arXiv:2601.01707v1 [math.RT] 5 Jan 2026

虚拟奇异双生幺半群与群：表示与表示

Carmen Caprau 和 Mohamad N. Nasse R

Abstract. 本文介绍虚拟奇异双生幺半群和虚拟奇异双生群的代数定义及表示，分别记为 $VSTM_n$ 和 VST_n，其中 n 为正整数。这些结构扩展了双生群 T_n，其方式与虚拟奇异辫幺半群和虚拟奇异辫群扩展经典辫子群的方式十分相似。随后，我们构造并研究群 VST_n（其中$n \geq 3$）的表示，尤其关注通过 2-局部扩张方法，将 M. Nasser 引入的 T_n 的表示 η_1 和 η_2 扩展到 VST_n。为分析所得表示 η_1' 和 η_2' 及其性质，我们建立了不可约性的充要条件，并证明 η_1' 和 η_2' 均不忠实。此外，我们还对每个整数 $n \geq 3$，分类了 VST_n 的所有复齐次 2-局部表示，为进一步研究 VST_n 的表示奠定基础。

1. Introduction

由 n 条辫股组成的辫群记作 B_n，由 E. Artin 于1926年引入，其生成元为 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$，称为经典辫子生成元（参见 [2, 3]）。20 世纪 90 年代，J. Baez 在 [4] 中以及 J. Birman 在 [6], 中分别独立引入了奇异辫子幺半群 SM_n。该幺半群由 B_n 的经典辫子生成元 $\sigma_1^{\pm 1}, \sigma_2^{\pm 1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$ 以及一组奇异生成元 $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}$生成。1998年，R. Fenn、E. Keyman 和 C. Rourke 证明了SM_n 可嵌入一个群，该群记作 SB_n，称为奇异辫群 [10]。

在此框架的基础上，C. Caprau 等人于2016年在 [7] 中引入了虚拟奇异辫子幺半群 VSM_n，它由经典辫子生成元 $\sigma_1^{\pm 1}, \sigma_2^{\pm 1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$、奇异生成元 $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}$ 以及一组额外的虚拟生成元 $\nu_1^{\pm 1}, \nu_2^{\pm 1}, \ldots, \nu_{n-1}^{\pm 1}$生成。2024年，C. Caprau 和 A. Yeung 证明了 VSM_n 可嵌入一个群，该群记作 VSB_n，称为虚拟奇异辫子群 [9]。幺半群 VSM_n 包含虚拟辫群 VB_n [12,13, 14, 15] 和奇异辫子幺半群 SM_n作为子集。

代数结构 B_n、VB_n、SM_n、SB_n、VSM_n 和 VSB_n 已在低维拓扑和几何研究中得到广泛应用。辫群 B_n 在纽结理论中发挥着核心作用，因为每个链环都可以表示为某个辫 [1, 18] 的闭包。它还自然地出现在构形空间和映射类群 [5] 的研究中。奇异辫子幺半群 SM_n 为研究奇异纽结和 Vassiliev 不变量提供了强大的代数框架

Key words and phrases. 辫群、双生群、虚奇异孪生群、局部表示。
Mathematics Subject Classification. 主要分类：20F36。

[4, 6]。另一方面，虚拟辫群 VB_n 和虚拟奇异辫子幺半群 VSM_n 将这些思想拓展到虚拟纽结理论领域，分别使人们能够研究加厚曲面中的曲线嵌入和曲线浸入，以及它们的同伦类 [13]。这些发展表明，对经典辫子群的推广丰富了代数结构与几何拓扑之间的相互作用。

另一个值得考虑的重要群是由 n 条辫股上的双生群，记为 T_n。它是一个直角考克斯特群，由元素 s_1、$s_2 \ldots, s_{n-1}$ 生成。该群最早由 G. Shabat 和 V. Voevodsky 于 1990年 引入 [28], ，随后由 M. Khovanov 研究 [16, 17], ，并给出了类似于辫群 B_n 的几何解释。此后，同一代数结构在文献中也以不同名称出现，例如文献 [21] 中的平扁辫群和文献 [23] 中的平面辫群。最近，2025年，M. Nasser 和 N. Chbili [27] 引入了奇异孪生群 ST_n，它是通过添加一族奇异生成元 τ_1、$\tau_2 \ldots, \tau_{n-1}$ 对双生群进行扩张而得到的，这些生成元满足类似于定义奇异辫群的关系。

双生群及其扩展在研究涂鸦、平扁纽结等几何与拓扑结构时发挥着重要作用。特别是，群 T_n 捕捉了平面中缺乏上下交叉信息 [17, 11] 的浸入曲线构形的组合性质和同位性质。这些结构为分析平面链环图、里德迈斯特型变换，以及曲面上涂鸦的等价类提供了代数模型。奇异双生幺半群通过引入辫股之间的奇异相互作用，进一步丰富了这一框架，为研究奇异涂鸦及相关纽结理论结构提供了新的视角。

对这些代数结构的研究自然引出了从代数角度考察其表示。表示论为理解辫群和双生群等群与幺半群提供了强有力的框架：它将每个生成元对应到一个矩阵，同时保留代数关系。此类表示的关键特征包括忠实性，即确保不同的代数元素对应不同的矩阵（也就是说，该表示是单射）；以及不可约性，即保证该表示不存在真非平凡不变子空间（也就是说，该表示没有非平凡子表示）。

本文旨在引入新的代数结构，以扩展双生群和奇异孪生群。第 2 节回顾辫群和双生群的相关文献，并介绍 k-局部表示的概念，尤其关注已知的齐次 2-局部表示。第 3 节通过生成元和关系引入虚拟奇异双生幺半群 $VSTM_n$ 和虚奇异孪生群 VST_n 。第 4 节探讨虚奇异孪生群的表示，重点关注如何通过 2-局部扩张方法，将双生群 T_n 的已知表示 η_1 和 η_2 扩展到 VST_n （定理 14 和 17）。随后，我们给出这些新表示不可约的充要条件（定理 15 和 18）。第 5 节对所有 $n \geq 3$的 VST_n 的复齐次 2-局部表示进行分类，为今后深入研究 VST_n更广泛的表示理论奠定基础。最后，第 6 节给出虚拟奇异双生幺半群 $VSTM_n$的其他表示。

2. Braid Groups, Twin Groups, and Local Representations

我们首先简要概述与本文结果的推导相关的幺半群和群，以及它们的一些表示。

定义 1. n 股上的奇异辫子幺半群 [4, 6], 记为 SM_n，是由元素 $\{\sigma_i, \sigma_i^{-1}, \tau_i \,|\, 1 \leq i \leq n-1\}$生成并满足以下关系的幺半群:

$$\sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j, \qquad |i-j| = 1, \tag{1}$$
$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \qquad |i-j| \geq 2, \tag{2}$$
$$\sigma_i\sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1}\sigma_i, \qquad \textit{for all } i, \tag{3}$$
$$\tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i, \qquad |i-j| \geq 2, \tag{4}$$
$$\tau_i\sigma_j = \sigma_j\tau_i, \qquad |i-j| \geq 2, \tag{5}$$
$$\tau_i\sigma_i = \sigma_i\tau_i, \qquad \textit{for all } i, \tag{6}$$
$$\sigma_i\sigma_j\tau_i = \tau_j\sigma_i\sigma_j, \qquad |i-j| = 1. \tag{7}$$

n 股上的辫群 [2, 3], 记为 B_n，其表示为

$$< \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \,|\, Relations\,(1), (2) > .$$

令生成元 τ_i 对所有 $1 \leq i \leq n-1$均可逆，由此得到一个扩张 B_n的群。该群由 $\{\sigma_i, \tau_i \,|1 \leq i \leq n-1\}$生成，称为奇异辫群，记为 SB_n [10]。元素 σ_i 和 τ_i 分别称为辫生成元和奇异生成元。

图 1 展示了辫生成元 σ_i 和奇异生成元 τ_i的图示表示，以及它们各自的逆元 σ_i^{-1} 和 τ_i^{-1} 。我们指出，其他文献中对 σ_i 和 σ_i^{-1} 的图示表示采用了相反的约定，但这不会影响我们在此讨论的结果。

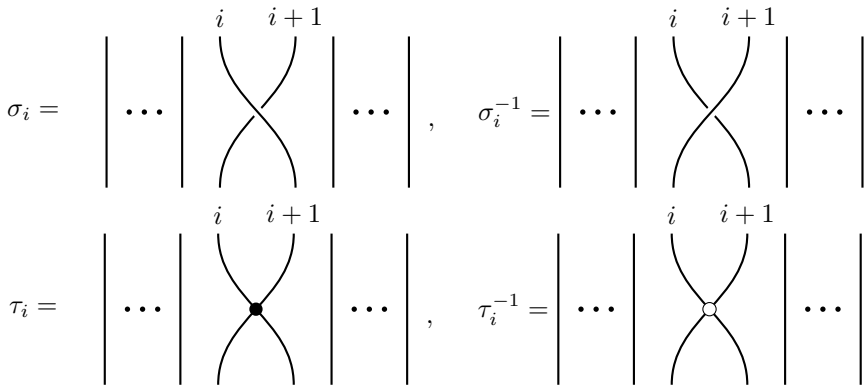

Figure 1. 生成元 σ_i 和 τ_i 及其逆元

在以图示方式处理 SB_n （或 B_n）的元素时，我们称它们为具有 n 股的奇异辫（或经典辫）。通过将这些辫子上下叠放并连接端点，我们可以将它们复合。

定义 2。具有 n 股的虚拟奇异辫子幺半群 [7, 8, 9]，，在此记作 VSM_n，是由 SM_n 中的元素 σ_i、σ_i^{-1} 和 τ_i，以及对所有 $1 \leq i \leq n-1$ 的元素族 ν_i 生成的幺半群。除幺半群 SM_n 的关系 (1) 至 (7) 外，VSM_n 的生成元还满足以下关系：

$$\nu_i^2 = 1, \qquad for\ all\ i, \tag{8}$$
$$\nu_i\nu_j\nu_i = \nu_j\nu_i\nu_j, \qquad |i-j| = 1, \tag{9}$$
$$\nu_i\sigma_j\nu_i = \nu_j\sigma_i\nu_j, \qquad |i-j| = 1, \tag{10}$$
$$\nu_i\tau_j\nu_i = \nu_j\tau_i\nu_j, \qquad |i-j| = 1, \tag{11}$$
$$\nu_i\nu_j = \nu_j\nu_i, \qquad |i-j| \geq 2, \tag{12}$$
$$\nu_i\sigma_j = \sigma_j\nu_i, \qquad |i-j| \geq 2, \tag{13}$$
$$\nu_i\tau_j = \tau_j\nu_i, \qquad |i-j| \geq 2. \tag{14}$$

令生成元 τ_i 可逆并添加其逆元，可得到 B_n 和 SB_n 的群扩张，由 $\{\sigma_i, \tau_i, \nu_i \,|\, 1 \leq i \leq n-1\}$ 生成。这个群称为虚拟奇异辫子群，记作 VSB_n [9]。

含有 n 条辫股的虚拟辫群 [12, 13, 14, 15]，记作 VB_n，它是由 $\{\sigma_i, \nu_i \,|\, 1 \leq i \leq n-1\}$ 生成并满足以下关系 (1)、(2)、(8)、(9)、(10)、(12) 和 (13) 的群。

虚拟生成元 ν_i 通常如图2所示以图示方式表示。

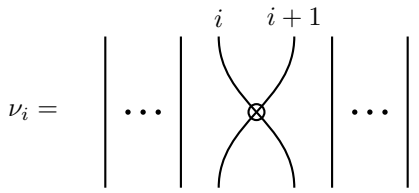

FIGURE 2. 生成元 ν_i

定义 3。 [28] 含有 n 条辫股的双生群记作 T_n，它是由元素 s_i生成的，其中 $1 \leq i \leq n-1$，并满足以下关系：

$$s_i^2 = 1, \qquad for\ all\ i, \tag{15}$$
$$s_is_j = s_js_i, \qquad |i-j| \geq 2. \tag{16}$$

我们将生成元 s_i 如图3所示以图示方式表示，并将它们称为双生元素。

定义 4。 [27] 在 n 条辫股上定义的奇异双生幺半群记为 STM_n，它是由 $\{s_i, \tau_i \,|\, 1 \leq i \leq n-1\}$ 生成的幺半群，其中 s_i 是 T_n 的双生元素，而 τ_i 是 SM_n 的奇异元素。除 T_n 的关系 （15） 和（16） 以及 SM_n 的关系 （4） 之外，STM_n 的生成元还满足以下关系：

$$\tau_is_j = s_j\tau_i, \qquad |i-j| \geq 2, \tag{17}$$
$$\tau_is_i = s_i\tau_i, \qquad for\ all\ i, \tag{18}$$
$$s_is_j\tau_i = \tau_js_is_j, \qquad |i-j| = 1. \tag{19}$$

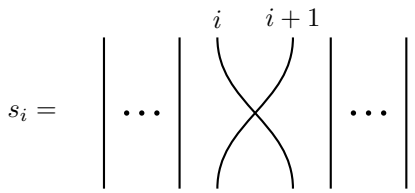

FIGURE 3. 生成元 s_i

规定生成元 τ_i 可逆并添加其逆元后，我们得到 T_n 的一个群扩张，由 $\{s_i, \tau_i \,|\, 1 \le i \le n-1\}$ 生成。该群称为奇异李生群，记为 ST_n。

现在我们将介绍群G的 k-局部表示这一概念，它将成为本文的一项关键工具。

定义 5. [24] 设 t 为一个不定元，设 G 为由一个表示定义的群，其生成元为 g_1、g_2、…、g_{n-1}.。若一个表示 $\theta\colon G \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$满足以下条件，则称其为 k-局部表示：

$$\theta(g_i) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & M_i & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right) \quad for\ all\ 1 \le i \le n-1,$$

其中 $M_i \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$，且 $k = m-n+2$， I_r为单位矩阵。若所有矩阵 M_i 都相等，则称该k-局部表示为齐次表示。

注 6. k-局部表示这一概念可以扩展到由 $q(n-1)$ 个元素生成的群 G，其中这些元素被划分为 q个互不相交的类，每类包含 $n-1$ 个生成元。例如，若 $q=3$、 t 为一个不定元，且 G 为一个以 $\{g_i, h_i, p_i \,|\, 1 \le i \le n-1\}$为生成元的群，则 k-局部表示 $\theta\colon G \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ 是由下式给出的表示：

$$\theta(g_i) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & G_i & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right), \qquad \theta(h_i) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & H_i & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right),$$

and

$$\theta(p_i) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & P_i & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right),$$

对于 $1 \le i \le n-1$，其中 $G_i, H_i, P_i \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$， $k = m-n+2$，且 I_r 是 $r \times r$单位矩阵。此外，对于所有 $i \ne j$，若 $G_i = G_j, H_i = H_j$ 和 $P_i = P_j$，则 θ 是齐次的。

问题 7. 给定群 G 的一个齐次 k-局部表示 θ， θ 可能具有哪些结构特征和代数性质？

近年来， k-局部表示的研究取得了显著进展。对辫群这类表示的研究始于 Y. Mikhalchishina 在 [22], 的工作；她分类了所有 $n \ge 3$ 下的复二维局部表示B_3, 以及所有 $n \ge 3$ 下的复齐次 2-局部表示 B_n。在此基础上，T. Mayassi 和 M. Nasser 在 [19] 研究了复

对于所有 $n \geq 4$， B_n 的齐次三局部表示。同一篇论文中，他们还分类了所有 $n \geq 2$下奇异辫子幺半群 SM_n 的复齐次 2-局部表示，以及所有 $n \geq 4$下SM_n 的复齐次三局部表示。

另一方面，关于双生群的 k-局部表示，T. Mayassi 和 M. Nasser 对 [20] 中所有 $n \geq 2$ 的 2-局部表示进行了完整分类。随后，M. Nasser 进一步在 [26] 中对双生群 T_n、虚挛生群 VT_n 和焊接挛生群 WT_n 的所有 3-局部表示进行了分类，其中 $n \geq 4$ 均成立。此外，在 [25], 中，M. Nasser 针对 T_n 引入了两个特定表示，分别记为 N_1 和 N_2，其中 $n \geq 2$ 均成立。

现在我们给出这些表示的定义和关键性质。

定义 8。 [25] N_1-表示 $\eta_1 : T_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$，其中 t 是一个不定元，其定义如下：

$$\eta_1(s_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \\ \hline 0 & 1-t & t & 0 \\ & 2-t & t-1 & \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{n-i-1} \end{array}\right) \text{ for } 1 \leq i \leq n-1.$$

定理 9。 [25] 表示 $\eta_1 : T_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ 对所有 $n \geq 3$ 均为次数 $n-1$ 的可约表示；当 $n = 2$ 和 $n = 3$ 时，它是忠实的。此外，其 $(n-1)$-合成因子的复特化，即 η_1'： $T_n \to \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$，当且仅当 $t \neq \frac{2n-2}{n-2}$ 和 $t \neq 2$ 时不可约。

定义10。 [25] N_2表示 η_2： $T_n \to \mathrm{GL}_n$（$\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$），其中 t 是一个不定元，该表示定义为

$$\eta_2(s_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \\ \hline & 0 & f(t) & \\ 0 & \frac{1}{f(t)} & 0 & 0 \\ & & & \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{n-i-1} \end{array}\right) \text{ for } 1 \leq i \leq n-1,$$

其中 $f(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ 与 $f(t)$ 在 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$中可逆。

定理11。 表示 η_2： $T_n \to GL_n$（$\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$） 是可约的。此外，对于 $n = 2$， η_2 是忠实的；而对于所有 $n \geq 3$，它都不忠实。

3. The Virtual Singular Twin Monoid and Group

类比于虚拟奇异辫子幺半群和虚拟奇异辫子群的构造，本节将引入两种相关的代数结构：虚拟奇异双生幺半群和虚拟奇异双生群。这些结构的定义方式与相应的辫结构相仿，同时也展现出源自双生群框架的独特性质和关系。我们的目标是正式定义这些结构，并研究它们的生成集和定义关系。

定义12。 n 辫股上的虚拟奇异双生幺半群，记作 $VSTM_n$，是由元素 $\{s_i, \tau_i, \nu_i \,|\, 1 \leq i \leq n-1\}$ 生成并满足以下

关系的幺半群:

$$s_i^2 = 1 \text{ and } \nu_i^2 = 1, \text{ for all } i \tag{20}$$
$$\tau_i s_i = s_i \tau_i, \quad \text{for all } i \tag{21}$$
$$s_i s_j \tau_i = \tau_j s_i s_j, \text{ for } |i-j| = 1 \tag{22}$$
$$\nu_i \nu_j \nu_i = \nu_j \nu_i \nu_j, \text{ for } |i-j| = 1 \tag{23}$$
$$\nu_i s_j \nu_i = \nu_j s_i \nu_j, \text{ for } |i-j| = 1 \tag{24}$$
$$\nu_i \tau_j \nu_i = \nu_j \tau_i \nu_j, \text{ for } |i-j| = 1 \tag{25}$$
$$g_i h_j = h_j g_i, \quad \text{for } |i-j| \geq 2, \text{ where } g_i, h_i \in \{s_i, \tau_i, \nu_i\}. \tag{26}$$

通过规定生成元 τ_i 可逆并加入其逆元 τ_i^{-1}，我们分别得到了双生群 T_n 和奇异双生群 ST_n 的群扩张。我们将此群称为虚奇异李生群，并记作 VST_n。

将 $VSTM_n$ 和 VST_n 的元素以图示方式表示时，我们称它们为 虚拟奇异双辫。这类辫子的复合方式与先前定义的幺半群和群中的复合方式类似，即将一条辫子置于另一条辫子之上，并连接它们的端点。

我们注意到，由于对于所有 i 都有 $s_i^2 = 1$，关系 $s_i s_j \tau_i = \tau_j s_i s_j$ 等价于关系 $s_i \tau_j s_i = s_j \tau_i s_j$，对所有 $|i-j| = 1$ 均成立。对于 $|i-j| = 1$，我们将关系 $\nu_i \nu_j \nu_i = \nu_j \nu_i \nu_j$、$\nu_i s_j \nu_i = \nu_j s_i \nu_j$ 和 $\nu_i \tau_j \nu_i = \nu_j \tau_i \nu_j$ 统称为绕行关系。最后，我们将定义12中的最后一组关系称为交换关系。

存在一个显然的群同态，通过以下映射将 VST_n 中的每个虚拟奇异双辫关联到 S_n 中的一个置换:

$$\pi : VST_n \to S_n, \ \pi(s_i) = \pi(\tau_i) = \pi(\nu_i) = (i, i+1), \text{ for all } 1 \leq i \leq n-1.$$

我们将 π 扩展到 VST_n 中的所有元素，使得 π 是一个群同态。由于集合 $\{(i, i+1) \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ 生成 S_n，映射 π 是满射。通过将 ν_i 与换位 $(i, i+1)$ 进行对应，我们可以将 S_n 视为由 $\{\nu_i \,|\, 1 \leq i \leq n-1\}$ 生成的 VST_n 的一个子群。其关联置换为恒等置换的虚拟奇异双辫构成 VST_n 的一个正规子群。

定义 13。 我们将 π 的核称为虚拟奇异纯李生群，并记为 $VSPT_n$。我们将 $VSPT_n$ 的元素称为虚拟奇异纯李生辫。

显然， $VSPT_n$ 是 VST_n 和$VST_n/VSPT_n \cong S_n$的正规子群。

在第 6 节中，我们将为虚拟奇异双生幺半群 $VSTM_n$ 提供三种替代表示。

4. On the Extensions of the Representations η_1 and η_2 of T_n to VST_n

本节中，我们考察虚奇异李生群 VST_n 关于 $n \geq 3$ 的所有可能的齐次 2-局部表示，这些表示扩展了定义 8 和 10 中介绍的 T_n 的表示η_1 和 η_2 。我们还将探讨这些扩展表示的一些性质。本节中，我们始终假设$n \geq 3$。

定理14。 设 η_1' : $VST_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$，其中 t 是一个不定元，且这是 VST_n 的一个齐次 2-局部表示，并扩展了定义 *8* 中给出的表示 η_1。那么，η_1' 对 VST_n 的生成元的作用如下：

$$\eta_1'(s_i) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{cc} 1-t & t \\ 2-t & t-1 \end{array} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right),$$

$$\eta_1'(\tau_i) = I_n,$$

$$\eta_1'(\nu_i) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{cc} 0 & v(t) \\ \dfrac{1}{v(t)} & 0 \end{array} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right),$$

对于 $1 \le i \le n-1$，其中 $v(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$，且 $v(t)$ 在 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ 中可逆。

证明。 由于 η_1' 扩展了 η_1，因此可得

$$\eta_1'(s_i) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{cc} 1-t & t \\ 2-t & t-1 \end{array} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right) \text{ for } 1 \le i \le n-1.$$

由于 η_1' 是齐次 2-局部表示，我们可以设

$$\eta_1'(\tau_i) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{cc} w(t) & x(t) \\ y(t) & z(t) \end{array} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right) \text{ and } \eta_1'(\nu_i) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{cc} u(t) & v(t) \\ r(t) & s(t) \end{array} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right)$$

对于 $1 \le i \le n-1$，其中 $w(t)$ $x(t)$ $y(t)$ $z(t)$ $u(t)$ $v(t)$ $r(t)$ $s(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$。要使 η_1' 成为 VST_n 的表示，它必须保持 VST_n 中的定义关系。注意，由于我们讨论的是齐次 2-局部表示，只需考虑 VST_n 的生成元之间的以下关系：

$$\nu_1^2 = 1, \tag{27}$$

$$s_1\tau_1 = \tau_1 s_1, \tag{28}$$

$$s_1 s_2 \tau_1 = \tau_2 s_1 s_2, \tag{29}$$

$$s_2 s_1 \tau_2 = \tau_1 s_2 s_1, \tag{30}$$

$$\nu_1\nu_2\nu_1 = \nu_2\nu_1\nu_2, \tag{31}$$

$$\nu_1 s_2 \nu_1 = \nu_2 s_1 \nu_2, \tag{32}$$

$$\nu_1 \tau_2 \nu_1 = \nu_2 \tau_1 \nu_2. \tag{33}$$

通过要求 η_1' 保持这些关系，我们推导出一个包含八个未知数的方程组。通过直接代数方法求解该方程组，即可得到所需结果。□

定理15。 当 t 是一个不定元时，表示 η_1' : $VST_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ 不可约，当且仅当 $v(t) \neq 1$。

证明。对于必要条件，设 $v(t)=1$。我们可以直接看出，列向量 $(1,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 1)^T$ 在所有 $1\le i\le n-1$ 下均为 $\eta_1'(s_i)$ $\eta_1'(\tau_i)$、和 $\eta_1'(\nu_i)$ 的不变向量。因此，$(1,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 1)^T$ 是 η_1' 的不变向量，进而 η_1' 是可约的。

对于充分条件，假设 $v(t)\neq 1$。我们以下述方式引入 η_1' 的一个等价表示，即 η_1''。令

$$D=\operatorname{diag}\left(v(t)^{n-1},v(t)^{n-2},\ldots,v(t),1\right),$$

其中，$\operatorname{diag}(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 表示对角元为 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 的 $n\times n$ 对角矩阵。通过以下方式定义 VST_n 的一个新表示 η_1''：

$$\eta_1''=D^{-1}\eta_1'D.$$

根据其定义，我们可以直接看出 η_1'' 与 η_1' 等价，并得到 η_1'' 在 VST_n 的生成元上的作用如下：

$$\eta_1''(s_i)=\left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & \multicolumn{2}{c|}{0} & 0\\ \hline 0 & 1-t & \frac{t}{v(t)} & 0\\ & (2-t)v(t) & t-1 & \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{n-i-1}\end{array}\right),$$

$$\eta_1''(\tau_i)=I_n,$$

$$\eta_1''(\nu_i)=\left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & \multicolumn{2}{c|}{0} & 0\\ \hline 0 & 0 & 1 & 0\\ & 1 & 0 & \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{n-i-1}\end{array}\right).$$

现在，为了导出矛盾，假设 η_1' 是可约的。那么，它的等价表示 η_1'' 也必定是可约的。因此，存在一个非平凡子空间$U\subset\mathbb{Z}^n[t^{\pm1}]$，它在 η_1'' 的作用下保持不变。取一个非零向量$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T\in U$。我们注意到

$$\eta_1''(\nu_i)(x)-x=(x_{i+1}-x_i)(e_i-e_{i+1})\in U$$

对所有 $1\le i\le n-1$，其中 e_1、e_2、……、e_n 表示$\mathbb{Z}^n[t^{\pm1}]$的标准基向量。我们可以选取 x，使得存在 $1\le j\le n-1$ 满足 $x_j\neq x_{j+1}$；否则，U 将由 $(1,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 1)^T$ 生成，这与 $v(t)\neq 1$矛盾，因为 U 在 $\eta_1''(s_i)$ 下是不变的。因此，存在 $1\le j\le n-1$ 使得 $e_j-e_{j+1}\in U$。此外，

$$\eta_1''(\nu_{j+1})(e_j-e_{j+1})-(e_j-e_{j+1})=e_{j+1}-e_{j+2}\in U$$

and

$$\eta_1''(\nu_{j-1})(e_j-e_{j+1})-(e_j-e_{j+1})=e_{j-1}-e_j\in U.$$

继续这一递归过程，我们得到

$$e_i-e_{i+1}\in U\text{ for all }1\le i\le n-1.\tag{E}$$

现在，我们可以看到

$$\eta_1''(s_1)(e_1-e_2)-\left(1-t-\frac{t}{v(t)}\right)(e_1-e_2)=\left((2-t)v(t)+2-2t-\frac{t}{v(t)}\right)e_2\in U.$$

但 e_2 不可能是 U 的元素，因为否则根据方程（E），对于所有 $1\le i\le n$，我们都有 $e_i\in U$，从而得到 $U=\mathbb{Z}^n[t^{\pm1}]$，这就产生了矛盾。因此，

我们有

$$(2-t)v(t)+2-2t-\frac{t}{v(t)}=0.$$

解此方程可得 $v(t)$，这意味着 $v(t) = -1$ 或 $v(t) = \dfrac{t}{2-t}$。但 $\dfrac{t}{2-t} \notin \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$，因此 $v(t) = -1$。现在，我们可以看出，在我们的情形下，

$$\eta_1''(s_1)(e_2-e_3)+t(e_1-e_2)=-e_2-e_3\in U.$$

但根据方程（E），$e_2 - e_3 \in U$，这意味着 $e_2 \in U$，从而导致矛盾。这就完成了证明：在此情形下，η_1'' 是不可约的，因此 η_1' 也不可约。□

命题16。表示 $\eta_1' : VST_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$，其中 t 是不定元，对所有 $n \geq 3$ 均不忠实。

证明。证明很直接：对所有 $1 \leq i \leq n-1$ 而言，元素 τ_i，都映射为单位矩阵 I_n。□

定理17。设 $\eta_2' : VST_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$，其中 t 为不定元，是 VST_n 的齐次 2-局部表示，并且扩展了定义*10*中给出的表示 η_2。那么，η_2' 对 VST_n 生成元的作用定义如下：

$$\eta_2'(s_i)=\left(\begin{array}{c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{cc} 0 & f(t) \\ \dfrac{1}{f(t)} & 0 \end{array} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right),$$

$$\eta_2'(\tau_i)=\left(\begin{array}{c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{cc} w(t) & f^2(t)y(t) \\ y(t) & w(t) \end{array} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right),$$

$$\eta_2'(\nu_i)=\left(\begin{array}{c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{cc} 0 & v(t) \\ \dfrac{1}{v(t)} & 0 \end{array} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right),$$

对于 $1 \leq i \leq n-1$，其中 $f(t)\ w(t)\ y(t)\ v(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$、$f(t)$和 $v(t)$在 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$中可逆。

证明。证明与定理14的证明类似。□

定理18。表示 $\eta_2' : VST_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$，其中 t 是不定元，当且仅当 $f(t) \neq v(t)$ 或 $w(t) + f^2(t)y(t)v(t) \neq 1$ 或

$$v(t)y(t)+w(t)\neq 1.$$

证明。与定理15的证明一样，我们引入 η_2' 的一个等价表示，记为 η_2''，定义如下。令

$$C=\mathrm{diag}\left(v(t)^{n-1},v(t)^{n-2},\ldots,v(t),1\right),$$

并设

$$\eta_2'' = C^{-1}\eta_2' C.$$

注意，我们可以将 η_2'' 对 VST_n 的生成元的作用描述如下：

$$\eta_2''(s_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & & 0 \\ \hline & 0 & \frac{f(t)}{v(t)} & \\ 0 & \frac{v(t)}{f(t)} & 0 & 0 \\ & & & \\ \hline 0 & 0 & & I_{n-i-1} \end{array}\right),$$

$$\eta_2''(\tau_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & & 0 \\ \hline & w(t) & \frac{f^2(t)y(t)}{v(t)} & \\ 0 & v(t)y(t) & w(t) & 0 \\ & & & \\ \hline 0 & 0 & & I_{n-i-1} \end{array}\right),$$

$$\eta_2''(\nu_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & & 0 \\ \hline & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & I_{n-i-1} \end{array}\right)$$

对所有 $1 \le i \le n-1$ 均成立。

对于必要条件，假设 $f(t) = v(t)$，$w(t) + \frac{f^2(t)y(t)}{v(t)} = 1$，且 $v(t)y(t) + w(t) = 1$. 。于是，我们可以直接观察到，列向量 $(1, 1, \ldots, 1)^T$ 在 $\eta_2''(s_i)$、$\eta_2''(\tau_i)$，以及 $\eta_2''(\nu_i)$ 的作用下保持不变，对所有 $1 \le i \le n-1$ 均成立。因此，η_2'' 是可约的，这意味着 η_2' 也是可约的。

现在，对于充分条件，假设 $f(t) \neq v(t)$ 或 $w(t) + \frac{f^2(t)y(t)}{v(t)} \neq 1$，或 $v(t)y(t) + w(t) \neq 1$. 。反设 η_2' 可约。于是，其上文介绍的等价表示 η_2'' 也必定可约。因此，存在一个非平凡子空间 $U \subset \mathbb{Z}^n[t^{\pm 1}]$，在 η_2'' 的作用下保持不变。按照定理15的证明中的相同推理，并在我们的条件下，可以得到方程（E）在此处也成立。回顾一下，方程（E）如下：

$$e_i - e_{i+1} \in U \text{ for all } 1 \le i \le n-1. \tag{E}$$

现在我们分别考虑每种情况。

(a) 假设 $f(t) \neq v(t)$。在这种情况下，我们有

$$\eta_2''(s_1)(e_2 - e_3) - \frac{f(t)}{v(t)}(e_1 - e_2) - (e_2 - e_3) = \left(\frac{f(t)}{v(t)} - 1\right) e_2 \in U.$$

Since $\frac{f(t)}{v(t)} - 1 \neq 0$, it follows that $e_2 \in U$. By Equation (E), this implies that $e_i \in U$ for all $1 \le i \le n-1$, which is a contradiction.

(b) 假设 $w(t) + \frac{t^2 y(t)}{v(t)} \neq 1$。这里，我们有

$$\eta_2''(\tau_1)(e_2 - e_3) - \frac{f^2(t)y(t)}{v(t)}(e_1 - e_2) - (e_2 - e_3) = \left(w(t) + \frac{f^2(t)y(t)}{v(t)} - 1\right) e_2 \in U.$$

由于 $w(t) + f^2(t)y(t)v(t) - 1 \neq 0$，我们再次得到 $e_2 \in U$，从而得到相同的

c如上所述的矛盾。

(c) 假设 $v(t)y(t) + w(t) \neq 1$。那么，

$\eta_2''(\tau_2)(e_1 - e_2) - (e_1 - e_2) - v(t)y(t)(e_2 - e_3) = (-w(t) - v(t)y(t) + 1)e_2 \in U$.再次，由于 $-w(t) - v(t)y(t) + 1 \neq 0$，我们得到 $e_2 \in U$，从而产生同样的矛盾。

在所有情况下，我们都会得到矛盾，这表明不存在非平凡的不变子空间 U。因此， η_2''（等价地， η_2'）在此情形下是不可约的，证明得证。□

命题19。表示 η_2' ： $VST_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$（其中 t 是不定元）对所有 $n \geq 3$ 均不忠实。

证明。由于定理11表明， η_2' 在孪生群T_n 上的限制是不忠实的，因此结论立即成立。□

总之，对于所有 $n \geq 3$，我们已分类了 VST_n 的齐次 2-局部表示中可扩展 T_n 的 η_1 和 η_2 表示的部分，并考察了它们在不可约性和忠实性方面的性质。由此自然引出以下问题。

问题20。是否有可能构造 VST_n 的非局部表示，使其扩展 T_n的 η_1 和 η_2 表示?

5. Complex Homogeneous Local Representations of the Virtual Singular Twin Group

本节中，对于所有 $n \geq 3$，我们确定了 VST_n 的所有复齐次 2-局部表示。

定理 21。设 $n \geq 3$，并设 Υ： $VST_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 是 VST_n的一个复齐次2-局部表示。那么， Υ 等价于以下六个表示之一 Υ_j、$1 \leq j \leq 6$，其中

$$\Upsilon_j(s_i) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & S_j & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right),$$

$$\Upsilon_j(\tau_i) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & T_j & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right),$$

and

$$\Upsilon_j(\nu_i) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & V_j & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right).$$

(1) $\Upsilon_1 : VST_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}, T_1 = \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{y}{b^2} & x \end{pmatrix}, \text{and } V_1 = \begin{pmatrix} 0 & v \\ \frac{1}{v} & 0 \end{pmatrix},$$

where $b, x, y, v \in \mathbb{C}, b \neq 0, x^2 - \dfrac{y^2}{b^2} \neq 0, v \neq 0.$

(2) $\Upsilon_2 : VST_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得

$$S_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-bc} & b \\ c & \sqrt{1-bc} \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \textit{and } V_2 = \begin{pmatrix} 0 & v \\ \dfrac{1}{v} & 0 \end{pmatrix},$$

where $b, c, v \in \mathbb{C}, v \neq 0.$

(3) $\Upsilon_3 : VST_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得

$$S_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \textit{and } V_3 = \begin{pmatrix} 0 & v \\ \dfrac{1}{v} & 0 \end{pmatrix},$$

where $b, c, v \in \mathbb{C}, v \neq 0.$

(4) $\Upsilon_4 : VST_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得

$$S_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \textit{and } V_4 = \begin{pmatrix} 0 & v \\ \dfrac{1}{v} & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $v \in \mathbb{C}, v \neq 0$。

(5) $\Upsilon_5 : VST_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得

$$S_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \textit{and } V_5 = \begin{pmatrix} 0 & v \\ \dfrac{1}{v} & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $v \in \mathbb{C}, v \neq 0$。

(6) $\Upsilon_6 : VST_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得

$$S_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \textit{and } V_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

证明。令

$$\Upsilon(s_i) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & S & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right),$$

$$\Upsilon(\tau_i) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & T & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right),$$

and

$$\Upsilon(\nu_i) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & V & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right),$$

其中

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \text{ and } V = \begin{pmatrix} u & v \\ r & s \end{pmatrix},$$

其中有 a、b、c、d、x、y、z、t、u、v、r、$s \in \mathbb{C}$、$ad - bc \neq 0$、$xt - yz \neq 0$, 以及 $us - rv \neq 0$。为确定矩阵 S、T和 V，我们施加条件：Υ 保持

保持 VST_n的定义关系。与定理14的证明一样，由于 Υ 是一个复齐次 2-局部表示，只需考虑生成元 VST_n之间的关系（27）至（33），以及 $s_1^2 = 1$，因为所有其他关系都会导出类似的方程。要求 Υ为一个表示，会得到一个含有十二个未知数的方程组。使用直接代数方法求解该方程组，即可得到所需结果。□

我们以提出以下自然问题来结束本节。

问题22。设 $n \geq 3$，且令 $\Upsilon : VST_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 为 VST_n 的复齐次2-局部表示。在什么条件下， Υ 是不可约的?

6. Other Presentations for the Virtual Singular Twin Monoid

本节旨在为虚拟奇异双生幺半群 $VSTM_n$ 提供更多表示。

6.1. 的约化表示。在 [14, 节中，L. H. Kauffman 和 S. Lambropoulou 给出了虚拟辫群的一个约化表示。同样，C. Caprau 等人在 [7, 节 4]中给出了虚拟奇异辫子幺半群的一个约化表示。受这些结果启发，本节将给出由 n 条辫股组成的虚拟奇异双生幺半群 $VSTM_n$ 的一个约化表示。该表示使用较少的生成元，具体为 s_1 和 τ_1，以及所有虚拟生成元 $\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}$，并假设元素 s_{i+1} 和 τ_{i+1} 满足以下定义关系，其中 $1 \leq i \leq n-2$ 取遍所有值:

$$s_{i+1} := (\nu_i \ldots \nu_2\nu_1)(\nu_{i+1} \ldots \nu_3\nu_2)s_1(\nu_2\nu_3 \ldots \nu_{i+1})(\nu_1\nu_2 \ldots \nu_i) \tag{34}$$

$$\tau_{i+1} := (\nu_i \ldots \nu_2\nu_1)(\nu_{i+1} \ldots \nu_3\nu_2)\tau_1(\nu_2\nu_3 \ldots \nu_{i+1})(\nu_1\nu_2 \ldots \nu_i) \tag{35}$$

如图4所示，定义关系是绕行变换的辫形式版本。换言之，我们借助辫股 1、2、... ...、 i，将生成元 s_{i+1} 和 τ_{i+1} 绕行至辫的左侧。

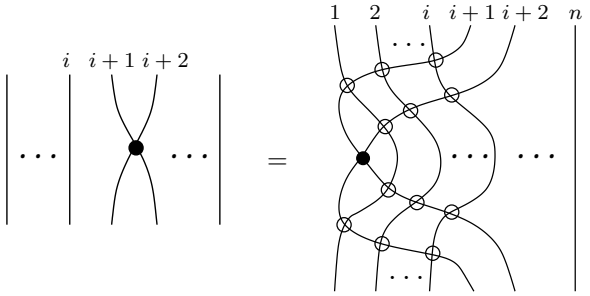

Figure 4. 绕行生成元 τ_{i+1}

如图 5 所示，我们可以将给定辫的任意部分绕行至辫的前方，而由此产生的所有新交叉都是虚交叉。因此，在 $VSTM_n$ 的约化表示中，涉及元素 s_i andτ_i 的关系将被规定为发生在辫的第一对辫股之间。

我们指出，对于 $|i-j| = 1$，关系 $\nu_i s_j \nu_i = \nu_j s_i \nu_j$ 和 $\nu_i \tau_j \nu_i = \nu_j \tau_i \nu_j$ 在 VSB_n 的约化表示中并非必需，因为它们已隐含在定义关系 (34) 和 (35) 中。

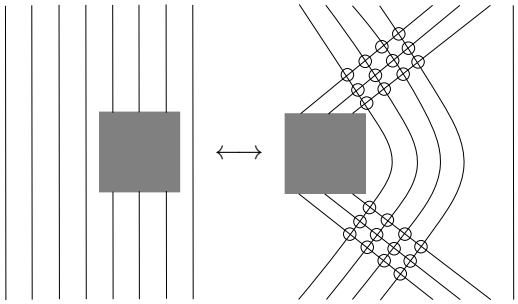

FIGURE 5. 在辫中迂回绕过若干辫股

定理23. 虚拟奇异双生幺半群 $VSTM_n$ 具有如下约化表示，其生成元为 $\{s_1, \tau_1, \nu_1, \ldots, \nu_{n-1}\}$，关系如下：

$$\nu_i\nu_j\nu_i = \nu_j\nu_i\nu_j, \qquad |i-j| = 1 \tag{36}$$

$$\nu_i\nu_j = \nu_j\nu_i \qquad |i-j| \geq 2 \tag{37}$$

$$\nu_i{}^2 = 1 \ and \ \ s_1^2 = 1 \qquad 1 \leq i \leq n-1 \tag{38}$$

$$s_1\tau_1 = \tau_1 s_1 \tag{39}$$

$$\tau_1\nu_i = \nu_i\tau_1 \ \ and \ \ s_1\nu_i = \nu_i s_1 \qquad i \geq 3 \tag{40}$$

$$\tau_1(\nu_1\nu_2 s_1\nu_2\nu_1)s_1 = (\nu_1\nu_2 s_1\nu_2\nu_1)s_1(\nu_1\nu_2\tau_1\nu_2\nu_1) \tag{41}$$

$$s_1(\nu_2\nu_3\nu_1\nu_2 s_1\nu_2\nu_1\nu_3\nu_2) = (\nu_2\nu_3\nu_1\nu_2 s_1\nu_2\nu_1\nu_3\nu_2)s_1 \tag{42}$$

$$\tau_1(\nu_2\nu_3\nu_1\nu_2 s_1\nu_2\nu_1\nu_3\nu_2) = (\nu_2\nu_3\nu_1\nu_2 s_1\nu_2\nu_1\nu_3\nu_2)\tau_1 \tag{43}$$

$$\tau_1(\nu_2\nu_3\nu_1\nu_2\tau_1\nu_2\nu_1\nu_3\nu_2) = (\nu_2\nu_3\nu_1\nu_2\tau_1\nu_2\nu_1\nu_3\nu_2)\tau_1 \tag{44}$$

请注意，在 $VSTM_n$ 的约化表示中，我们保留了所有仅涉及虚拟生成元的原始关系。此外，我们还保留了涉及 s_i 或 τ_i 且可在辫的左侧表示的关系。为方便起见，我们将这些称为原始关系的基础情形。例如，交换关系 $s_i s_j = s_j s_i$ 的基础情形是关系 $s_1 s_3 = s_3 s_1$；根据定义关系 (34)，它等价于关系 (42)。类似地，对于交换关系 $\tau_i s_j = s_j \tau_i$ 和 $\tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i$ （与 $|i-j| \geq 2$），我们分别只保留了关系 $\tau_1 s_3 = s_3\tau_1$ 和 $\tau_1\tau_3 = \tau_3\tau_1$，它们分别由关系 (43) 和 (44) 表示。我们将证明，所有其他交换关系都可由其对应的基础情形关系和虚关系推出。此外，我们指出，关系 (41) 等价于关系$\tau_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 \tau_2$，后者是关系 (22) 的基础情形。最后请注意，关系 (39) 是我们关于幺半群 $VSTM_n$ 的原始表示中关系 (21) 的基础情形。

在以下引理中，我们证明原始表示中的每个关系对 $VSTM_n$ 都成立，从而证明定理23。在下面的每个证明中，我们会给出后续一步中被修改的词段下划线，并指出所用的关系。第一个引理讨论预备恒等式。

引理24。 以下关系对所有 $i-j \geq 2$ 在 $VSTM_n$ 中成立：

$$\nu_i\nu_{i-1}\ldots\nu_{j+1}\nu_j\nu_{j+1}\ldots\nu_{i-1}\nu_i = \nu_j\nu_{j+1}\ldots\nu_{i-1}\nu_i\nu_{i-1}\ldots\nu_{j+1}\nu_j. \tag{45}$$

证明。 我们对 $i-j$ 使用归纳法证明该陈述，并高度依赖关系 (36) 和 (37)。如果 $i-j=2$，则该陈述等价于关系 (36)。假设关系 (45) 对 $i-j=k$ 成立，其中 $k\geq 2$。那么，观察如下：

$$\begin{aligned}\nu_i\nu_{i-1}\dots\underline{\nu_{j+1}\nu_j\nu_{j+1}}\dots\nu_{i-1}\nu_i &\overset{(36)}{=} \nu_i\nu_{i-1}\dots\nu_{j+2}\underline{\nu_j}\nu_{j+1}\underline{\nu_j}\nu_{j+2}\ \dots\nu_{i-1}\nu_i\\ &\overset{(37)}{=} \nu_j(\underline{\nu_i\nu_{i-1}\dots\nu_{j+2}\nu_{j+1}\nu_{j+2}\dots\nu_{i-1}\nu_i})\nu_j\\ &= \nu_j\nu_{j+1}\dots\nu_{i-1}\nu_i\nu_{i-1}\dots\nu_{j+1}\nu_j.\end{aligned}$$

在上面的最后一步中，我们使用了归纳假设。 □

引理 25. 对于所有 $|i-j|=1$，关系 $\nu_i s_j\nu_i=\nu_j s_i\nu_j$ 和 $\nu_i\tau_j\nu_i=\nu_j\tau_i\nu_j$都可由 $VSTM_n$的约化表示推出。

证明。 显然这些关系成立，因为它们已用于定义关系 (34) 和 (35)。不过，对于 $j=i+1$和 $i\geq 1$的情形，我们仍给出第二组关系的证明；第一组关系可用类似的论证推出。对于 $i=1$，注意到关系 $\nu_1\tau_2\nu_1=\nu_2\tau_1\nu_2$ 可通过将定义关系 $\tau_2=\nu_1\nu_2\tau_1\nu_2\nu_1$ 的两边同乘 ν_1，并利用 $\nu_1^2=1$而得出。现在令 $i\geq 2$，并注意以下内容：

$$\begin{aligned}\nu_i\tau_{i+1}\nu_i &\overset{(35)}{=} \underline{\nu_i(\nu_i}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_{i+1}\dots\nu_3\nu_2)\tau_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_{i+1})(\nu_1\nu_2\dots\underline{\nu_i)\nu_i}\\ &\overset{(38)}{=} (\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)(\underline{\nu_{i+1}}\dots\nu_3\nu_2)\tau_1(\nu_2\nu_3\dots\underline{\nu_{i+1}})(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1})\\ &\overset{(37)}{=} \nu_{i+1}(\underline{\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)\tau_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1}})\nu_{i+1}\\ &\overset{(35)}{=} \nu_{i+1}\tau_i\nu_{i+1}.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

我们注意到，对于 $|i-j|=1$，关系 $\nu_i s_j\nu_i=\nu_j s_i\nu_j$ 和 $\nu_i\tau_j\nu_i=\nu_j\tau_i\nu_j$等价于以下关系：

$$s_i\nu_j\nu_i=\nu_j\nu_i s_j \text{ and respectively } \tau_i\nu_j\nu_i=\nu_j\nu_i\tau_j. \tag{46}$$

引理 26. 对于所有 $1\leq i\leq n-1$，关系 $\tau_i s_i=s_i\tau_i$ 和 $s_i^2=1$ 都可由 $VSTM_n$的约化表示推出。

证明。 设 $i>1$。我们首先使用关于 s_i 和 τ_i 的定义关系 (34) 和 (35)，分别将它们表示为 s_1 和 τ_1，再应用虚关系 $\nu_i^2=1$，得到：

$$\begin{aligned}\tau_i s_i =&[(\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)\tau_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)\underline{(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1})}]\,[\underline{(\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)}\cdot\\ &(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)s_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1})]\\ \overset{(38)}{=}&(\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)\tau_1\underline{(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)}s_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1})\\ \overset{(38)}{=}&(\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)\tau_1 s_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1}).\end{aligned}$$

采用类似的步骤，我们得到以下结果

$$s_i\tau_i=(\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)s_1\tau_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1}).$$

但由于 $\tau_1 s_1=s_1\tau_1$，我们得到 $\tau_i s_i=s_i\tau_i$。最后，显然对于所有 i，关系 $s_i^2=1$ 均成立，这是由关系（34）和（38）得出的。□

引理27。 对于所有 $|i-j|\geq 2$，以下交换关系可由 $VSTM_n$ 的约化表示推出：

(i) $s_i\nu_j=\nu_j s_i$ *and* $\tau_i\nu_j=\nu_j\tau_i$,
(ii) $s_is_j=s_js_i$, $\tau_i\tau_j=\tau_j\tau_i$ *and* $s_i\tau_j=\tau_js_i$.

证明。 (i) 由 s_i 的定义关系 (34)，可得：

$$s_i\nu_j=(\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)\,s_1\,(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1})\,\nu_j.$$

由于 $|i-j|\geq 2$，因此 $j\geq i+2$ 或 $j\leq i-2$。若 $j\geq i+2$，则 ν_j 与上述表达式中的所有生成元都可交换，因此在这种情况下 $s_i\nu_j=\nu_js_i$。若 $j\leq i-2$，则有：

$$\begin{aligned}
s_i\nu_j &\overset{(34)}{=}(\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)s_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1})\underline{\nu_j}\\
&\overset{(37)}{=}(\nu_{i-1}\dots\nu_1)(\nu_i\dots\nu_2)s_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{j-1}\underline{\nu_j\nu_{j+1}\nu_j}\nu_{j+2}\dots\nu_{i-1})\\
&\overset{(36)}{=}(\nu_{i-1}\dots\nu_1)(\nu_i\dots\nu_2)s_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{j-1}\underline{\nu_{j+1}}\nu_j\nu_{j+1}\nu_{j+2}\dots\nu_{i-1})\\
&\overset{(37)}{=}(\nu_{i-1}\dots\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)s_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_j\underline{\nu_{j+1}\nu_{j+2}\nu_{j+1}}\nu_{j+3}\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1})\\
&\overset{(36)}{=}(\nu_{i-1}\dots\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)s_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_j\underline{\nu_{j+2}}\nu_{j+1}\nu_{j+2}\nu_{j+3}\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1})\\
&\underset{(40)}{\overset{(37)}{=}}(\nu_{i-1}\dots\nu_1)(\nu_i\dots\nu_{j+3}\underline{\nu_{j+2}\nu_{j+1}\nu_{j+2}}\nu_j\dots\nu_2)s_1(\nu_2\dots\nu_i)(\nu_1\dots\nu_{i-1})\\
&\overset{(36)}{=}(\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_i\dots\nu_{j+3}\underline{\nu_{j+1}}\nu_{j+2}\nu_{j+1}\nu_j\dots\nu_2)s_1(\nu_2\dots\nu_i)(\nu_1\dots\nu_{i-1})\\
&\overset{(37)}{=}(\nu_{i-1}\dots\nu_{j+2}\underline{\nu_{j+1}\nu_j\nu_{j+1}}\nu_{j-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)s_1(\nu_2\dots\nu_i)(\nu_1\dots\nu_{i-1})\\
&\overset{(36)}{=}(\nu_{i-1}\dots\nu_{j+2}\underline{\nu_j}\nu_{j+1}\nu_j\nu_{j-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)s_1(\nu_2\dots\nu_i)(\nu_1\dots\nu_{i-1})\\
&\overset{(37)}{=}\nu_j(\nu_{i-1}\dots\nu_1)(\nu_i\dots\nu_2)s_1(\nu_2\dots\nu_i)(\nu_1\dots\nu_{i-1})\\
&\overset{(34)}{=}\nu_js_i.
\end{aligned}$$

因此，对所有 $|i-j|\geq 2$，都有 $s_i\nu_j=\nu_js_i$。关系 $\tau_i\nu_j=\nu_j\tau_i$（其中 $|i-j|\geq 2$）可用类似方法验证：利用定义关系 (35) 以及关系 (36)、(37) 和 (40) 即可。

(ii) 我们首先证明，对所有 $i\geq 3$，都有 $s_1\tau_i=\tau_is_1$ 和 $s_i\tau_1=\tau_1s_i$。注意，根据关系 (43)，我们已经有 $\tau_1s_3=s_3\tau_1$。也就是说，我们有：

$$\tau_1(\nu_2\nu_3\nu_1\nu_2s_1\nu_2\nu_1\nu_3\nu_2)=(\nu_2\nu_3\nu_1\nu_2s_1\nu_2\nu_1\nu_3\nu_2)\tau_1.$$

在等式两边左乘 $\nu_2\nu_1\nu_3\nu_2$、右乘 $\nu_2\nu_3\nu_1\nu_2$，我们得到

$$(\nu_2\nu_1\nu_3\nu_2\tau_1\nu_2\nu_3\nu_1\nu_2)s_1=s_1(\nu_2\nu_1\nu_3\nu_2\tau_1\nu_2\nu_3\nu_1\nu_2),$$

根据恒等式 (35)，这等价于 $\tau_3s_1=s_1\tau_3$。

现在令 $i \geq 4$，并观察以下内容：

$$\begin{aligned}
s_1\tau_i &\overset{(35)}{=} \underline{s_1}(\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)\tau_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1})\\
&\overset{(40)}{=} (\nu_{i-1}\dots\underline{s_1\nu_2\nu_1})(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)\tau_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1})\\
&\overset{(46)}{=} (\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1\underline{s_2})(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)\tau_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1})\\
&= (\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_i\dots\underline{s_2\nu_3\nu_2})\tau_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1})\\
&\overset{(46)}{=} (\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2s_3)\tau_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1})\\
&= (\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)s_3\tau_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1}).
\end{aligned}$$

在上面的第四步中，我们使用该引理的（i）部分，将 s_2 与乘积 $\nu_i\nu_{i-1}\dots\nu_4$ 对换。采用类似的步骤，现在很容易看出以下结论成立：

$$\begin{aligned}
\tau_is_1 &= (\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)\tau_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1})s_1\\
&= (\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)\tau_1s_3(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1}).
\end{aligned}$$

比较刚刚推导出的等式，并利用 $s_3\tau_1 = \tau_1s_3$，我们得出结论：对于所有 $i \geq 3$，$s_1\tau_i = \tau_is_1$。类似的证明可用于说明，对于所有 $i \geq 3$，$s_i\tau_1 = \tau_1s_i$、$s_is_1 = s_1s_i$ 和 $\tau_i\tau_1 = \tau_1\tau_i$。

现在我们将证明，对于所有 $|i-j| \geq 2$，$s_i\tau_j = \tau_js_i$。令 $|i-j| \geq 2$。

情形 1。若 $i - j \geq 2$，则注意到：

$$s_i\tau_j \overset{(35)}{=} s_i(\nu_{j-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_j\dots\nu_3\nu_2)\tau_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_j)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{j-1}),$$

并注意到，根据该引理的（i）部分，s_i 与每个 ν_1，ν_2，.....，ν_j 对换。此外，正如上文所证，s_i 与 τ_1 对换。因此，对于 $i - j \geq 2$，$s_i\tau_j = \tau_js_i$。情形 2。若 $j - i \geq 2$，则我们写作：

$$s_i\tau_j \overset{(34)}{=} (\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)\tau_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1})\tau_j.$$

由于 $j \geq i+2$，我们知道，根据引理27的第(i)部分，τ_j 与每个虚拟生成元ν_1、ν_2、.....、ν_j都可交换。正如上文所述，生成元τ_j 也与 τ_1可交换。因此，对于 $j - i \geq 2$，$s_i\tau_j = \tau_js_i$也成立。

对于所有 $|i-j| \geq 2$，关系 $s_is_j = s_js_i$和 $\tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i$成立的证明也类似，因此为避免重复，略去证明。□

引理28。关系 $s_js_i\tau_j = \tau_is_js_i$（其中 $|i-j| = 1$）可由 $VSTM_n$的约化表示推出。

证明。这组关系的基础情形由关系 (41) 表示。我们证明这些关系对情形 $j = i+1$ and $i \geq 2$ 成立。情形 $j = i-1$ and $i \geq 3$ 的证明类似。对于恒等式的右侧，

我们有:

$$\begin{aligned}
\tau_i s_{i+1} s_i &\underset{(35)}{\overset{(34)}{=}} [(\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)\tau_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)\underline{(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1})}]\cdot \\
&\quad [\underline{(\nu_i\dots\nu_2\nu_1)}(\nu_{i+1}\dots\nu_3\nu_2)s_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_{i+1})\underline{(\nu_1\nu_2\dots\nu_i)}]\cdot \\
&\quad [\underline{(\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)}(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)s_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1})] \\
&\overset{(45)}{=} (\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)\tau_1\underline{(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_i\dots\nu_2}\nu_1\nu_2\dots\nu_i)(\nu_{i+1}\dots\nu_3\nu_2)s_1\cdot \\
&\quad (\nu_2\nu_3\dots\nu_{i+1})(\nu_i\dots\nu_2\nu_1\underline{\nu_2\dots\nu_i)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)}s_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1}) \\
&\overset{(38)}{=} (\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)(\tau_1\nu_1\underline{\nu_2\dots\nu_i)(\nu_{i+1}\dots\nu_3\nu_2)}s_1\cdot \\
&\quad \underline{(\nu_2\nu_3\dots\nu_{i+1})(\nu_i\dots\nu_2}\nu_1 s_1)(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1}) \\
&\overset{(45)}{=} (\nu_{i-1}\dots\nu_2\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)(\underline{\tau_1\nu_1}\nu_{i+1}\dots\nu_3\nu_2\nu_3\dots\nu_{i+1})\underline{s_1}\cdot \\
&\quad (\nu_{i+1}\dots\nu_3\nu_2\nu_3\dots\nu_{i+1}\underline{\nu_1 s_1})(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1}) \\
&\underset{(37)}{\overset{(40)}{=}} (\nu_{i-1}\dots\upsilon_2\nu_1)(\nu_i\dots\nu_3\nu_2)(\nu_{i+1}\dots\nu_3)(\tau_1\nu_1\nu_2\underline{\nu_3\dots\nu_{i+1}})\cdot \\
&\quad \underline{(\nu_{i+1}\dots\nu_3}s_1\nu_2\nu_1 s_1\nu_3\dots\nu_{i+1})(\nu_2\nu_3\dots\nu_i)(\nu_1\nu_2\dots\nu_{i-1}) \\
&\overset{(38)}{=} (\nu_{i-1}\dots\nu_1)(\nu_i\dots\nu_2)(\nu_{i+1}\dots\nu_3)(\tau_1\nu_1\nu_2 s_1\nu_2\nu_1 s_1)\cdot \\
&\quad (\nu_3\dots\nu_{i+1})(\nu_2\dots\nu_i)(\nu_1\dots\nu_{i-1}).
\end{aligned}$$

现在我们来考虑恒等式的左侧，首先使用定义关系 (34) 替换s_i，并插入恒等元，然后将其替换为 $\nu_1\nu_1$ and $(\nu_{i+1}\dots\nu_3)(\nu_3\dots\nu_{i+1})$，如下所示:

$$\begin{aligned}
s_{i+1}\underline{s_i}\tau_{i+1} &\overset{(34)}{=} s_{i+1}(\nu_{i-1}\dots\nu_1)(\nu_i\dots\nu_2\underline{(1)})s_1\underline{(1)(1)}(\nu_2\dots\nu_i)(\nu_1\dots\nu_{i-1})\tau_{i+1} \\
&= \underline{s_{i+1}}(\nu_{i-1}\dots\nu_1)(\nu_i\dots\nu_2\nu_1\nu_1)s_1\underline{(\nu_{i+1}\dots\nu_3)}(\nu_3\dots\nu_{i+1})(\underline{\nu_1}\nu_1)\cdot \\
&\quad (\nu_2\dots\nu_i)(\nu_1\dots\nu_{i-1})\underline{\tau_{i+1}}.
\end{aligned}$$

利用引理27中的交换关系以及方程（37）和（40）中的交换关系，我们得到:

$$\begin{aligned}
s_{i+1}s_i\tau_{i+1} &= (\nu_{i-1}\dots\nu_1)s_{i+1}(\nu_i\dots\nu_1)(\nu_{i+1}\dots\nu_3)\underline{(1)}\nu_1 s_1\,\nu_1\underline{(1)}(\nu_3\dots\nu_{i+1})\cdot \\
&\quad (\nu_1\dots\nu_i)\tau_{i+1}(\nu_1\dots\nu_{i-1}) \\
&= (\nu_{i-1}\dots\nu_1)\underline{s_{i+1}}(\nu_i\dots\nu_1)(\nu_{i+1}\dots\nu_3)(\nu_2\nu_2)\nu_1 s_1\nu_1(\nu_2\nu_2)(\nu_3\dots\nu_{i+1})\cdot \\
&\quad (\nu_1\dots\nu_i)\underline{\tau_{i+1}}(\nu_1\dots\nu_{i-1}) \\
&\underset{(35)}{\overset{(34)}{=}} (\nu_{i-1}\dots\nu_1)(\nu_i\dots\nu_1)(\nu_{i+1}\dots\nu_2)s_1\underline{(\nu_2\dots\nu_{i+1})(\nu_1\dots\nu_i)}\cdot \\
&\quad \underline{(\nu_i\dots\nu_1)(\nu_{i+1}\dots\nu_2)}\nu_2\nu_1 s_1\nu_1\nu_2\underline{(\nu_2\dots\nu_{i+1})}\cdot \\
&\quad \underline{(\nu_1\dots\nu_i)(\nu_i\dots\nu_1)(\nu_{i+1}\dots\nu_2)}\tau_1(\nu_2\dots\nu_{i+1})(\nu_1\dots\nu_i)(\nu_1\dots\nu_{i-1}).
\end{aligned}$$

接下来，我们使用关系（38）将乘积 $(\nu_2\dots\nu_{i+1})(\nu_1\dots\nu_i)(\nu_i\dots\nu_1)(\nu_{i+1}\dots\nu_2)$ 替换为恒等式。然后，我们使用交换关系（37）将两个实例

ν_1 移至所需位置。在下面的最后一步中，我们使用关系（41）。

$$\begin{aligned} s_{i+1}s_i\tau_{i+1} &\overset{(38)}{=} (\nu_{i-1}\dots\nu_1)(\nu_i\dots\underline{\nu_1})(\nu_{i+1}\dots\nu_2)s_1\nu_2\nu_1s_1\nu_1\nu_2\tau_1(\nu_2\nu_3\dots\nu_{i+1})\cdot \\ &\quad (\underline{\nu_1}\dots\nu_i)(\nu_1\dots\nu_{i-1}) \\ &\overset{(37)}{=} (\nu_{i-1}\dots\nu_1)(\nu_i\dots\nu_2)(\nu_{i+1}\dots\nu_3)(\underline{\nu_1\nu_2s_1\nu_2\nu_1})s_1(\nu_1\nu_2\tau_1\nu_2\nu_1)\cdot \\ &\quad (\nu_3\dots\nu_{i+1})(\nu_2\dots\nu_i)(\nu_1\dots\nu_{i-1}) \\ &\overset{(41)}{=} (\nu_{i-1}\dots\nu_1)(\nu_i\dots\nu_2)(\nu_{i+1}\dots\nu_3)(\tau_1\nu_1\nu_2s_1\nu_2\nu_1s_1)\cdot \\ &\quad (\nu_3\dots\nu_{i+1})(\nu_2\dots\nu_i)(\nu_1\dots\nu_{i-1}). \end{aligned}$$

因此，对于所有 $i \geq 2$，$s_{i+1}s_i\tau_{i+1} = \tau_i s_{i+1}s_i$。 □

6.2. 虚拟双生幺半群的另一种表示 $VSTM_n$。 本节中，我们为 n股虚拟奇异双生幺半群 $VSTM_n$引入一种新的表示。该表示以一类特殊的虚拟奇异双辫作为生成元，我们称之为连接弦。这些 $VSTM_n$元素的特别之处在于，它们在 S_n 中的关联置换是恒等置换；因此，按照定义13的含义，它们是虚拟奇异纯孪生辫。值得一提的是，L. H. Kauffman 和 S. Lampropoulou 在 [15] 中针对虚拟辫群采用了类似的方法，而 C. Caprau 和 S. Zepeda 则在 [8] 中针对虚拟奇异辫子幺半群采用了类似的方法。

定义29。 连接弦 μ_i 和 γ_i（其中 $1 \leq i \leq n-1$）是 n股虚拟奇异双辫，其定义如下，并绘于图6中。

$$\mu_i := s_i\nu_i, \quad \gamma_i := \tau_i\nu_i, \ \ where\ 1 \leq i \leq n-1. \tag{47}$$

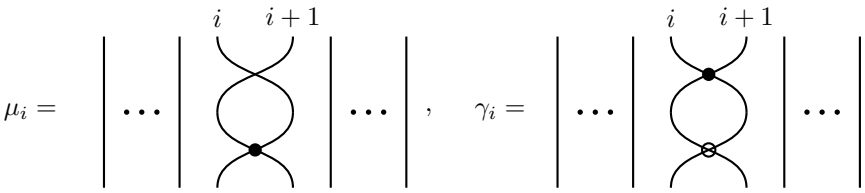

FIGURE 6. 连接弦 μ_i 和 γ_i

容易观察到，元素 s_i 和 τ_i 可以用连接弦表示为 $s_i = \mu_i\nu_i$ 和 $\tau_i = \gamma_i\nu_i$. 因此，对于所有 $1 \leq i \leq n-1$，连接弦 μ_i 和γ_i与虚拟生成元 ν_i一起，可以作为 $VSTM_n$ 和 VST_n的另一组生成集。下面的引理给出了连接弦满足的一组关系。在引理各部分的证明中，我们再次将后续步骤中发生变化的字串部分加下划线，并根据定义12，使用 $VSTM_n$的原始表示中的定义关系。请注意，下面引理中的关系组 (i) 为连接弦引入了绕行关系的一种形式，而最后一组关系 (iv) 则是元素 μ_i, γ_i 和 ν_i的交换关系。

引理30。 以下关系在 $VSTM_n$ 中成立。

(i) $\nu_i\mu_j\nu_i = \nu_j\mu_i\nu_j$ *and* $\nu_i\gamma_j\nu_i = \nu_j\gamma_i\nu_j$, *where* $|i-j| = 1$

(ii) $\mu_j\ (\nu_j\mu_i\nu_j)\ \gamma_i = \gamma_i\ (\nu_j\mu_i\nu_j)\ \mu_j$，其中 $|i-j|=1$
(iii) $\mu_i\nu_i\gamma_i = \gamma_i\nu_i\mu_i$，对所有 $1 \le i \le n-1$（iv） $\alpha_i\beta_j = \beta_j\alpha_i$，
对于 α_i、 $\beta_i \in \{\mu_i, \gamma_i, \nu_i\}$，其中 $|i-j| \ge 2$。

证明。 (i) 所需关系可由 $VSTM_n$的绕行关系推出，如下所示:

$$\nu_i\underline{\mu_j}\nu_i = \nu_i s_j\nu_j\nu_i\underline{1} = \nu_i s_j\underline{\nu_j\nu_i\nu_j}\nu_j = \underline{\nu_i s_j\nu_i}\nu_j\nu_i\nu_j = \nu_j\underline{s_i(\nu_j\nu_j)\nu_i}\nu_j = \nu_j\mu_i\nu_j,$$

$$\nu_i\underline{\gamma_j}\nu_i = \nu_i\tau_j\nu_j\nu_i\underline{1} = \nu_i\tau_j\underline{\nu_j\nu_i\nu_j}\nu_j = \underline{\nu_i\tau_j\nu_i}\nu_j\nu_i\nu_j = \nu_j\underline{\tau_i(\nu_j\nu_j)\nu_i}\nu_j = \nu_j\gamma_i\nu_j.$$

(ii) 我们指出，(i)中的关系等价于以下关系:

$$\mu_j\nu_i\nu_j = \nu_i\nu_j\mu_i \text{ and } \gamma_j\nu_i\nu_j = \nu_i\nu_j\gamma_i.$$

这将在证明(ii)中的关系时用到。在下面的第一步和最后一步中，我们根据定义29，使用连接弦 μ_i 和 γ_i的定义关系。

$$\begin{aligned}\mu_j(\nu_j\mu_i\nu_j)\gamma_i &= s_j\underline{\nu_j\nu_j}s_i\underline{\nu_i\nu_j\tau_i}\nu_i = \underline{s_js_i\tau_j}\ \underline{\nu_i\nu_j\nu_i} = \tau_i s_j\underline{s_i\nu_j\nu_i}\nu_j \\ &= \tau_i s_j\nu_j\nu_i\underline{1}s_j\nu_j = \ \tau_i s_j\underline{\nu_j\nu_i\nu_j}\nu_j s_j\nu_j = \tau_i\underline{s_j\nu_i\nu_j}\nu_i\nu_j s_j\nu_j \\ &= (\underline{\tau_i\nu_i})\nu_j(\underline{s_i\nu_i})\nu_j(\underline{s_j\nu_j}) = \gamma_i(\nu_j\mu_i\nu_j)\mu_j.\end{aligned}$$

(iii) 设 $1 \le i \le n-1$。利用 μ_i 和 γ_i的定义关系、恒等关系 $\nu_i^2 = 1$以及 $VSTM_n$中成立的关系 $s_i\tau_i = \tau_i s_i$，我们得到所需结果:

$$\mu_i\nu_i\gamma_i = (s_i\underline{\nu_i})\underline{\nu_i}(\tau_i\nu_i) = \underline{s_i\tau_i}\nu_i = \tau_i\underline{1}s_i\nu_i = (\tau_i\nu_i)\nu_i(s_i\nu_i) = \gamma_i\nu_i\mu_i.$$

(iv)连接弦的交换关系（如(iv)中所述）直接由$VSTM_n$原始表示中的交换关系得出。□

现在我们可以定义由连接弦以及虚拟元素 ν_i生成的幺半群 M_n 。注意，元素 ν_i 和 μ_i 可逆，且 $\nu_i^{-1} = \nu_i$ 和 $\mu_i^{-1} = \nu_i s_i$。前一引理中确立的关系将成为该幺半群的定义关系，此外还有 $VSTM_n$ 中仅涉及虚拟生成元的定义关系。接下来我们将证明 M_n 与 $VSTM_n$同构，由此得到 $VSTM_n$的另一种表示。

定义31。令 M_n 为具有以下表示的幺半群，其生成元为 $\{\mu_i, \mu_i^{-1}, \gamma_i, \nu_i \,|\, 1 \le i \le n-1\}$，关系为:

$$\nu_i^2 = 1 \text{ and } \mu_i\mu_i^{-1} = 1 = \mu_i^{-1}\mu_i, \text{ for all } i \tag{48}$$
$$\nu_i\nu_j\nu_i = \nu_j\nu_i\nu_j,\ |i-j| = 1 \tag{49}$$
$$\nu_i\mu_j\nu_i = \nu_j\mu_i\nu_j,\ |i-j| = 1 \tag{50}$$
$$\nu_i\gamma_j\nu_i = \nu_j\gamma_i\nu_j,\ |i-j| = 1 \tag{51}$$
$$\mu_j(\nu_j\mu_i\nu_j)\gamma_i = \gamma_i(\nu_j\mu_i\nu_j)\mu_j,\ |i-j| = 1 \tag{52}$$
$$\mu_i\nu_i\gamma_i = \gamma_i\nu_i\mu_i, \text{ for all } i \tag{53}$$
$$\alpha_i\beta_j = \beta_j\alpha_i, \ \ |i-j| \ge 2, \ \text{ for all } \alpha_i, \beta_i \in \{\mu_i, \gamma_i, \nu_i\} \tag{54}$$

定理32. 幺半群 M_n 和 $VSTM_n$ 同构。

证明. 我们定义映射 $F\colon M_n \longrightarrow VSTM_n$ 如下:

$$F(\nu_i) = \nu_i,\ F(\mu_i) = s_i\nu_i \text{ and } F(\gamma_i) = \tau_i\nu_i,$$

并通过规定其为同态，将其扩展到 M_n 的所有元素。根据引理30，结合幺半群 M_n 的定义，同态 F保持了 M_n的关系。为证明 F 是同构，考虑映射 G:
$VSTM_n \longrightarrow M_n$，它在 $VSTM_n$的生成元上的定义如下:

$$G(\nu_i) = \nu_i,\ G(s_i) = \mu_i\nu_i \text{ and } G(\tau_i) = \gamma_i\nu_i,$$

并通过规定其为同态，将其扩展到 $VSTM_n$ 的所有元素。容易验证， G 保持了 $VSTM_n$的定义关系。此外，我们注意到 $F \circ G$ 和 $G \circ F$分别是 $VSTM_n$ 和M_n上的恒等映射。因此，幺半群 M_n 与虚拟奇异双生幺半群 $VSTM_n$同构。□

现在，我们利用绕行变换，通过分别用 μ_1和 γ_1表示生成元 μ_i 和 γ_i ，得到幺半群M_n 的约化表示，如下所示:

$$\mu_{i+1} = (\nu_i \dots \nu_1)(\nu_{i+1} \dots \nu_3\nu_2)\mu_1(\nu_2\nu_3 \dots \nu_{i+1})(\nu_1\nu_2 \dots \nu_i)$$
$$\gamma_{i+1} = (\nu_i \dots \nu_1)(\nu_{i+1} \dots \nu_3\nu_2)\gamma_1(\nu_2\nu_3 \dots \nu_{i+1})(\nu_1\nu_2 \dots \nu_i).$$

这使我们能够仅使用生成元μ_1 和 γ_1 ，以及对应于 $1 \leq i \leq n-1$的虚拟生成元 ν_i ，来改写定义31中的所有关系。因此，幺半群 M_n 有一个生成元更少的表示。由此，虚拟奇异双生幺半群 $VSTM_n$ 可用连接弦 μ_1 和 γ_1，以及虚拟生成元 ν_i给出一个约化表示，如下所述。

定理33。 虚拟奇异双生幺半群 $VSTM_n$ 有如下约化表示，其生成元为 $\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n-1}\}$ 和连接弦 $\{\mu_1, \gamma_1\}$ ，并满足以下关系:

$$\nu_i^2 = 1 \ and \ \mu_1^{-1}\mu_1 = 1 = \mu_1^{-1}\mu_1 \tag{55}$$
$$\nu_i\nu_j\nu_i = \nu_j\nu_i\nu_j,\ |i-j| = 1 \tag{56}$$
$$(\nu_1\nu_2\mu_1\nu_2\nu_1)(\nu_2\mu_1\nu_2)\gamma_1 = \gamma_1(\nu_2\mu_1\nu_2)(\nu_1\nu_2\mu_1\nu_2\nu_1) \tag{57}$$
$$\mu_1\nu_1\gamma_1 = \gamma_1\nu_1\mu_1 \tag{58}$$
$$\nu_i\nu_j = \nu_j\nu_i,\ |i-j| \geq 2 \tag{59}$$
$$\mu_1\nu_i = \nu_i\mu_1 \ \ and \ \gamma_1\nu_i = \nu_i\gamma_1,\ i \geq 3 \tag{60}$$
$$\gamma_1(\nu_2\nu_1\nu_3\nu_2\gamma_1\nu_2\nu_3\nu_1\nu_2) = (\nu_2\nu_1\nu_3\nu_2\gamma_1\nu_2\nu_3\nu_1\nu_2)\gamma_1 \tag{61}$$
$$\gamma_1(\nu_2\nu_1\nu_3\nu_2\mu_1\nu_2\nu_3\nu_1\nu_2) = (\nu_2\nu_1\nu_3\nu_2\mu_1\nu_2\nu_3\nu_1\nu_2)\gamma_1 \tag{62}$$
$$\mu_1(\nu_2\nu_1\nu_3\nu_2\mu_1\nu_2\nu_3\nu_1\nu_2) = (\nu_2\nu_1\nu_3\nu_2\mu_1\nu_2\nu_3\nu_1\nu_2)\mu_1 \tag{63}$$

证明。 证明与定理23的证明类似。我们注意到，对于 $2 \leq i \leq n-1$，不需要生成元 μ_i 和 γ_i ，因为我们已将它们定义为 μ_1、 γ_1 和虚拟生成元的形式。关于这些关系，我们观察到，在关系涉及生成元 μ_i 或 γ_i时固定 $i = 1$ 后，它们与定义31中的关系一致。当某个关系同时涉及索引i 和 j时，我们假设它发生在辫最左侧的部分，因此对 j使用尽可能小的下标。特别是，对于要求$|i-j| = 1$的关系，我们固定 $j = 2$ ，并将相应的生成元表示为一个

下标为1的生成元。例如，在恒等式（51）中，我们使用 $\nu_1\nu_2\mu_1\nu_2\nu_1$代替 μ_2。类似地，对于要求 $|i-j|\geq 2$的关系，我们固定 $j=3$，并再次将相应的生成元表示为一个下标为1的生成元。辫中其他位置出现的任何关系，都可由这些关系通过绕行变换得到。

在这个约化表示中，我们不包含恒等式（50）和（51），因为它们已用于给出 μ_{i+1} 和 γ_{i+1}的定义关系。定义31中的其余关系均已纳入，并按上述说明调整了下标。交换关系（54）现在由关系（59）–（63）表示。因此，结论成立。□

致谢。C. Caprau 获得了 NSF-RUI 项目 DMS 2204386 的部分资助。

References

[1] J. W. Alexander, *A lemma on systems of knotted curves*, 《美国国家科学院院刊》9，93–95（1923）。[2] E. Artin, *Theorie der zöpfe*, 《汉堡大学数学研讨班论文集》4，47–72（1926）。[3] E. Artin, *Theory of braids*, 《数学年刊》48（1），101–126（1947）。[4] J. Baez, *Link invariants of finite type and perturbation theory*, 《数学物理快报》26，43-51（1992）。[5] J. Birman, *Braids, Links, and Mapping Class Groups*, 《数学研究札记》82，普林斯顿大学出版社（1974）。[6] J. Birman, *New points of view in knot theory*, 《美国数学学会通报》28，253–287（1993）。[7] C. Caprau、A. De la Pena 和 S. McGahan, *Virtual singular braids and links*, 《数学手稿》151（1），147-175（2016）。[8] C. Caprau 和 S. Zepeda, *On the virtual singular braid monoid*, 《结理论与分歧》30（14）2141002（2021）。[9] C. Caprau 和 A. Yeung, *Algebraic structures among virtual singular braids*, La Matematica 3，941–964（2024）。[10] R. Fenn、E. Keyman 和 C. Rourke, *The singular braid monoid embeds in a group*, 《结理论与分歧》7（7），881–892（1998）。[11] R. Fenn 和 D. P. Ilyutko, *Doodles on surfaces*, 《拓扑学及其应用》201，401–415（2016）。[12] S. Kamada，虚拟纽结和焊接纽结的辫表示, *Osaka J. Math.* **44**（2），441-458（2007）。[13] L. H. Kauffman, *Virtual knot theory*, 《欧洲组合学杂志》20，663–690（1999）。[14] L. H. Kauffman、S. Lambropoulou, *Virtual braids*, 《基础数学》184，159-186（2004）。[15] L.H. Kauffman、S. Lambropoulou, *A categorical model for the virtual braid group*, 《结理论与分歧》21（13），1240008（2012）。[16] M. Khovanov, *Real K（π，1）arrangements from finite root systems*, 《数学研究快报》3，261- 274（1996）。[17] M. Khovanov, *Doodle groups*, 《美国数学学会汇刊》349，2297-2315（1997）。[18] A. Markov, *Über die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe*, 《数学文摘》［《数学文集》］新系列，1（43），73–78（1936）。[19] T. Mavassi 和 M. Nasser, *Classification of homogeneous local representations of the singular braid monoid* 2025 ，《阿拉伯数学杂志》（）。[20] T. Mavassi 和 M. Nasser, *On the classification and irreducibility of 2-local representations of the twin group T_n* 2508 14505 2025 ，arXiv:。（）。[21] A. Merkov, *Vassiliev invariants classify flat braids of knots and curves* *Differential and symplectic topology*，载于，美国数学学会译丛系列——美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯（1999）。[22] Y. A. Mikhalchishina, *Local representations of braid groups*, 《西伯利亚数学杂志》54（4），666-678（2013）。

[23] J. Mostovoy 和 C. Roque-M´arquez, *Planar pure braids on six strands*, 《结理论与分歧》**29** （1），1950097（2020）。[24] M. Nasser, *Local extensions and L-type extensions of some local representations of the braid group B_n to the singular braid monoid SM_n* 1 12 2025 ，《越南数学杂志》，-（）。[25] M. Nasser, *Twin groups representations*, arXiv:2507.15005（2025）。[26] M. Nasser, *Insights on the homogeneous 3-local representations of the twin groups*, arXiv:2512.24874（2025）。[27] M. Nasser 和 N. Chbili, *Algebraic and topological aspects of the singular twin group and its representations* 2510 04075 2025 ，arXiv:。（）。

[28] G. Shabat 和 V. Voevodsky, *Drawing curves over number fields*, 《格洛腾迪克纪念文集》, 《数学进展》, Birkhäuser Boston **88** （3），199–277（1990）。

Carmen Caprau, Department of Mathematics, California State University, Fresno, 5245 N. Backer Ave. M/S PB 108, Fresno, ca 93740, USA*Email address*: ccaprau@csufresno.edu

Mohamad N. Nasser, Department of Mathematics and Computer Science Beirut Arab , , „ University P.O. Box 11-5020 Beirut Lebanon
Email address: m.nasser@bau.edu.lb