 将引理 14.3 应用两次，误差参数为 $c^2/4$，可找到元素 $t_1, t_2 \in B_{\rho-\rho_1}$，使得

$$\Big|\sum_{x\in B_\rho, y_1, y_2\in B_{\rho_1}} f_2(y_1+t_1)f_3(x+y_1+t_1)\overline{f_2(y_2+t_2)f_3(x+y_2+t_2)}\,\mathrm{e}(\theta(x,y_1+t_1)-\theta(x,y_2+t_2))\Big| \geq \frac{c^2}{2}|B||B_{\rho_1}|^2.$$

观察函数，由于 $\rho_1 \leq \frac{c^2\rho}{2000d}$，——

$$(x,y_1,y_2)\mapsto f_2(y_1+t_1)f_3(x+y_1+t_1)\overline{f_2(y_2+t_2)f_3(x+y_2+t_2)}\,\mathrm{e}(\theta(x,y_1+t_1)-\theta(x,y_2+t_2))$$

我们使用误差参数为 $c^2/4$ 的引理 14.4，用 $x-y_1-y_2$ 替换 x 进行变量替换，因此

$$\Big|\sum_{x\in B_\rho, y_1, y_2\in B_{\rho_1}} f_2(y_1+t_1)f_3(x-y_2+t_1)\overline{f_2(y_2+t_2)f_3(x-y_1+t_2)}$$
$$\mathrm{e}(\theta(x-y_1-y_2,y_1+t_1)-\theta(x-y_1-y_2,y_2+t_2))\Big| \geq \frac{c^2}{4}|B||B_{\rho_1}|^2.$$

多次利用 ε-双线性性，我们得到

$$\Big\|\Big(\theta(x-y_1-y_2,y_1+t_1)-\theta(x-y_1-y_2,y_2+t_2)\Big)-\Big(\theta(y_1,y_2)-\theta(y_2,y_1)+\theta(x-y_1,y_1+t_1)-\theta(y_2,t_1)$$
$$-\theta(x-y_2,y_2+t_2)+\theta(y_1,t_2)\Big)\Big\|_{\mathbb{T}} \leq 4\varepsilon.$$

根据初等估计 $|\mathrm{e}(t)-|\leq 2\pi|t|$ 和三角不等式，我们得到

$$\Big|\sum_{x\in B_\rho, y_1, y_2\in B_{\rho_1}} f_2(y_1+t_1)\overline{f_3(x-y_1+t_2)}\,\mathrm{e}\Big(\theta(x-y_1,y_1+t_1)+\theta(y_1,t_2)\Big)$$
$$f_3(x-y_2+t_1)\overline{f_2(y_2+t_2)}\,\mathrm{e}\Big(-\theta(x-y_2,y_2+t_2)-\theta(y_2,t_1)\Big)$$
$$\mathrm{e}(\theta(y_1,y_2)-\theta(y_2,y_1))\Big| \geq \Big(\frac{c^2}{4}-8\pi\varepsilon\Big)|B_\rho||B_{\rho_1}|^2.$$

回想一下 $\varepsilon \leq \frac{c^2}{256}$，因此右端的因子可以替换为 $\frac{c^2}{8}$。对 x 取平均，并写作 $\alpha(y_1,y_2)=\theta(y_1,y_2)-\theta(y_2,y_1)$，我们得到两个函数 $u,v\colon B_{\rho_1}\to\mathbb{D}$，使得

$$\Big|\sum_{y_1,y_2\in B_{\rho_1}} u(y_1)v(y_2)\,\mathrm{e}\Big(\alpha(y_1,y_2)\Big)\Big| \geq \frac{c^2}{8}|B_{\rho_1}|^2.$$

根据柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$\Big(\frac{c^2}{8}|B_{\rho_1}|^2\Big)^2 \leq \Big|\sum_{y_1\in B_{\rho_1}} u(y_1)\Big(\sum_{y_2\in B_{\rho_1}} v(y_2)\,\mathrm{e}\Big(\alpha(y_1,y_2)\Big)\Big|^2$$
$$\leq \Big(\sum_{y_1\in B_{\rho_1}}|u(y_1)|^2\Big)\Big(\sum_{y_1\in B_{\rho_1}}\Big|\sum_{y_2\in B_{\rho_1}} v(y_2)\,\mathrm{e}\Big(\alpha(y_1,y_2)\Big)\Big|^2\Big),$$

因此，展开后我们得到

$$2^{-6}c^4|B_{\rho_1}|^3 \leq \sum_{y_1,y_2,y_2'\in B_{\rho_1}} v(y_2)\overline{v(y_2')}\,\mathrm{e}\Big(\alpha(y_1,y_2)-\alpha(y_1,y_2')\Big).$$

将 y_1 替换为 y_2 后，再进行同样的步骤可得

$$2^{-12}c^8|B_{\rho_1}|^4 \leq \sum_{y_1,y_1',y_2,y_2' \in B_{\rho_1}} \mathrm{e}\Big(\alpha(y_1,y_2)-\alpha(y_1,y_2')-\alpha(y_1,y_2')+\alpha(y_1',y_2')\Big).$$

根据 ε-双线性，$\alpha(y_1,\ y_2)-\alpha(y_1,\ y_2')-\alpha(y_1,\ y_2')+\alpha(y_1',\ y_2')$ 与 $\alpha(y_1-y_1',\ y_2-y_2')$ 的差至多为 3ε。因此

$$2^{-13}c^8|B_{\rho_1}|^4 \leq \mathrm{Re}\Bigg(\sum_{y_1,y_1',y_2,y_2' \in B_{\rho_1}} \mathrm{e}\Big(\alpha(y_1-y_1',y_2-y_2')\Big)\Bigg).$$

经过变量替换，令 $z_i = y_i - y_i'$ 代替 y_i，得到

$$2^{-13}c^8|B_{\rho_1}|^4 \leq \mathrm{Re}\Bigg(\sum_{z_1,z_2 \in G, y_1',y_2' \in B_{\rho_1}} \mathbb{1}_{B_{\rho_1}}(y_1'+z_1)\mathbb{1}_{B_{\rho_1}}(y_2'+z_2)\,\mathrm{e}\Big(\alpha(z_1,z_2)\Big)\Bigg),$$

由此可得该断言。 □

14.3. 等分布理论

本小节旨在理解取值不具有均匀分布的 ε-三线性映射的结构。

定理 14.6. 设 B 是余维为 d、半径为 ρ的 *Bohr* 集。设 $\delta \leq 1/2$ 满足 B_δ 是正则的。假设 $\phi: B\times B\times B \to \mathbb{T}$ 是一个 ε-三线性映射，且满足

$$\Big|\sum_{x,y,z\in G} \mathbb{1}_{B_\delta} * \mathbb{1}_{B_\delta}(x)\mathbb{1}_{B_\delta} * \mathbb{1}_{B_\delta}(y)\mathbb{1}_{B_\delta} * \mathbb{1}_{B_\delta}(z)\,\mathrm{e}(\psi(x,y,z))\Big| \geq c|B_\delta|^6.$$

那么，存在一个余维至多为 $V \subseteq B\times B$ $(2d\log(\varepsilon^{-1}c^{-1}\delta^{-1}\rho^{-1})^{O(1)}$、半径为 $\tilde{\rho} \geq \exp(-(2d\log(\varepsilon^{-1}c^{-1}\delta^{-1}\rho^{-1})^{O(1)})$ 的双线性 *Bohr* 簇，使得 $\|\phi(x,\ y,\ z)\|_{\mathbb{T}} \leq (2d)^{O(d)}\sqrt{\varepsilon}$ 对所有 $(x,\ y) \in V$ 以及 $z \in B(\Gamma,\ \tilde{\rho})$ 成立。

在继续证明之前，我们需要理解近似线性形式。最终，我们将能够把它们与特征联系起来，但首先需要一个关于定义在群和等差数列上的有偏线性形式这一特殊情形的引理。

引理 14.7。令 $X \subseteq G$。设 $\phi:\ X \to \mathbb{T}$ 是一个 ε-线性映射，满足 $\Big|\sum_{x\in X}\mathrm{e}(\phi(x)\Big| \geq c|X|$。

若 $X \leq G$ 且 $c \geq 36\pi\sqrt{\varepsilon}$，则在 X 上有 $|\phi(x)| \leq 9\sqrt{\varepsilon}$。

若 $X = [-L,L]\cdot a$ 是 G中的一个真等差数列，则对于 $|x| \leq \varepsilon L$，有 $|\phi(x)| \leq 1000c^{-2}\varepsilon$。

由 ε-线性以及关于 $\mathrm{e}(t)$ 的基本估计可得以下结论，我们将在证明中频繁使用：

$$\Big|\mathrm{e}(\phi(a_1+\cdots+a_r)) - \mathrm{e}(\phi(a_1))\cdots\mathrm{e}(\phi(a_r))\Big| \leq 2\pi r\varepsilon$$

对于所有满足 $a_i+\cdots+a_r \in X$ 的 $a_1,\ldots,a_r \in X$，对于所有 $i \in [r]$。

证明。子群情形。首先假设 $X \le G$。考虑由 $f(x) = \mathsf{e}(\phi(x))$ 给出的函数 $f\colon X \to \mathbb{C}$。于是，在群 X 上，我们有 $\sum_{\chi\in \hat{X}} |\hat{f}(\chi)|^4 = \|f\|_{U^2}^4 = \mathbb{E}_{x,a,b\in X} \mathsf{e}(\phi(x+a+b) - \phi(x+\hat{a}) - \phi(x+b) + \phi(x)) \ge 1 - 4\pi\varepsilon$。因此，存在 $\chi \in X$ 使得 $|\hat{f}(\chi)| \ge 1 - 4\pi\varepsilon$。查看 $\hat{f}(\chi)$ 的论证，我们发现一个元素 $t \in \mathbb{T}$，使得 $\sum_{x\in X} \mathsf{e}(\phi(x) - \chi(x) - t)$ 为实数且至少为 $(1-4\pi\varepsilon)|X|$。因此

$$\sum_{x\in X} \Big(1 - \operatorname{Re} \mathrm{e}(\phi(x) - \chi(x) - t)\Big) \le 4\pi\varepsilon|X|.$$

令 X' 为满足 $\|\phi(x) - \chi(x) - t\|_{\mathbb{T}} \le 4\sqrt{\varepsilon}$ 的所有 $x \in X$ 组成的集合。由引理 14.1 可得

$$\sum_{x\in X\setminus X'} \Big(1 - \operatorname{Re} \mathrm{e}(\phi(x) - \chi(x) - t)\Big) \ge 128\varepsilon|X \setminus X'|.$$

因此，$|X'| \ge \frac{2}{3}|X|$，所以每个元素 $x \in X$ 都可写成 $y - z$，其中 $y,\ z \in X'$。由 ε-线性可得，对所有 $x \in X$，都有 $\|\phi(x) - \bar{\chi}(x)\|_{\mathbb{T}} \le 9\sqrt{\varepsilon}$。关于 ϕ 的偏差假设和引理 14.1 意味着

$$\Big|\sum_{x\in X} \mathrm{e}(\chi(x))\Big| \ge \Big|\sum_{x\in X} \mathrm{e}(\phi(x))\Big| - \Big|\sum_{x\in X} \mathrm{e}(\chi(x) - \phi(x))\Big| \ge c|X| - 18\pi\sqrt{\varepsilon}|X| > 0,$$

只要 $c \ge 36\pi\sqrt{\varepsilon}$，就有 $\chi = 0$。

等差数列情形。 令 $\varepsilon' = 1000c^{-2}\varepsilon$，且 $k = c\varepsilon^{-1}/100$。反设存在一个元素 $x \in [-\varepsilon''L, \varepsilon''L]$，使得 $\|\phi(x)\|_{\mathbb{T}} \ge \varepsilon'$。将 X 划分为广义等差数列$[kx]$的平移集。这样做至多会剩下 kx 个未被覆盖的元素。另一方面，利用ε-线性可得，对于 $i \le k$

$$\Big|\mathrm{e}(\phi(t + ix + j)) - \mathrm{e}(\phi(t))\,\mathrm{e}(i\phi(x))\,\mathrm{e}(\phi(j))\Big| \le 2\pi(k+2)\varepsilon$$

因此，在每个平移上，我们都有以下估计

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{y\in t+[kx]} \mathrm{e}(\phi(y))\Big| &= \Big|\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j\in[x]} \mathrm{e}(\phi(t+ix+j))\Big| \le kx2\pi(k+2)\varepsilon + \Big|\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j\in[x]} \mathrm{e}(\phi(t))\,\mathrm{e}(i\phi(x))\,\mathrm{e}(\phi(j))\Big| \\
&= 2\pi k(k+2)x\varepsilon + \Big|\sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{e}(i\phi(x))\Big|\Big|\sum_{j\in[x]} \mathrm{e}(\phi(j))\Big| \\
&\le 2\pi k(k+2)x\varepsilon + x\Big|\sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{e}(i\phi(x))\Big| \\
&\le 2\pi k(k+2)x\varepsilon + x\frac{1}{\|\phi(x)\|_{\mathbb{T}}} \le \Big(2\pi k(k+2)\varepsilon + \frac{1}{\|\phi(x)\|_{\mathbb{T}}}\Big)x \le \frac{c}{2}kx,
\end{aligned}$$

其中最后一步使用了不等式 $2\pi(k+2)\varepsilon \le \frac{c}{4}$ 和 $\|\phi(x)\|_{\mathbb{T}} \ge 4c^{-1}/k$，这些不等式由我们对参数的选择推出。

由于 $[-L, L]$ 可以划分为若干个 $[kx]$ 的平移集，且至多剩下 $kx \le k\varepsilon''L \le \frac{c}{4}L$ 个元素，因此可得 $\Big|\sum_{y\in[-L,L]} \mathsf{e}(\phi(y))\Big| \le \frac{c}{2}(2L+1) + kx < c(2L+1)$，这与假设矛盾。 □

现在我们可以将 Bohr 集上的近似线性形式与膨胀集上的特征联系起来。

引理 14.8。设 $\phi\colon\ B(\Gamma,\ \rho)\ \to \mathbb{T}$ 是定义在余维为 d 、半径为 ρ的正则 *Bohr* 集上的 ε-线性形式。那么存在一个特征 χ，使得 $\|\phi(x)-\chi(x)\|_{\mathbb{T}}\leq O(d^{O(d)}\sqrt{\varepsilon})$ 在 $B(\Gamma,\ \Omega(\varepsilon d^{-O(d)}\rho))$上成立。

证明。注意，在证明过程中我们可以假设 $\varepsilon \leq (2d)^{-\mathbf{C}d}$，否则该命题显然成立。

定义函数 $f(x)\ =\mathbb{1}_B(x)\ \mathrm{e}(\phi(x))$，其中 $B=B(\Gamma,\ \rho)$。注意到

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{x,a,b\in G} f(x+a+b)\overline{f(x+a)}\,\overline{f(x+b)}f(x)\ -\ \mathbb{1}_B(x+a+b)\mathbb{1}_B(x+a)\mathbb{1}_B(x+b)\mathbb{1}_B(x)\Big|\\ &\quad=\Big|\sum_{x,a,b\in G}\mathbb{1}_B(x+a+b)\mathbb{1}_B(x+a)\mathbb{1}_B(x+b)\mathbb{1}_B(x)\Big(\mathrm{e}(\phi(x+a+b)-\phi(x+a)-\phi(x+b)+\phi(x))-1\Big)\Big|\\ &\quad\leq O(\varepsilon)\sum_{x,a,b\in G}\mathbb{1}_B(x+a+b)\mathbb{1}_B(x+a)\mathbb{1}_B(x+b)\mathbb{1}_B(x).\end{aligned}$$

因此，只要 $\varepsilon\leq \mathbf{c}$，我们就得到

$$\sum_{\chi}|\hat{f}(\chi)|^4\geq \frac{1}{2}\mathop{\mathbb{E}}_{x,a,b\in G}\mathbb{1}_B(x+a+b)\mathbb{1}_B(x+a)\mathbb{1}_B(x+b)\mathbb{1}_B(x)\geq \frac{1}{2|G|^3}|B(\Gamma,\rho/3)|^3\geq \frac{1}{2}3^{-3d}(|B|/|G|)^3,$$

这是由于 Bohr 集的小倍增性质。

ˆ 因此，存在 $\chi\in G$ 使得

$$\Big|\sum_{x\in B}\mathrm{e}(\phi'(x))\Big|\geq c|B|,$$

其中 $\phi'=\phi-\chi$，它也是 ε-线性的，并且 $c\geq \frac{1}{2}3^{-3d}$。

根据命题 2.35，对于 $\rho'\ =\ d^{-2d}\rho$，我们可以找到一个秩至多为 d 的真对称陪集广义等差数列 $C\ =[-L_1,L_1]\cdot a_1+\cdots+[-L_d,L_d]\cdot a_d+K$，使得 $C\subseteq B(\Gamma,\ \rho')$s，并且对所有 $\alpha\in(0,\ 1/2)$

$$B(\Gamma,\alpha d^{-2d}\rho')\subseteq[-2\alpha L_1,2\alpha L_1]\cdot a_1+\cdots+[-2\alpha L_d,2\alpha L_d]\cdot a_d+K. \tag{42}$$

令 $c'\ =\ c/400d$，并设 $C'\ =\ [-c'L_1,c'L_1]\cdot a_1+\cdots+[-c'L_d,c'L_d]\cdot a_d+K$。注意到 C'包含在 $B(\Gamma,\ 2c'\rho')$ 中。也就是说，考察任意一个 $x\in C'$，我们有 $x,\ 2x,\ \ldots\ldots,\ mx\in C\subseteq B(\Gamma,\ \rho')$，其中$m=\lfloor c'^{-1}\rfloor$。取任意特征 $\gamma\in\Gamma$，我们有 $\|\gamma(\ell x)\|_{\mathbb{T}}\leq\rho'$，对 $\ell\in[m]$成立。这只有在$\|\gamma(x)\|_{\mathbb{T}}\leq 2c'\rho'$时才可能发生。

由于 B 是正则的，且 ϕ' 是 ε-线性的，我们还可以得出

$$\Big|\sum_{x\in B}\mathrm{e}(\phi'(x))-\frac{1}{|C'|}\sum_{x\in B,y\in C'}\mathrm{e}(\phi'(x)+\phi'(y))\Big|$$

$$\leq \Big| \sum_{x\in B} \mathrm{e}(\phi'(x)) - \frac{1}{|C'|} \sum_{x\in B, y\in C'} \mathrm{e}(\phi'(x+y)) \Big| + 2\pi\varepsilon|B|$$
$$\leq \frac{1}{|C'|} \sum_{y\in C'} |B\Delta(B+y)| + 2\pi\varepsilon|B| \leq (100dc' + 2\pi\varepsilon)|B|.$$

根据我们对 c' 的选择，并对 $x \in B$取平均，我们得到

$$\Big| \sum_{y\in C'} \mathrm{e}(\phi'(y)) \Big| \geq \Big(\frac{c}{2} - O(\varepsilon)\Big)|C'|.$$

回忆一下

$$\Big| \mathrm{e}(\phi(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + h)) - \mathrm{e}(\phi(\lambda_1 a_1)) \cdots \mathrm{e}(\phi(\lambda_r a_r))\, \mathrm{e}(\phi(h)) \Big| \leq O(r\varepsilon).$$

由于 C' 可以划分为 $[-c'L_i, c'L_i]\cdot a_i$ 的平移集，也可以划分为 K 的平移集，对每个 $i \in [d]$，我们有

$$\Big| \sum_{\lambda_i \in [-c'L_i, c'L_i]} \mathrm{e}(\phi(\lambda_i a_i)) \Big| \geq \Big(\frac{c}{2} - O(r\varepsilon)\Big) c'L_i,$$

and

$$\Big| \sum_{x\in K} \mathrm{e}(\phi(x)) \Big| \geq \Big(\frac{c}{2} - O(r\varepsilon)\Big)|K|.$$

由引理 14.7 可知，对于 x 内的所有元素，$\|\phi(x)\|_{\mathbb{T}} \leq O(c^{-2}r\varepsilon)$ 成立

$$[-c'\varepsilon L_1, c'\varepsilon L_1]\cdot a_1 + \cdots + [-c'\varepsilon L_d, c'\varepsilon L_d]\cdot a_d + K.$$

回忆起 $c \geq \frac{1}{2}3^{-3d}$ 并利用 (42)，我们得到 $\|\phi - \chi\|_{\mathbb{T}} \leq O(d^{O(d)}\sqrt{\varepsilon})$ 在 $B(\Gamma, \frac{1}{4000}3^{-3d}\varepsilon d^{-2d}\rho)$ 上成立。 □

现在我们可以证明均匀分布定理。

定理 14.6 的证明。由于 ϕ 是 ε-三线性的，对于每个 $x, y \in B$，$z \mapsto \phi(x, y, z)$ 在 B 上是 ε-线性的。设 $\rho' \geq \Omega(\varepsilon d^{-O(d)}\rho)$ 满足：$B(\Gamma, \rho')$ 是正则的，且前一个引理的结论适用于 $B(\Gamma, \rho')$。于是，对于每个 $(x, y) \in B^2$，我们得到一个特征 $\chi(x, y) \in \hat{G}$，使得对于所有 $z \in B(\Gamma, \rho')$，$\|\phi(x, y, z) - \chi(x, y)(z)\|_{\mathbb{T}} \leq \varepsilon'$，其中 $\varepsilon' = O(d^{O(d)}\sqrt{\varepsilon})$。

令 $E = \langle\Gamma\rangle_{[-R,R]}$ for $R = C^{\mathrm{spec}}(\varepsilon\rho d^{-d}/2)^{O(d)}$，其中 C^{spec} 是命题 2.10 中的常数，而 R 是命题 2.10 在采用 $\varepsilon \leftarrow \frac{1}{2}(\rho'/4)^d$ 和 $\eta \leftarrow \frac{1}{4}(\rho'/4)^{d+1}$这些选择时得出的特征线性组合系数绝对值的上界。

类似于 E-双同态的概念，我们将 E-双线性映射 定义为一个映射 $\Theta : A \subseteq \hat{G} \times G \to G$，满足：当参数中的三个点都属于定义域且满足 $x_1 + x_2 = x_3$ 时，$\Theta(x_1, y) + \Theta(x_2, y) - \Theta(x_3, y) \in E$；在垂直方向上也类似。

断言 14.9。 映射 χ 在 $B_{1/2}\times B_{1/2}$上是一个 E-双线性映射。

证明。 我们沿水平方向证明这一点，垂直方向的证明类似。令 x_1， x_2， x_3 $\in B_{1/2}$ 满足 $x_1+x_2=x_3$，并令 $y\in B$。那么对于所有 $z\in B(\Gamma,\ \rho')$，我们有

$$\begin{aligned}&\Big\|\Big(\chi(x_1,y)+\chi(x_2,y)-\chi(x_3,y)\Big)(z)\Big\|_{\mathbb{T}}\\&\qquad\le\Big\|\phi(x_1,y,z)+\phi(x_2,y,z)-\phi(x_3,y,z)\Big\|_{\mathbb{T}}+3\varepsilon'\le 4\varepsilon'.\end{aligned}$$

因此， $\xi=\chi(x_1,y)+\chi(x_2,y)-\chi(x_3,y)$ 是 G 上的一个特征，在 $B(\Gamma,\rho')$ 上取值于 $(-4\varepsilon',4\varepsilon')$ 内。只要 $\varepsilon'\le 1/100$，取某个 $\rho''\in(1/4\rho',1/2\rho')$ 的弱正则 $B(\Gamma,\rho'')$，其含义是 $|B(\Gamma,\rho''+\eta)\setminus B(\Gamma,\rho'')|\le\frac{1}{4}(\rho'/4)^d$，对于 $\eta=\frac{1}{4}(\rho'/4)^{d+1}$。我们得到 $|\widehat{\mathbb{1}_{B(\Gamma,\rho'')}}(\xi)|\ge\frac{1}{2}\frac{|B(\Gamma,\rho'')|}{|G|}\ge\frac{1}{2}\rho''^d$，)。

By Proposition 2.10, we see that $\chi(x_1,y)+\chi(x_2,y)-\chi(x_3,y)\in E$. □

此外， χ 有一个较大的近似核。

断言 14.10. 令 $\delta=2^{-7}$。对于至少$(c/2d)^{O(1)}||B|^2$ 个点$(x,y)\in B_\delta^2$，我们有 $\chi(x,y)\in E$。

证明。 令 $\delta'=\frac{\delta c}{400d}$。根据 B 的正则性，我们有

$$\Big|\frac{1}{|B_{\delta'}|^2}\sum_{x,y\in B_{\delta'},s,t\in B_{1-\delta'},z\in B}\mathrm{e}\Big(\phi(x+s,y+t,z)\Big)-\sum_{x,y,z\in B}\mathrm{e}\Big(\phi(x,y,z)\Big)\Big|\le 200d\delta'|B|^3\le\frac{c}{2}|B|^3.$$

根据定理的假设，通过平均，我们得到 $s,t\in B$，使得

$$\Big|\frac{1}{|B_{\delta'}|^2}\sum_{x,y\in B_{\delta'},z\in B}\mathrm{e}\Big(\phi(x+s,y+t,z)\Big)\Big|\ge\frac{c}{2}|B_{\delta'}|^2|B|.$$

因此，我们得到至少 $\frac{c}{4}|B_{\delta'}|^2$ 对 $(x,y)\in(s+B_{\delta'})\times(t+B_{\delta'})$，满足 $\Big|\sum_{z\in B}\mathrm{e}(\phi(x+s,y+t,z))\Big|\ge\frac{c}{4}|B|$。因此，只要 $\varepsilon'\le c/(32\pi)$，就有 $\Big|\sum_{z\in B(\Gamma,\rho')}\mathrm{e}(\chi(x+S,y+t)(z))\Big|\ge\frac{c}{16}|B|$。与断言 14.9 一样，该断言可由命题 2.10 推出。 □

应用双线性 Bogolyubov 论证（定理 1.6）完成证明。 □

§15 阶与 6 互素的群

我们将满足以下条件的映射称为近似三次多项式 ϕ： $B=B(\Gamma,\rho_0)\to\mathbb{T}$，对每个 $\rho\le\rho_0$，都有

$$\|\Delta_{a,b,c,d}q(x)\|_{\mathbb{T}}\le 2^{10}\rho$$

对于所有 x， a， b， c， $d\in B(\Gamma,\ \rho)$，其中 $\rho\le 1/8$。

定理 15.1. 设 G 是一个阶与 6 互素的有限阿贝尔群。设 $f : G \to \mathbb{D}$ 满足$\|f\|_{U^4} \geq c$。那么存在一个余维为$(2\log c^{-1})^{O(1)}$、半径为$\exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)})$的 ***Bohr*** 集 B，一个元素 $t \in G$ 以及一个近似三次多项式 $\phi\colon B \to \mathbb{T}$，使得

$$\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G} \mathbb{1}_B(x) f(x+t)\,\mathrm{e}(q(x))\Big| \geq \exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)}).$$

在证明的最后一步，我们将使用 Green 和 Tao 关于一般奇数阶有限阿贝尔群的 U^3 逆定理 [29]。这些上界归功于 Sanders [55]。

定理 15.2. 设 G 为奇数阶有限阿贝尔群。设 $f\colon G \to \mathbb{D}$ 满足$\|f\|_{U^3(G)} \geq c$。则存在余维为$(2\log c^{-1})^{O(1)}$、半径为$\exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)})$的 ***Bohr*** 集 B，一个元素 $t \in G$ 以及一个局部二次函数 $\phi\colon B \to \mathbb{T}$，使得

$$\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G} \mathbb{1}_B(x) f(x+t)\,\mathrm{e}(q(x))\Big| \geq \exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)}).$$

定理 *15.1* 的证明。与此前基于 Freiman 双同态 [23, 50], 推导一致性范数逆定理的论证一样，我们考虑$\partial_{a,b}f$的较大的傅里叶系数。我们有

$$c^{16} \leq \|f\|_{U^4} = \mathop{\mathbb{E}}_{a_1,a_2,a_3,a_4,x} \partial_{a_1,a_2,a_3,a_4} f(x) = \mathop{\mathbb{E}}_{a,b} \|\partial_{a,b} f\|_{U^2}^4.$$

根据 U^2 范数逆定理和平均，存在一个大小为 $(c/2)^{O(1)}|G|^2$的集合 $A \subseteq G \times G$，使得对每个 $(a,b) \in S$，都有某个 $\phi(a,b) \in \widehat{G}$满足 $|\widehat{\partial_{a\,b} f},(\phi(a,b))| \geq (c/2)^{O(1)}$。我们将 ϕ 视为集合 A 上的映射，并证明它在许多水平加性四元组上保持相应关系。具体而言，

$$(c/2)^{O(1)} \leq \mathop{\mathbb{E}}_{a,b} \mathbb{1}_A(a,b)|\widehat{\partial_{a,b} f}(\phi(a,b))|^2 \leq \mathop{\mathbb{E}}_{a,b,x,y} \mathbb{1}_A(a,b)\partial_b f(x)\overline{\partial_b f(x)}\,\overline{\partial_b f(y+a)\partial_b f(y)}\,\mathrm{e}(\phi(a,b)(x-y)).$$

固定 x，y，b并应用柯西-施瓦茨不等式，得到

$$(c/2)^{O(1)} \leq \mathop{\mathbb{E}}_{a,a',b,x,y} \mathbb{1}_A(a,b)\mathbb{1}_A(a',b)\partial_b f(x+a)\overline{\partial_b f(x+a')}\,\overline{\partial_b f(y+a)}\partial_b f(y+a')\,\mathrm{e}(\phi(a,b)(x-y)-\phi(a',b)(x-y)).$$

进行变量替换 $a \mapsto a-x$，$a' \mapsto a'-x$，并像上面那样对固定的 x，y，b 再次应用柯西-施瓦茨不等式，可知 ϕ 满足 $(c/2)^{O(1)}$ 比例的所有水平加性四元组。我们可以对包含 $(c/2)^{O(1)}$ 比例的受尊重水平加性四元组的所有行应用定理 2.26，从而得出 ϕ 是子集 $A' \subseteq A$ 上的水平方向 Frieman 同态，该子集的大小为 $|A'| \geq \exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)})|G|^2$。

沿垂直方向重复相同的过程，得到一个 Freiman 双同态。回想一下，$(|G|,6) = 1$。因此，映射 $g \mapsto 6g$ 是一个同构。根据 Freiman 双同态的

结构定理（定理 1.4），存在一个整数 $d \le (2\log c^{-1})^{O(1)}$、一个秩为 d 的集合 $E \subseteq \hat{G}$、一个余维为 d、半径为 $\exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)})$ 的 Bohr 集 $B = B(\Gamma, \rho_0) \subseteq G$、元素 $s, t \in G$ 以及一个 E-双同态 $\Phi\colon B \times B \to H$，使得 $6\Phi(x,y) = \phi(x+s, y+t)$ 和 $(x+s, y+t) \in A$ 对至少 $\exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)})|G|^2$ 个点 $(x,y) \in B \times B$ 成立；这里用到了 $g \mapsto 6g$ 是一个同构这一事实。因此，对于某个 $c_1 \ge \exp(-(2\log c^{-1})^{O(1)})$，

$$c_1 \le \mathop{\mathbb{E}}_{a_1,a_2\in G} \mathbb{1}_B(a_1)\mathbb{1}_B(a_2)\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{x} \partial_{s+a_1,t+a_2} f(x)\,\mathrm{e}(6\Phi(a_1,a_2)(x))\Big|^2.$$

展开后，我们得到

$$c_1 \le \mathop{\mathbb{E}}_{a_1,a_2,a_3,x\in G} \mathbb{1}_B(a_1)\mathbb{1}_B(a_2)\partial_{a_1+s,a_2+t,a_3} f(x)\,\mathrm{e}(6\Phi(a_1,a_2)(a_3)).$$

现在我们将记号改为求和，而不再使用期望。具体而言

$$c_1|G|^4 \le \sum_{a_1,a_2,a_3,x\in G} \mathbb{1}_B(a_1)\mathbb{1}_B(a_2)\partial_{a_1+s,a_2+t,a_3} f(x)\,\mathrm{e}(6\Phi(a_1,a_2)(a_3)). \tag{43}$$

转到正则 Bohr 集。继续之前，我们需要确保使用正则 Bohr 集来代替 B。我们将下一步表述为一个单独的断言。由于 E 是一个秩为 d 的集合，令 E_0 为一个大小为 d 的子集，使得 $E = \langle E_0\rangle_{\{-1,0,1\}}$

断言 15.3。设 $\delta_0 \le \frac{1}{288\pi}\Big(\frac{c_1}{2}\Big)^{64}$。存在一个频率集为 $\Gamma \cup E_0$、半径为 $\rho_1 \ge 2^{-11}c_1 d\rho_0^{3d}$ 的正则 *Bohr* 集 B'，一个映射 $\psi\colon B'\times B'\times B' \to \mathbb{T}$，以及一个量 $\delta_1 \in [\delta_0, 2\delta_0]$，使得 B'_{δ_1} 也是正则的，

$$\Big|\sum_{u_1,u_2,u_3\in G} \mathbb{1}_{B'_{\delta_1}} * \mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(u_1)\mathbb{1}_{B'_{\delta_1}} * \mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(u_2)\mathbb{1}_{B'_{\delta_1}} * \mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(u_3)\,\mathrm{e}(6\psi(u_1,u_2,u_3))\Big(\sum_{x\in G}\partial_{u_1,u_2,u_3} f(x)\Big)\Big| \ge \frac{1}{2}\Big(\frac{c_1}{2}\Big)^{64}|B'_{\delta_1}|^6|G|, \tag{44}$$

并且对于每个 $\varepsilon > 0$，限制 $\psi|_{B'_\varepsilon\times B'_\varepsilon\times B'_\varepsilon} \to \mathbb{T}$ 是一个 ε-三线性映射。

证明。回忆一下，E是此前得到的集合，使得 Φ 是 E-双同态。令 $\rho_1 \in [2^{-11}c_1 d\rho_0^{3d}, 2^{-10}c_1 d\rho_0^{3d}]$满足~~$B(\Gamma \cup E_0,$~~ $\rho_1)$是正则的。定义 $B' = B(\Gamma \cup E_0,\ \rho_1)$。

将引理 2.7应用于 B，可找到一个半径函数 $\tilde{\rho}_0\colon\ \Gamma \to [\rho_0 - 2\rho_1, \rho_0 + 2\rho_1]$，使得$B = B(\Gamma,\ \tilde{\rho}_0)$和 $|B(\Gamma,\ \tilde{\rho}_0 + 2\rho_1) \setminus B(\Gamma,\ \tilde{\rho}_0 - 2\rho_1)| \le \frac{c_1}{100d}\rho_0^{3d}|G|$。~~令 δ_1~~ $\in [\delta_0, 2\delta_0]$ 满足 B'_{δ_1} 是正则的。

特别地，$B(\Gamma,\ \tilde{\rho}_0 - 2\rho_1)$中的每个元素都可以表示为 $|B'_{\delta_1}|$ 种形式：一个 B'_{δ_1} 中的元素与另一个 $B(\Gamma,\ \tilde{\rho}_0 - \rho_1)$中的元素之和。此外，每个这样的和都属于 B。引理 2.4 意味着 $|B| \ge \rho_0^d|G|$。因此

$$\Big\|\mathbb{1}_B - \frac{1}{|B'_{\delta_1}|}\mathbb{1}_{B(\Gamma,\tilde{\rho}_0-\rho_1)} * \mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}\Big\|_{\ell^1} \le |B(\Gamma,\tilde{\rho}_0) \setminus B(\Gamma,\tilde{\rho}_0 - 2\rho_1)| \le \frac{c_1}{100d}\rho_0^{3d}|G|.$$

将这个近似代入 (43)，得到

$$\begin{aligned}\frac{c_1}{2}|G|^4|B'_{\delta_1}|^2 \leq & \sum_{a_1,a_2,a_3,x\in G} \mathbb{1}_{B(\Gamma,\tilde{\rho}_0-\rho_1)} * \mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(a_1)\mathbb{1}_{B(\Gamma,\tilde{\rho}_0-\rho_1)} * \mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(a_2)\partial_{a_1+s,a_2+t,a_3}f(x)\,\mathrm{e}(6\Phi(a_1,a_2)(a_3))\\ = & \sum_{a_1,a_2,a_3,x,u_1,u_2\in G} \mathbb{1}_{B(\Gamma,\tilde{\rho}_0-\rho_1)}(u_1)\mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(a_1-u_1)\mathbb{1}_{B(\Gamma,\tilde{\rho}_0-\rho_1)}(u_2)\mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(a_2-u_2)\\ & \partial_{a_1+s,a_2+t,a_3}f(x)\,\mathrm{e}(6\Phi(a_1,a_2)(a_3)).\end{aligned}$$

通过平均，我们得到 $u_1,\ u_2 \in B(\Gamma,\ \tilde{\rho}_0-\rho_1)$，稍作变量替换，将 a_i 替换为 a_i+u_i后，

$$\frac{c_1}{2}|G|^2|B'_{\delta_1}|^2 \leq \Big|\sum_{a_1,a_2,a_3,x\in G} \mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(a_1)\mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(a_2)\partial_{a_1+u_1+s,a_2+u_2+t,a_3}f(x)\,\mathrm{e}(6\Phi(a_1+u_1,a_2+u_2)(a_3))\Big|.$$

稍作变量替换，将 a_3 替换为某个在 G 上取遍的哑变量 v，并将 a_3 限制为 B'，然后取平均，得到

$$\frac{c_1}{2}|G||B'_{\delta_1}|^3 \leq \Big|\sum_{a_1,a_2,a_3\in B'_{\delta_1},x\in G} \partial_{a_1+u_1+s,a_2+u_2+t,a_3+v}f(x)\,\mathrm{e}(6\Phi(a_1+u_1,a_2+u_2)(a_3+v))\Big|$$

其中某个 $v\in G$。接下来，我们像对三个变量应用 Gowers-柯西-施瓦茨不等式那样，连续应用三次柯西-施瓦茨不等式。具体来说，

$$\begin{aligned}\Big(\frac{c_1}{2}|G||B'_{\delta_1}|^3\Big)^2 \leq & \Big|\sum_{a_2,a_3\in B'_{\delta_1},x\in G} \overline{\partial_{a_2+u_2+t,a_3+v}f(x)}\Big(\sum_{a_1\in B'_{\delta_1}} \partial_{a_2+u_2+t,a_3+v}f(x+a_1+u_1+s)\\ & \mathrm{e}(6\Phi(a_1+u_1,a_2+u_2)(a_3+v))\Big)\Big|^2\\ \leq & \Big(\sum_{a_2,a_3\in B'_{\delta_1},x\in G}\Big|\overline{\partial_{a_2+u_2+t,a_3+v}f(x)}\Big|^2\Big)\Big(\sum_{a_2,a_3\in B'_{\delta_1},x\in G}\Big|\sum_{a_1\in B'_{\delta_1}} \partial_{a_2+u_2+t,a_3+v}f(x+a_1+u_1+s)\\ & \mathrm{e}(6\Phi(a_1+u_1,a_2+u_2)(a_3+v))\Big|^2\Big)\\ \leq & |G||B'_{\delta_1}|^2 \sum_{a_1,a'_1,a_2,a_3\in B'_{\delta_1},x\in G} \partial_{a_1-a'_1,a_2+u_2+t,a_3+v}f(x+a'_1+u_1+s)\\ & \mathrm{e}(6\Phi(a_1+u_1,a_2+u_2)(a_3+v)-6\Phi(a'_1+u_1,a_2+u_2)(a_3+v)).\end{aligned}$$

将 $x-a'_1-u_1-s$ 替换为 x，通过变量替换，我们可以将 x 写成上文中 f 的自变量。对 a_2 和 a_3 执行相同步骤，即可得出

$$\Big(\frac{c_1}{2}\Big)^8|G||B'_{\delta_1}|^6 \leq \Big|\sum_{a_1,a'_1,a_2,a'_2,a_3,a'_3\in B'_{\delta_1}} \Big(\sum_{x\in G}\partial_{a_1-a'_1,a_2-a'_2,a_3-a'_3}f(x)\Big)$$

$$\mathrm{e}(6\Phi(a_1+u_1,a_2+u_2)(a_3-a_3')-6\Phi(a_1'+u_1,a_2+u_2)(a_3-a_3')$$
$$-6\Phi(a_1+u_1,a_2'+u_2)(a_3-a_3')+6\Phi(a_1'+u_1,a_2'+u_2)(a_3-a_3'))\Big|.$$

通过平均，我们得到 $a_1',a_2',a_3'\in B_{\delta_1}'$，使得

$$\Big(\frac{c_1}{2}\Big)^8|G||B_{\delta_1}'|^3\le\Big|\sum_{a_1,a_2,a_3\in B_{\delta_1}'}\Big(\sum_{x\in G}\partial_{a_1-a_1',a_2-a_2',a_3-a_3'}f(x)\Big)$$
$$\mathrm{e}(6\Phi(a_1+u_1,a_2+u_2)(a_3-a_3')-6\Phi(a_1'+u_1,a_2+u_2)(a_3-a_3')$$
$$-6\Phi(a_1+u_1,a_2'+u_2)(a_3-a_3')+6\Phi(a_1'+u_1,a_2'+u_2)(a_3-a_3'))\Big|$$

我们进行一次变量替换，用 $d_i=a_i-a_i'$ 代替 a_i，其中 $a_i'+B_{\delta_1}'$ 取遍所有值，得 g

$$\Big(\frac{c_1}{2}\Big)^8|G||B_{\delta_1}'|^3\le\Big|\sum_{d_1,d_2,d_3\in G}\mathbb{1}_{B_{\delta_1}'}(d_1+a_1')\mathbb{1}_{B_{\delta_1}'}(d_2+a_2')\mathbb{1}_{B_{\delta_1}'}(d_3+a_3')\Big(\sum_{x\in G}\partial_{d_1,d_2,d_3}f(x)\Big)\tag{45}$$
$$\mathrm{e}(6\Phi(d_1+a_1'+u_1,d_2+a_2'+u_2)(d_3')-6\Phi(a_1'+u_1,d_2+a_2'+u_2)(d_3)$$
$$-6\Phi(d_1+a_1'+u_1,a_2'+u_2)(d_3)+6\Phi(a_1'+u_1,a_2'+u_2)(d_3))\Big|.$$

我们定义 $\psi\colon\ B_{1/2}'\times B_{1/2}'\times B_{1/2}'\to\mathbb{T}$ 如下：

$$\psi(d_1,d_2,d_3)=\Phi(d_1+a_1'+u_1,d_2+a_2'+u_2)(d_3)-\Phi(a_1'+u_1,d_2+a_2'+u_2)(d_3)$$
$$-\Phi(d_1+a_1'+u_1,a_2'+u_2)(d_3)+\Phi(a_1'+u_1,a_2'+u_2)(d_3).$$

Not这表明 ψ 良定义，因为 Φ 定义在 $B\times B$ 上，且 $a_1'+u_1\in B(\Gamma,\ \tilde{\rho}_0-(1-\delta_1)\rho_1\ \ )$.

注意到，按照断言的含义，ψ 是近似三线性的。根据 ψ的定义，很容易看出它关于第三个坐标是线性的。我们证明它关于第一个坐标具有这一性质；关于第二个坐标的证明类似。为此，取定 $x,\ x',\ y,\ z\in B_\varepsilon'$。由于 $\varepsilon\le 1/4$，我们有 $x+x'\in B_{1/2}$。于是

$$\psi(x+x',y,z)-\psi(x,y,z)-\psi(x',y,z)$$
$$=\Big(\Phi(x+x'+a_1'+u_1,y+a_2'+u_2)(z)-\Phi(x+a_1'+u_1,y+a_2'+u_2)(z)$$
$$-\Phi(x'+a_1'+u_1,y+a_2'+u_2)(z)+\Phi(a_1'+u_1,y+a_2'+u_2)(z)\Big)$$
$$\Big(\Phi(x+x'+a_1'+u_1,a_2'+u_2)(z)-\Phi(x+a_1'+u_1,a_2'+u_2)(z)$$
$$-\Phi(x'+a_1'+u_1,a_2'+u_2)(z)+\Phi(a_1'+u_1,a_2'+u_2)(z)\Big).$$

由于 Φ 是一个 E-双同态，上式等于某个 $\chi\in 2E$对应的 $\chi(z)$。由于 $z\in B_\varepsilon'$，我们有 $\|\chi(z)\|_{\mathbb{T}}\le 2\varepsilon\rho_1\le 2^{-9}c_1\varepsilon$。

回到（45），我们得到

$$\Big(\frac{c_1}{2}\Big)^8|G||B_{\delta_1}'|^3\le\Big|\sum_{d_1,d_2,d_3\in G}\mathbb{1}_{B_{\delta_1}'}(d_1+a_1')\mathbb{1}_{B_{\delta_1}'}(d_2+a_2')\mathbb{1}_{B_{\delta_1}'}(d_3+a_3')\Big(\sum_{x\in G}\partial_{d_1,d_2,d_3}f(x)\Big)\,\mathrm{e}(6\psi(d_1,d_2,d_3))\Big|.$$

对变量 d_1、d_2、d_3按照上述步骤应用柯西-施瓦茨不等式，得到

$$\Big(\frac{c_1}{2}\Big)^{64}|G||B'_{\delta_1}|^6 \le \Big| \sum_{d_1,d'_1,d_2,d'_2,d_3,d'_3\in G} \mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(d_1+a'_1)\mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(d'_1+a'_1)\mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(d_2+a'_2)\mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(d'_2+a'_2)$$
$$\mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(d_3+a'_3)\mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(d'_3+a'_3)\Big(\sum_{x\in G}\partial_{d_1-d'_1,d_2-d'_2,d_3-d'_3}f(x)\Big)$$
$$\mathrm{e}\Big(6\psi(d_1,d_2,d_3)-6\psi(d'_1,d_2,d_3)-\cdots+6\psi(d_1,d'_2,d'_3)-6\psi(d'_1,d'_2,d'_3)\Big)\Big|.$$

由 ψ 在前两个变量上的近似线性以及在最后一个变量上的线性，我们可知

$$6\psi(d_1,d_2,d_3)-6\psi(d'_1,d_2,d_3)-\cdots+6\psi(d_1,d'_2,d'_3)-6\psi(d'_1,d'_2,d'_3)$$

等于

$$6\psi(d_1,d_2,d_3-d'_3)-6\psi(d'_1,d_2,d_3-d'_3)-6\psi(d_1,d'_2,d_3-d'_3)+6\psi(d'_1,d'_2,d_3-d'_3)$$

它与 $6\psi(d_1-d'_1、d_2-d'_2、d_3-d'_3)$ 相差 $6\chi(d_3-d'_3)$，其中某个 $\chi\in 6E$ 在 $\mathbb{T}$ 中与 0 的距离至多为 $36\delta_1\rho_1$。利用关于 $\mathrm{e}(t)$ 的基本估计 -1、三角不等式和不等式 $\delta_1\le 2\delta_0\le \frac{1}{144\pi}\Big(\frac{c_1}{2}\Big)^{64}$，可得

—— —

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{c_1}{2}\Big)^{64}|G||B'_{\delta_1}|^6 \le \Big| \sum_{d_1,d'_1,d_2,d'_2,d_3,d'_3\in G} \mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(d_1+a'_1)\mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(d'_1+a'_1)\mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(d_2+a'_2)\mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(d'_2+a'_2)$$
$$\mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(d_3+a'_3)\mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(d'_3+a'_3)\Big(\sum_{x\in G}\partial_{d_1-d'_1,d_2-d'_2,d_3-d'_3}f(x)\Big)$$
$$\mathrm{e}(6\psi(d_1-d'_1,d_2-d'_2,d_3-d'_3))\Big|.$$

将 d_i 变量替换为 $u_i=d_i-d'_i$，稍微滥用一下记号（用 B' 代替 $B'_{1/2}$）后，最终得到所声称的不等式。 □

取 $\delta_0=2^{-29}\Big(\frac{c_1}{2}\Big)^{512}$ 应用上述断言。因此，对于 $\varepsilon_1=2^{-28}\Big(\frac{c_1}{2}\Big)^{512}$，$\psi$ 在 $B'_{2\delta_0}\times B'_{2\delta_0}\times B'_{2\delta_0}$ 上是 ε_1-三线性的，这一点对于引理 14.5 的应用很重要。

近似三次的定义。我们定义 $q\colon B'\to\mathbb{T}$ 由 $q(x)=\psi(x,x,x)$ 给出，这是良定义的。注意，

$$\Big\|\Delta_{a,b,c}q(x)-\sum_{\pi\in\mathrm{Sym}}\psi\circ\pi(a,b,c)\Big\|_{\mathbb{T}}\le 2^9\eta, \tag{46}$$

每当 $x,\ a,\ b,\ c\in B'_\eta$ 且满足 $\eta\le 1/4$ 时，由于展开形如 $\psi(x+a+b+c,\ x+a+b+c,\ x+a+b+c)$ 的项至多会产生 2^6 个更简单的项，每个自变量位置上都只有一个变量，而在$\Delta_{a,\,b,\,c}q(x)$ 中有 8 项。在上面的等式中，对于一个置换 $\pi\in\mathrm{Sym}_3$，我们使用记号 $\psi\circ\pi(u_1,\ u_2,\ u_3)$，其定义为 $\psi(u_{\pi(1)},\ u_{\pi(2)},\ u_{\pi(3)})$。特别地，$q$ 是一个近似三次多项式，因为上面的不等式意味着

$\big\|\Delta_{a,b,c,d}q(x)\big\|_{\mathbb{T}} \le 2^{10}\eta$ whenever $\eta \le 1/8$.

对称性论证。现在我们使用一个对称性论证。令 $0 < \varepsilon_2 < 2^{-100}\binom{c_1}{2}^{1024}\delta_1$ 为稍后指定的一个小量。取 $\delta_2 \in [\varepsilon_2/2, \varepsilon_2]$ 使得 B'_{δ_2} 是正则的。由于 $\varepsilon_1 = 2^{-28}\binom{c_1}{2}^{512}$，引理 14.5 表明，对于每个对换 π

$$\mathrm{Re}\Big(\sum_{u_1,u_2,u_3\in G} \mathbb{1}_{B'_{\delta_2}} * \mathbb{1}_{B'_{\delta_2}}(u_1)\mathbb{1}_{B'_{\delta_2}} * \mathbb{1}_{B'_{\delta_2}}(u_2)\mathbb{1}_{B'_{\delta_2}} * \mathbb{1}_{B'_{\delta_2}}(u_3)\,\mathrm{e}(6\psi(u_1,u_2,u_3) - 6\psi\circ\pi(u_1,u_2,u_3))\Big)$$
$$\ge 2^{-31}\Big(\frac{c_1}{2}\Big)^{512}|B'_{\delta_2}|^6.$$

由定理 14.6 应用于每个对换 π，由于这些置换生成 Sym_3，我们可以找到一些量 $\rho_2, \delta_3 \ge \exp(-(2d\log(\varepsilon_2^{-1}c_1^{-1}\rho_1^{-1}))^{O(1)})$、一个余维为 $d_2 \le (2d\log(\varepsilon_2^{-1}c_1^{-1}\rho_1^{-1})^{O(1)}$ 且半径至少为 ρ_2 的双线性 Bohr 簇 $S \subseteq B'_{\delta_2} \times B'_{\delta_2}$，使得对所有 $(x,y) \in S, z \in B'_{\delta_3}$，都有 $6\psi(x,y,z)$、$6\psi(x,z,y)$ 等全都彼此 $\varepsilon_3 = (2d)^{Cd}\sqrt{\varepsilon_2}$ 接近，其中 C 是定理 14.6 中最终的隐含常数。

因此，只要 $\varepsilon_3 \le \frac{1}{100}$，对于每个 π 以及每个 $(x,y,z)\in S\times B'_{\delta_3}$，就存在某个值 $\sigma_\pi(x,y,z) \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$，使得 $\big\|\psi(x,y,z) - \psi\circ\pi(x,y,z) - \frac{\sigma_\pi(x,y,z)}{6}\big\| \le \varepsilon_2$，其中映射 $\sigma_\pi\colon S\times B'_{\delta_3} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$。

断言 15.4. 对于每个 $\pi \in \mathrm{Sym}_3$，映射 σ_π 在 $S\times B'_{\delta_3}$ 上是三线性的。

证明。显然，因为 ψ 是 ε_1-三线性的。 □

因此，若有 $(x,y,z) \in S\times(6\cdot B'_{\delta_3/6})$，那么对每个 π，$\sigma_\pi(x,y,z)$ 都为零。特别地，对于这样的 (x,y,z)，我们得到

$$\Big\|6\psi(x,y,z) - \Big(\sum_{\pi\in\mathrm{Sym}_3}\psi\circ\pi(x,y,z)\Big)\Big\|_{\mathbb{T}} \le 6\varepsilon_3. \tag{47}$$

现在利用这一事实，将 (44) 中的 $6\psi(x,y,z)$ 替换为 $\sum_{\pi\in\mathrm{Sym}_3}\psi\circ\pi(x,y,z)$，最终得到与一个近似三次对象的相关性。

定义双线性 Bohr 簇 S 为 $\cup_{x\in C}B(\Lambda, \Theta_1(x)\dots,\Theta_{d_2}(x)\ \rho_2)$，其中 Λ 是一个至多含 d_2 个特征的集合，且 $\Theta_i : C \to \hat{G}$ 是 Freiman 线性映射。记相关的双线性 Bohr 簇为 $S^{\rho'}$，其中列被 $B(\Lambda, \Theta_1(x)\dots,\Theta_{d_2}(x)\ \rho')$ 替换。

命题 15.5。给定 $\varepsilon_3 \le 2^{-20}\binom{c_1}{2}^{512}$，存在秩至多 $(2d\,d_2\log(c_1^{-1}\rho_2^{-1}))^{O(1)}$、大小为 $|C| \ge \exp(-(2d\,d_2\log(c_1^{-1}\rho_2^{-1}))^{O(1)})|G|$ 的陪集广义等差数列 $C \subseteq B'_{\delta_2}$，使得对于某个 $\rho_3 \ge \rho_2/4$

$$\Big|\sum_{u_1,u_2,u_3\in G}\mathbb{1}_C * \mathbb{1}_C(u_1)\mathbb{1}_{S^{\rho_3}_{u_1\cdot}} * \mathbb{1}_{S^{\rho_3}_{u_1\cdot}}(u_2)\mathbb{1}_{6\cdot B'_{\delta_3/12}} * \mathbb{1}_{6\cdot B'_{\delta_3/12}}(u_3)$$
$$\mathrm{e}\Big(\sum_{\pi\in\mathrm{Sym}_3}\psi\circ\pi(u_1,u_2,u_3)\Big)\Big(\sum_{x\in G}\partial_{u_1,u_2,u_3}f(x)\Big)\Big| \ge 2^{-15}\Big(\frac{c_1}{2}\Big)^{512}|C|\Big(\sum_{u_1\in C}|S^{\rho_3}_{u_1\cdot}|^2\Big)|B'_{\delta_3/12}|^2.$$

证明。令 $\eta = 2^{-40}\left(\frac{c_1}{2}\right)^{1024}(\rho_2/2)^{d_2}$，并应用代数正则性引理（定理 3.5），得到一个对称真陪集进程 $C' \subseteq C$，其秩相同、大小为 $|C'| \geq \exp(-(2d\log(\eta^{-1}\rho_2^{-1})))|C|$，以及一个量 α，使得 $(1-\eta)|C'|$ 中有 S^{ρ_3} 的列大小为 $\left||S_x^{\rho_3}| - \alpha|B(\Lambda,\ \rho_3)|\right| \leq \eta|G|$。

我们使用柯西-施瓦茨不等式，基本上可以确保 $u_1 \in C'$、$(u_1,\ u_2) \in S$ 和 $u_3 \in 6\cdot B'_{\delta_3/6^\circ}$ 关于 u_1 和 u_3 的条件，可以按照断言 15.3 的证明中的方法，通过两次应用柯西-施瓦茨不等式轻松实现。因此我们得到

$$\Big|\sum_{u_1,u_2,u_3\in G} \mathbb{1}_{\frac{1}{2}C'} * \mathbb{1}_{\frac{1}{2}C'}(u_1)\mathbb{1}_{B'_{\delta_1}} * \mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(u_2)\mathbb{1}_{6\cdot B'_{\delta_3/12}} * \mathbb{1}_{6\cdot B'_{\delta_3/12}}(u_3)$$
$$\mathrm{e}\Big(6\psi(u_1,u_2,u_3)\Big)\Big(\sum_{x\in G}\partial_{u_1,u_2,u_3}f(x)\Big)\Big| \geq 2^{-4}\Big(\frac{c_1}{2}\Big)^{256}\Big|\frac{1}{2}C'\Big|^2|B'_{\delta_1}|^2|B'_{\delta_3/12}|^2.$$

对于每个 $u_1 \in C'$，利用群 G 的正则性，我们可以将任何取值于 $B'_{\delta_3} = B(\Gamma \cup E_0,\ \delta_3\rho_1)$ 的变量 z 替换为变量 $z'+w$ 的和，其中 $z' \in B'' = B(\Gamma \cup E_0,\ \delta_3\rho_1 - \rho_3)$ 且 $w \in S^{\rho_3}_{u_1\cdot\circ}$ 定义 $M = \alpha|B(\Lambda,\ \rho_3)|$，回顾一下，除至多 $\eta|C'|$ 个元素 $u_1 \in C$ 外，对所有元素都有 $|S^{\rho_3}_{u_1\cdot}| \in [M/2, 2M]$。因此我们得到

$$\Big|\sum_{u_1,u_2,z_2,w_2,u_3\in G} \mathbb{1}_{\frac{1}{2}C'} * \mathbb{1}_{\frac{1}{2}C'}(u_1)\mathbb{1}_{B'_{\delta_1}}(u_2)\mathbb{1}_{B''}(z_2)\mathbb{1}_{S^{\rho_3}_{u_1\cdot}}(w_2)\mathbb{1}_{6\cdot B'_{\delta_3/12}} * \mathbb{1}_{6\cdot B'_{\delta_3/12}}(u_3)$$
$$\mathrm{e}\Big(6\psi(u_1,u_2,u_3)\Big)\Big(\sum_{x\in G}\partial_{u_1,z_2+w_2-u_2,u_3}f(x)\Big)\Big| \geq 2^{-6}\Big(\frac{c_1}{2}\Big)^{256}\Big|\frac{1}{2}C'\Big|^2 M|B'_{\delta_1}|^2|B'_{\delta_3/12}|^2.$$

对 u_2 和 z_2取平均后，我们可以选取这些元素，使得

$$\Big|\sum_{u_1,w_2,u_3\in G} \mathbb{1}_{\frac{1}{2}C'} * \mathbb{1}_{\frac{1}{2}C'}(u_1)\mathbb{1}_{S^{\rho_3}_{u_1\cdot}}(w_2)\mathbb{1}_{6\cdot B'_{\delta_3/12}} * \mathbb{1}_{6\cdot B'_{\delta_3/12}}(u_3)$$
$$\mathrm{e}\Big(6\psi(u_1,u_2,u_3)\Big)\Big(\sum_{x\in G}\partial_{u_1,z_2+w_2-u_2,u_3}f(x)\Big)\Big| \geq 2^{-6}\Big(\frac{c_1}{2}\Big)^{256}\Big|\frac{1}{2}C'\Big|^2 M|B'_{\delta_3/12}|^2.$$

由柯西-施瓦茨不等式以及 ψ 的 ε_1-三线性性质，我们得到

$$\Big|\sum_{u_1,w_2,u_3\in G} \mathbb{1}_{\frac{1}{2}C'} * \mathbb{1}_{\frac{1}{2}C'}(u_1)\mathbb{1}_{S^{\rho_3}_{u_1\cdot}} * \mathbb{1}_{S^{\rho_3}_{u_1\cdot}}(w_2)\mathbb{1}_{6\cdot B'_{\delta_3/12}} * \mathbb{1}_{6\cdot B'_{\delta_3/12}}(u_3)$$
$$\mathrm{e}\Big(6\psi(u_1,u_2,u_3)\Big)\Big(\sum_{x\in G}\partial_{u_1,w_2,u_3}f(x)\Big)\Big| \geq 2^{-13}\Big(\frac{c_1}{2}\Big)^{512}\Big|\frac{1}{2}C'\Big|^2 M^2|B'_{\delta_3/12}|^2.$$

在 $\varepsilon_3 \leq 2^{-20}\left(\frac{c_1}{2}\right)^{512}$ 成立的条件下，利用 (47)，我们得到

$$\Big|\sum_{u_1,w_2,u_3\in G} \mathbb{1}_{\frac{1}{2}C'} * \mathbb{1}_{\frac{1}{2}C'}(u_1)\mathbb{1}_{S^{\rho_3}_{u_1\cdot}} * \mathbb{1}_{S^{\rho_3}_{u_1\cdot}}(w_2)\mathbb{1}_{6\cdot B'_{\delta_3/12}} * \mathbb{1}_{6\cdot B'_{\delta_3/12}}(u_3)$$
$$\mathrm{e}\Big(\sum_{\pi\in \mathrm{Sym}_3}\psi\circ\pi(u_1,u_2,u_3)\Big)\Big(\sum_{x\in G}\partial_{u_1,w_2,u_3}f(x)\Big)\Big| \geq 2^{-14}\Big(\frac{c_1}{2}\Big)^{512}\Big|\frac{1}{2}C'\Big|^2 M^2|B'_{\delta_3/12}|^2.$$

利用 $S^{\rho/3}$的拟随机性将 $\left|\frac{1}{2}C'\right|M^2$替换为 $\Big(\sum_{u_1\in C}|S^{\rho_3}_{u_1\cdot}|^2\Big)$。

□

在 B'_{δ_4} 中对 $\delta_4 = 2^{-20}\left(\frac{c_1}{2}\right)^{512}$使用 (46)，我们得到

$$\Big|\sum_{u_1,u_2,u_3\in G} \mathbb{1}_C * \mathbb{1}_C(u_1)\mathbb{1}_{S^{\rho_3}_{u_1\cdot}} * \mathbb{1}_{S^{\rho_3}_{u_1\cdot}}(u_2)\mathbb{1}_{6\cdot B'_{\delta_3/12}} * \mathbb{1}_{6\cdot B'_{\delta_3/12}}(u_3)$$
$$\Big(\sum_{y\in B'_{\delta_4}} \mathrm{e}\Big(\Delta_{u_1,u_2,u_3}q(y)\Big)\Big)\Big(\sum_{x\in G}\partial_{u_1,u_2,u_3}f(x)\Big)\Big| \geq 2^{-15}\Big(\frac{c_1}{2}\Big)^{512}|C|\Big(\sum_{u_1\in C}|S^{\rho_3}_{u_1\cdot}|^2\Big)|B'_{\delta_3/12}|^2.$$

进行变量替换，将 x 替换为 $x+y$，取适当的 x，并定义$\tilde{f}(t) = \mathbb{1}_{B'}(t)f(t+x)\,\mathrm{e}(q(t))$，我们得到

$$\Big|\sum_{u_1,u_2,u_3\in G} \mathbb{1}_C * \mathbb{1}_C(u_1)\mathbb{1}_{S^{\rho_3}_{u_1\cdot}} * \mathbb{1}_{S^{\rho_3}_{u_1\cdot}}(u_2)\mathbb{1}_{6\cdot B'_{\delta_3/12}} * \mathbb{1}_{6\cdot B'_{\delta_3/12}}(u_3)$$
$$\Big(\sum_{y\in B'_{\delta_4}}\partial_{u_1,u_2,u_3}\tilde{f}(y)\Big)\Big| \geq 2^{-15}\Big(\frac{c_1}{2}\Big)^{512}|C|\Big(\sum_{u_1\in C}|S^{\rho_3}_{u_1\cdot}|^2\Big)|B'_{\delta_3/12}|^2|B'_{\delta_4}|.$$

选取适当的 $\varepsilon_2 \geq \left(\frac{c_1}{2}\right)^{O(1)}d^{-O(d)}$，使得 $\varepsilon_3 \leq 2^{-20}\left(\frac{c_1}{2}\right)^{512}$。应用 Gowers-Cauchy-Schwarz 不等式可得$\|\tilde{f}\|_{U^3(G)} \geq \exp(-\log^{O(1)}(2c^{-1}))$，由定理 15.2 即得结论（注意，Bohr 集上的局部二次函数是近似三次多项式）。 □

§16 阿贝尔2群

在本节 中，当环境群为 $(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$ 时，我们推导出 U^4 范数的逆定理 .

定理 16.1. 固定 $d \in \mathbb{N}$，并令 $G = (\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$。假设 $f\colon G \to \mathbb{D}$ 满足 $\|f\|_{U^4} \geq c$。那么存在一个三次多项式 $q\colon G \to \mathbb{T}$，使得

$$\Big|\mathop{\mathbb{E}}_x f(x)\,\mathrm{e}(q(x))\Big| \geq \exp(-\log^{O_d(1)}(2c^{-1})).$$

与所有子群都是直和项的有限向量空间不同，有界挠群未必具有这一性质。下一个引理在很大程度上恢复了这一性质。

引理 16.2。设 $H \leq (\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$ 是一个密度为 c的子群。那么存在子群 $U, V \leq (\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$，使得 $U \leq H$, U 的密度至少为 c^d，并且 $(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n = U \oplus V$。特别地，存在一个满射投影 $\pi : (\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n \to U$，其取值在 H 内，且核的大小至多为 c^{-d}。

证明。 证明依赖于史密斯标准形。设 $e_1, \dots, e_n$ 是 $(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$ 的标准基，也就是说，它们生成该群，且对于整数 λ_j， $\sum_{j\in[n]}\lambda_j e_j = 0$ 意味着 $2^d|\lambda_j$。设$h_1, \dots, h_m \in H$ 是 H 的任意生成集。我们令 M 为 $m \times n$ 矩阵，它由将$h_1, \dots, h_m$ 用 $e_1, \dots, e_n$ 表示而得到，即满足 $h_i = \sum_{j\in[n]} M_{ij}e_j$。

我们断言，只要 A 是一个 $n\times n$ 可逆整数矩阵，那么 $a_i=\sum_{j\in[n]}A_{ij}e_j$（其中 $i\in[n]$）也是群 $(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$ 在上述意义下的一组基。事实上，由于每个元素 x 都可写作 $x=\sum_{i\in[n]}\mu_i e_i$，我们有 $x=\sum_{i,j\in[n]}\mu_i(A^{-1})_{ij}a_j$。另一方面，若 $\sum_{i\in[n]}\lambda_i a_i=0$，则 $\sum_{i,j\in[n]}\lambda_i A_{ij}e_j=0$，因此对所有 $j\in[n]$，都有 $2^d\mid\sum_{i\in[n]}\lambda_i A_{ij}$。所以 $A^T\lambda$ 的各项都能被 2^d 整除。将其乘以 A^T 的逆矩阵（它是一个整数矩阵），可得 $2^d\mid\lambda_i$，正如所需。

同样，每当 B 是一个 $m\times m$ 可逆整数矩阵时，我们有 $b_i=\sum_{j\in[m]}B_{ij}h_j$，其中$i\in[m]$是 H的生成集。相对于 $a_1,\dots,a_n$， $b_1,\dots,b_m$的系数矩阵为BMA^{-1}。我们可以找到 A,B，使得 M处于其史密斯标准形。

因此，我们可以找到 $(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$ 的一组基 $a_1,\dots,a_n$ 以及一个生成集 $b_1,\dots,b_m$，使得 $m\le n$和 $b_i=k_i a_i$, $k_1,\dots,k_m\neq 0$（因为生成集中为零的项可以忽略），其中 $k_1\mid k_2\mid\dots\mid k_m$。如果对每个 i都有$2^{r_i}\|k_i$，我们就得到 H大小的公式，即 $|H|=2^{-r_1-\cdots-r_m}2^{dm}$。

由于 $k_i\mid k_{i+1}$，我们有 $r_i\le r_{i+1}$，因此令 $\ell\in[m]$ 为满足 $r_\ell=0$ 的最大指标。现在可以定义所需的子群，即 $U=\langle a_i:\ i\in[\ell]\rangle$， $V=\langle a_i:\ i\in[\ell+1,n]\rangle$。注意，当 $r_i=0$ 时， k_i 可逆，因此 $U\le H$。于是$|U|=2^{d\ell}$。还需证明最后的大小估计。

根据以上推导，我们有 $1\le r_{\ell+1}\le\dots\le r_m\le d$、 $2^{-r_{\ell+1}-\cdots-r_m}2^{dm}\ge c2^{dn}$ 和 $|U|=2^{d\ell}$。记作 $s=r_{\ell+1}+\cdots+r_m$。因此 $2^{-s}2^{dm}\ge c2^{dn}$，特别是 $2^{-s}\ge c$。于是

$$|U|=2^{d\ell}=2^{-d(m-\ell)}2^{dm}=2^{-(d-1)(m-\ell)}2^{-(m-\ell)}2^{dm}\ge 2^{-(d-1)s}\left(2^{-s}2^{dm}\right)\ge c^{d-1}\cdot c2^{dn}=c^d2^{dn}.\quad\square$$

我们需要一个关于小子群的类似结果。

引理 16.3. 设 $H\le(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$ 是一个大小为 K 的子群。那么存在子群 $U,V\le(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$，使得 $H\le U$, U 的大小至多为 K^d，并且 $(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n=U\oplus V$。特别地，存在一个满射投影 $\pi:(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n\to V$，其核的大小至多为 K^d，且在 H 上为零。

证明。 对前一个证明最后一步稍作修改即可得到该命题。 □

在有界挠群的情形下，Freiman 双同态的结构定理会简化。

推论 *16.4*（$(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$ 中 *Freiman* 双同态的全局结构定理）。设 $G=(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$，且 H 的指数为 2^d。设 $A\subseteq G\times G$ 是一个密度为 c 的集合，并设 $\phi:A\to H$ 是一个 *Freiman* 双同态。那么存在一个全局 *Freiman* 双同态 $\Phi:G\times G\to H$，使得 $\phi(x,y)=\Phi(x,y)$ 对至少 $\exp(-\log^{O(1)}(c^{-1}))|G|^2$ 个点 $(x,y)\in A$ 成立。

证明。应用定理 1.4，可得到参数 $r\le\log^{O(1)}(2c^{-1})$ 和 $c'\ge\exp(-\log^{O(1)}(c^{-1}))$、一个秩至多为 r 的集合E、余维至多为 r 且半径为 c' 的 Bohr 集 $B_1\subseteq G_1,B_2\subseteq G_2$、元素$s\in G_1,t\in G_2$以及一个 E-双同态 $\Phi:B_1\times B_2\to H$，使得对于至少 $c'|G_1||G_2|$ 个点 $(x,y)\in B_1\times B_2$， $\Phi(x,y)=\phi(x+s,y+t)$ 成立。由于 $G=(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})$， B_1 和 B_2 包含密度至少为 2^{-dr} 的子群 U_1和 U_2。利用引理 16.2，我们可以进一步取子群 $U_1'\le U_1$ 和$U_2'\le U_2$，使得存在满射投影 $\pi_i:G\to U_i'$。因此， $\Phi'(x,y)=\Phi(\pi_1(x)\ \pi_2(y))$ 是一个

全局 E-双同态。

令 $S=\langle E\rangle$ 为 H中由 E 生成的子群，其大小至多为 2^{dr}。根据引理 16.3，我们可以找到一个同态 $\tilde{\pi}\colon H\to H$，它在 S上为零，但其核中至多有 2^{d^2r} 个元素。于是 $\tilde{\pi}\circ\Phi'$ 是一个全局 Freiman 双同态。通过平均论证即可得到结论。 □

下面的引理是完成逆定理中积分论证的关键。我们备注，逆定理已知于$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$。

引理 16.5. 设 $G=(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$，设 f_1、f_2、f_3、$f_4\colon G\to\mathbb{D}$ 为函数，且 $\alpha\colon G\times G\times G\to\mathbb{T}$ 为对称三线性形式

$$\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{u,v\in G} f_1(u)f_2(v)f_3(u+v)f_4(2u+v)\,\mathrm{e}\Big(\alpha(u,u,v)\Big)\Big|\geq\delta. \tag{48}$$

那么 $2^{d-1}\alpha(u、\ u、\ v)$ 是某个子群 $K\leq G$ 上的对称双线性形式，其大小为 $|K|\geq(\delta/2)^{O_d(1)}|G|$。

证明。 我们对 d 使用归纳法证明该断言。基例 $d=1$ 已在 [64] 中处理。现在假设 $d\geq 2$，且该断言对 $d-1$ 成立。注意，归纳假设表明，对于一个与 (48) 十分相似的条件，也能得到类似的结论；其中 f_4 的自变量改为 $u+2v$。

Claim 16.6. 设 G' 是一个与 $(\mathbb{Z}/2^{d-1}\mathbb{Z})^n$ 同构的群。设 g_1、g_2、g_3、$g_4\colon G'\to\mathbb{D}$ 是函数，且 $\beta\colon G'\times G'\times G'\to\mathbb{T}$ 是一个对称三线性形式

$$\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{u,v\in G'} g_1(u)g_2(v)g_3(u+v)g_4(u+2v)\,\mathrm{e}\Big(\beta(u,u,v)\Big)\Big|\geq\delta'. \tag{49}$$

然后 $2^{d-2}\beta(u、\ u、\ v)$ 是某个大小为 $|K'|\geq(\delta'/2)^{O_d(1)}|G'|$ 的子群 $K'\leq G'$ 上的对称双线性形式。

证明。 β 的对称性蕴含恒等式

$$\beta(u+v,u+v,u+v)=\beta(u,u,u)+3\beta(u,u,v)+3\beta(u,v,v)+\beta(v,v,v).$$

利用 3 在模 2^{d-1} 下可逆这一事实，我们得到

$$\beta(u,u,v)=3^{-1}\beta(u+v,u+v,u+v)-3^{-1}\beta(u,u,u)-3^{-1}\beta(v,v,v)-\beta(v,v,u).$$

因此，

$$\begin{aligned}\delta'\leq&\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{u,v\in G'} g_1(u)g_2(v)g_3(u+v)g_4(u+2v)\,\mathrm{e}\Big(\beta(u,u,v)\Big)\Big|\\=&\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{u,v\in G'} g_1(u)g_2(v)g_3(u+v)g_4(u+2v)\,\mathrm{e}\Big(3^{-1}\beta(u+v,u+v,u+v)\\&\qquad-3^{-1}\beta(u,u,u)-3^{-1}\beta(v,v,v)-\beta(v,v,u)\Big)\Big|\end{aligned}$$

$$= \Big| \mathop{\mathbb{E}}_{u,v\in G'} \tilde{g}_1(u)\tilde{g}_2(v)\tilde{g}_3(u+v)\tilde{g}_4(u+2v)\,\mathrm{e}\Big(-\beta(v,v,u)\Big)\Big|$$

对于 $\tilde{g}_1(x) = g_1(x)\,\mathrm{e}(-3^{-1}\beta(x,\ x,\ x))$，$\tilde{g}_2(x) = g_2(x)\,\mathrm{e}(-3^{-1}\beta(x,\ x,\ x))$，$\tilde{g}_3(x) = g_(x)\,\mathrm{e}(3^{-1}\beta(x,\ x,\ x))$ 以及 $\tilde{g}_4(x) = g_4(x)$。交换 u 和 v 的角色后，我们得到与（48）形状相同的相关性，因此可以应用归纳假设，从而证明该断言。 □

我们通过观察到，f_1 和 f_3 的某些方向一致性范数能够控制该表达式，从而开始证明。

由 f_1 和 f_3控制。我们观察到，f_1 和 f_3 的 $\mathsf{U}(G,\ 2^{d-1}\cdot G)$ 范数能够控制上述表达式。我们将此表述为一个适用于任意函数的独立断言。

命题 16.7。设 $h_1, \dots, h_4 \colon G \to \mathbb{D}$ 为函数。那么

$$\Big| \mathop{\mathbb{E}}_{u,v\in G} h_1(u)h_2(v)h_3(u+v)h_4(2u+v)\,\mathrm{e}\Big(\alpha(u,u,v)\Big)\Big| \le \|h_1\|_{\mathsf{U}(G,2^{d-1}\cdot G)}\|h_3\|_{\mathsf{U}(G,2^{d-1}\cdot G)}.$$

证明。我们 引入一个哑变量 $w \in 2^{d-1}\cdot G$，并将 u 替换为 $u+w$，注意到

$$\begin{aligned}
&\Big| \mathop{\mathbb{E}}_{u,v\in G} h_1(u)h_2(v)h_3(u+v)h_4(2u+v)\,\mathrm{e}\Big(\alpha(u,u,v)\Big)\Big|^4\\
=&\Big| \mathop{\mathbb{E}}_{u,v\in G,w\in 2^{d-1}\cdot G} h_1(u+w)h_2(v)h_3(u+w+v)h_4(2u+2w+v)\,\mathrm{e}\Big(\alpha(u+w,u+w,v)\Big)\Big|^4\\
=&\Big| \mathop{\mathbb{E}}_{u,v\in G,w\in 2^{d-1}\cdot G} h_1(u+w)h_2(v)h_3(u+w+v)h_4(2u+v)\,\mathrm{e}\Big(\alpha(u,u,v)\Big)\Big|^4\\
=&\Big| \mathop{\mathbb{E}}_{u,v\in G} h_2(v)h_4(2u+v)\,\mathrm{e}\Big(\alpha(u,u,v)\Big) \mathop{\mathbb{E}}_{w\in 2^{d-1}\cdot G} h_1(u+w)h_3(u+w+v)\Big|^4\\
\le&\Big| \mathop{\mathbb{E}}_{u,v\in G,w,a\in 2^{d-1}\cdot G} \partial_a h_1(u+w)\partial_a h_3(u+w+v)\Big|^2\\
\le&\Big(\mathop{\mathbb{E}}_{x,b\in G,a\in 2^{d-1}\cdot G} \partial_{a,b} h_1(x)\Big)\Big(\mathop{\mathbb{E}}_{x,b\in G,a\in 2^{d-1}\cdot G} \partial_{a,b} h_3(x)\Big)\\
=&\|h_1\|^4_{\mathsf{U}(G,2^{d-1}\cdot G)}\|h_3\|^4_{\mathsf{U}(G,2^{d-1}\cdot G)}.
\end{aligned}$$

注意，我们使用了 $\alpha(w,w,v) = 0$，因为对于某个元素 $w' \in G$，有 $w = 2^{d-1}w'$；因此 $\alpha(w,w,v) = \alpha(2^{d-1}w', 2^{d-1}w', v) = 2^{2d-2}\alpha(w',w',v) = 0$，因为对于 $d \ge 2$，有 $2d-2 \ge d$。此外，$\alpha(u,w,v) + \alpha(w,u,v) = 2\alpha(u,w,v) = 2^d\alpha(u,w',v) = 0$。我们还用到了 $2w = 2^d w' = 0$。最后两个不等式是柯西 - 施瓦茨不等式的应用。 □

回到 (48)，我们希望对函数 f_1 和 f_3 应用 U(G, $2^{d-1}\cdot G$) 的逆定理，并将它们替换为作为该范数的障碍而出现的结构化函数。然而，直接这样做会得到 f_1 和 f_3 的相关性，而这未必能直接代回 (48)。相反，我们采用一种处理方法，将 f_1 和 f_3 替换为一个函数，使这一策略能够奏效。

将 f_1 和 f_3 替换为。定义 $F_1(u) = \mathbb{E}_{v\in G} f_2(v)f_3(u+v)f_4(2u+v)\,\mathrm{e}\Big(-\alpha(u,\ u,\ v)\Big)$。因此，不等式 (48) 变为 $|\mathbb{E}_{u\in G} f_1(u)F_1(u)|\geq \delta$。由柯西-施瓦茨不等式可得 $|\mathbb{E}_{u\in G} F_1(u)F_1(u)|\geq \delta^2$。现在展开 F_1 的定义，得到

$$\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{u,v} F_1(u)f_2(v)f_3(u+v)f_4(2u+v)\,\mathrm{e}\Big(\alpha(u,u,v)\Big)\Big| \geq \delta^2.$$

根据上述断言，我们有 $\|F_1\|_{\mathrm{U}(G,2^{d-1}\cdot G)}\geq \delta^2$。定理 B.2 给出了一个函数 f_1' 和一个特征 $\chi_1\in \widehat{G}$，使得

$$\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{u\in G} \overline{F_1(u)}f_1'(2u)\,\mathrm{e}(\chi_1(u))\Big| \geq (\delta/2)^{O(1)}.$$

展开F_1 的定义可得

$$\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{u,v\in G} f_1'(2u)\,\mathrm{e}(\chi(u))f_2(v)f_3(u+v)f_4(2u+v)\,\mathrm{e}\Big(\alpha(u,u,v)\Big)\Big| \geq (\delta/2)^{O(1)}.$$

对 f_3应用相同的方法，我们可以找到一个特征 $\chi_2\in\widehat{G}$ 和一个函数 $f_3'\colon G\to\mathbb{D}$，使得

$$\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{u,v\in G} f_1'(2u)\,\mathrm{e}(\chi_1(u))f_2(v)f_3'(2u+2v)\,\mathrm{e}(\chi_2(u+v))f_4(2u+v)\,\mathrm{e}\Big(\alpha(u,u,v)\Big)\Big| \geq (\delta/2)^{O(1)}.$$

写出 $\chi=\chi_1+\chi_2$，并且稍微滥用一下记号，将 $\mathrm{e}(\chi_2(v))$ 并入 $f_2(v)$，得到

$$\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{u,v\in G} \mathrm{e}(\chi(u))f_1'(2u)f_2(v)f_3'(2u+2v)f_4(2u+v)\,\mathrm{e}\Big(\alpha(u,u,v)\Big)\Big| \geq (\delta/2)^{O(1)}. \tag{50}$$

移除特征 χ。我们引入一个哑变量 a，其取遍 $2^{d-1}\cdot G$，并将其加入 u。注意，$2a=0$，并且 $\alpha(u+a,\ u+a,\ v) = \alpha(u,\ u,\ v) + 2\alpha(u,\ a,\ v) + \alpha(a,\ a,\ v) = \alpha(u,\ u,\ v)$。因此

$$\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{u,v\in G,a\in 2^{d-1}\cdot G} \mathrm{e}(\chi(u+a))f_1'(2u)f_2(v)f_3'(2u+2v)f_4(2u+v)\,\mathrm{e}\Big(\alpha(u,u,v)\Big)\Big| \geq (\delta/2)^{O(1)}.$$

但此时我们有 $|\mathbb{E}_{a\in 2^{d-1}\cdot G}\mathrm{e}(\chi(a))|>0$，这恰好在 $\chi=0$ 于 $2^{d-1}\cdot G$ 上时发生。群 G 的结构意味着，对于某个进一步的特征 $\chi'\in\widehat{G}$，有 $\chi=2\chi'$。因此，定义 $f_1''(x) = f_1'(x)\,\mathrm{e}(\chi'(x))$，式 (50) 变为

$$\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{u,v\in G} f_1''(2u)f_2(v)f_3'(2u+2v)f_4(2u+v)\,\mathrm{e}\Big(\alpha(u,u,v)\Big)\Big| \geq (\delta/2)^{O(1)}.$$

应用归纳假设。引入另一个遍历 G 的哑变量 b，并将 $2b$ 加到 v 上。因此

$$\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{u,v,b\in G} f_1''(2u)f_2(v+2b)f_3'(2u+2v+4b)f_4(2u+v+2b)\,\mathrm{e}\Big(\alpha(u,u,v+2b)\Big)\Big| \geq (\delta/2)^{O(1)}.$$

对 v 取平均，存在某种选择，使得对于 $g_1(x) = f_1''(x)$，$g_2(x) = f_2(v+x)$ $g_3(x) = f_3'(2v+x)$ 且 $g_4(x) = f_4(x+v)$，

$$\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{u,b\in G} g_1(2u)\,\mathrm{e}\Big(\alpha(u,u,v)\Big)g_2(2b)g_3(2u+4b)g_4(2u+2b)\,\mathrm{e}\Big(2\alpha(u,u,b)\Big)\Big| \geq (\delta/2)^{O(1)}. \tag{51}$$

最后，我们将这些项解释为定义在 $G/2^{d-1}\cdot G$ 上的函数，其中 $G/2^{d-1}\cdot G$ 同构于 $(\mathbb{Z}/2^{d-1}\mathbb{Z})^n$。具体来说，定义

$$\tilde{g}_1(x+2^{d-1}\cdot G) = g_1(2x)\,\mathrm{e}\Big(\alpha(x,x,v)\Big),\ \tilde{g}_2(x+2^{d-1}\cdot G) = g_2(2x),\ \tilde{g}_3(x+2^{d-1}\cdot G) = g_3(2x),\ \tilde{g}_4(x+2^{d-1}\cdot G) = g_4(2x).$$

要证明这些是良定义的，只需讨论 $\tilde{g}_1$。具体来说，若 $x-y\in 2^{d-1}\cdot G$，则$y = x+2^{d-1}w$，因此 $2x = 2y$，并且

$$\alpha(y,y,v) = \alpha(x+2^{d-1}w, x+2^{d-1}w, v) = \alpha(x,x,v) + 2^d\alpha(x,w,v) + 2^{2d-2}\alpha(w,w,v) = \alpha(x,x,v).$$

此外，由 $\tilde{\alpha}(x+2^{d-1}\cdot G, y+2^{d-1}\cdot G, z+2^{d-1}\cdot G) = 2\alpha(x,y,z)$ 定义的形式 $\tilde{\alpha}\colon (G/2^{d-1}\cdot G)\times(G/2^{d-1}\cdot G)\times(G/2^{d-1}\cdot G)\to\mathbb{T}$ 是良定义的，并且是 $G/2^{d-1}\cdot G$ 上的对称三线性形式。因此，不等式 (51) 化为

$$\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{u+2^{d-1}\cdot G, b+2^{d-1}\cdot G\in G/2^{d-1}\cdot G} \tilde{g}_1(u+2^{d-1}\cdot G)\tilde{g}_2(b+2^{d-1}\cdot G)\tilde{g}_3(u+2b+2^{d-1}\cdot G)\tilde{g}_4(u+b+2^{d-1}\cdot G)$$
$$\mathrm{e}\Big(\tilde{\alpha}(u+2^{d-1}\cdot G, u+2^{d-1}\cdot G, b+2^{d-1}\cdot G)\Big)\Big| \geq (\delta/2)^{O(1)}.$$

这个表达式与（48）非常相似，不过，与最初的表达式相比，$\tilde{g}_3$ 中这一项的系数顺序颠倒了。我们可以应用 Claim 16.6，得出存在一个密度为 $(\delta/2)^{O_d(1)}$的子群$\tilde{K}\leq G/2^{d-1}\cdot G$，在其上，$2^{d-2}\tilde{\alpha}(u+2^{d-1}\cdot G,\ u+2^{d-1}\cdot G,\ v+2^{d-1}\cdot G)$ 是对称双线性形式。但这意味着，$2^{d-1}\alpha(u,\ u,\ v)$ 是 $K=\tilde{K}+2^{d-1}\cdot G$ 上的对称双线性形式。

□

最后，我们需要一个关于有偏三线性形式的结构性结果。

定理 16.8（$(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$ 中有偏三线性形式的结构）。设 $G=(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$ 且 $\phi\colon G\times G\times G\to\mathbb{T}$ 是一个满足以下条件的三线性形式

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x,y,z\in G}\mathrm{e}(\phi(x,y,z))\geq c.$$

那么存在一个密度为$(c/2)^{O_d(1)}$ 的子群 H $H\leq G$，使得只要 x、y、$z\in H$，就有 $\phi(x,y,z)=0$。

这个结果的定性版本可以从 Eberhard [16], 的一项工作中推导出来，但由于我们需要定量版本，因此仍给出证明。

证明。 首先考虑 2ϕ。也就是说，由于当 x、t 在 G中变化时， $2x+t$ 在 G 上均匀取值，我们有

$$c \leq \mathop{\mathbb{E}}_{x,y,z\in G} \mathrm{e}(\phi(x,y,z)) = \mathop{\mathbb{E}}_{x,y,z,t\in G} \mathrm{e}(\phi(2x+t,y,z)) = \mathop{\mathbb{E}}_{y,z,t\in G} \mathrm{e}(\phi(t,y,z))\Big(\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G} \mathrm{e}(2\phi(x,y,z))\Big).$$

应用柯西-施瓦茨不等式可知 $c^2 \leq \mathbb{E}_{x,\ y,\ z\in G}\mathrm{e}(2\phi(x,\ y,\ z))$. 我们定义 $\theta\colon (G/2^{d-1}\cdot G)\times(G/2^{d-1}\cdot G)\times(G/2^{d-1}\cdot G)\to\mathbb{T}$，其定义为 $\theta(x+2^{d-1}\cdot G,\ y+2^{d-1}\cdot G,\ z+2^{d-1}\cdot G) = 2\phi(x,\ y,\ z)$。由于 ϕ 的取值属于 $\frac{\mathbb{Z}}{2^d}$，因此 θ 是良定义的。但是

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x+2^{d-1}\cdot G,y+2^{d-1}\cdot G,z+2^{d-1}\cdot G\in G/2^{d-1}\cdot G} \mathrm{e}\Big(\theta(x+2^{d-1}\cdot G,y+2^{d-1}\cdot G,z+2^{d-1}\cdot G)\Big) = \mathop{\mathbb{E}}_{x,y,z\in G}\mathrm{e}(2\phi(x,y,z)) \geq c^2.$$

由于 $G/2^{d-1}\cdot G\cong(\mathbb{Z}/2^{d-1}\mathbb{Z})^n$，根据关于参数 $d-1$ 和 c^2（分别代替 d和 c）的归纳假设，存在密度为 $(c/2)^{O_d}$的 U子群，满足 $G/2^{d-1}\cdot G$内部的$_{(1)}$，且 θ在 $U\times U\times U$上消失。因此 2ϕ在 $U'\times U'\times U'$上消失，其中 $U'=U+2^{d-1}\cdot G$，因而 $\frac{|U'|}{|G|} = \frac{|U|}{|G/2^{d-1}\cdot G|}$。

现在定义 $\psi\colon (U'/2\cdot U')\times(U'/2\cdot U')\times(U'/2\cdot U')\to\mathbb{F}_p$为 $\psi(x+2\cdot U',\ y+2\cdot U',\ z+2\cdot U') = \phi(x,\ y,\ z)$，它在 $U'\times U'\times U'$ 上是良定义的，因而 $2\phi=0$。于是， $U'/2\cdot U'\cong\mathbb{F}_2^m$对于某个 m 和 ψ，成为有限维 $\mathbb{F}_2$-向量空间上的三线性形式。由于

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x+2\cdot U',y+2\cdot U',z+2\cdot U'\in U'/2\cdot U'} \mathrm{e}(\psi(x+2\cdot U',y+2\cdot U',z+2\cdot U')) = \mathop{\mathbb{E}}_{x,y,z\in U'}\mathrm{e}(\phi(x,y,z)) \geq \mathop{\mathbb{E}}_{x,y,z\in G}\mathrm{e}(\phi(x,y,z)) \geq c,$$

根据 [14], 的定理 1，我们得到密度至少为 $(c/2)^{O(1)}$ 的 $W\leq U'/2\cdot U'$，使得 ψ 在 $W\times W\times W$ 上消失。最后， ϕ 在 $(W+2\cdot U')\times(W+2\cdot U')\times(W+2\cdot U')$ 上消失，证明完毕。 □

定理 *16.1* 的证明。我们稍微调整一下定理陈述中的记号。由于 c 将用于离散乘法导数中的平移，我们假设 $\|f\|_{U^4}\geq\delta$。

我们通过对 d作归纳法来证明该定理。 $d=1$ 的情形已在 [50]中证明。给定某个 $d\geq 2$，并假设该定理对更小的 d成立。类似于以往研究中的论证（在定理 15.1 的证明中也有出现），可知存在一个 Freiman 双同态$\phi\colon A\to\hat{G}$，其定义在密度为 $\exp(-\log^{O(1)}(2\delta^{-1}))$ 的集合 $A\subseteq G\times G$ 上，并且对每个 $(a,b)\in A$，$\widehat{\partial_{a\ b}f}$，都有 $(\phi(a,b))|\geq\delta^{O(1)}$。推论 16.4 给出了一个全局 Freiman 双同态 $\Phi\colon G\times G\to\hat{G}$，它在 A 的至少 $\exp(-\log^{O(1)}(2\delta^{-1}))|G|^2$ 个点上与 ϕ 一致。我们可以将 $\Phi(a,b)$ 写成 $=\hat{}\,B(a,b)+\Theta_1(a)+\Theta_2(b)+\chi$，其中 $B\colon G\times G\to G$ 是一个双线性映射， $\Theta_1,\Theta_2\colon G\to G$ 是同态，且 $\chi\in G$ 是一个$\hat{}$元素。因此

$$\exp(-\log^{O(1)}(2\delta^{-1})) \leq \mathop{\mathbb{E}}_{a,b\in G}\Big|\widehat{\partial_{a,b}f}(B(a,b)+\Theta_1(a)+\Theta_2(b)+\chi)\Big|^2$$

$$= \mathop{\mathbb{E}}_{x,a,b,c\in G} \partial_{a,b,c} f(x)\, \mathrm{e}\Big(B(a,b)(c) + \Theta_1(a)(c) + \Theta_2(b)(c) + \chi(c)\Big).$$

定义 $\beta\colon G\times G\times G\to\mathbb{T}$ 为 $\beta(a,b,c) = B(a,b)(c)$，它是一个三线性形式。由 Gowers-柯西-施瓦茨不等式可得

$$\exp(-\log^{O(1)}(2\delta^{-1})) \le \Big| \mathop{\mathbb{E}}_{x,a,b,c\in G} \partial_{a,b,c} f(x)\, \mathrm{e}\Big(\beta(a,b,c)\Big)\Big|.$$

根据定理 14.5，$|\mathbb{E}_{a,\,b,\,c}\, \mathrm{e}(\beta(a,\ b,\ c) - \beta(b,\ a,\ c)| \ge \exp(-\log^{O(1)}(2\delta^{-1}))$，对于变量的其他置换也有类似的不等式。

结合定理 16.8 和引理 16.2，我们有一个对称三线性映射 $\alpha\colon G\times G\times G\to\mathbb{T}$，使得

$$\Big| \mathop{\mathbb{E}}_{a,b,c,x\in G} \partial_{a,b,c} f(x)\, \mathrm{e}(\alpha(a,b,c))\Big| \ge \delta_1, \tag{52}$$

对于某个 $\delta_1 \ge \exp(-\log^{O(1)}(2\delta^{-1}))$。

为了能够对 α 积分，根据引理 A.7，我们需要将该三线性形式替换为另一个对称形式 α'，使得 $2^{d-1}\alpha'(u,\ u,\ v)$ 是一个对称双线性形式。这就是证明的主要目标。

我们引入额外的变量 u 和 v，并通过用 $a-u,\ b-u,\ c-v$ 替换 $a,\ b,\ c$ 来进行变量替换。于是

$$\Big| \mathop{\mathbb{E}}_{u,v,a,b,c,x\in G} \partial_{a+u,b+u,c+v} f(x)\, \mathrm{e}(\alpha(a+u,b+u,c+v))\Big| \ge \delta_1.$$

展开后，通过平均，存在 x,a,b,c 使得

$$\Big| \mathop{\mathbb{E}}_{u,v\in G} f(2u+v+x+a+b+c)\overline{f(2u+x+a+b)}\,\overline{f(u+v+x+a+c)}\,\overline{f(u+v+x+b+c)}$$

$$f(u+x+a)f(u+x+b)f(v+x+c)\overline{f(x)}$$

$$\mathrm{e}(\alpha(u,\ u,\ v) - \alpha(u,u,c) + \alpha(u,b,v) + \alpha(u,b,c) + \alpha(a,u,v) + \alpha(a,u,c) + \alpha(a,b,v) + \alpha(a,b,c))\Big| \ge \delta_1$$

定义

$$f_1(t) = \overline{f(2t+x+a+b)}f(t+x+a)f(t+x+b)\overline{f(x)}\,\mathrm{e}(\alpha(t,t,c) + \alpha(t,b,c) + \alpha(a,t,c) + \alpha(a,b,c)),$$
$$f_2(t) = f(t+x+c)\,\mathrm{e}(\alpha(a,b,t)),$$

$$f_3(t) = \overline{f(t+x+a+c)}\,\overline{f(t+x+b+c)},$$
$$f_4(t) = f(t+x+a+b+c),$$

并回想起 α 是对称的，我们得到

$$\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{u,v} f_1(u)f_2(v)f_3(u+v)f_4(2u+v)\,\mathrm{e}\Big(\alpha(u,u,v)+\alpha(a+b,u,v)\Big)\Big| \geq \delta_1.$$

由于 $(u,v) \mapsto \alpha(a+b,u,v)$ 是定义在 G 上的对称双线性映射，根据引理 A.6，我们可以找到一个二次多项式 q，使得 $q(u+v) - q(u) - q(v) + q(0) = \alpha(a+b,u,v)$。因此，通过在适当的 f_i 中消去二次相位，并稍微滥用一下记号，我们得到

$$\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{u,v} f_1(u)f_2(v)f_3(u+v)f_4(2u+v)\,\mathrm{e}\Big(\alpha(u,u,v)\Big)\Big| \geq \delta_1. \tag{53}$$

应用引理 16.5，可得 $2^{d-1}\alpha(u,u,v)$ 在密度为 $(\delta_1/2)^{O_d(1)}$ 的子群 K 上对称。应用引理 16.2，得到一个分解 $K' \oplus T = G$，其中 $|K'| \geq (\delta_1/2)^{O_d(1)}|G|$，并令 $\pi_1 : G \to K'$ 和 $\pi_2 : G \to T$ 为相应的投影。定义 $\tilde{\alpha} : G \times G \times G \to \mathbb{T}$，使得 $\tilde{\alpha}(x,y,z) = \alpha(\pi_1(x)\ \pi_1(y)\ \pi_1(z))$。那么 α 是一个对称三线性形式，且 $2^{d-1}\tilde{\alpha}(u,u,v)$ 是对称双线性形式。根据定理 A.7，存在一个三次多项式 $q : G \to \mathbb{T}$，使得对所有 $x,a,b,c \in G$，均有 $\Delta_{a,b,c}q(x) = \tilde{\alpha}(a,b,c)$。

最后，我们回到（52），并利用上述分解得出

$$\begin{aligned}\delta_1 \leq& \Big|\mathop{\mathbb{E}}_{a,b,c,x\in G} \partial_{a,b,c}f(x)\,\mathrm{e}(\tilde{\alpha}(a,b,c)+\alpha(\pi_2(a),\pi_1(b),\pi_1(c))+\cdots+\alpha(\pi_2(a),\pi_2(b),\pi_2(c)))\Big| \\ =& \Big|\mathop{\mathbb{E}}_{a,b,c,x\in G}\sum_{t_1,t_2,t_3\in T}\mathbb{1}(\pi_2(a)=t_1,\pi_2(b)=t_2,\pi_2(c)=t_3)\partial_{a,b,c}f(x) \\ &\qquad \mathrm{e}(\tilde{\alpha}(a,b,c)+\alpha(t_1,\pi_1(b),\pi_1(c))+\cdots+\alpha(t_1,t_2,t_3))\Big|.\end{aligned}$$

根据三角不等式和平均，我们可以找到 t_1，t_2，t_3 以及一些函数 s_1，s_2，$s_3 : G \times G \to \mathbb{D}$它们来自项 $\alpha(t_1,\ \pi_1(b)\ \pi_1(c))\ldots$的相位，使得

$$\delta_1|T|^{-3} \leq \Big|\mathop{\mathbb{E}}_{a,b,c,x\in G} \mathbb{1}(\pi_2(a)=t_1)\mathbb{1}(\pi_2(b)=t_2)\mathbb{1}(\pi_2(c)=t_3)s_1(a,b)s_2(a,c)s_3(b,c)\partial_{a,b,c}f(x)\,\mathrm{e}(\tilde{\alpha}(a,b,c))\Big|.$$

我们可以使用 Gowers-柯西-施瓦茨不等式消去除 $\partial_{a,\ b,\ c}f(x)$ $\mathrm{e}(\tilde{\alpha}(a,\ b,\ c))$ 之外的所有项。使用 $\Delta_{a,\ b,\ c}q(x) = \tilde{\alpha}(a,\ b,\ c)$ 将 $\mathrm{e}\Big(\alpha(a,\ b,\ c)\Big)$ 吸收到 f 中，并利用 U^3 范数的逆定理（定理 B.3）完成证明。

□

附录 A. 关于 $(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$

回顾一下，阿贝尔群 G 和 H 之间的次数至多为 m 的多项式是一个映射 $q\colon G\to H$，满足对于所有 a_1，……，a_{m+1}，$x\in G$，都有 $\Delta_{a_1}\dots\Delta_{a_{m+1}}q(x)=0$。这里我们迭代离散加性导数算子，其定义为 $\Delta_a f(x)=f(x+a)-f(x)$。我们将考虑余定义域为 $\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的多项式。

令 G 为有限阿贝尔群。根据此类群的分类，我们知道 $G\cong\mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z}\oplus\dots\oplus\mathbb{Z}/N_r\mathbb{Z}$。暂时，我们不对 $N_1,\dots,N_r$作任何假设。稍后，我们将专门讨论 N_i为 2 的幂的情形。令 $\pi\colon\mathbb{Z}^r\to G$为从 $\pi(x_1,\dots,x_r)$ 到 $=(x_1+N_1\mathbb{Z},\dots,x_r+N_r\mathbb{Z})$ 的自然投影。

接下来的两个引理给出了 G上的多项式与 $\mathbb{Z}^r$上的多项式之间的关系。

引理 A.1。设 $\phi\colon G\to\mathbb{T}$ 为次数至多为 m的多项式。则由 $\tilde{\phi}=\phi\circ\pi$ 给出的 $\tilde{\phi}\colon\mathbb{Z}^r\to\mathbb{T}$ 是次数至多为 m的多项式。此外，$\tilde{\phi}$ 是 $N_{[r]}$-周期的，即对于所有 x_1、…、x_r、a_1、…、$a_r\in\mathbb{Z}$，$\tilde{\phi}(x_1+a_1N_1$、…、$x_r+a_rN_r)=\phi(x_1$、…、$x_r)$ 成立。

证明。第一个断言直接由 π 是阿贝尔群的同态这一事实得到。具体而言，设 $a_1,\dots,a_{m+1},x\in\mathbb{Z}$。那么 $\Delta_{a_1,\dots,a_{m+1}}\phi(x)=\Delta_{\pi(a_1)\dots,\pi(a_{m+1})}\phi(x)=0$。第二部分由（$a_1N_1,\dots,a_rN_r$）属于 $\ker\pi$ 得出。

□

引理 A.2。设 $\phi\colon\mathbb{Z}^r\to\mathbb{T}$ 是一个次数至多为 m 的 $N_{[r]}$-周期多项式。那么存在一个唯一的 $\phi\colon G\to\mathbb{T}$，使得 $\phi=\phi\circ\pi$。此外，这样的 ϕ 是 G 上次数至多为 m 的多项式。

证明。由于对所有的 x_1、…、x_r、a_1、…、$a_r\in\mathbb{Z}$，$\phi(x_1+a_1N_1,\dots,x_r+a_rN_r)=\phi(x_1,\dots,x_r)$ 都成立，我们可以将 $\phi(x_1+N_1\mathbb{Z},\dots,x_r+N_r\mathbb{Z})$ 定义为 $\phi(x_1,\dots,x_r)$，其与陪集代表元的选择无关。显然，ϕ 是唯一的，剩下只需验证它是 G 上的多项式。为此，设 x、a_1、…、$a_{m+1}\in G$。任取 $\tilde{x}$、$\tilde{a}_1$、…、$\tilde{a}_{m+1}\in\mathbb{Z}$，使得 $\pi(\tilde{x})=x$ 且 $\pi(\tilde{a}_i)=a_i$。那么

$$\Delta_{a_1,\dots,a_{m+1}}\phi(x)=\sum_{I\subseteq[m+1]}(-1)^{m+1-|I|}\phi\Big(x+\sum_{i\in I}a_i\Big)=\sum_{I\subseteq[m+1]}(-1)^{m+1-|I|}\tilde{\phi}\Big(\tilde{x}+\sum_{i\in I}\tilde{a}_i\Big)=\Delta_{\tilde{a}_1,\dots,\tilde{a}_{m+1}}\tilde{\phi}(\tilde{x})=0.$$

□

以下引理

引理 A.3. 如果 $\phi\colon\mathbb{Z}^r\to\mathbb{T}$ 是次数至多为 m 的多项式，那么存在系数 $\lambda_{i_{[\ell]}}\in\mathbb{R}$，以 $[r]$中的元素构成的非递减序列 $i_{[\ell]}$ 为指标，且满足 $0\le\ell\le m$，使得对所有 $x\in\mathbb{Z}$

$$\phi(x)=\sum_{\substack{0\le\ell\le m\\ 1\le i_1\le i_2\le\dots\le i_\ell\le r}}\lambda_{i_{[\ell]}}x_{i_1}\dots x_{i_\ell}+\mathbb{Z}.$$

证明. 我们采用一种略有不同但等价的表示法。定义 $\binom{x}{k} = {}^{x}{}_{(x-1)\dots(x-k+1)}\ {}_{k!}$，这是一个定义在 $\mathbb{Z}$ 上的多项式，取整数值，并满足帕斯卡三角恒等式 $\binom{x+1}{k+1} - \binom{x}{k+1} = \binom{x}{k}$。只需证明

$$\phi(x) = \sum_{d_1+\cdots+d_r\le m} \lambda_{d_{[r]}} \binom{x_1}{d_1}\cdots\binom{x_r}{d_r} + \mathbb{Z}.$$

我们对 $r+m$ 使用归纳法证明该引理。基例是 $r=1$，$m=0$，此时 ϕ 对所有 a，$x\in\mathbb{Z}$ 都满足 $\Delta_a\phi(x)=0$，因此 ϕ 是常数。

考虑 $\Delta_{e_r} f(x)$，它是次数至多为 $m-1$ 的多项式，因此根据归纳假设

$$\Delta_{e_r}\phi(x) = \sum_{d_1+\cdots+d_r\le m-1} \lambda_{d_{[r]}} \binom{x_1}{d_1}\cdots\binom{x_r}{d_r} + \mathbb{Z}.$$

考虑 $\psi(x) = \phi(x) - \sum_{d_1+\cdots+d_r\le m-1} \lambda_{d_{[r]}} \binom{x_1}{d_1}\cdots\binom{x_r}{d_r+1} + \mathbb{Z}$。则 $\Delta_{e_r}\psi(x)=0$，因此 ψ 与最后一个坐标线性无关，我们可以考虑由 $\psi'(x_{[r-1]}) = \psi(x_{[r-1]}, 0)$ 给出的 $\psi'\colon\ \mathbb{Z}^{r-1}\to\mathbb{T}$，它也因此是次数至多为 m 的多项式。对 ψ' 应用归纳假设即可证毕。

□

我们现在专门讨论以 $(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$ 为环境群的情形，并对次数至多为 3.

命题 A.4 $(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^r$)。（在 $d\ge 2$ 的条件下。令 $\phi:(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^r\to\mathbb{T}$。令 $|\cdot|\colon \mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 为映射，它将 $x+2^d\mathbb{Z}$ 映射到满足 $a\equiv x$ (模 2^d) 的唯一整数 $a\in\{0,1,\dots,2^d-1\}$。那么

- ϕ 是次数为 ≤ 1 的多项式，当且仅当它具有以下形式
$$\phi(x) = \sum_{i\in[r]} \frac{\lambda_i}{2^d}|x_i| + \alpha + \mathbb{Z},$$
- ϕ 是次数为 ≤ 2 的多项式，当且仅当它具有以下形式
$$\phi(x) = \sum_{i\in[r]} \frac{\lambda_{i,i}}{2^{d+1}}|x_i|^2 + \sum_{1\le i<j\le r} \frac{\lambda_{i,j}}{2^d}|x_i||x_j| + \sum_{i\in[r]} \frac{\lambda_i}{2^d}|x_i| + \alpha + \mathbb{Z},$$
- ϕ 是次数为 ≤ 3 的多项式，当且仅当它具有以下形式
$$\phi(x) = \sum_{1\le i\le r} \lambda_{i,i,i}\frac{2|x_i|^3-3|x_i|^2+4|x_i|}{3\cdot 2^{d+2}} + \sum_{1\le i<j\le r}\mu_{i,j}\frac{|x_i|^{|}x_j|+|x_i||x_j|^2-|x_i||x_j|}{2^{d+1}} + \sum_{1\le i\ne j\le r}\lambda_{i,j}\frac{|x_i|^2|x_j|}{2^d}$$
$$+ \sum_{\substack{1\le i,j,k\le r\\ \text{distinct}}} \lambda_{i,j,k}\frac{|x_i||x_j||x_k|}{2^d} + \sum_{i\in[r]}\frac{\lambda_{i,i}}{2^{d+1}}|x_i|^2 + \sum_{1\le i<j\le r}\frac{\lambda_{i,j}}{2^d}|x_i||x_j| + \sum_{i\in[r]}\frac{\lambda_i}{2^d}|x_i| + \alpha + \mathbb{Z},$$

其中系数为 $\lambda_\cdot$、$\mu_\cdot\in\mathbb{Z}$ 和 $\alpha\in\mathbb{R}$。

备注。 </style} $d=1$的情形，就是有限向量空间$\mathbb{F}_2^r$中所谓的非经典多项式的情形，这类多项式已由 Tao 和 Ziegler 分类。在这种情形下，我们得到

$$\sum_{\substack{j,i_1,\dots,i_r\ge 0\\ i_1+\cdots+i_m\le d-j}} \lambda_{j,i_1,\dots,i_r}\frac{|x_1|^{i_1}\cdots|x_r|^{i_r}}{2^{j+1}}.$$

证明。</style}由前面的引理可知， ϕ 的次数至多为 s ，当且仅当它来自一个映射 $f:\mathbb{Z}^r\to\mathbb{T}$，该映射在其每个 r 变量上都是 2^d-周期的，并且具有如下形式

$$f(x)=\sum_{\substack{\ell\le s\\ 1\le i_1\le\ldots\le i_\ell\le r}}\alpha_{i_1,\ldots,i_\ell}x_{i_1}\ldots x_{i_\ell}.$$

我们转而对这类映射进行分类。

我们将考察离散加法导数，因此注意到，如果 $g:\mathbb{Z}^r\to\mathbb{T}$ 在各变量上具有 2^d-周期性，那么 $\Delta_a g(x)$ 也具有周期性；无论是在 a 中还是在 x 中都是如此，迭代导数也同样成立。现在我们专门讨论三次多项式。证明将先处理三次单项式，再处理二次项，依此类推，从而得出结论的全部三部分。

因此，给定一个在所有变量上具有 f, 2^d-周期性的 f，其形式为

$$f(x)=\sum_i\alpha_{i,i,i}x_i^3+\sum_{i<j}(\alpha_{i,i,j}x_i^2x_j+\alpha_{i,j,j}x_ix_j^2)+\sum_{i<j<k}\alpha_{i,j,k}x_ix_jx_k+\sum_i\alpha_{i,i}x_i^2+\sum_{i<j}\alpha_{i,j}x_ix_j+\sum_i\alpha_ix_i+\alpha.$$

系数 $\alpha_{i,j,k}$. 考察 $\Delta_{ae_i,be_j,ce_k}f(x)$（其中 $i<j<k$），它等于 $\alpha_{i,j,k}abc$，由此得到$\alpha_{i,j,k}\in\frac{\mathbb{Z}}{2^d}$。反过来，对于这样的系数 $\alpha_{i,j,k}x_ix_jx_l$，其具有 2^d-周期性，因此可以假设 $\alpha_{i,j,k}=0$。

系数 $\alpha_{i,i,i}$. 首先，导数 $\Delta_{ae_i,be_i,ce_i}f(x)=6\alpha_{i,i,i}abc$，意味着 $6\cdot 2^d\alpha_{i,i,i}\in\mathbb{Z}$。另一方面，多项式 $\frac{2x^3-3x^2+4x}{12\cdot 2^d}$ 具有 2^d-周期性：将~~$x+2^da$~~ 处和 x 处的值相减，模 $3\cdot 2^{d+2}$ 得到

$$\begin{aligned}&2(x+2^da)^3-2x^3-3(x+2^da)^2+3x^2+4\cdot 2^da\\&\qquad=6\cdot 2^dx^2a+6\cdot 2^{2d}xa^2+2^{3d+1}a^3-6\cdot 2^dxa-3\cdot 2^{2d}a^2+4\cdot 2^da\\&\qquad\equiv 6\cdot 2^dx(x-1)a+2^d(2^{2d+1}a^3-3\cdot 2^da^2+4a).\end{aligned}$$

由于 $2|x(x-1)$，且当 $d\ge 2$ 时，3 和 4 都整除 $2^{2d+1}a^3-3\cdot 2^da^2+4a$，因此它模 $12\cdot 2^d$ 同余于 0。因此，我们可以假设 $\alpha_{i,\ i,\ i}=0$。

系数 $\alpha_{i、\ i、\ j}$ 和 $\alpha_{i、\ j、\ j}$。类似地，对于导数 $\Delta_{ae_i、\ be_i、\ ce_j}f(x)$ $\Delta_{ae_i、\ be_j、\ ce_j}f(x)$，我们得到 $2^{d+1}\alpha_{i、\ i、\ j}$，$2^{d+1}\alpha_{i、\ j、\ j}\in\mathbb{Z}$。现在考虑 $\Delta_{2^dae_i、\ be_i}f(ye_i+ze_j)=0$。我们得到

$$\alpha_{i,i,j}2^{d+1}abz+\alpha_{i,i}2^{d+1}ab=0.$$

取 $z=0$，$a=b=1$，于是$2^{d+1}\alpha_{i,\ i}$。由于 $\frac{y^2}{2^{d+1}}$ 是 2^d-周期的，我们可以假设 $\alpha_{i,\ i}=0$。类似地，$\alpha_{j,\ j}=0$。

接下来，考虑 $\Delta_{2^dae_i,\ be_j}f(ye_i+ze_j)=0$。我们得到

$$\alpha_{i,i,j}2^{d+1}aby+\alpha_{i,j,j}2^{d+1}abz+\alpha_{i,j,j}2^dab^2+\alpha_{i,j}2^dab=0.$$

由此可知 $2^d(\alpha_{i,j}+\alpha_{i,j,j})\in\mathbb{Z}$。因此，要么 $2^d\alpha_{i,i,j},2^d\alpha_{i,j,j},2^d\alpha_{i,j}\in\mathbb{Z}$，要么 $2^d\alpha_{i,i,j},2^d\alpha_{i,j,j},2^d\alpha_{i,j}\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$。加入 $\frac{x_i^2x_j+x_ix_j^2-x_ix_j}{2^{d+1}}$ 后，我们归结为前一种情况，此时系数再次可以令其为零。我们只需验证 $\frac{x^2y+xy^2-xy}{2^{d+1}}$ 是 2^d- 周期的。它关于 x 和 y 对称，因此只需考虑 x。我们有

$$(x+2^d)^2y+(x+2^d)y^2-(x+2^d)y-(x^2y+xy^2-xy)=2^{d+1}xy+2^{2d}y+2^dy^2-2^dy\equiv 2^dy(y-1)\equiv 0 \pmod{2^{d+1}}.$$

上述论证也表明，二次单项式的系数表现如断言所述。对于线性项，结论显而易见。

□

利用三次多项式的分类，我们可以给出判据，以检验多重线性形式（即映射 $\phi\colon(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n\times\cdots\times(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n\to\mathbb{T}$，且分别对每个变量都是同态）是否可积。在此之前，我们先记录一个关于这类映射的简单引理。

引理 A.5. 设 $\phi\colon(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n\times\cdots\times(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n\to\mathbb{T}$ 是一个关于 k 个变量的多重线性形式。那么存在唯一的系数 $\lambda_{i_1,\dots,i_k}\in\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z}$，使得

$$\phi(x_1,\dots,x_k)=\sum_{i_1,\dots,i_k\in[n]}\frac{\lambda_{i_1,\dots,i_k}x_{1,i_1}\cdots x_{k,i_k}}{2^d}$$

对所有 $x_1,\dots,x_k\in(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$ 均成立。

此外，若 q 是次数至多为 k 的多项式，则 $\Delta_{a_1,\dots,a_k}q(x)$ 与 x 无关，并定义了一个多重线性形式 $\phi(a_1,\dots,a_k)$，其系数由 $\lambda_{i_1,\dots,i_k}\Delta_{e_1,\dots,e_k}f(x)$ 给出。

证明。**系数的存在性**。首先注意，ϕ 取到的所有值都属于 $\frac{\mathbb{Z}}{2^d}+\mathbb{Z}$。也就是说，固定 $x_1,\dots,x_{k-1}$ 后，$y\mapsto\phi(x_1,\dots,x_{k-1},y)$ 是从 $(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$ 到 $\mathbb{T}$ 的同态，且只取这些值。利用每个变量上的同态性质，我们有

$$\phi(x_1,\dots,x_k)=\sum_{i_1}x_{1,i_1}\phi(e_1,x_2,\dots,x_k)=\cdots=\sum_{i_1,\dots,i_k}\phi(e_{i_1},\dots,e_{i_k})x_{1,i_1}\dots x_{k,i_k}.$$

系数的唯一性。将上述形式的给定多重线性形式的两个可能表示相减后，我们需要证明：若 $\psi(x_1,\dots,x_k)=\sum_{i_1,\dots,i_k\in[n]}\lambda_{i_1,\dots,i_k}x_{1,i_1}\cdots x_{k,i_k}$ 恒为零，则所有系数也都为零。但只需代入标准基的元素即可得出这一点，因为 $\lambda_{i_1,\dots,i_k}=\psi(e_{i_1},\dots e_{i_k})=0$。

与多项式的关系。由于 q 是次数至多为 k 的多项式，这意味着对所有 $a_1,\dots,a_k,x,y$，都有 $\Delta_{a_1,\dots,a_k,y-x}q(x)=0$，因此 $\Delta_{a_1,\dots,a_k}q(x)=\Delta_{a_1,\dots,a_k}q(y)$，故 $\phi(a_1,\dots,a_k)$ 定义良好。为了证明它是多重线性的，我们证明它关于最后一个变量是同态；对其他变量的证明方法相同。具体来说，

$$\begin{aligned}\phi(a_1,\dots,a_k+b_k)=&\Delta_{a_1,\dots,a_k+b_k}q(x)=\Delta_{a_1,\dots,a_{k-1}}q(x+a_k+b_k)-\Delta_{a_1,\dots,a_{k-1}}q(x)\\=&\Delta_{a_1,\dots,a_{k-1}}q(x+a_k+b_k)-\Delta_{a_1,\dots,a_{k-1}}q(x+a_k)+\Delta_{a_1,\dots,a_{k-1}}q(x+a_k)-\Delta_{a_1,\dots,a_{k-1}}q(x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\Delta_{a_1,\ldots,a_{k-1},b_k} q(x+a_k)+\Delta_{a_1,\ldots,a_{k-1},a_k} q(x)\\
&=\phi(a_1,\ldots,a_k)+\phi(a_1,\ldots,b_k).
\end{aligned}
$$

关于系数的断言源于 ϕ 的唯一性和定义。 □

定理 A.6（双线性映射的积分）。 设 $\phi:(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n\times(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n\to\mathbb{T}$ 是一个双线性映射。那么存在一个二次多项式 $q:(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n\to\mathbb{T}$，使得对于所有$x$、$a$、$b\in(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$，都有$\Delta_{a,\,b}q(x)=\phi(a、b)$，当且仅当 $\phi(a、b)$ 是一个对称双线性映射。

证明。情形 $d=1$ 已在 [63, 64], 中研究过，因此我们可以假设 $d\geq 2$。显然，对于任意二次多项式 q，$\Delta_{a、b}q(x)$ 都是一个对称双线性映射。另一方面，给定一个对称双线性映射 $\phi(a、b)$，我们可以将其写成 $\phi(a、b)=\sum_{i、j}\lambda_{i、j}a_ib_j$。由系数的唯一性以及 ϕ 的对称性可得$\lambda_{i、j}=\lambda_{j、i}$。但是，对于 $i\neq j$，有 $\Delta_{a、b}q(x)=\frac{\lambda_{ij}}{2^d}(a_ib_j+a_jb_i)$，其中 $q(x)=\frac{\lambda_{i、j}}{2^d}x_ix_j$；而当 $i=j$时，有 $\Delta_{a、b}q(x)=\frac{\lambda_{i、i}}{2^d}a_ib_i$，其中 $q(x)=\frac{|\lambda_{i、i}|}{2^{d+1}}|x_i|^2$。 □

定理 *A.7*（三线性映射的积分）。设 $\phi:(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n\times(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n\times(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n\to\mathbb{T}$ 是一个三线性映射（即分别对每个变量都是群同态）。那么存在一个三次多项式 $q:(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n\to\mathbb{T}$，使得对于所有 $x,a,b,c\in(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$，$\Delta_{a,b,c}q(x)=\phi(a,b,c)$ 当且仅当 $\phi(a,b,c)$ 是一个对称三线性映射，且 $2^{d-1}\phi(a,a,b)$ 是一个对称双线性映射。

证明。 $d=1$ 的情形已在 [63, 64], 中研究过，因此我们可以假设 $d\geq 2$。首先，假设对于某个三次多项式 q，有 $\Delta_{a,\,b,\,c}q(x)=\phi(a,\ b,\ c)$。那么 ϕ 是一个对称三线性形式。此外，$2^{d-1}\phi(a,\ a,\ b)$ 是一个双线性形式。事实上，

$$
2^{d-1}\phi(a+a',\ a+a',b)=2^{d-1}\phi(a,a,b)+2^d\phi(a,a',b)+2^{d-1}\phi(a',a',b)=2^{d-1}\phi(a,a,b)+2^{d-1}\phi(a',a',\ b),
$$

since ϕ 的取值属于 $\frac{\mathbb{Z}}{2^d\mathbb{Z}}$。最后，为了看出对称性，我们还需要一个断言 .

断言 A.8。 给定 k，令 $U_k=2^{2k-1}+2^{k-1}, L_k=2^{2k-1}-2^{k-1}$。那么存在整数$\lambda_i,\mu_i\in\mathbb{Z}$, $i\in[U_k]$ 以及 $\lambda_i',\mu_i'\in\mathbb{Z}$，对于 $i\in[L_k]$，使得对于两个阿贝尔群 H_1 和 H_2 之间的所有映射 F：$H_1\to H_2$（F 不一定是同态），都有以下两个恒等式

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in[U_k]}\Delta_{a,b,a+b}F(x+\lambda_ia+\mu_ib)=&-F(x)+F(x+a)-F(x+2^ka+(2^k-1)b)\\
&+F(x+2^ka+2^kb)-F(x+a+2^kb)+F(x+(2^k-1)b)
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in[L_k]}\Delta_{a,b,a+b}F(x+\lambda_i'a+\mu_i'b)=&-F(x)+F(x+(2^k-1)a)-F(x+2^ka+b)\\
&+F(x+2^ka+2^kb)-F(x+(2^k-1)a+2^kb)+F(x+b)
\end{aligned}
$$

对所有 $x,a,b\in H_1$。

证明。 该断言可由归纳法得出。对于基例 $k = 1$，我们取 $\lambda_1 = \mu_1 = 0, \lambda_2 = 0, \mu_2 = 1, \lambda_3 = \mu_3 = 1$，得到

对于第二个恒等式，我们取 $\lambda_1' = \mu_1' = 0$，并展开 $\Delta_{a,\ b,\ a+b}F(x)$。因此

现在假设断言对某个 $k \geq 1$ 成立，令 $\lambda_i,\ \mu_i, i \in [L_k]$ 为系数

关于第二个恒等式的上述断言给出

$$2^{d-1}\phi(a, b, a + b) = 2^{d-1}\Delta_{a,b,a+b}q(x) = ... = 0.$$

由于 $2^{d-1}\phi(a,\ a,\ b)$ 的取值属于 $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$，我们便得到所需性质。

现在假设 ϕ 是一个对称三线性型，且 $2^{d-1}\phi(a,\ a,\ b)$ 是对称双线性形式。用系数表示 ϕ，得到

$$\phi(a, b, c) = \sum_{i,j,k\in[n]} \frac{\lambda_{i,j,k}a_ib_jc_k}{2^d}.$$

系数的唯一性和 ϕ 的对称性意味着 $\lambda_{i,\ j,\ k}$ 在系数的置换下保持不变。此外，

$$2^{d-1}\phi(a, a, b) = \sum_{i\in[n]} \frac{\lambda_{i,i,i}a_i^2b_i}{2} + \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{\lambda_{i,i,j}(a_i^2b_j + 2a_ia_jb_i) + \lambda_{i,j,j}(a_j^2b_i + 2a_ia_jb_j)}{2} + \sum_{i<j<k\leq n} \frac{2\lambda_{i,j,k}(a_ia_jb_k + a_ia_kb_j + a_ja_kb_i)}{2}.$$

第一个和具有对称性，因为模 2 意义下 $a_i^2b_i$ 与 a_ib_i 同余，因此也与 $a_ib_i^2$ 同余。第三个和为零。因此，由 $2^{d-1}\phi(a,\ a,\ b)$ 的对称性以及系数的唯一性可知，只要 $i \neq j$，就有 $\lambda_{i,\ i,\ j} \equiv \lambda_{j,\ j,\ i}$(模 2)。

□

附录 B. 一些低阶逆结果

在本附录中，我们汇集了几个低阶逆定理，一个涉及基本的方向一致性范数，另一个涉及有界挠群中的 U^3 范数。在此之前，我们注意到，子群的特征可以延拓为整个群上的特征。

引理 B.1. 设 $H \leq G$ 为有限群，且 $\chi\colon H \to \mathbb{T}$ 是一个同态。那么 χ 可以延拓为 G上的一个同态。

证明。 设 $x \in G \setminus H$。只需将 χ 延拓到 $H' = H + \langle x\rangle$。设 k 是满足 $kx \in H$的最小正整数。定义 $\chi'\colon H' \to \mathbb{T}$，使得 $\chi'(y) = \frac{\ell}{k} + \chi(y - \ell x)$，其中 ℓ 满足 $y - \ell x \in H$。

为证明 χ' 是良定义的，首先注意，对每个 $y \in H'$，都存在 ℓ 使得 $y - \ell x \in H$。

此外，若 ℓ' 是另一个这样的整数，则$(\ell'-\ell)x\in H$，因此根据 k的选取， $k|\ell'-\ell$ 。所以χ' 是良定义的。

现在令 $y,z\in H'$，并令 $y-\ell x, z-mx\in H$。那么 $(y+z)-(\ell+m)x\in H$ 且 $\chi'(y+z)=\chi'(y)+\chi'(z)$。 □

定理 B.2. 令 $H\le G$ 为一个子群，并假设 $f\colon G\to\mathbb{D}$ 满足 $\|f\|_{U(H,G)}\ge c$。那么存在一个特征 $\chi\colon G\to\mathbb{T}$ 和一个函数 $h\colon G/H\to\mathbb{D}$，使得

$$\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G} f(x)\overline{h(x+H)}\,\mathrm{e}(\chi(x))\Big|\ge (c/2)^{O(1)}.$$

证明。令 $T\subset G$为 H 的陪集的任意一组代表元，即 $|T|=|G|/|H|$ 和 $G=T+H$。对于每个 $t\in T$，我们定义映射 $f_t\colon H\to\mathbb{D}$，其定义为 $f_t(x)=f(t+x)$。令 S_t为 f_t的大谱，即由所有满足 $|\mathbb{E}_{x\in H} f_t(x)\mathrm{e}(-\chi(x))|\ge c^4/2$ 的 $\chi\in\hat{H}$ 组成的集合。根据 Plancharel 定理，我们有$|S_t|\le 4c^{-8}$。我们断言，对于至少 $c^4|T|^2$ 对 (t,t')，有 $S_t\cap S_{t'}\ne\emptyset\ \in T^2$。

展开假设中的范数，得到 $c^4\le\mathbb{E}_{x,\ a\in G,\ b\in H} f(x)f(x+a)\ f(x+b)f(\overline{x+a+b})$。注意， x 和 $x+b$ 属于 H的同一个陪集， $x+a$ 和 $x+a+b$也属于同一个陪集。此外，所有陪集对都以这种方式得到均匀覆盖。因此

$$\begin{aligned}c^4&\le\mathop{\mathbb{E}}_{t,t'\in T}\Big(\mathop{\mathbb{E}}_{x,a,b\in H} f_t(x)\overline{f_{t'}(x+a)}\,\overline{f_t(x+b)}f_{t'}(x+a+b)\Big)\\&=\mathop{\mathbb{E}}_{t,t'\in T}\sum_{\chi\in\hat{H}}|\widehat{f_t}(\chi)|^2|\widehat{f_{t'}}(\chi)|^2\le\mathop{\mathbb{E}}_{t,t'\in T}\Big(\max_{\chi\in\hat{H}}|\widehat{f_t}(\chi)||\widehat{f_{t'}}(\chi)|\Big)\Big(\sum_{\chi\in\hat{H}}|\widehat{f_t}(\chi)||\widehat{f_{t'}}(\chi)|\Big).\end{aligned}$$

另一方面，对于任意的 $t,\ t'\in T$，由柯西-施瓦茨不等式和 Plancharel 定理，

$$\sum_{\chi\in\hat{H}}|\widehat{f_t}(\chi)||\widehat{f_{t'}}(\chi)|\le\sqrt{\sum_{\chi\in\hat{H}}|\widehat{f_t}(\chi)|^2}\sqrt{\sum_{\chi\in\hat{H}}|\widehat{f_{t'}}(\chi)|^2}=\|f_t\|_{L^2}\|f_{t'}\|_{L^2}\le 1.$$

因此，我们至少有 $\frac{c^4}{2}|T|^2$对 $(t,\ t')\in T$ 满足 $\max_{\chi\in\hat{H}}|\widehat{f_t}(\chi)||\widehat{f_{t'}}(\chi)|\ge c^4/2$，所以 $S_t\cap S_{t'}\ne\emptyset$.

通过平均，存在 $\chi\in\hat{H}$，它至少属于 $\frac{c^{12}}{8}|T|$ 个集合 S_t。令 T' 为所有这类t组成的集合。由引理 B.1，可得到一个特征 $\tilde{\chi}\colon G\to\mathbb{T}$，它延拓了 χ。令 $\tau\colon G\to T$ 为由唯一的 $\tau(x)\in T$ 所给出的映射，使得 $x-\tau(x)\in H$。因此，当 $t\in T$ 时，对于所有 $x\in t+H$，都有 $\tau(x)=t$。因此，

$$\begin{aligned}2^{-5}c^{20}&\le\mathop{\mathbb{E}}_{t\in T}\mathbb{1}_{T'}(t)\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in H} f_t(x)\,\mathrm{e}(-\tilde{\chi}(x))\Big|^2\le\mathop{\mathbb{E}}_{t\in T}\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in H} f_t(x)\,\mathrm{e}(-\tilde{\chi}(x))\Big|^2\\&=\mathop{\mathbb{E}}_{t\in T}\overline{\widehat{f_t}(\chi)}\mathop{\mathbb{E}}_{x\in H} f(x+t)\,\mathrm{e}(-\tilde{\chi}(x))=\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G}\overline{\widehat{f_{\tau(x)}}(\chi)}\,\mathrm{e}(\chi(\tilde{\tau(x)}))f(x)\,\mathrm{e}(-\tilde{\chi}(x)).\end{aligned}$$

我们定义 $h\colon G/H\to\mathbb{D}$，令 $h(x+H)=f_{\tau(x)}(\chi)\,\mathrm{e}(-\chi(\tau(x)))$。由于 τ 在 $x+H$ 上为常数，因此这是良定义的，证明完毕。 □

我们简要推导群 $(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$ 上的 U^3 逆定理。

定理 B.3。设 $G=(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$。设 $f\colon G\to\mathbb{D}$ 是一个满足 $\|f\|_{U^3}\geq c$的函数。那么存在一个二次多项式 $q\colon G\to\mathbb{T}$，使得 $|\mathbb{E}_{x\in G}f(x)\,\mathrm{e}(q(x))|\geq\exp(-O_d(\log^{O(1)}(2c^{-1})))$。

证明。标准步骤表明，存在一个映射 $\Phi\colon A\to\hat{}G$，定义在密度为 $(c/2)^{O(1)}$的集合 A 上，使得 Φ 保持 $(c/2)^{O(1)}|G|^3$ 个加性四元组，并且对每个 $a\in A$都有 $|\widehat{\partial_a f}(\Phi(a))|\geq(c/2)^{O(1)}$。结合近似同态结构定理（定理 2.26）、每个稠密的有界秩陪集广义等差数列在 $(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^n$ 中都包含一个稠密子群的平移这一事实，以及引理 16.2，我们得到一个同态 $\Psi\colon G\to G$ 和一个元素 $\chi\in G$，使得

$$\exp(-O_d(\log^{O(1)}(2c^{-1})))\leq\mathop{\mathbb{E}}_{a\in G}|\widehat{\partial_a f}(\Psi(a)+\chi)|^2=\mathop{\mathbb{E}}_{x,a,b\in G}\partial_{a,b}f(x)\,\mathrm{e}(\Psi(a)(b)+\chi(b)).$$

定义 $\beta\colon G\times G\to\mathbb{T}$ 通过 $\beta(a,b)=\Psi(a)(b)$，可得到一个双线性映射。利用 Gowers-柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\exp(-O_d(\log^{O(1)}(2c^{-1})))\leq\Big|\mathop{\mathbb{E}}_{x,a,b\in G}\partial_{a,b}f(x)\,\mathrm{e}(\beta(a,b))\Big|.$$

定理 14.5 和引理 16.2 使我们可以假设 β 是对称的。最后，我们可以使用定理 A.6 将证明归约到逆 U^2 范数的情形。 □

附录 C. 与循环群的比较

在循环群的情形下，本附录将更明确地描述 Bohr 集上的近三线性映射。

当 $x\in\mathbb{R}$ 时，我们将满足 $x-\{x\}$ 为整数的区间 $(-1/2,\ 1/2]$ 中唯一的实数记为 $\{x\}$。我们还记 $\langle x\rangle=x-\{x\}$。因此，对所有 x，都有 $\langle x\rangle\in\mathbb{Z}$。

命题 C.1 ([29] 中的推论 10.5)。设 N 为素数。设 $r_1,\dots,r_d\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 和 $\rho>0$。那么存在一个真对称广义等差数列 P，其基为 $v_1,\dots,v_d$，满足

$B(r_1,\dots,r_d,d^{-2d}\rho)\subseteq P\subseteq B(r_1,\dots,r_d,\rho)$ 且向量 $\left(\left\{\frac{r_1v_i}{N}\right\},\dots,\left\{\frac{r_dv_i}{N}\right\}\right)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中对于 $i\in[d]$线性无关。

设 $\iota\colon\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\to[0,N-1]\subseteq\mathbb{Z}$ 满足 $x=\iota(x)+N\mathbb{Z}$。接下来，我们描述循环群中的 Bohr 集上的整数值 Freiman 线性映射。

命题 C.2. 设 N为素数。设 $r_1,\dots,r_d\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$和 $\rho\in(0,\ 1/4)$。假设 $\phi\colon B(r_1,\dots,r_d;\ \rho)\to\mathbb{Z}$ 是一个 *Freiman* 线性映射。那么存在实数 $a_1,\dots,a_d$ 使得

$$\phi(x)=\sum_{i\in[d]}a_i\Big\langle\frac{\iota(r_i)\iota(x)}{N}\Big\rangle$$

对所有 $x\in B(r_1,\dots,r_d;\ d^{-2d}\rho)$。此外，对于 $i\in[d]$，如果 $\lambda_1r_1+\cdots+\lambda_dr_d=0$ *in* $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ *for* $|\lambda_1|,\dots,|\lambda_d|\leq(2\rho^{-1}d^d)^{Cd}$ 意味着 $\lambda_i=0$，那么 $a_i\in\mathbb{Z}$ 且唯一。

证明。令 $P=[-L_1,L_1]\cdot v_1+\cdots+[-L_d,L_d]\cdot v_d$ 为命题 C.1 中得到的广义等差数列。令 $A=(\alpha_{ij})_{i,\ j\in[d]}$ 为实值矩阵 $(\{r_iv_j/N\})_{i,\ j\in[d]}$ 的逆。因此，对于所有 $i,\ k\in[d]$，我们有

$$\sum_{j\in[d]}\alpha_{ij}\{r_jv_k/N\}=\mathbb{1}(i=k).$$

对所有 $x\in P$，定义 $\lambda_i(x)=\sum_{j\in[d]}\alpha_{ij}\{r_jx/N\}$。注意到 $\lambda_i(v_k)=\mathbb{1}(i=k)$，且 λ_i 在 $B(r_1,\ldots,r_d;\ \rho)$ 上是 Freiman 线性的。因此，对每个 $x\in P$，我们有

$$x=\sum_{i\in[d]}\lambda_i(x)v_i.$$

此外，由于 ϕ 在 $B(r_1,\ldots,r_d;\ \rho)$ 上是 Freiman 线性的，我们得到

$$\phi(x)=\sum_{i\in[d]}\lambda_i(x)\phi(v_i).$$

因此，存在实数 $\beta_1,\ldots,\beta_d$，使得

$$\phi(x)=\sum_{i\in[d]}\beta_i\{r_ix/N\} \tag{54}$$

对所有 $x\in B(r_1,\ldots,r_d;\ d^{-2d}\rho)$，该式成立。

接下来，我们证明陈述中所述的指标 i 对应的 β_i 是一个整数。

设 $k=\lceil d^{2d}\rho^{-1}\rceil$。我们先找出 $x\in B(r_1,\ldots,r_d;\ d^{-2d}\rho)$，使得对于 $j\neq i$，$|\{r_jx/N\}|\leq d^{-4d-10}\rho^2$ 成立，但 $\{r_ix/N\}\in[\frac{1}{k},\frac{1}{k}+d^{-4d-10}\rho^2]$。根据假设，并将命题 2.31 应用于值 $\left(0,0,\ldots,0,\frac{1}{k}+\frac{1}{2}d^{-4d-10}\rho^2\right)$ 和逼近参数 $\frac{1}{2}d^{-4d-10}\rho^2$，我们得到这样的 x。

得到这样的 x 后，注意到 $kx\in B(r_1,\ldots,r_d;\ d^{-2d}\rho)$ 以及 $k\{r_jx/N\}=\{kr_jx/N\}$ 对 $j\neq i$ 成立，但 $\{kr_ix/N\}=k\{r_ix/N\}-1$。因此，由（54）可得

$$\beta_i=k\phi(x)-\phi(kx)\in\mathbb{Z}.$$

还需将 ϕ 化为所需的形式。注意到 $\{r_ix/N\}=\{\iota(r_i)\iota(x)/N\}=\iota(r_i)\iota(x)/N-\langle\iota(r_i)\iota(x)/N\rangle$。

因此，我们有

$$\phi(x)=\frac{\left(\sum_{i\in[d]}\beta_i\iota(r_i)\right)\iota(x)}{N}-\sum_{i\in[d]}\beta_i\langle\iota(r_i)\iota(x)/N\rangle,$$

所以可推出

$$\frac{\left(\sum_{i\in[d]}\beta_i\iota(r_i)\right)\iota(x)}{N}\in\mathbb{Z}$$

对所有 $x\in B(r_1,\ldots,r_d,\ d^{-2d}\rho)$ 都成立。只有当 $\sum_{i\in[d]}\beta_i\iota(r_i)\in N\mathbb{Z}$ 时才会出现这种情况，因此它恒等于零，证明完毕。

□

现在我们可以将 ε-三线性形式与广义多项式联系起来。

定理 C.3。 设 $B = B(\Gamma, \rho) \subseteq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 是一个余维为 d 的 *Bohr* 集，并设 $\phi\colon B \times B \times B \to \mathbb{T}$ 是一个 ε-三线性形式。那么存在一个广义多项式 $g\colon [0, N-1]^3 \to \mathbb{T}$，它是至多 $(2d\log(\rho^{-1}\varepsilon^{-1}))^{O(1)}$ 项之和，每一项的形式为

$$\{\{\alpha x\}\beta y\}\gamma z,\ \{\alpha xy\}\gamma z,\ ,\{\alpha x\}\beta yz,\ \alpha xyz,\ \{\alpha x\}\{\beta y\}\gamma z, \{\beta y\}\alpha xz$$

对于某些实数 α, β, γ，双线性 *Bohr* 簇 W 以及一个余维至多为 $(2d\log(\rho^{-1}\varepsilon^{-1}))^{O(1)}$、半径至少为 $\exp(-(2d\log(\rho^{-1}\varepsilon^{-1}))^{O(1)})$ 的 *Bohr* 集 B'，使得 $\|\phi(x, y, z) - g(\iota(x)\ \iota(y)\ \iota(z))\|_{\mathbb{T}} \leq O(d^d\sqrt{\varepsilon})$ 对所有 $(x, y) \in S$，$z \in B'$ 均成立。

证明。与定理 14.6 的证明一样，存在 $\rho' \geq \Omega(\varepsilon d^{-O(d)}\rho)$，使得 $B(\Gamma, \rho')$ 是正则的，并且存在一个 E-双线性映射 $\chi\colon B(\Gamma, \rho') \times B(\Gamma, \rho') \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，使得对所有 $x, y, z \in B(\Gamma, \rho')$ 均有 $\|\phi(x, y, z) - \chi(x, y)^{z}\|_{\mathbb{T}} \leq \varepsilon'$，其中 $\varepsilon' = O(d^{O(d)}\sqrt{\varepsilon})$ 且 $E = \langle\Gamma\rangle_R$, $R \leq (2\varepsilon^{-1}\rho^{-1}d^d)^{O(d)}$。

特别地，χ 是 Freiman 双同态，因此根据此类映射的结构定理证明（截至命题 11.1），利用 E-双线性和双线性 Bogolyubov 论证（定理 1.6），我们得到一个余维为 $S \subseteq B(\Gamma, \rho') \times B(\Gamma, \rho')$、半径至少为 $\rho_1 \geq \exp(-(2d\log(\rho^{-1}\varepsilon^{-1}))^{O(1)})$ 的双线性 Bohr 集 $S \subseteq B(\Gamma, \rho') \times B(\Gamma, \rho')$，以及一个 Freiman 双线性映射 $\psi\colon S \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，使得对于所有 $(x, y) \in S$，都有 $\psi(x, y) - \chi(x, y) \in O(1)E$。剩下的任务是用广义多项式表示 ψ。

因此，我们得到一个对称真陪集进程 C、Freiman 线性映射 $\Theta_1, \dots, \Theta_{r_1}\colon C \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，以及一个包含 Γ、大小至多为 r_1 的频率集 Γ_1，使得 $S = \bigcup_{x\in C}\{x\} \times B(\Gamma_1, \Theta_1(x) \dots, \Theta_{r_1}(x))$。设 $\eta > 0$ 为稍后选定的参数。应用代数正则性引理（定理 3.5）后，我们可以假设给定的双线性 Bohr 簇是参数为 η 的准随机簇；为此，我们将其弱化为一个秩为 $r_2 \leq (2d\log(\rho^{-1}\varepsilon^{-1}\eta^{-1}))^{O(1)}$ 的对称真陪集广义等差数列 $C' \subseteq C$，而 ρ_1 和 r_1 基本保持不变。我们滥用记号，用 C 代替 C'，并沿用记号 ρ_1 和 r_1。令 $\Gamma_1 = \{\gamma_1, \dots, \gamma_{r_1}\} \subseteq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$。

令 $X \subseteq C$ 为所有满足 $x \in C$ 的元素构成的集合

$$\lambda_1\gamma_1 + \dots + \lambda_{r_1}\gamma_{r_1} + \lambda'_1\Theta_1(x) + \dots + \lambda'_{r_1}\Theta_{r_1}(x) = 0$$

对于 $|\lambda_1|, \dots, |\lambda'_{r_1}| \leq (2\rho_1 r_1^{r_1})^{10Cr_1}$，其中 C 是命题 C.2 中的隐含常数，可推出 $\lambda'_1, \dots, \lambda'_{r_1} = 0$。由 S 的拟随机性（稍微调整 η），可得 $|X| \geq (1-\eta)|C|$。对每个 $x \in C$，将命题 C.2 应用于 S_x. 和映射[6] $y \mapsto \psi(x, y)$，得到 $a_1(x) \dots, a_{r_1}(x) \in \mathbb{R}/N\mathbb{Z}$ 以及 $b_1(x) \dots, b_{r_1}(x) \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，使得对于每个 $x \in X$ 和 $y \in B(\Gamma_1, \Theta_1(x) \dots, \Theta_{r_1}(x); (2r_1)^{-4r_1}\rho_1)$，我们有

$$\psi(x, y) = \sum_{i\in[r_1]} a_i(x)\Big\langle\frac{\iota(\gamma_i)\iota(y)}{N}\Big\rangle + \sum_{i\in[r_1]} b_i(x)\Big\langle\frac{\iota(\Theta_i(x))\iota(y)}{N}\Big\rangle.$$

[6]这个映射取值于 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，但该命题表明，广义等差数列 P 上的坐标函数具有所需的形式；该广义等差数列位于 Bohr 集与其较小的膨胀之间。

取一个加性 群 X 中由元素构成的 itive 三元组 $(x_1,\ x_2,\ x_1+x_2)$，并令 $y\in S_{x_1\cdot}\cap S_{x_2\cdot}\cap S_{x_1+x_2-\cdot}$。n

$$0=\psi(x_1+x_2,y)-\psi(x_1,y)-\psi(x_2,y)=\sum_{i\in[r_1]}a_i(x_1+x_2)\Big\langle\frac{\iota(\gamma_i)\iota(y)}{N}\Big\rangle+\sum_{i\in[r_1]}b_i(x_1+x_2)\Big\langle\frac{\iota(\Theta_i(x_1+x_2))\iota(y)}{N}\Big\rangle$$
$$-\sum_{i\in[r_1]}a_i(x_1)\Big\langle\frac{\iota(\gamma_i)\iota(y)}{N}\Big\rangle-\sum_{i\in[r_1]}b_i(x_1)\Big\langle\frac{\iota(\Theta_i(x_1))\iota(y)}{N}\Big\rangle$$
$$-\sum_{i\in[r_1]}a_i(x_2)\Big\langle\frac{\iota(\gamma_i)\iota(y)}{N}\Big\rangle-\sum_{i\in[r_1]}b_i(x_2)\Big\langle\frac{\iota(\Theta_i(x_2))\iota(y)}{N}\Big\rangle$$

注意，由于（x_1，y）、（x_2，y） $\in S$，$\left|\left\{\frac{\iota(\Theta_i(x_2\ \iota\ y}{N}\right\}\right|=\left|\left\{\frac{\Theta_i)\ )\ ()\ (}{}\right.\right.$ $\left.\left.\frac{x_2\ y}{N}\right\}\right|\le\rho_1\le 1/8)$。于是

$$\Big\langle\frac{\iota(\Theta_i(x_1))\iota(y)}{N}\Big\rangle+\Big\langle\frac{\iota(\Theta_i(x_2))\iota(y)}{N}\Big\rangle=\Big\langle\frac{\iota(\Theta_i(x_1+x_2))\iota(y)}{N}\Big\rangle,$$

因此我们有

$$0=\sum_{i\in[r_1]}(a_i(x_1+x_2)-a_i(x_1)-a_i(x_2))\Big\langle\frac{\iota(\gamma_i)\iota(y)}{N}\Big\rangle+\sum_{i\in[r_1]}(b_i(x_1+x_2)-b_i(x_1))\Big\langle\frac{\iota(\Theta_i(x_1))\iota(y)}{N}\Big\rangle$$
$$+\sum_{i\in[r_1]}(b_i(x_1+x_2)-b_i(x_2))\Big\langle\frac{\iota(\Theta_i(x_2))\iota(y)}{N}\Big\rangle. \tag{55}$$

但是，命题 C.2 陈述第二部分中的系数唯一性意味着b_i（x_1+x_2） $-b_i$（x_1） $\in N\mathbb{Z}$ 在绝大多数情况下成立。因此，我们得到

$$\psi(x,y)=\sum_{i\in[r_1]}a_i(x)\Big\langle\frac{\iota(\gamma_i)\iota(y)}{N}\Big\rangle+\sum_{i\in[r_1]}b_i\Big\langle\frac{\iota(\Theta_i(x))\iota(y)}{N}\Big\rangle.$$

回到（55），我们还看到 a_i 尊重 X 中几乎所有的加性三元组，因此可以假设它们在 $\frac{1}{2}C$ 上是 Freiman 线性的。将命题 C.2 应用于映射 a_i 和 Θ_i，即可证明该定理。

□

参考文献

[1] A. Balog and E. Szemer´edi，《集合加法的一个统计定理》，Combinatorica **14** (1994)，第 3 期，263–268.[2] V. Bergelson, T.Tao andT.Ziegler，《与 $\mathbb{F}_p^\infty$ 的作用相关的一致性半范数的逆定理》，Geom. Funct. Anal.**19**(2010)，1539–1596.[3] A. Bhowmick and S. Lovett，《大域上多项式的偏差与结构，以及在有效代数几何和编码理论中的应用》，IEEE Trans. Inform. Theory **69**(2022)，963–977.[4] P.-Y. Bienvenu and T. H. Lˆe，《双线性 Bogolyubov 定理》，European J. Combin. **77** (2019)，102–113。

[5] N. Bogolio`uboff, 《关于近似周期的若干算术性质》, 基辅物理与数学教席年刊 (4) (1939年), 185–205.[6] O. A. Camarena and B. Szegedy, 《幂零空间、幂零流形及其态射》, arXiv 预印本 (2010年), arXiv:1009.3825.[7] P. Candela, 《幂零空间札记: 代数方面》, 《离散分析》(2017年), 第 15 号论文, 59 页。[8] P. Candela, 《紧幂零空间札记》, 《离散分析》(2017年), 第 16 号论文, 57 页。[9] P. Candela, D. Gonz´alez-S´anchez and B. Szegedy, 《关于特征为……时的高阶傅里叶分析》, 《遍历理论与动力系统》43 (2023年), 3971–4040。[10] P. Candela, D. Gonz´alez-S´anchez and B. Szegedy, 《有界挠阿贝尔群上 Gowers 范数的逆定理》, arXiv 预印本 (2023年), arXiv:2311.13899.[11] P. Candela, D. Gonz´alez-S´anchez and B. Szegedy, 《通过幂零流形得到所有有限阿贝尔群上的逆定理》, arXiv 预印本 (2025年), arXiv:2512.17468.[12] P. Candela and B. Szegedy, 《一般均匀性半范数的幂零空间因子、立方交换性与极限》, 《美国数学会回忆录》287 (2023年), 第 1425 号。[13] P. Candela and B. Szegedy, 《紧阿贝尔群与幂零流形上一致性范数的正则性与逆定理》, 《纯粹与应用数学杂志》789 (2022年), 1–42.[14] A. Cohen and G. Moshkovitz, 《双线性映射的结构与随机性》, 《离散分析》(2022年), 第 12 号论文, 21 页。[15] E. Croot and O. Sisask, 《一种寻找卷积近似周期的概率方法》, Geom. Funct. Anal. 20 (2010), 1367–1396.[16] S. Eberhard, 《阿贝尔群上的有偏多线性映射》, arXiv 预印本 (2021年), arXiv:2108.01580.[17] W. T. Gowers, 《Szemer´edi 正则性引理的塔式下界》, Geom. Funct. Anal. 20 (1997), 322–337.[18] W. T. Gowers, 《四项等差数列的 Szemer´edi 定理的新证明》, Geom. Funct. Anal. 8 (1998), 529–551.[19] W. T. Gowers, 《Szemer´edi 定理的新证明》, Geom. Funct. Anal. 11 (2001), 465–588.[20] W. T. Gowers, B. Green, F. Manners and T. Tao, 《关于 Marton 猜想》, arXiv 预印本 (2023年), arXiv:2311.05762.[21] W. T. Gowers, B. Green, F. Manners and T. Tao, 《有界挠阿贝尔群中的 Marton 猜想》, arXiv 预印本 (2024年), arXiv:2404.02244.[22] W. T. Gowers and L. Mili´cevi´c, 《Bogolyubov 定理的双线性版本》, 《美国数学会会刊》148 (2020), 4695–4704.[23] W. T. Gowers and L. Mili´cevi´c, 《有限域上 U^4 范数的定量逆定理》, arXiv 预印本 (2017 年), arXiv:1712.00241.[24] W. T. Gowers and L. Mili´cevi´c, 《关于定义在多线性簇上的多线性映射延拓的注记》, 《爱丁堡数学学会会刊》(2) 64 (2021), 148–173.[25] W. T. Gowers and L. Mili´cevi´c, 《Freiman 多重同态的逆定理》, arXiv 预印本 (2020年), arXiv:2002.11667。

[26] B. Green, 《100个未解决问题》，手稿，网址：https://people.maths.ox.ac.uk/greenbj/papers/open-problems.pdf。[27] B. Green 和 T. Sanders, 《调和分析中幂等定理的一个定量版本》，《数学年刊》（第2辑）168（2008年），第3期, 1025–1054。[28] B. Green 和 I.Z. Ruzsa, 《任意阿贝尔群中的 Freiman 定理》，《伦敦数学会杂志》（第2辑）75（2007年），163–175。[29] B. J. Green 和 T. Tao, 《Gowers U^3-范数的一个逆定理》，《爱丁堡数学会会刊》（第2辑）51（2008年），73–153。[30] B. Green 和 T. Tao, 《有限域上多项式的分布及其在 Gowers 范数中的应用》，《离散数学贡献》4（2009年），第2期，1–36。[31] B. Green 和 T. Tao, 《素数中的线性方程》，《数学年刊》（第2辑）171（2010年），1753–1850。[32] B. Green 和 T. Tao, 《M ¨obius 函数与幂零序列强正交》，《数学年刊》（第2辑）175（2012年），541–566。[33] B. Green、T. Tao 和 T. Ziegler, 《Gowers U^4-范数的一个逆定理》，《格拉斯哥数学杂志》53（2011年），1–50。[34] B. Green、T. Tao 和 T. Ziegler, 《Gowers $U^{s+1}[N]$-范数的一个逆定理》，《数学年刊》（第2辑）176（2012年），1231–1372。[35] Y. Gutman、F. Manners 和 P. Varj´u, 《幂零空间的结构理论 I》，《数学分析杂志》140（2020年），299–369。[36] Y. Gutman、F. Manners 和 P. Varj´u, 《幂零空间的结构理论 II：表示为幂零流形》，《美国数学会汇刊》371（2019年），4951–4992。[37] Y. Gutman、F. Manners 和 P. Varj´u, 《幂零空间的结构理论 III：逆极限表示与拓扑动力系统》，《数学进展》365（2020年），107059。[38] K. Hosseini 和 S. Lovett, 《具有多对数上界的双线性 Bogolyubov-Ruzsa 引理》，《离散分析》（2019年），第10篇，14页。[39] A. Jamneshan、O. Shalom 和 T. Tao, 《全不连通 Host–Kra–Ziegler 因子的结构，以及有界挠有限阿贝尔群上 Gowers 一致范数的逆定理》，arXiv 预印本（2023年），arXiv:2303.04860。 U^k A. Jamneshan 和 T. Tao, 《任意有限阿贝尔群上的 U^3 Gowers 均匀范数逆定理：傅里叶分析与遍历方法》，《离散分析》（2023年），第11篇，48页。[41] O. Janzer, 《张量的分割秩与解析秩之间的多项式上界》，《离散分析》（2020年），第7篇，18页。[42] D. Kim、A. Li 和 J. Tidor, 《三次 Goldreich-Levin》，载于《2023年 ACM-SIAM 离散算法研讨会（SODA）论文集》，SIAM，费城，宾夕法尼亚州，2023年，4846–4892。[43] J. Leng, 《幂零序列的高效等分布》，arXiv 预印本（2023年），arXiv:2312.10772。[44]J. Leng, 《周期幂零序列的高效等分布及其应用》，arXiv 预印本（2023年）

，arXiv:2306 .13820.

[45] *J. Leng*、*A. Sah* 和 *M. Sawhney*，*Gowers* $U^{s+1}[N]$范数逆定理的拟多项式界，*arXiv*预印本（*2024*年），*arXiv:2402.17994*。[46] *J. Leng*、*A. Sah* 和 *M. Sawhney*，*Szemer´edi* 定理的改进上界，*arXiv*预印本（*2024*年），*arXiv:2402.17995*。[47] *F. Manners*，循环群上 *Gowers* U^{s+1}范数逆定理的定量界，*arXiv*预印本（*2018*年），*arXiv:1811.00718*。[48] *L. Mili´cevi´c*，关于解析秩的分割秩多项式上界，*Geom. Funct. Anal. 29*（*2019*），*1503–1530*。[49] *L. Mili´cevi´c*，阿贝尔群中的双线性 *Bogolyubov* 论证，《离散分析》（*2024*），论文编号*20*，共*41*页。[50] *L. Mili´cevi´c*，$U^4(\mathbb{F}_p^n)$范数的拟多项式逆定理，*arXiv*预印本（*2024*年），*arXiv:2410.08966*。[51] *L. Mili´cevi´c*，$\mathbb{F}_2^n$上的 *Gowers* 一致范数 U^5 和 U^6 的定量逆定理，《加拿大数学杂志》，即将出版。[52] *G. Moshkovitz* 和 *D. G. Zhu*，分割秩与解析秩之间的准线性关系，*arXiv*预印本（*2022*年），*arXiv:2211.05780*。[53] *I.Z. Ruzsa*，广义等差数列与和集，《匈牙利数学学报》*65*（*1994*），*379–388*。[54] *A. Samorodnitsky*，大距离下的低次测试，*STOC'07*《*ACM*计算理论研讨会年刊》，*ACM*，纽约（*2007*），*506–515*。[55] *T. Sanders*，关于 *Bogolyubov-Ruzsa*引理，《偏微分方程分析》*5*（*2012*），第*3*期，*627–655*。[56] *T. Schoen* 和 *O. Sisask*，四变量的 *Roth*定理及稀疏集之和中的加性结构，《*Forum Math. Sigma*》*4*（*2016*），*e5*，共*28*页。[57] *B. Sudakov*、*E. Szemer´edi* 和 *V. Vu*，关于 *Erd¨os* 和 *Moser* 的一个问题，《杜克数学杂志》*129*（*2005*），*129–155*。[58] *B. Szegedy*，关于高阶傅里叶分析，*arXiv*预印本（*2012*年），*arXiv:1203.2260*。[59] *E. Szemer´edi*，不含等差数列中 *k* 个元素的整数集合，《算术学报》*27*（*1975*），*199–245*。[60] *E. Szemer´edi*，图的正则划分，载于《*CNRS*国际研讨会论文集》（*J.-C. Bermond*、*J.-C. Fournier*、*M. Las Vergnas*、*D. Sotteau* 编）（*1978*），*399–401*。[61] *T. C. Tao* 和 *V. H. Vu*，《加法组合学》，剑桥高等数学研究丛书第*105*卷，剑桥大学出版社，剑桥，*2010*年。[62] *T. C. Tao* 和 *T. Ziegler*，通过对应原理研究有限域上 *Gowers*范数的逆猜想，《偏微分方程分析》*3*（*2010*），*1–20*。[63] *T. Tao* 和 *T. Ziegler*，低特征下有限域上 *Gowers*范数的逆猜想，《组合年刊》*16*（*2012*），*121–188*。[64] *J. Tidor*，低特征有限域上 U^4逆定理的定量界，《离散分析》（*2022*），论文编号*14*，共*17*页。