arXiv:2601.01711v1 [math-ph] 5 Jan 2026

可积性促成了与固定迹 Laguerre 系系综相关的计算

Peter J. Forrester[1] 和 Shinsuke M. Nishigaki[2]

[1] 数学与统计学院，墨尔本大学，维多利亚州 3010，澳大利亚。电子邮箱：pjforr@unimelb.edu.au；

[2] 自然科学与技术研究生院，岛根大学，松江市 690-8504，日本。电子邮箱：nishigaki@riko.shimane-u.ac.jp

摘要

随机量子态的密度矩阵研究自然导向随机矩阵理论中的固定迹 Laguerre 系综。先前的研究揭示了纯度统计量（密度矩阵平方的迹）的矩的显式有理函数公式，以及特征值密度所满足的三阶线性微分方程。我们进一步从可积性的角度探究这些结果的起源；这里的可积性意味着更广泛的递推关系和微分方程，并给出相应的推广。我们研究中的重要工具是一阶线性矩阵微分方程。一项应用是推导密度的三阶标量方程。另一项应用是在 β 广义固定迹 Laguerre 系综中获得纯度统计量方差的显式有理函数公式。在原始情形（$\beta = 2$）下，纯度累积量可用某个 σ-Painlevé IV 超越函数的大自变量展开表示。在另一条不同但相关的方向上，附录给出了固定行列式圆酉系综 SU(N) 中两点关联的精确计算。

谨以此文纪念 *Santosh Kumar*，以及他在随机矩阵理论（*RMT*）精确结果及其应用方面的工作[1]

1 引言

根据定义，标准高斯复随机矩阵 G 的所有元素相互独立且同分布，其分布为标准复随机变量 $\mathrm{N}[0,1/\sqrt{2}] + i\mathrm{N}[0,1/\sqrt{2}]$ ——这里的“标准”是指模平方的均值等于 1。复厄米矩阵的高斯酉系综（GUE）由矩阵 $\{G\}$构成，并通过形成 $\frac{1}{2}(G + G^\dagger)$ 得到。厄米矩阵空间上的相应分布正比于 $e^{-\mathrm{Tr}\, G^2}$。将变量替换为特征值 $\{\lambda_j^2\}_{j=1}^N$（此处假设 G的大小为 $N \times N$）和特征向量后，得到特征值概率密度函数（PDF）：

$$\frac{1}{C_N^{(\mathrm{G})}} \prod_{l=1}^N e^{-\lambda_l^2} \prod_{1 \le j < k \le N} (\lambda_k - \lambda_j)^2, \tag{1.1}$$

[1]关于 Santosh Kumar 在随机矩阵理论（RMT）领域的研究兴趣与贡献，以及本文的相关背景，读者可参阅纪念与综述文章 [31]。

其支撑集为 $\lambda_l \in \mathbb{R}\,(l = 1,\ \ldots\ldots,\ N)$，其中归一化常数 $C_N^{(\mathrm{G})}$ 为

$$C_N^{(\mathrm{G})} = \pi^{N/2} 2^{-N(N-1)/2} \prod_{l=1}^{N} l!; \tag{1.2}$$

参见例如带有 $\beta = 2$] 的 [28, 命题 1.3.4。

反之，假设 G的大小为 $n \times N, n \geq N$，也称为矩形复 Ginibre矩阵 [14]。复厄米正定矩阵的拉盖尔酉系综（LUE）通过对 $\{G\}$ 构造 $G^\dagger G$ 得到，其相应的特征值概率密度函数为

$$p_{N,a}^{(\mathrm{L})}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) := \frac{1}{C_{N,a}^{(\mathrm{L})}} \prod_{l=1}^{N} \lambda_l^a e^{-\lambda_l} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (\lambda_k - \lambda_j)^2, \quad a := n - N, \tag{1.3}$$

其支集为 $\lambda_l \in \mathbb{R}^+$ （$l = 1,\ \ldots\ldots,\ N$），其中归一化因子 $C_{N,\,a}^{(\mathrm{L})}$ 为

$$C_{N,a}^{(\mathrm{L})} = N! \prod_{l=0}^{N-1} \Gamma(l+1)\Gamma(a+l+1); \tag{1.4}$$

参见例如带有 $\beta = 2, m \mapsto N$] 的 [28, 命题 3.2.2。固定迹（取为单位值）拉盖尔酉系综（fLUE）通过相同的构造得到，其中涉及 $\{G\}$，现在乘以标量因子 $1/\mathrm{Tr}\, G^\dagger G$。其特征值概率密度函数为

$$p_{N,a}^{(\mathrm{fL})}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) := \frac{1}{C_{N,a}^{(\mathrm{fL})}} \delta\Big(1 - \sum_{l=1}^{N} \lambda_l\Big) \prod_{l=1}^{N} \lambda_l^a \prod_{1 \leq j < k \leq N} (\lambda_k - \lambda_j)^2, \quad a := n - N, \tag{1.5}$$

定义在 $\lambda_l \in (0,\ 1)\ (l = 1,\ \ldots\ldots,\ N)$ 上，其中归一化因子 $C_{N\,a}^{(\mathrm{fL})}$ 给定为

$$C_{N,a}^{(\mathrm{fL})} = \frac{N!}{\Gamma(aN + N^2)} \prod_{l=0}^{N-1} \Gamma(l+1)\Gamma(a+l+1); \tag{1.6}$$

例如参见 [28, 式 (4.155)，其中 $\beta = 2$、 $m \mapsto N$]。注意，如狄拉克 δ 函数所示，特征值之和必须为 1。

特征值概率密度函数 (1.5) 在有限基量子力学系统的双部纠缠研究中十分重要；例如参见 [8]。两个子系统，分别记为 A 和 B，其维数分别为 n 和 N，标准正交基分别为 $\{|a_i\rangle\}_{i=1,\ \ldots\ldots,\ n}$、 $\{|b_i\rangle\}_{i=1,\ \ldots\ldots,\ N}$。因此，一个量子态 $|\psi\rangle$ 可以写成

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} x_{i,j} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle. \tag{1.7}$$

另一方面，根据施密特分解，对于给定的 $|\psi\rangle$，存在与两个子系统的约化密度矩阵相关的正交归一向量$\{|v_i^A\rangle\}_{i=1、\ \ldots\ldots、\ N}$ 和$\{|v_i^B\rangle\}_{i=1、\ \ldots\ldots、\ N}$，使得

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\lambda_i} |v_i^A\rangle \otimes |v_i^B\rangle, \quad \sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1; \tag{1.8}$$

例如参见 [28, §3.3.4]。假设(1.7)中的系数 $\{x_{i,j}\}$ 是相互独立的标准复高斯变量，因此如上文(1.3)所述，除满足约束$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N}|x_{ij}|^2 = \mathrm{Tr}\, G^\dagger G = 1$ 以确保归一化 $\langle\psi|\psi\rangle = 1$外，(1.8)中的系数 $\{\lambda_i\}$ 的分布由(1.5)给出。

用于量化双部纠缠的量包括纯度，定义为 $\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^2$（即子系统 A 或 B的约化密度矩阵平方的迹；例如参见 [8]），以及冯·诺依曼熵 $-\sum_{j=1}^{N}\lambda_j \log\, \lambda_j$（即约化密度矩阵与其对数的乘积的迹的负值）。所谓量子 Tsallis 熵 $(1/(1-q))(1-\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^q)$ 是对二者的推广（令 $q=2$ 以得到纯度，并取极限 $q\to 1$ 以得到冯·诺依曼熵）。这些量都是线性统计量的例子，形式为

$$A = \sum_{j=1}^{N} a(\lambda_j) \tag{1.9}$$

其中 $a(x)$ 是单变量函数。

考虑如下文（1.8）所述的随机态。令 $\rho^{(\mathrm{fL})}{}_{(1)}(x)$ 表示与概率密度函数（1.5）对应的特征值密度。对于该随机态，线性统计量 A 满足

$$\langle A\rangle = \int_I a(x)\rho_{(1)}^{(\mathrm{fL})}(x)\,dx, \tag{1.10}$$

其中 I 表示密度的支撑区间。 $\rho^{(\mathrm{fL})}{}_{(1)}(x)$的一个表达式见[52, 方程（31）], ，其中包含两个从 0 到 $N-1$ 的高斯超几何函数单重求和之差。另一种形式涉及对 $\{(x/(1-x))^l\}_{l=0}^{2N-2}$ 求和，其中系数本身是从 0 到 N的进一步求和；这一形式已由 [1, 71, 73] 给出，也可见于 [52]。围绕可积性所赋能的、与（1.5）相关的计算——特别是递推关系和微分方程——这一主题展开，我们尤其关注这样一个事实：根据 [2], 推导， $\rho^{(\mathrm{fL})}{}_{(1)}(x)$满足以下三阶线性微分方程

$$\Big(a_3(x)\frac{d^3}{dx^3} + a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)\Big)f(x) = 0, \tag{1.11}$$

其中

$$\begin{aligned}
a_0(x) &= x(2N+a)(N^2+aN-2) - a^2\\
a_1(x) &= -x\Big(x^2(N^2+aN-4)(N^2+aN-3) - x(2N+a)(2N^2+2aN-7) + a^2 - 2\Big)\\
a_2(x) &= 2x^2\Big(x^2(N^2+Na-4) - x(2N+a) + 2\Big)\\
a_3(x) &= x^3\left(1-x^2\right).
\end{aligned} \tag{1.12}$$

作为一项应用，文献 [2] 表明，这个微分方程非常适合采用 WKB 方法进行大规模 N渐近分析，由此得到的渐近公式能够准确再现有限 N 图 $\rho^{(\mathrm{fL})}{}_{(1)}(x)$。我们将在第 2.1 节说明，方程（1.11）可由一个已知的三阶线性微分方程推导而来；该方程源自拉盖尔酉系综的密度，而该密度由特征值概率密度函数（1.3） [43, 2, 68]确定。第 2.2 节将从一阶 3×3 矩阵微分方程的角度讨论（1.11）。第 2.3 节将比较（1） $\rho^{(\mathrm{L})}{}_{(1)}(x)$和 $\rho^{(\mathrm{fL})}{}_{(1)}(x)$的一些特征。

下文（1.8）所指定随机态的纯度分布为

$$P_{N,a}(t)=\frac{1}{C_{N,a}^{(\mathrm{fL})}}\int_0^1 d\lambda_1\cdots\int_0^1 d\lambda_N\,\delta\Big(t-\sum_{j=1}^N\lambda_j^2\Big)\delta\Big(1-\sum_{l=1}^N\lambda_l\Big)\prod_{l=1}^N\lambda_l^a\prod_{1\le j<k\le N}(\lambda_k-\lambda_j)^2. \quad (1.13)$$

对于一般的 N 而言，从实际角度来看，精确计算（1.13）是难以处理的，其复杂度会随着 N 和 a的增加而增加。不过，对于较小的 N 和/或a ，已有一些精确结果。因此，对于 $N=2$，几乎可以立即对其进行求值，具体由 [42, 式（9）]给出

$$P_{2,a}(t)=\frac{(2a+3)!}{2^{a+1}(a+1)!a!}(1-t)^a\sqrt{2t-1}, \quad (1.14)$$

支撑于 $1/2<t<1$上。对于 $a=0$ 和 $N=3$，该分布在区间 $1/3<t<1/2$ 和 $1/2<t<1$ 上是分段实解析的，仅涉及初等函数；见[42, 式（16）]。对于 $N=3$ 和一般的 $a\in\mathbb{Z}^+$，则有更为复杂的表达式，尽管同样仅涉及初等函数；见 [42, 式（31）], ；对于 $N=4$ 和 $a=0$，见 [42,式（24）]。

Pro对于一般的 N ，可以通过考虑（1.13）的拉普拉斯-傅里叶变换来实现进一步研究),

$$\hat{P}_{N,a}^{(\mathrm{fL})}(s)=\frac{1}{C_{N,a}^{(\mathrm{fL})}}\int_0^1 d\lambda_1\cdots\int_0^1 d\lambda_N\,\delta\Big(1-\sum_{l=1}^N\lambda_l\Big)\prod_{l=1}^N e^{-s\lambda_j^2}\lambda_l^a\prod_{1\le j<k\le N}(\lambda_k-\lambda_j)^2, \quad (1.15)$$

或等价地说，这些矩

$$\Big\langle\Big(\sum_{j=1}^N\lambda_j^2\Big)^k\Big\rangle^{(\mathrm{fL})}, \quad (1.16)$$

$k=1$，2，.....；因此，(1.15) 是 (1.16) 的指数生成函数。特别地，由 [41, 式 (10)（经乘以 $N!$] 校正）以及 [42, 式 (17)] ，我们知道

$$\Big\langle\Big(\sum_{j=1}^N\lambda_j^2\Big)^k\Big\rangle^{(\mathrm{fL})}=\frac{N!(N(N+a)-1)!}{(N(N+a)+2k-1)!}$$
$$\times\sum_{\substack{k_1,\dots,k_N\ge 0\\ k_1+\cdots+k_N=k}}\frac{k!}{k_1!\cdots k_N!}\prod_{i=1}^N\frac{(N+a+2k_i-i)!}{(N+a-i)!i!}\prod_{1\le i<j\le N}(2k_i-i-2k_j+j). \quad (1.17)$$

本文第 3.1 节将探讨矩 (1.16) 与一个特定的 σ-Painlevé IV 超越函数之间的关系。这又源于 (1.15) 的 LUE 版本与

$$\hat{P}_{N,a}^{(\mathrm{L})}(s)=\frac{1}{C_{N,a}^{(\mathrm{L})}}\int_0^\infty d\lambda_1\cdots\int_0^\infty d\lambda_N\prod_{l=1}^N e^{-\lambda_l-s\lambda_l^2}\lambda_l^a\prod_{1\le j<k\le N}(\lambda_k-\lambda_j)^2, \quad (1.18)$$

以及 GUE 平均值

$$\Big\langle\prod_{j=1}^N(\lambda_j-1/(2\sqrt{s}))^a\chi_{\lambda_l>1/(2\sqrt{s})}\Big\rangle^{(\mathrm{G})}, \quad (1.19)$$

其中，若 A 为真，则为 $\chi_A=1$ ；否则为 $\chi_A=0$ 。因此，我们得到（82）的一个小幅推广 [73,]

$$\hat{P}_{N,a}^{(\mathrm{L})}(s)=\frac{C_N^{(\mathrm{G})}}{C_{N,a}^{(\mathrm{L})}}e^{N/4s}(1/\sqrt{s})^{Na+N^2}\Big\langle\prod_{j=1}^N(\lambda_j-1/(2\sqrt{s}))^a\chi_{\lambda_j>1/(2\sqrt{s})}\Big\rangle^{(\mathrm{G})}, \quad (1.20)$$

而已知平均值（1.19）与 Painlevé IV 理论中的一个 τ-函数有关 [40]（另见 [28, 第 8] 章），因此满足一个特定的二阶非线性微分方程。该方程的大参数 Laurent解系统地生成了矩（1.16）的 LUE 版本，进而生成矩（1.17）本身，因为二者之间存在简单的比例关系（见（3.7））。在第 3.2 节中，我们利用一个已知的积分公式，该公式涉及以概率密度函数（1.3）加权的 Schur多项式，以推广公式（1.17），使其适用于

$$\Big\langle \Big(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^q \Big)^k \Big\rangle^{(\mathrm{fL})}, \tag{1.21}$$

其中 q 是非负整数。

第 2.2 节从微分方程 (1.11) 起源的一种观点出发，介绍了一阶线性矩阵微分方程；第 4 节再次推导了这些方程，旨在求得 (1.18) 的幂级数展开的递推关系，其中差值乘积中的指数从 2 推广为一般参数β。因此，我们能够在一般 β 情形下明确求出 $k = 1$ 和 $k = 2$ 矩 (1.16)。受酉矩阵中与固定迹厄米矩阵相对应的约束为行列式等于 1 这一类比的启发，我们在附录 A 中给出了 Haar 分布的 SU(N) 两点关联的精确函数形式。

2 fLUE密度的微分方程

2.1 将 LUE 密度的标量微分方程转化

一般而言，对于定义在 $\lambda_l \in I$上的特征值概率密度函数 $p_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$，其中 $(l = 1, \dots, N)$，特征值密度$\rho_{(1)}(x)$为

$$\rho_{(1)}(x) = N \int_I d\lambda_2 \cdots \int_I d\lambda_N \, p_N(x, \lambda_2, \dots, \lambda_N). \tag{2.1}$$

对于拉盖尔酉系综，我们有 $p_N = p_N^{(\mathrm{L})}$，如式 (1.3) 所指定。先前的工作[43, 2, 68] 已表明，相应的密度 $\rho^{(L)}{}_{(1)}(x)$（记作）满足以下三阶线性微分方程

$$\left(x^3 \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} + 4x^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \left[x^2 - 2(a+2N)x + a^2 - 2 \right] x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \left[(a+2N)x - a^2 \right] \right) f(x) = 0. \tag{2.2}$$

我们的首要目标是证明，微分方程 (1.11) 可作为 (2.2) 的推论导出。

首先，在 δ函数中引入参数 t，以推广式 (1.5)：

$$p_{N,a}^{(\mathrm{fL})}(\lambda_1, \dots, \lambda_N; t) := \frac{1}{C_{N,a}^{(\mathrm{fL})}} \delta\Big(t - \sum_{l=1}^{N} \lambda_l \Big) \prod_{l=1}^{N} \lambda_l^a \prod_{1 \le j < k \le N} (\lambda_k - \lambda_j)^2. \tag{2.3}$$

相应的拉普拉斯-傅里叶变换为

$$\hat{p}_{N,a}^{(\mathrm{fL})}(\lambda_1, \dots, \lambda_N; s) := \frac{1}{C_{N,a}^{(\mathrm{fL})}} \prod_{l=1}^{N} e^{-s\lambda_l} \lambda_l^a \prod_{1 \le j < k \le N} (\lambda_k - \lambda_j)^2, \tag{2.4}$$

除了特征值的缩放和归一化之外，这恰好就是 Laguerre 酉系综 (1.3) 的特征值概率密度函数。

现在令

$$\rho_{(1)}^{(\mathrm{fL})}(x;t) = N\int_I d\lambda_2 \cdots \int_I d\lambda_N\, p_N^{(\mathrm{fL})}(x,\lambda_2,\ldots,\lambda_N;t). \tag{2.5}$$

取拉普拉斯-傅里叶变换，并利用 (2.4)，可得

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{(1)}^{(\mathrm{fL})}(x;s) &= N\int_0^\infty d\lambda_2 \cdots \int_0^\infty d\lambda_N\, \hat{p}_{N,a}^{(\mathrm{fL})}(x,\lambda_2,\ldots,\lambda_N;s)\\ &= \frac{C_{N,a}^{(\mathrm{L})}}{C_{N,a}^{(\mathrm{fL})}}\frac{1}{s^{Na+N^2-1}}\rho_{(1)}^{(\mathrm{L})}(sx).\end{aligned}$$

取逆变换并令 $t=1$，即可推出

$$\begin{aligned}\rho_{(1)}^{(\mathrm{fL})}(x) &= \frac{C_{N,a}^{(\mathrm{L})}}{C_{N,a}^{(\mathrm{fL})}}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\rho_{(1)}^{(\mathrm{L})}(sx)}{s^{Na+N^2-1}}e^s\,ds, \quad c>0\\ &= \frac{C_{N,a}^{(\mathrm{L})}}{C_{N,a}^{(\mathrm{fL})}}x^{Na+N^2-2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty}\frac{\rho_{(1)}^{(\mathrm{L})}(s)}{s^{Na+N^2-1}}e^{s/x}\,ds, \quad \tilde{c}>0.\end{aligned} \tag{2.6}$$

我们指出，上文所述拉普拉斯-傅里叶变换的用法，几乎见于所有与固定迹 Laguerre 系综相关的解析研究，事实上也适用于具有固定迹条件的一般随机矩阵系综;
[6, 2, 52, 18, 72, 7, 4, 51, 33] 可见此类研究的若干例子。

关系式 (2.6) 将微分方程 (1.11) 与 (2.2) 联系起来。

命题 2.1。 由于 $\rho^{(\mathrm{L})}{}_{(1)}(s)$ 在 *(2.6)* 中满足微分方程 *(2.2)*（其中始终以 s 替换 x），因此 $\rho^{(\mathrm{fL})}{}_{(1)}(x)$满足 *(1.11)*。

证明。 从微分方程 (2.2) 开始，并将其中的 x 全部替换为 s。两边乘以 $e^{s/x}/s^{Na+N^2-1}$，并在复平面上对 s 从 $\tilde{c}-i\infty$ 到 $\tilde{c}+i\infty$,$\tilde{c}>0$ 积分。令

$$g_p(x) = \int_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty}\frac{s^p e^{s/x}}{s^{Na+N^2-1}}\rho_{(1)}^{(\mathrm{L})}(s)\,ds$$

例如，将此步骤应用于 (2.2) 中的第一项，并进行分部积分后，我们得到恒等式

$$\begin{aligned}&\int_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty}\frac{s^3e^{s/x}}{s^{Na+N^2-1}}\frac{d^3}{ds^3}\rho_{(1)}^{(\mathrm{L})}(s)\,ds\\ &\qquad = -(2-aN-N^2)(3-aN-N^2)(4-aN-N^2)g_0(x) - \frac{1}{x^3}g_3(x)\\ &\qquad\qquad - \frac{3}{x^2}(4-aN-N^2)g_2(x) - \frac{3}{x}(3-aN-N^2)(4-aN-N^2)g_1(x).\end{aligned}$$

注意到以下关系后，这便成为关于 $g_0(x)$ 的微分恒等式

$$g_p(x) = \Big(-x^2\frac{d}{dx}\Big)^p g_0(x). \tag{2.7}$$

[2]一个例外是 [5], , 其中使用了δ函数的高斯近似。

将上述步骤分别应用于（2.2）中的各项，同样可以为 $g_0(x)$导出进一步的微分恒等式。将它们相加可知， $g_0(x)$满足一个特定的三阶线性微分方程。

设为 $g_0(x) = h(x)/x^{Na+N^2-2}$，后者可转化为关于 $h(x)$ 的三阶线性微分方程。根据 (2.6)，它与 $\rho^{(\mathrm{fL})}{}_{(1)}(x)$ 成正比。将转化后的三阶线性微分方程写成 (1.11) 的形式，可知系数的取值由 (1.12) 给出（使用计算机代数进行必要的化简最为合适）。

□

2.2 矩阵微分方程的观点

除了满足三阶线性标量微分方程外， $\rho^{(\mathrm{L})}{}_{(1)}(x)$ 还满足一阶 3×3 矩阵微分方程。这一事实对于高斯酉系综 (1.1) 和 Jacobi酉系综的密度是已知的（后者的特征值概率密度函数除归一化因子外，由将 (1.1) 中的 $e^{-\lambda_l^2}$ 替换为 $\lambda_l^a(1-\lambda_l)^b, 0 < \lambda_l < 1$ 得到）。这里我们先明确写出该矩阵微分方程。随后将证明，这意味着 $\rho^{(\mathrm{fL})}{}_{(1)}(x)$ 也满足一阶 3×3 矩阵微分方程，而这又意味着它满足三阶线性标量微分方程 (1.11)。

与 $\rho^{(\mathrm{L})}{}_{(1)}(x)$ 相关的矩阵微分方程，实际上是一个更一般的矩阵微分方程的特例。后者适用于 Laguerre β-系综的密度，其特征是特征值概率密度函数正比于

$$\prod_{l=1}^{N} \lambda_l^a e^{-\beta\lambda_l/2} \prod_{1\le j<k\le N} |\lambda_k - \lambda_j|^\beta, \tag{2.8}$$

其中每个 $\lambda_l \in \mathbb{R}^+$。据 [27] （另见 [28, §13.2.5]）可知，当 β 为偶数时

$$\rho^{(\mathrm{L})}_{N,\beta}(x) = N \frac{W_{2a/\beta+2,\beta,N-1}}{W_{2a/\beta,\beta,N}} x^a e^{-\beta x/2} {}_1F_1^{(\beta/2)}(-N+1; 2a/\beta+2; (x)^\beta), \tag{2.9}$$

其中 ${}_1F_1^{(\beta/2)}$ ——严格来说，这是一个基于 Jack多项式 [28,§13.1.1] 的特定多重超几何函数——具有如下多维积分表示

$$\begin{aligned} {}_1F_1^{(\beta/2)}(-N+1; 2a/\beta+2; (x)^\beta) &= \frac{1}{M_\beta(2a/\beta+2/\beta-1, N-1, 2/\beta)} \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \cdots \\ &\times \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_\beta \prod_{l=1}^{\beta} e^{i\theta_l(2a/\beta+2/\beta-1)} (1+e^{-i\theta_l})^{N+2a/\beta+2/\beta-2} e^{-xe^{i\theta_l}} \prod_{1\le j<k\le\beta} |e^{i\theta_k} - e^{i\theta_j}|^{4/\beta}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

量 $W_{\alpha,\beta,n}$ 和 $M_n(\lambda_1, \lambda_2, \tau)$ 是归一化常数，其伽马函数表达式已知——它们的具体形式与微分方程的确定无关——此外，$(x)^\beta$ 是一种多变量记法，表示自变量 x 重复出现 β 次。

为了确定矩阵微分方程，需要了解 (2.10) 所满足的微分-差分系统。为此，作为初步准备，令 $e_p(y_1, \ldots, y_N)$ 表示关于 $\{y_j\}_{j=1}^N$的初等对称多项式，并定义

$$\begin{aligned} J^{(\alpha)}_{p,N,R}(x) = \frac{1}{C_p^N} \int_R dt_1 \cdots \int_R dt_N \prod_{l=1}^{N} t_l^{\lambda_1} (1-t_l)^{\lambda_2} (x-t_l)^\alpha \\ \times \prod_{1\le j<k\le N} |t_k - t_j|^{2\tau} e_p(x-t_1, \ldots, x-t_N), \end{aligned} \tag{2.11}$$

其中， R 是复平面中的一条积分路径，使得被积函数在端点处为零；例如，当参数 λ_1、λ_2、α 均为正数时，可以取 $R=[0,1]$ 或 $R=[x,1]$。符号 C_p^N 表示二项式系数 N 取 p。已知这族多重积分满足微分-差分系统 [26], [28, §4.6.4]

$$(N-p)E_pJ_{p+1}(x)=(A_px+B_p)J_p(x)-x(x-1)\frac{d}{dx}J_p(x)+D_px(x-1)J_{p-1}(x), \tag{2.12}$$

对 $p=0$、1、.....、N 均成立。这里我们将 $J^{(\alpha)}_{p\,N\text{、}R}(x)=$ 简写为： $J_p(x)$，其系数由下式确定：

$$\begin{aligned}
A_p&=(N-p)\Big(\lambda_1+\lambda_2+2\tau(N-p-1)+2(\alpha+1)\Big)\\
B_p&=(p-N)\Big(\lambda_1+\alpha+1+\tau(N-p-1)\Big)\\
D_p&=p\Big(\tau(N-p)+\alpha+1\Big)\\
E_p&=\lambda_1+\lambda_2+1+\tau(2N-p-2)+(\alpha+1).
\end{aligned}$$

事实上，该微分-差分系统等价于一个矩阵微分方程 [37]；见下文。对于特殊情形 $\tau=1/2$，后者最早于 [21] 在文献中被单独提出；关于近期进展，参见 [68, 35, 36]。

当 τ 为正整数时，(2.11) 中差值乘积的绝对值符号可以去掉。设我们选择 R 为复平面中的单位圆——对于 $\lambda_2>0$ 这是可行的，因为被积函数在（唯一的）端点 $t_l=1$ 处为零——并通过写成 $t_l=e^{i\theta_l}$ 进行参数化。简单整理后可得，(2.11) 中的被积函数变换为与下式成正比：

$$\prod_{l=1}^{N}e^{i\theta_l(\lambda_1+1+\tau(N-1)+\alpha)}(1-e^{i\theta_l})^{\lambda_2}(1-xe^{-i\theta_l})^{\alpha}\prod_{1\le j<k\le N}|e^{i\theta_k}-e^{i\theta_j}|^{2\tau}e_p(x-e^{i\theta_1},\dots,x-e^{i\theta_N}). \tag{2.13}$$

如 [34, 附录 A],中所述，从 (2.11) 中的被积函数 (2.13) 出发直接应用分部积分，可表明 (2.13) 情形下的递推关系 (2.12) 对一般的$\tau>0$仍然成立。现在我们可以为一类形如 (2.10) 中所出现的多重积分指定一个微分-差分递推关系。

命题 2.2. 设

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_{p,N}(x)=\frac{1}{C_p^N}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta_1\cdots\int_{-\pi}^{\pi}d\theta_N\prod_{l=1}^{N}e^{i\tilde{\lambda}_1\theta_l}(1+e^{-i\theta_l})^{\lambda_2}e^{xe^{i\theta_l}}\\
\times\prod_{1\le j<k\le N}|e^{i\theta_k}-e^{i\theta_j}|^{2\tau}e_p(e^{-i\theta_1},\dots,e^{-i\theta_N}).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

~ ~将 $J_{p,N}(x)=J_p(x)$简记为，对于 $p=0$、1、.....、N，这个多重积分满足如下微分-差分递推关系

$$(N-p)\tilde{E}_p\tilde{J}_{p+1}(x)=(N-p)(x+\tilde{\lambda}_1+p\tau)\tilde{J}_p(x)+x\frac{d}{dx}\tilde{J}_p(x)-px\tilde{J}_{p-1}(x), \tag{2.15}$$

其中

$$\tilde{E}_p=-\tilde{\lambda}_1+\lambda_2+\tau(N-p-1)+1. \tag{2.16}$$

证明。 在一个与 p 无关的符号因子之外，（2.14）中的被积函数可由（2.13）取复共轭并令

$$\theta_l \mapsto \theta_l - \pi, \quad -\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 + 1 + \tau(N-1) + \alpha, \quad x \mapsto x/\alpha, \quad \alpha \to \infty.$$

将其中最后三个代入 (2.12)，得到 (2.15)。

□

将 $\beta = 2$ 情形下的 (2.14) 与 (2.9) 比较可知，我们现在关注的 (2.15) 中，参数和代换应取为

$$N = 2, \quad \tau = 1, \quad x \mapsto -x, \quad \tilde{\lambda}_1 = a, \quad \lambda_2 = N + a - 1, \quad \hat{J}_p(x) = x^a e^{-x} \tilde{J}_p(-x),$$

此时它写作

$$(2-p)(N+1-p)\hat{J}_{p+1}(x) = ((1-p)(-x+a) + (2-p)p)\hat{J}_p(x) + x\frac{d}{dx}\hat{J}_p(x) + px\hat{J}_{p-1}(x). \quad (2.17)$$

这个递推关系可以写成等价的矩阵形式

$$x\frac{d}{dx}\begin{bmatrix}\hat{J}_0(x)\\ \hat{J}_1(x)\\ \hat{J}_2(x)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x-a & 2(N+1) & 0\\ -x & -1 & N\\ 0 & -2x & -x+a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{J}_0(x)\\ \hat{J}_1(x)\\ \hat{J}_2(x)\end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

由第一行所蕴含的方程可将 $\hat{J}_1(x)$ 与 $\hat{J}_0(x)$ 联系起来；有了这一结果，第二个方程便可将 $\hat{J}_2(x)$ 写成关于 $\hat{J}_0(x)$ 的形式。可以验证，将其代入第三行所蕴含的方程后，可得 $\hat{J}_0(x)$ 满足三阶标量微分方程 (2.2)；这与 $\hat{J}_0(x)$ 正比于 $\rho^{(\mathrm{L})}{}_{(1)}(x)$ 这一事实相符。

现在，在 (2.18) 中将 x 全部替换为 s。两边乘以 $e^{s/x}/s^{Na+N^2-1}$ $(0 < x < 1)$，并对 s 在从 $c - i\infty$ 到 $c + i\infty$ 的积分路径上积分。为此，对左边使用分部积分；对右边则先将矩阵分解为两项之和，其中一项与 s 成正比，另一项与 s 无关。再利用 $p = 1$ 情形下 (2.7) 的对应形式后，这一过程得到一个关于列向量的一阶矩阵微分方程

$$\left[\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{s/x}}{s^{Na+N^2-1}}\hat{J}_p(s)\,ds\right]_{p=0,1,2}. \quad (2.19)$$

将 (2.19) 乘以 x^{Na+N^2-1}，并将所得列向量记为 $[\hat{I}_p(x)]_{p=0,\,1,\,2}$。于是，(2.19) 的矩阵微分方程可变换为

$$x\frac{d}{dx}\begin{bmatrix}\hat{I}_0(x)\\ \hat{I}_1(x)\\ \hat{I}_2(x)\end{bmatrix} = \left((Na+N^2-2)x - x^2\frac{d}{dx}\right)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{I}_0(x)\\ \hat{I}_1(x)\\ \hat{I}_2(x)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-a & 2(N+1) & 0\\ 0 & -1 & N\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{I}_0(x)\\ \hat{I}_1(x)\\ \hat{I}_2(x)\end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

现在，我们按照下文（2.18）详述的策略，推导出关于 $I_0(x)$ 的一个标量微分方程。$\hat{}$ 可以验证，该方程与（1.11）是同一个微分方程。根据定义， $I_0(x)$ 与 $\rho^{(\mathrm{fL})}{}_{(1)}(x)$ 成正比——回顾（2.6）、（2.19）下方 $\hat{I}_0(x)$ 的定义，以及 $\hat{J}_0(x)$ 与 $\rho^{(\mathrm{L})}{}_{(1)}(x)$ 成正比这一事实——这便为后者提供了另一种推导。

2.3 $\rho^{(\mathrm{L})}{}_{(1)}(x)$ 与 $\rho^{(\mathrm{fL})}{}_{(1)}(x)$ 的性质比较

将（1.3）代入（2.1）可知，Laguerre 酉系综的密度具有如下形式

$$\rho_{(1)}^{(\mathrm{L})}(x) = x^a e^{-x} \sum_{p=0}^{2(N-1)} \alpha_p x^p \tag{2.21}$$

对于某些系数 $\{\alpha_p\}$。如 [68, 注 2.1.3] 所述，微分方程 (2.2) 存在唯一解，其形式与 (2.21) 相容，即 $x \to \infty$ 形式。

$$\rho_{(1)}^{(\mathrm{L})}(x) = \frac{NC_{N-1,a}^{(\mathrm{L})}}{C_{N,a}^{(\mathrm{L})}} x^a e^{-x} \Big(x^{2(N-1)} + O(x^{2(N-1)-1}) \Big), \tag{2.22}$$

因此，特别是，这给出了关于 $\{\alpha_p\}$ 的递推关系；在要求满足以下条件后，解唯一：

$$\alpha_{2(N-1)} = \frac{NC_{N-1,a}^{(\mathrm{L})}}{C_{N,a}^{(\mathrm{L})}}. \tag{2.23}$$

将 (2.21) 代入 (2.6) 可知，用 $\{\alpha_p\}$ 表示时，

$$\rho_{(1)}^{(\mathrm{fL})}(x) = \frac{C_{N,a}^{(\mathrm{L})}}{C_{N,a}^{(\mathrm{fL})}} \sum_{p=0}^{2(N-1)} \Gamma((N-1)a + N^2 - 2 - p + 1) \alpha_p \Big(\frac{1}{x} - 1 \Big)^{(N-1)a+N^2-2-p}, \tag{2.24}$$

支撑于 (0，1)。这表明，与 (1.12) 相关的自然自变量是 $y = (1/x) - 1$，并且以该变量表示时，只要指定首项（如 (2.23) 所明确给出的），微分方程就存在唯一解$y \to \infty$。

接下来考虑与密度 $\rho^{(\mathrm{L})}{}_{(1)}(x)$ 和 $\rho^{(\mathrm{fL})}{}_{(1)}(x)$ 相关的矩，

$$m_p^{(\mathrm{L})} = \int_0^\infty x^p \rho_{(1)}^{(\mathrm{L})}(x)\, dx, \qquad m_p^{(\mathrm{fL})} = \int_0^1 x^p \rho_{(1)}^{(\mathrm{fL})}(x)\, dx. \tag{2.25}$$

我们从 [45]和 [53]知道，$\{m_p^{(\mathrm{L})}\}$ 满足二阶递推关系

$$(k+1)m_k^{(\mathrm{L})} = (2k-1)(a+2N)m_{k-1}^{(\mathrm{L})} + (k-2)((k-1)^2 - a^2)m_{k-2}^{(\mathrm{L})}, \tag{2.26}$$

在 [20] 中已证明该关系对一般的 $k > -a - 1$成立。推导式 (2.26) 的一种方法是将微分方程 (2.2) 两边乘以 x^{k-2}，对两边从 0 积分到∞，并利用分部积分进行化简。$m_k^{(\mathrm{L})}$ 关于某些 $N-1$ 次连续 Hahn 多项式的表达式，且该表达式对连续 k 成立，已在 [19]中给出。

利用式 (2.6) 中的第一个等式，以及归一化 (1.4) 和 (1.6) 的显式计算结果，我们可以推导出 [81]

$$m_p^{(\mathrm{fL})} = \frac{1}{(N^2+Na)_p} m_p^{(\mathrm{L})}, \tag{2.27}$$

其中 $(u)_p$ 表示上升 Pochhammer 符号。将 (2.27) 代入 (2.26) 可得，$\{m_p^{(\mathrm{fL})}\}$ 满足二阶递推关系

$$\begin{aligned}(k+1)(N^2+Na+k)(N^2+Na+k-1)m_k^{(\mathrm{fL})} \\ = (2k-1)(a+2N)(N^2+Na+k-1)m_{k-1}^{(\mathrm{fL})} + (k-2)((k-1)^2-a^2)m_{k-2}^{(\mathrm{fL})}.\end{aligned} \tag{2.28}$$

从微分方程 (1.12) 出发，并按照 (2.26) 下方所述的步骤进行，可得到 (2.28) 的另一种推导。

由 (1.4) 可知

$$C_{N,a}^{(\mathrm{L})} = \int_0^\infty d\lambda_1 \cdots \int_0^\infty d\lambda_N \prod_{l=1}^N \lambda_l^a e^{-\lambda_l} \prod_{1\le j<k\le N} (\lambda_k - \lambda_j)^2$$
$$= t^{N^2+Na} \int_0^\infty d\lambda_1 \cdots \int_0^\infty d\lambda_N \prod_{l=1}^N \lambda_l^a e^{-t\lambda_l} \prod_{1\le j<k\le N} (\lambda_k - \lambda_j)^2.$$

两边同乘 $1/(C_N^{(\mathrm{L})} \cdot {}_a t^{N^2+Na})$，对 t 求导，并令$t=1$，可得

$$m_1^{(\mathrm{L})} = N^2 + Na. \tag{2.29}$$

由定义 (1.5)

$$m_1^{(\mathrm{fL})} = 1 \tag{2.30}$$

可知 (2.29) 与 (2.27) 一致。

正定矩阵的全局缩放区制旨在对特征值进行重新缩放，使一阶矩在 $N\to\infty$ 时为 N 阶（作为归一化条件，我们要求其首项恰为 N）。我们还将参数 a 缩放，令 $a=\alpha N$。对于 LUE，由 (2.29) 可知，将每个 λ_l~ 替换为 $\lambda_l N$，即可实现全局缩放；为了与 fLUE 的第一个（缩放后）一阶矩相匹配，应将每个 λ_l~ 替换为 $\lambda_l/(N(1+\alpha))$。因此，在 (1.12) 中应作代换 $x=yN$，在 (2.2) 中应作代换 $x=y/(N(1+\alpha))$。这样处理后，并令 N 的首阶项相等，在两种情况下都会得到相同的一阶线性微分方程

$$\Big(-(y^2 - 2(\alpha+2)y + \alpha^2) y \frac{d}{dy} + (\alpha+2)y - \alpha^2 \Big) f(y) = 0. \tag{2.31}$$

该问题的解必须非负，且归一化后积分为 1；它就是著名的 Marchenko–Pastur 定律

$$f(y) = \frac{1}{2\pi y} \Big((y-\alpha_-)(\alpha_+ - y) \Big)^{1/2}, \quad \alpha_\pm = (\sqrt{\alpha+1} \pm 1)^2, \tag{2.32}$$

支撑于 $y\in(\alpha_-,\ \alpha_+)$。这与 [65, 59] 中已知的结果一致。

3 Mo纯度及相关统计量的矩与累积量

3.1 纯度的累积量与 σ-Painlevé IV

本节首先回顾 [40], [28, 第 8] 章中所述的（1.20）式中的高斯酉系综平均值与 Painlevé IV [62] 的哈密顿量表述中的一个超越函数之间的精确关系。因此，我们有

$$\frac{d}{dt} \log \Big\langle \prod_{j=1}^N (\lambda_j - t)^a \chi_{\lambda_j > t} \Big\rangle^{(\mathrm{G})} = U_N(t,a), \tag{3.1}$$

其中 $U_N(t,\ a)$，满足特定的 σ-Painlevé IV 方程；该方程是一个二阶非线性方程，哈密顿量本身满足此方程，

$$(\sigma'')^2 - 4(t\sigma' - \sigma)^2 + 4\sigma'(\sigma' - 2a)(\sigma' + 2N) = 0. \tag{3.2}$$

由于该平均值是一个对数导数，并且在 Painlevé 系统的哈密顿量表述中等于一个哈密顿量，因此称其为 τ-函数；参见例如 [28, §8.2.3]。

鉴于 (3.1)，将 $1/(2\sqrt{s}) = t$ 写入 (1.20)中，我们得到

$$\frac{d}{dt}\log \hat{P}_{N,a}^{(\mathrm{L})}(1/(4t^2)) = 2Nt + \frac{N^2+Na}{t} + U_N(t,a). \tag{3.3}$$

作为 LUE 中线性统计量 $\sum_{j=1}^N \lambda_j^2$ 分布的指数生成函数，并令 $\{\kappa_n^{(\mathrm{L})}\}$ 表示相应的累积量，我们有展开式

$$\log \hat{P}_{N,a}^{(\mathrm{L})}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \kappa_n^{(\mathrm{L})}}{n!} u^n, \tag{3.4}$$

因此， $U_N(t;\, a)$ 允许大-t 展开

$$U_N(t,a) = -2Nt - \frac{N^2+Na}{t} + \frac{1}{2t^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \kappa_{n+1}^{(\mathrm{L})}}{4^n n! t^{2n}}. \tag{3.5}$$

命题 3.1。 *LUE* 线性统计量 $\sum_{j=1}^N \lambda_j^2$ 的分布的累积量 $\{\kappa_n^{(\mathrm{L})}\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{1/t^{2n+3}\}$ 展开式 ($n = 0$、1.....) 中各项的系数成正比，其中的 σ-*Painlevé IV* 超越函数为 $U_N(t,a)$，具体关系见 *(3.5)*。这些系数可通过将 *(3.5)* 代入 *(3.2)* 得到，从而得到前三个累积量

$$\begin{aligned}
\kappa_1^{(\mathrm{L})} &= N(N+a)(2N+a) \\
\kappa_2^{(\mathrm{L})} &= 2N(N+a)(1+2a^2+9aN+9N^2) \\
\kappa_3^{(\mathrm{L})} &= 8N(N+a)(2N+a)(10+5a^2+27aN+27N^2).
\end{aligned}$$

累　积量完全决定了相应的矩，遵循标准公式 s

$$\hat{m}_1^{(\mathrm{L})} = \kappa_1^{(\mathrm{L})}, \quad \hat{m}_2^{(\mathrm{L})} = \kappa_2^{(\mathrm{L})} + (\kappa_1^{(\mathrm{L})})^2, \quad \hat{m}_3^{(\mathrm{L})} = \kappa_3^{(\mathrm{L})} + 3\kappa_2^{(\mathrm{L})}\kappa_1^{(\mathrm{L})} + (\kappa_1^{(\mathrm{L})})^3. \tag{3.6}$$

已知矩 $\hat{m}_n^{(\mathrm{L})}$ 的重要性在于，它们可通过类似于 (2.27) [73] 的公式与纯度的矩 $\hat{m}_n^{(\mathrm{fL})}$ 相关联

$$\hat{m}_p^{(\mathrm{fL})} = \frac{1}{(N^2+Na)_{2p}} m_p^{(\mathrm{L})}. \tag{3.7}$$

Inve运用关系式 (3.6) 即可计算纯度的累积量 $\kappa_n^{(\mathrm{fL})}$.

推论 3.1. 与特征值概率密度函数 *(1.5)* $\sum_{j=1}^N \lambda_j^2$ 相关联的纯度统计量的前三个累积量为

$$\begin{aligned}
\kappa_1^{(\mathrm{fL})} &= \frac{(2N+a)}{(N(N+a)+1)} \\
\kappa_2^{(\mathrm{fL})} &= \frac{2(N^2-1)((N+a)^2-1)}{(N(N+a)+1)^2(N(N+a)+2)(N(N+a)+3)} \\
\kappa_3^{(\mathrm{fL})} &= \frac{8(N^2-1)((N+a)^2-1)(2N+a)(N(N+a)-5)}{(N(N+a)+1)^3(N(N+a)+2)(N(N+a)+3)(N(N+a)+4)(N(N+a)+5)}.
\end{aligned}$$

均值 $\kappa_1^{(\mathrm{fL})}$ 首次在 [55]中计算得到。随后在 [70], 中将其推广到前三个累积量，并利用矩的求和公式 (1.17)，在 [41]中进一步推广到前五个累积量。尽管上文只列出了前三个累积量，但我们的方法还提供了一种高效且系统的方式来继续扩展这一列表。

3.2 线性统计量 $\sum_{k=1}^{N}\lambda_j^q$

线性统计量 $T_q:=\sum_{k=1}^{N}\lambda_j^q$ 与˜中介绍的量子 Tsallis 熵密切相关，该段落包含 (1.9)；后者用 T_q 表示为 T_q:=(1/(1 − q))(1 − T_q)。这里我们将给出 T_q的矩的求和表达式 (1.17) 的对应形式。˜注意，这些矩与 T_q 的矩通过以下简单公式相关

$$(\tilde{T}_q)^k=\Big(\frac{1}{1-q}\Big)^k\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s}(T_q)^s. \tag{3.8}$$

命题 3.2。 对于所有 $r\geq 0$、 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $qk+a>-1$ ，我们有

$$\Big\langle\Big(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^q\Big)^k\Big\rangle^{(\mathrm{fL})}=\frac{(N(N+a)-1)!}{(N(N+a)+qk-1)!}$$
$$\times\sum_{\substack{k_1,\dots,k_N\geq 0\\ k_1+\cdots+k_N=k}}\frac{k!}{k_1!\cdots k_N!}\prod_{i=1}^{N}\frac{(N+a+qk_i-i)!}{(N+a-i)!}\prod_{1\leq i<j\leq N}\frac{qk_i-i-qk_j+j}{-i+j}. \tag{3.9}$$

证明。 在 [41] 中针对 $q=2$ 情形的推导足以得到一般的 q 结果 (3.9)。由

$$J_{a,N}(\mathbf{k}):=N!\int_0^1 dx_1\cdots\int_0^1 dx_N\,\delta\Big(1-\sum_{i=1}^{N}x_i\Big)\Delta(\mathbf{x})\prod_{i=1}^{N}x_i^{a+k_i+i-1}, \tag{3.10}$$

其中$\mathbf{k}$ = $(k_1,\ \dots,\ k_N)$, $\Delta(\mathbf{x})=\prod_{1\leq i<j\leq N}(x_j-x_i)$, 这一推导依赖于求值公式 la

$$J_{a,N}(\mathbf{k})=\frac{N!\prod_{i=1}^{N}\Gamma(a+k_i+i)}{\Gamma(N^2+aN+\sum_{i=1}^{N}k_i-1)!}\prod_{1\leq i<j\leq N}(k_j-k_i+j-i). \tag{3.11}$$

为推导 (3.11)，引入由下式指定的 Schur多项式 $s_{\kappa_1,\ \dots,\ \kappa_N}(\mathbf{x})$

$$s_{\kappa_1,\dots,\kappa_N}(\mathbf{x})=\det[x_j^{\kappa_{N+1-i}+i-1}]_{i,j=1}^{N}/\Delta(\mathbf{x}); \tag{3.12}$$

按照惯例，要求 $\kappa_1\geq\cdots\geq\kappa_N\geq 0$ 构成一个非负整数分拆；然而，即使不作此假设，(3.12) 仍有定义，只是它不再必然是多项式。对 (3.10) 的被积函数进行对称化后，其中的最后一个因子变为一个行列式；利用 (3.12) 可得

$$J_{a,N}(\mathbf{k}):=\int_0^1 dx_1\cdots\int_0^1 dx_N\,\delta\Big(1-\sum_{i=1}^{N}x_i\Big)(\Delta(\mathbf{x}))^2 s_{a+k_N,\dots,a+k_1}(\mathbf{x}). \tag{3.13}$$

另一方面，根据 Schur多项式理论，众所周知 [48] （另一个近期在随机矩阵理论中的应用，参见 [32, §2.3] ）

$$\int_0^\infty dx_1\cdots\int_0^\infty dx_N\prod_{l=1}^{N}x_l^a e^{-x_l}(\Delta(\mathbf{x}))^2 s_{\kappa_1,\dots,\kappa_N}(\mathbf{x})=N!\prod_{i=1}^{N}\Gamma(a+k_i+i)\prod_{1\leq i<j\leq N}(\kappa_i-\kappa_j+j-i). \tag{3.14}$$

采用与推导 (2.27) 相同的策略，我们可以由此得出 (3.11) 的计算结果。

为了在推导 (3.9) 时使用 (3.11)，按照 [41] 中针对$q=2$ 情形的处理方法，我们首先注意到，根据 $\Delta(\mathbf{x})$ 的反对称性，

$$\Big\langle \Big(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^q\Big)^k\Big\rangle^{(\mathrm{fLUE})} = \frac{N!}{C_{N,a}^{(\mathrm{fL})}}\int_0^1 dx_1\cdots\int_0^1 dx_N\,\delta\Big(1-\sum_{i=1}^{N}x_i\Big)\Delta(\mathbf{x})\prod_{i=1}^{N}x_i^{a+i-1}\Big(\sum_{j=1}^{N}x_j^q\Big)^k. \tag{3.15}$$

现在代入

$$\Big(\sum_{j=1}^{N}x_j^q\Big)^k = \sum_{\substack{k_1,\dots,k_N\ge 0\\ k_1+\cdots+k_N=k}}\frac{k!}{k_1!\cdots k_N!}x_1^{qk_1}\cdots x_N^{qk_N}, \tag{3.16}$$

并将求和移至积分号外，即可根据（3.11）计算各个积分，从而得到（3.9）。

□

在 $k=1$ 的情形下，（3.9）中的多重指标求和可替换为对 j、$1\le j\le N$ 的求和，其中 $k_j=1$、$k_p=0$ （$p\neq s$）。这样，$k=1$ 的情形便可表示为以单位参数为自变量的终止型 ${}_3F_2$ 超几何函数。

命题 3.3。我们有

$$\Big\langle\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^q\Big\rangle^{(\mathrm{fL})} = \frac{(N(N+a)-1)!}{(N(N+a)+q-1)!}\frac{\Gamma(N+a+q)}{\Gamma(N+a)}\frac{\Gamma(N+q)}{\Gamma(1+q)\Gamma(N)} \times {}_3F_2\left(\begin{matrix}1-N,1-(N+a),1-q\\ 1-(N-q),1-(N+a+q)\end{matrix}\middle|1\right). \tag{3.17}$$

证明。按所示方式对多重指标求和进行参数化后，求和中的单重乘积化简为

$$\frac{(N+a+q-j)!}{(N+a-j)!} = \frac{\Gamma(N+a+q)}{\Gamma(N+a)}\frac{(1-(N+a))_{j-1}}{(1-(N+a+q))_{j-1}},$$

双重乘积化简为

$$\prod_{i=1}^{j-1}\frac{-i-q+j}{-i+j}\prod_{i=j+1}^{N}\frac{i+q-j}{i-j} = \frac{(1-q)_{j-1}}{(j-1)!}\frac{\Gamma(N+q)}{\Gamma(1+q)\Gamma(N)}\frac{(1-N)_{j-1}}{(1-(N+q))_{j-1}}.$$

对 j 的求和可识别为某个特定 ${}_3F_2$ 函数的级数形式，从而推出 (3.17)。

□

注意，当 q 为小于 N 的正整数时，(3.17) 中的超几何求和只有 q 个非零项。特别地，对于 $q=1$，我们可以验证，推论 3.1 中 $\kappa_1^{(\mathrm{fL})}$ 的结果得以恢复。

Wei 在著作 [75][3] 中采用了与我们的命题 3.3 不同的形式体系，推导出了该公式

$$\Big\langle\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^q\Big\rangle^{(\mathrm{L})} = \frac{N\Gamma(N+a+q)}{\Gamma(N+a)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1-N,-q,1-q\\ 2,1-(N+a+q)\end{matrix}\middle|1\right). \tag{3.18}$$

[3]对于 q，a 个非负整数，这种等价形式可见于 [46，定理 2.5]。

与 (2.27) 一致

$$\Big\langle \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^q \Big\rangle^{(\mathrm{fL})} = \frac{(N(N+a)-1)!}{(N(N+a)+q-1)!} \Big\langle \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^q \Big\rangle^{(\mathrm{L})}$$

因此，在左侧代入 (3.17)、右侧代入 (3.18) 后，可得我们必须有

$$\frac{\Gamma(N+q)}{\Gamma(1+q)}\, {}_3F_2\!\left(\begin{matrix} 1-N, 1-(N+a), 1-q \\ 1-(N-q), 1-(N+a+q) \end{matrix}\middle| 1\right) = N!\, {}_3F_2\!\left(\begin{matrix} 1-N, -q, 1-q \\ 2, 1-(N+a+q) \end{matrix}\middle| 1\right). \tag{3.19}$$

这可以看作更一般恒等式 [67, Entry (7.4.4.85)] 的一个特例

$${}_3F_2\!\left(\begin{matrix} -n, b, c \\ d, e \end{matrix}\middle| 1\right) = \frac{(d-b)_n}{(d)_n}\, {}_3F_2\!\left(\begin{matrix} -n, b, e-c \\ e, b-d-n+1 \end{matrix}\middle| 1\right), \tag{3.20}$$

对非负整数 n 有效。

在 [63], 中，Okuyama 使用复制方法推导出 (3.17)，并且还指出，利用 (3.19) 可以得到另一种形式。随后利用后者，对 (3.17) 作进一步改写

$$\Big\langle \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^q \Big\rangle^{(\mathrm{fL})} = \frac{\Gamma(N)\Gamma(N(N+a)+1)}{\Gamma(a+N+1)\Gamma(N(N+a)+q)} \sum_{k=1}^{N} \mathsf{N}_{q,k} \frac{\Gamma(a+N+1+q+k)}{\Gamma(N+1-q)}, \tag{3.21}$$

其中 $\mathsf{N}_{q,k} := \frac{1}{q}\binom{q}{k}\binom{q}{k-1}$ 为 Narayama 数。由此形式可证明

$$\lim_{\substack{N,a\to\infty \\ N/(N+a)\to\alpha}} N^{q-1} \Big\langle \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^q \Big\rangle^{(\mathrm{fL})} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{N}_{q,k} \alpha^{k-1}, \tag{3.22}$$

从而重新得到 [50] 中通过不同方法推导出的结果。注意，对于 q 为正整数的情形，右侧的和是有限的，其上限为 q，并给出了 Marchenko–Pastur 定律 (2.32) 的整数阶矩。

文献 [75] 还推导了一个关于 $\langle(\tilde{T}_q)^2\rangle^{(L)}$ 的公式，其中涉及特定 ${}_3F_2$ 函数的有限重求和与双重求和。将其特化到 $q=2$ 后，可得到公式 [75, 式 (58)] ，该公式与命题 3.1及 (3.6)所暗示的矩 $\hat{}m_2^{(L)}$ 一致。此外，正如在 [9, 69], 中所发端的研究，在 [75] 中证明了：由首先计算 $\langle\tilde{T}_q\rangle^{(\mathrm{fL})}$ 和 $\langle(\tilde{T}_q)^2\rangle^{(\mathrm{fL})}$，再利用 (3.8)，根据 $\langle T_q\rangle^{(\mathrm{fL})}$ 和 $\langle(T_q)^2\rangle^{(\mathrm{fL})}$所提供的信息，可以促进冯·诺依曼熵 [73, 74]方差的计算。关于这一主题的近期相关工作，参见 [76, 77, 78, 10, 49, 54]。

我们还指出，近期研究 [19], 中涉及的 $q$continuous 的矩 $\Big\langle \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^q \Big\rangle^{(\mathrm{L})}$，被表示为某个次数为$N-1$的连续 Hahn 多项式，如下文 (2.26) 后所述。已知后者可用一个终止型超几何函数 ${}_3F_2$表示；事实上， [19, 式 (4.11)]中给出了这样的公式。适当运用 (3.20)，还可以证明该公式等价于 (3.18)。

注 3.1。
1. 通常在随机矩阵理论中，线性统计量 $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^q$ 的平均值对应于谱密度的矩，迄今已被研究了数十年。推动这些研究的动机包括对全局大 N 极限 [79], 及其组合意义[11, 47], 在涨落公式中的应用（例如参见综述 [30]）的分析，以及它们的可积性

性质，正如本文进一步阐述的那样。关于后一个主题的近期研究还包括 [12, 13, 15, 3, 16]，此前未在文中引用。

2. 与 $q=2$ 的情形一样，$q=-1$ 中也存在 Painlevé结构。对于 q 的这一取值，根据命题 3.2 中的条件 $qk+a>-1$，注意到（3.9）的左端仅在 $k<a+1$ 时有定义。另一方面，线性统计量$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{-1}$的拉普拉斯-傅里叶变换

$$\hat{Q}^{(\mathrm{L})}_{N,a}(s) := \frac{1}{C^{(\mathrm{L})}_{N,a}} \int_0^\infty d\lambda_1 \cdots \int_0^\infty d\lambda_N \prod_{l=1}^N e^{-\lambda_l - \frac{s}{\lambda}} \lambda_l^a \prod_{1\le j<k\le N} (\lambda_k-\lambda_j)^2, \tag{3.23}$$

对所有 $\mathrm{Re}(s)\ge 0$ 都有良好定义（尽管在 $s=0$ 处不解析）。已有多篇文献从不同角度证明 [64, 17, 57, 22]，$\log \hat{Q}^{(\mathrm{L})}_{N\,a}(s)$ 是一个特殊的 σ-Painlevé PIII′超越函数。文献 [80, 22] 中给出的一个应用表明，$\hat{Q}^{(\mathrm{L})}_{N\,a}(s/N)$ 以及累积量κ_k/N^k $(k<a+1)$ 都具有良好定义的 $N\to\infty$ 极限，其中前者是某个特定三阶非线性方程的解。

4 一般 β 下的纯度矩

特征值概率密度函数 (1.3) 和 (1.5) 有自然的 β 推广形式，

$$p^{(\mathrm{L}_\beta)}_{N,a,\beta}(\lambda_1,\dots,\lambda_N) := \frac{1}{C^{(\mathrm{L}_\beta)}_{N,a,\beta}} \prod_{l=1}^N \lambda_l^a e^{-\lambda_l} \prod_{1\le j<k\le N} |\lambda_k-\lambda_j|^\beta \tag{4.1}$$

（这是 (2.8) 经 λ_l缩放后的形式），并且

$$p^{(\mathrm{fL}_\beta)}_{N,a,\beta}(\lambda_1,\dots,\lambda_N) := \frac{1}{C^{(\mathrm{fL}_\beta)}_{N,a,\beta}} \delta\Big(1-\sum_{l=1}^N \lambda_l\Big) \prod_{l=1}^N \lambda_l^a \prod_{1\le j<k\le N} |\lambda_k-\lambda_j|^\beta, \tag{4.2}$$

这些形式在随机矩阵理论中已广为人知 [28]。参数 β 通常称为 Dyson指标。本节将计算统计量 $T_2=\sum_{j=1}^N \lambda_j^2$ 的正整数阶矩（即量子信息领域中的纯度），其中所依据的概率分布为 (4.1)。关于 (4.2) 的相同矩可由 (2.27) 的类似结果得到，

$$m_p^{(\mathrm{fL}_\beta)} = \frac{1}{(\beta N(N-1)/2 + N(a+1))_{2p}} m_p^{(\mathrm{L}_\beta)}. \tag{4.3}$$

均值 $m^{(\mathrm{L}_\beta)}{}_1$ 的显式公式可由 [58, 式 (A.9b)]中的一个结果直接读出

$$\begin{aligned} m_1^{(\mathrm{L}_\beta)} &= N\Big(a^2+3a-4\tau-3a\tau+2+2\tau^2\Big) + N^2\Big(3a\tau-4\tau^2+4\tau\Big) + 2N^3\tau^2 \\ &= N\Big(\tau(N-1)+(1+a)\Big)\Big(2\tau(N-1)+(2+a)\Big), \end{aligned} \tag{4.4}$$

其中 $\tau=\beta/2$。注意，对于 $\beta=2$，这就化为命题 3.1 中给出的 $\kappa_1^{(\mathrm{L})}$ 结果。一般 β 的正整数阶矩可通过考虑拉普拉斯-傅里叶变换来研究

$$\hat{P}^{(\mathrm{L}_\beta)}_{N,a,\beta}(s) = \frac{1}{C^{(\mathrm{L}_\beta)}_{N,a,\beta}} \int_0^\infty d\lambda_1 \cdots \int_0^\infty d\lambda_N \prod_{l=1}^N e^{-\lambda_l - s\lambda_l^2} \lambda_l^a \prod_{1\le j<k\le N} |\lambda_k-\lambda_j|^\beta \tag{4.5}$$

（参见（1.18））。给定由 b 指定的高斯酉系综特征值概率密度函数（1.1）的 β 推广 y

$$p_{N,\beta}^{(\mathrm{G}_\beta)}(\lambda_1,\dots,\lambda_N) := \frac{1}{C_{N,\beta}^{(\mathrm{G}_\beta)}} \prod_{l=1}^{N} e^{-\lambda_l^2} \prod_{1\le j<k\le N} |\lambda_k-\lambda_j|^\beta, \tag{4.6}$$

我们的分析首先对 (4.5) 中的 $\lambda_l \mapsto \lambda_l/\sqrt{s}$ 进行变量替换，并将指数中的项配方，从而推导出 (1.20) 的 β 推广形式

$$\hat{P}_{N,a,\beta}^{(\mathrm{L}_\beta)}(s) = \frac{C_{N,\beta}^{(\mathrm{G}_\beta)}}{C_{N,a,\beta}^{(\mathrm{L}_\beta)}} e^{N/4s} (1/\sqrt{s})^{N(a+1)+\beta N(N-1)/2} \Big\langle \prod_{j=1}^{N} (\lambda_j - 1/(2\sqrt{s}))^a \chi_{\lambda_j>1/(2\sqrt{s})} \Big\rangle^{(\mathrm{G}_\beta)}. \tag{4.7}$$

(4.7) 的用途源于这样一个事实：与右侧对应的多重积分的推广形式,

$$I_{p,N,\tau}^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^p}{C_p^N} \int_x^\infty dt_1 \cdots \int_x^\infty dt_N \prod_{l=1}^{N} e^{-t_l^2} (t_l-x)^\alpha \times \prod_{1\le j<k\le N} |t_k-t_j|^{2\tau} e_p(t_1-x,\dots,t_N-x), \tag{4.8}$$

(cf. (2.13)) 满足以下情形 $\tau = 1/2$]、[39 下的微分-差分递推关系 [25,]

$$(N-p)I_{p+1}(x) = (N-p)xI_p(x) + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}I_p(x) - \frac{p(\tau(N-p)+\alpha+1)}{2} I_{p-1}(x), \tag{4.9}$$

对 $p = 0,\dots,N$ 均成立，其中我们将 $I_{p\ N}^{(\alpha)},(x) = I_p(x)$ 记作简写。我们可以利用 (4.9)，为一族推广 (4.5) 的多重积分推导出矩阵微分方程（参见第 2.2 节）

$$H_p(s) = H_{p,N,a,\tau}(s) = \frac{(-1)^p}{C_p^N} \int_0^\infty dt_1 \cdots \int_0^\infty dt_N \prod_{l=1}^{N} t_l^a e^{-t_l} e^{-st_l^2} \times \prod_{1\le j<k\le N} |t_k-t_j|^{2\tau} e_p(t_1,\dots,t_N). \tag{4.10}$$

命题4.1。 引入列向量 $\mathbf{H}(s) = [H_p(s)]_{p=0}^N$，以及双对角矩阵

$$\begin{aligned} \mathsf{A} &= -\mathrm{diag}\Big(N(a+1)+\tau N(N-1)+p\Big)_{p=0}^{N} - \mathrm{diag}^+\Big(N-p\Big)_{p=0}^{N-1} \\ \mathsf{B} &= -\mathrm{diag}\Big(\frac{p}{2}\Big)_{p=0}^{N} - \mathrm{diag}^-\Big(\frac{p(\tau(N-p)+a+1)}{2}\Big)_{p=1}^{N}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

此处 di 上$^+$ (下$^-$)指主对角线正上方（正下方）的对角线。我们有 e

$$2s^2\frac{d}{ds}\mathbf{H}(s) = s\mathsf{A}\mathbf{H}(s) + \mathsf{B}\mathbf{H}(s). \tag{4.12}$$

此外，记 B_q 为这样一个矩阵：将B中标记为 $p=0$ 且全为零的第一行替换为 $-\mathsf{A} + 2q\mathsf{I}_{N+1}$的第一行。引入幂级数展开

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{q=0}^{\infty} \mathbf{h}_q s^q, \tag{4.13}$$

我们得到递推关系

$$\mathbf{h}_{q+1} = B_{q+1}^{-1}(-\mathsf{A} + 2q\mathsf{I}_{N+1})\mathbf{h}_q, \tag{4.14}$$

满足以下要求:

$$\mathsf{B}\mathbf{h}_0 = \mathbf{0}. \tag{4.15}$$

证明。 根据定义

$$I_{p,N}^{(a)}(1/(2\sqrt{s})) = (\sqrt{s})^{N(a+1)+\tau N(N-1)+p} e^{-N/4s} H_p(s). \tag{4.16}$$

因此，在 (4.9) 中对 $x = 1/(2\sqrt{s})$ 进行变量替换，再根据 (4.16) 代入后，可得 $\{H_p(s)\}_{p=0}^N$ 满足微分-差分方程

$$(N-p)sH_{p+1}(s) = (N-p)\frac{1}{2}H_p(s) - \Big(s(N(a+1)+\tau N(N-1)+p) + \frac{N}{2}\Big)H_p(s) - 2s^2\frac{d}{ds}H_p(s) - \frac{p(\tau(N-p)+a+1)}{2}H_{p-1}(s),$$

对 $p = 0, \ldots, N$均成立。将其写成矩阵形式可得 (4.12)。

将 (4.13) 代入 (4.12) 可得

$$\sum_{q=0}^{\infty}(-\mathsf{A} + 2q\mathsf{I}_{N+1})\mathbf{h}_q s^{q+1} = \sum_{q=0}^{\infty}\mathsf{B}\mathbf{h}_q s^q. \tag{4.17}$$

令两边不含 s 的项相等，可得 (4.15)。令 s^{q+1} 的幂在 $q \geq 0$时相等，可得

$$(-\mathsf{A} + 2q\mathsf{I}_{N+1})\mathbf{h}_q = \mathsf{B}\mathbf{h}_{q+1}. \tag{4.18}$$

B 中标记为 $p = 0$的第一行所有元素均为零。因此，$(-\mathsf{A} + 2q\mathsf{I}_{N+1})$的第一个元素等于零。这意味着，在 (4.18) 中出现的矩阵 B 可以用 $-\mathsf{A} + 2(q+1)\mathsf{I}_{N+1}$的第一行替换其第一行。所得矩阵记为 B_{q+1}，它是可逆的，并且 (4.14) 得证。

□

写作 $\mathbf{h}_q = (h_q^{(p)})_{p=0}^N$，由 (4.13)、(4.5) 和 (4.10) 可知 $h_0^{(0)} = C_{N\,a)\,,\beta}^{(\mathrm{L}_\beta}$。此外，由 (4.15) 可得

$$h_0^{(p)} = h_0^{(0)}(-1)^p \prod_{l=1}^{p}(\tau(N-l)+a+1). \tag{4.19}$$

作为检验，根据定义可知 $h_0^{(N)} = (-1)^N C^{(\mathrm{L}_\beta)\ N,a+1,\beta}$。将其代入 (4.19) 得

$$\frac{C_{N,a+1,\beta}^{(\mathrm{L}_\beta)}}{C_{N,a,\beta}^{(\mathrm{L}_\beta)}} = \prod_{l=1}^{N}(\tau(N-l)+a+1), \tag{4.20}$$

这确实成立，因为 $C^{(\mathrm{L}_\beta)\ N,\ a,\ \beta}$ 的乘积可用伽马函数求值（例如参见 [28, 命题 4.7.3]）

$$C_{N,a,\beta}^{(\mathrm{L}_\beta)} = \prod_{j=0}^{N-1}\frac{\Gamma(1+(j+1)\tau)\Gamma(a+1+j\tau)}{\Gamma(1+\tau)}. \tag{4.21}$$

将 $\mathbf{h}_q$ 中的第一个元素记为 $h_q^{(0)}$，于是

$$H_0(s) = h_0^{(0)} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q m_q^{(L_\beta)}}{q!} s^q = \sum_{q=0}^{\infty} h_q^{(0)} s^q. \tag{4.22}$$

这里，第一个等式可通过比较 (4.10) 和 (4.5)，并对后者关于 s 进行幂级数展开得到；同时还要注意，$m^{(\mathrm{L}_\beta)q}$ 表示相对于 (4.1) 的线性统计量 $T_2 = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^2$ 的矩。因此，根据 (4.14) 和 (4.19)，对于给定的 N，我们有一个计算方案来计算 $\{m^{(\mathrm{L}_\beta)q}\}_{q=1,2,\ldots}$，其中只涉及对大小为 $(N+1)\times(N+1)$ 的矩阵进行乘法运算。此外，我们可以利用每个 $m^{(L_\beta)q}$ 都是关于 N的 $3q$ 次多项式这一事实（即与 $(m^{(L_\beta)\,1})^q$的次数相同），从而根据由 N的 $m^{(\mathrm{L}_\beta)q}$（或更多）个不同取值组成的表格，推导出其对 N 的依赖关系。通过这种方式，将结果 (4.4) 扩展到 $m^{(L_\beta)\,1}$，我们可以推导出 $m^{(L_\beta)\,2}$ 的显式形式。引入相应的累积量 $\kappa^{(\mathrm{L}_\beta)}{}_2 = m^{(\mathrm{L}_\beta)\,2} - (m^{(\mathrm{L}_\beta)\,1})^2$后，该形式可得到简化。

命题 4.2。 设 $m^{(L_\beta)\,1}$ 由 *(4.4)* 给出，回忆一下 $\tau = \beta/2$。我们有

$$m_2^{(\mathrm{L}_\beta)} = \kappa_2^{(\mathrm{L}_\beta)} + (m_1^{(\mathrm{L}_\beta)})^2, \tag{4.23}$$

其中

$$\kappa_2^{(\mathrm{L}_\beta)} = 2N\Big(1+a+\tau(-1+N)\Big)\Big(10+2a^2+9a(1+\tau(-1+N))+\tau(-1+N)(19+\tau(-10+9N))\Big). \tag{4.24}$$

注 4.1。 对于一般的非负整数 q，矩 $m^{(L_\beta)q}$ 在参数映射 [24]下保持不变，至多相差一个 $(-\tau)^q$ 因子

$$(N, \tau, a) \mapsto (-\tau N, 1/\tau, -a/\tau). \tag{4.25}$$

请注意，显式公式 (4.4) 展示了这种不变性。最近 [29]，人们已证明这一性质适用于所有累积量，正如 (4.24) 所展示的一个例子。

推论 4.1。 对于定迹系综fL_β，累积量 $\kappa^{(\mathrm{fL}_\beta)\,2}$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\kappa_2^{(\mathrm{fL}_\beta)} = {} & \frac{2\Big(10+2a^2+9a(1+\tau(-1+N))+\tau(-1+N)(19+\tau(-10+9N))\Big)}{(\tau N(N-1)+N(a+1)+1)_3} \\ & + \frac{N(\tau(N-1)+a+1)(2\tau(N-1)+a+2)^2}{(\tau N(N-1)+N(a+1)+1)_3} - \Big(\frac{2\tau(N-1)+a+2}{\tau N(N-1)+N(a+1)+1}\Big)^2.\end{aligned} \tag{4.26}$$

证明。 由 (4.3) 可得

$$\kappa_2^{(\mathrm{fL}_\beta)} = \frac{m_2^{(\mathrm{L}_\beta)}}{(\tau N(N-1)+N(a+1))_4} - \Big(\frac{m_1^{(\mathrm{L}_\beta)}}{(\tau N(N-1)+N(a+1))_2}\Big)^2.$$

酌情代入 (4.4) 和 (4.23)，即可得到 (4.26)。 □

致谢

Peter J. Forrester 的这项工作得到了澳大利亚研究理事会探索项目资助 DP250102552 的支持。S.M. Nishigaki 的工作得到了日本学术振兴会（JSPS）科学研究补助金（C）第 7K05416 号的支持；他也由衷感谢这笔资助，使他得以访问墨尔本大学。感谢 Sung-Soo Byun 对较早版本的稿件提出宝贵意见。

附录 A

在随机矩阵理论的历史发展过程中，随机酉矩阵的引入早于随机厄米矩阵——参见 [23] 中的论述。对于随机酉矩阵而言，固定迹厄米矩阵的自然类比是施加单位行列式约束。例如，矩阵群 U(N) 变为子群 SU(N)。出于格点规范理论 [44], 的动机，现有作者之一[60] 最近的工作研究了计算 SU(N) 的精确一点关联函数这一问题，以及戴森圆酉系综和辛系综的单位行列式版本；关于后者的介绍，参见 [28, 第 2] 章。在 SU(N) 的情形中，利用塞尔伯格积分可以得到

$$\rho_{(1)}^{\mathrm{SU}(N)}(\theta) = \frac{N}{2\pi}\Big(1 - (-1)^N \frac{2}{N}\cos N\theta\Big). \tag{A.1}$$

作为一个应用，考虑线性统计量 Tr(U^p) $= \sum_{j=1}^N e^{ip\theta_j}$, $p \in \mathbb{Z}$。将其与(A.1)相乘并积分可得

$$\Big\langle \mathrm{Tr}(U^p) \Big\rangle^{\mathrm{SU}(N)} = \begin{cases} N, & p = 0 \\ (-1)^{N-1}, & p = \pm N \\ 0, & \text{otherwise;} \end{cases} \tag{A.2}$$

关于这一点的具体研究，见 [66]。注意，对 U(N) 的相应平均在除 $p = 0$ 之外的所有情况下均为零。

复杂程度更高一层的是两点关联。在 U(N) 的情形下，有经典结果 [56]

$$\rho_{(2)}^{\mathrm{U}(N)}(\theta,\theta') = \left(\frac{N}{2\pi}\right)^2 - \left(\frac{\sin\left(N(\theta-\theta')/2\right)}{2\pi\sin\left((\theta-\theta')/2\right)}\right)^2 = \rho_{(1)}^{\mathrm{U}(N)}(\theta)\rho_{(1)}^{\mathrm{U}(N)}(\theta') + \rho_{(2)}^{\mathrm{U}(N),T}(\theta,\theta'). \tag{A.3}$$

在第二个等式中，$\rho^{\mathrm{U}(N)}{}_{(1)}(\phi) = N/(2\pi)$ 与 ϕ 无关，而 $\rho^{\mathrm{U}(N),\ T}{}_{(2)}(\theta,\ \theta')$（称为截断两点关联）是 (A.3) 第一个等式中的第二项，并且具有这样的特征：当 $\theta \neq \theta'$ 固定时，其阶为一。一般而言，截断两点关联作为两个线性统计量的协方差的涨落公式中的核而受到关注

$$\mathrm{Cov}\Big(\sum_{j=1}^N f(\theta_j), \sum_{j=1}^N g(\theta_j)\Big) = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' \,(f(\theta) - g(\theta'))(g(\theta) - f(\theta'))\rho_{(2)}^T(\theta,\theta'); \tag{A.4}$$

例如参见 [30,命题 2.1]。

在此，我们给出了 SU(N) 两点关联的精确计算结果。为此，我们将使用 [28, 第 5.2 章中介绍的泛函微分法1]。开始计算时，

我们注意到，将 U(N) 上的豪斯多夫测度用其特征值表示时（参见例如 [28,练习 2.2 问题1]），通过附加约束 $\sum_j \theta_j = 0$ 模 2π 可得到 SU(N) 的特征相位联合分布函数

$$\delta\Big(\sum_{j=1}^{N}\theta_j \bmod 2\pi\Big)\cdot\frac{1}{(2\pi)^{N-1}}\frac{1}{N!}|\Delta_N(\theta)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^N}\frac{1}{N!}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\theta_1+\cdots+\theta_N)}|\Delta_N(\theta)|^2, \tag{A.5}$$
$$\Delta_N(\theta) := \prod_{1\le j<k\le N}(e^{i\theta_k}-e^{i\theta_j}) = \det[e^{ik\theta_j}]_{\substack{j=1,\dots,N\\ k=0,\dots,N-1}}.$$

为得到 (A.5) 中的第一个等式，这里用到了 2π 周期狄拉克 δ 函数的傅里叶级数形式。

显然，(A.5) 中的 $n=0$ 项对应于无约束的 U(N) 情形。我们引入一个“探针”单点函数 $a(\theta)$，并将广义配分函数定义为

$$Z_N[a] := \mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{N}a(\theta_j)\Big] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{N!}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{d\theta_j}{2\pi}a(\theta_j)e^{in\theta_j}\right)|\Delta_N(\theta)|^2. \tag{A.6}$$

就本文的目的而言，这一点的重要性在于，p 点关联函数可表示为 $Z_N[a]$ 的泛函导数，

$$\rho_{(1)}^{\mathrm{SU}(N)}(\theta) = \left.\frac{\delta Z_N[a]}{\delta a(\theta)}\right|_{a=1}, \quad \rho_{(2)}^{\mathrm{SU}(N)}(\theta,\theta') = \left.\frac{\delta^2 Z_N[a]}{\delta a(\theta)\delta a(\theta')}\right|_{a=1}, \tag{A.7}$$

etc.

将范德蒙德行列式 $\Delta_N(\theta)$ 及其共轭表示为置换之和$P,\ Q\in\mathfrak{S}_N$，我们便可推知 $Z_N[a]$ 的每个 (n^{th}) 分量都具有托普利兹行列式的形式，

$$\begin{aligned}
Z_N[a] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{N!}\sum_{P,Q\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(P)\mathrm{sgn}(Q)\prod_{j=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta_j}{2\pi}a(\theta_j)e^{in\theta_j}e^{iP(j)\theta_j}e^{-iQ(j)\theta_j}\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{R\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(R)\prod_{j=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta_j}{2\pi}a(\theta_j)e^{i(n+\ell-R(\ell))\theta_j}\quad(\ell=P(j),\ R=Q\circ P^{-1})\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\det\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{2\pi}a(\theta)e^{i(n+m-\ell)\theta}\right]_{\ell,m=1}^{N}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

这里，为得到最后一个等式，用到了这样一个一般事实：矩阵的行列式等于其转置矩阵的行列式。在使用 (A.7) 计算两点关联之前，先说明如何利用 (A.7) 中的第一个关系重新推导 (A.1)，将很有启发性。

我们已经指出，(A.5) 中的 $n=0$ 项对应于无约束的 U(N) 情形。这意味着，将 (A.7) 中第一个关系式里的泛函微分运算作用于 (A.8) 最后一行的 $n=0$ 项，会得到 $\rho^{\mathrm{U}(N)}{}_{(1)}(\theta) = \frac{N}{2\pi}$，这可以直接验证。现在考虑 (A.8) 中的 $n=1$ 项。对行列式的每一列分别应用在 $a=1$ 处的泛函微分 $\frac{\delta}{\delta a}{}_{(\theta)}$（通常，行列式的单次泛函导数可以逐列求出），并利用以下简单事实：对于 ℓ, $m,n\in\mathbb{Z}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{2\pi}e^{i(n+\ell-m)\theta} = \delta_{m-\ell,n}, \tag{A.9}$$

可以看出，非零贡献来自最后一列（$m=N$），

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & e^{i(1+N-1)\theta}/2\pi \\ 1 & 0 & \cdots & e^{i(1+N-2)\theta}/2\pi \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & e^{i(1+0)\theta}/2\pi \end{vmatrix} = (-1)^{N-1}\frac{e^{iN\theta}}{2\pi}. \tag{A.10}$$

同理，(A.8) 中的 $n=-1$ 项对 $\rho^{\mathrm{SU}(N)}_{(1)}(\theta)$ 的贡献是 (A.10) 的复共轭。另一方面，含有 $|n|>1$ 的项不作贡献，因为根据 (A.9)，它们包含完全由零元素构成的列。因此，对于一点关联函数，我们得到

$$\rho^{\mathrm{SU}(N)}_{(1)}(\theta) = \frac{N}{2\pi} - (-1)^N\frac{e^{iN\theta}+e^{-iN\theta}}{2\pi}, \tag{A.11}$$

这确实与 (A.1) 一致。

根据（A.7 的第二个关系），(A.8) 中需要进行两次泛函微分。由行列式结构可知，这等价于对任意两列不同的列求泛函导数，并对所有选择求和。可以看出，含有 $|n|>2$ 的行列式根据 (A.9) 不作贡献。由于 $n=0$ 的贡献必然给出 U(N) 的结果 (A.3)，因此只需计算含有 $|n|=1$ 和 2 的项的贡献。$n=2$ 的贡献较容易，其中 $\delta a^{\delta}_{(\theta)}$ 和 $\delta a^{\delta}_{(\theta')}$ 必须作用于最后两列（$m=N-1,N$），从而得到

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & e^{i(2+N-2)\theta}/2\pi & e^{i(2+N-1)\theta'}/2\pi \\ 0 & 0 & \cdots & e^{i(2+N-3)\theta}/2\pi & e^{i(2+N-2)\theta'}/2\pi \\ 1 & 0 & \cdots & e^{i(2+N-4)\theta}/2\pi & e^{i(2+N-3)\theta'}/2\pi \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & e^{i(2-1)\theta}/2\pi & e^{i(2+0)\theta'}/2\pi \end{vmatrix} = \frac{e^{iN(\theta+\theta')}(1-e^{i(\theta'-\theta)})}{(2\pi)^2} \tag{A.12}$$

以及交换 θ 和 θ' 后的项。

对于 $n=1$ 项，$\delta a^{\delta}_{(\theta)}$ 和 $\delta a^{\delta}_{(\theta')}$ 中，一个必须作用于最后一列（$m=N$），另一个则可以作用于其余任意一列（$m=1,\ldots,N-1$）。选择第 m^{th} 列所产生的贡献为

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & e^{i(1+m-1)\theta}/2\pi & \cdots & 0 & e^{i(1+N-1)\theta'}/2\pi \\ 1 & 0 & \cdots & e^{i(1+m-2)\theta}/2\pi & \cdots & 0 & e^{i(1+N-2)\theta'}/2\pi \\ 0 & 1 & \cdots & e^{i(1+m-3)\theta}/2\pi & \cdots & 0 & e^{i(1+N-3)\theta'}/2\pi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/2\pi & \cdots & 0 & e^{i(1+N-m-1)\theta'}/2\pi \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{i(1+m-N)\theta}/2\pi & \cdots & 1 & e^{i(1+0)\theta'}/2\pi \end{vmatrix} = (-1)^N\frac{e^{iN\theta'}(e^{im(\theta-\theta')}-1)}{(2\pi)^2} \tag{A.13}$$

以及将 θ 和 θ' 互换后得到的项。将 $m=1$、.....、$N-1$的贡献相加，并计入来自 $n=-2$ 和 -1 的复共轭项后，我们最终由 (A.12) 和 (A.13) 得到双点关联函数，

$$\begin{aligned}\rho^{\mathrm{SU}(N)}_{(2)}(\theta,\theta') = \rho^{\mathrm{U}(N)}_{(2)}(\theta,\theta') &+ \frac{2}{\pi^2}\cos N(\theta+\theta')\sin^2\frac{\theta-\theta'}{2} \\ &+ (-1)^N\frac{1}{\pi^2}\cos\frac{N(\theta+\theta')}{2}\left(\sin\frac{N(\theta-\theta')}{2}\cot\frac{\theta-\theta'}{2} - N\cos\frac{N(\theta-\theta')}{2}\right).\end{aligned} \tag{A.14}$$

这里我们使用了求和公式

$$\sum_{m=1}^{N-1} \sin mx \, \sin(N-m)x = \frac{1}{2}(\sin Nx \cot x - N \cos Nx).$$

利用一个简单的三角恒等式，并回顾（A.1）和（A.3），可得（A.14）的另一种写法为

$$\rho_{(2)}^{\mathrm{SU}(N)}(\theta,\theta') = \rho_{(1)}^{\mathrm{SU}(N)}(\theta)\rho_{(1)}^{\mathrm{SU}(N)}(\theta') + \rho_{(2)}^{\mathrm{SU}(N),T}(\theta,\theta'), \tag{A.15}$$

其中

$$\begin{aligned}\rho_{(2)}^{\mathrm{SU}(N),T}(\theta,\theta') = \rho_{(2)}^{\mathrm{U}(N),T}(\theta,\theta') + \frac{2}{\pi^2}\cos N(\theta+\theta')\sin^2\frac{\theta-\theta'}{2} \\ + (-1)^N\frac{1}{\pi^2}\cos\frac{N(\theta+\theta')}{2}\sin\frac{N(\theta-\theta')}{2}\cot\frac{\theta-\theta'}{2} - \frac{1}{\pi^2}\cos N\theta\cos N\theta'.\end{aligned} \tag{A.16}$$

注意，在（A.16）中，与（A.14）不同，U(N) 结果中的所有修正项都是单位阶的。

关于其在（A.4）中的应用，一种策略是将给定的 f, g 写成傅里叶级数，并类似地利用 $\rho^{\mathrm{SU}(N),T\,(2)}$ 的傅里叶级数展开，这一点可由推导（A.16）时的中间步骤看出。另一个值得关注的问题是（A.16）在体标度下的大 N 展开，这也是当前研究的热点，涉及 Dyson 圆系综 [38], 的 β 推广以及间距比值分布 [61]。体标度对应于展开 $\theta = 2\pi x/N$, $\theta' = 2\pi x'/N$，使得特征值的均值间距为 1。再回顾（A.3），由（A.16）可计算得

$$\begin{aligned}(2\pi/N)^2\rho_{(2)}^{\mathrm{SU}(N),T}(2\pi x/N, 2\pi x'/N) \\ = -\left(\frac{\sin\pi(x-x')}{\pi(x-x')}\right)^2 + \frac{4(-1)^N}{N}\cos\pi(x+x')\frac{\sin\pi(x-x')}{\pi(x-x')} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right).\end{aligned} \tag{A.17}$$

值得注意的是，单位行列式约束改变了普适正弦核极限的首个修正项（式 (A.17) 的第一项），使其从 $\mathcal{O}(N^{-2})$ 变为 $\mathcal{O}(N^{-1})$；此外，当两个特征值相距较远时，该项按 $1/(x-x')$ 衰减。

参考文献

[1] S. Adachi、M. Toda 和 H. Hiroto，矩形复矩阵奇异值的随机矩阵理论 I：定迹系综中单体分布函数的精确公式，《物理年鉴》**324**(2009)，2278–2358。[2] S. Adachi、M. Toda 和 H. Kubotani，*Laguerre* 系综和定迹系综中矩形复矩阵奇异值的渐近分析，《物理学杂志A》 44(2011)，292002（8页）。[3] G. Akemann、S.-S. Byun 和 S. Oh，复数与辛非厄米随机矩阵的谱矩，arXiv:2505.1227。[4] G. Akemann 和 M. Cikovic，来自定迹系综和诱导 *Ginibre* 系综的随机矩阵乘积，《物理学杂志A》**51** (2018)，184002。[5] G. Akemann、M. Cikovic 和 M. Venker，椭圆 *Ginibre* 系综之外的弱与强非厄米性普适性，《数学物理通讯》362 (2018)，1111–1141。

[6] *G. Akemann* 和 *G. Vernizzi*，紧支撑随机矩阵理论的宏观与微观（非）普适性，《*Nucl. Phys. B*》*583 (2000)，739–757*。[7] *G. Akemann* 和 *P. Vivo*，*Wishart-Laguerre* 系综中有无固定迹时最小特征值的紧致表达式，《*J. Stat. Mech.*》*2011 (2011)，P05020*。[8] *I. Bengtsson* 和 *K. Zyczkowski*，《量子态的几何》，剑桥大学出版社，剑桥，*2006*年。[9] *E. Bianchi* 和 *P. Donà*。存在中心时的典型纠缠熵：*Page* 曲线及其方差，《*Phys. Rev. D*》*100 (2019)，105010*。[10] *E. Bianchi*、*L. Hackl* 和 *M. Kieburg*，费米子高斯态的 *Page* 曲线，《*Phys. Rev. B*》*103*，*241118 (2021)*。[11] *E. Brézin*、*C. Itzykson*、*G. Parisi* 和 *J.B. Zuber*，平面图，《数学物理通讯》*59 (1978)，35–51*。[12] *S.-S. Byun*，椭圆 *GinOE* 的 *Harer-Zagier* 型递推公式，《*Bull. Sci. Math.*》*197 (2024)，103526*。[13] *S.-S. Byun* 和 *P.J. Forrester*，实 *Ginibre* 系综的谱矩，《拉马努金杂志》*64 (2024)，1497?1519*。[14] *S.-S. Byun* 和 *P.J. Forrester*，*Ginibre* 系综研究进展，*KIAS Springer* 数学系列 *3*，*Springer*，*2025*年。[15] *S.-S. Byun*、*P.J. Forrester* 和 *J. Oh*，*q* 变形高斯酉系综：谱矩与属数型展开，*arXiv:2404.03400*。[16] *S.-S. Byun*、*Y.-G. Jung* 和 *J. Oh*，具有 *Al-Salam–Carlitz* 权的 q 变形酉系综的谱分析，*arXiv:2507.18042*。[17] *Y. Chen* 和 *A. Its*，*Painlevé III* 与厄米随机矩阵系综中的奇异线性统计量 *I*，《*J. Approx. Theory*》*162 (2010)，270–297*。[18] *Y. Chen*、*D-Z. Liu* 和 *D-S Zhou*，固定迹 *Laguerre* β 系综的最小特征值分布，《物理学杂志*A*》*43 (2010)，315303*。[19] *F.D. Cunden*、*F. Mezzadri*、*N. O'Connell* 和 *N. Simm*，随机矩阵的矩与超几何正交多项式，《数学物理通讯》*369 (2019)，1091–1145*。[20] *F.D. Cunden*、*F. Mezzadri*、*N. Simm* 和 *P. Vivo*，混沌腔时延矩阵的 *Large-*N 展开，《*J. Math. Phys.*》*57 (2016)，111901*。[21] *A.W. Davis*，关于多元 β 矩阵潜在根的边缘分布，《*Ann. Math. Statist.*》*43 (1972)，1664–1669*。[22] *D. Dai*、*P.J. Forrester* 和 *S.-X. Xu*，*Okamoto* 哈密顿表述中一个 *PIII′* τ-函数序列在随机矩阵理论中的应用，《随机矩阵：理论与应用》*11 (2022)，2250014*。[23] *P. Diaconis* 和 *P.J. Forrester*，*Hurwitz* 与随机矩阵理论在数学中的起源，《*Random Matrix Th. Appl.*》*6 (2017)，1730001*。[24] *I. Dumitriu* 和 *A. Edelman*，通过矩阵模型研究 β-*Hermite* 系综与 β-*Laguerre* 系综的全局谱涨落，《*J. Math. Phys.*》*47 (2006)，063302*。[25] *S.R. Eckert*，随机矩阵有序根的个体分布，博士论文，阿德莱德大学，*1974*年。[26] *P.J. Forrester*，量子多体系统中关联计算的递推方程，《统计物理学杂志》*72 (1993)，39–50*。[27] *P.J. Forrester*，*Laguerre* 随机矩阵系综中的精确结果与普适渐近行为，《*J. Math. Phys.*》*35 (1994)，2539–2551*。

[28] *P.J. Forrester*，《对数气体与随机矩阵》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，*2010*年。[29] *P.J. Forrester*，经典 β系综的高低温对偶，《随机矩阵：理论与应用》*11*，（*2022*年）*2250035*。[30] *P.J. Forrester*，随机矩阵理论中涨落公式的精确结果综述，《概率调查》*20*（*2023*年），*170–225*。[31] *P.J. Forrester*，谨以此文纪念：*Santosh Kumar*关于*RMT*精确结果的工作，《物理学杂志*A*》*58*（*2025*年），*463001*。[32] *P. J. Forrester*和*J. R. Ipsen*，塞尔伯格积分理论与*Muttalib–Borodin*系综，《应用数学进展》*95*（*2018*年），*152–176*。[33] *P.J. Forrester*和*S. Kumar*，最大 β-*Wishart-Laguerre*特征值及量子输运中朗道尔电导的递推方案，《物理学杂志*A*》*52*（*2019*年），*42LT02*。[34] *P.J. Forrester*和*S. Kumar*，β-*Jacobi*特征值分布的可计算结构公式，《拉马努金杂志》*61*（*2023*年），*87–110*。[35] *P.J. Forrester*和*S. Kumar*，β-*Jacobi*系综迹分布的微分递推关系，《物理学*D*辑》*434*（*2022*年），*133220*。[36] *P.J. Forrester*和*S. Kumar*，*Laguerre*和*Jacobi* β 系综中的边缘特征值分布计算，*arXiv:2402.16069*。[37] *P.J. Forrester*和*E. M. Rains*，塞尔伯格关联积分的*Fuchs*型矩阵微分方程，《数学物理通讯》*309*，*771*（*2012*年）。[38]*P.J. Forrester*和*B.-J. Shen*，圆 β 系综体区的有限尺寸修正，*arXiv:2505.09865*。[39] *P.J. Forrester*和*A.K. Trinh*，高斯和*Laguerre*偶 β 系综的最优软边缘标度变量，《核物理*B*辑》*938*（*2019*年），*621-639*。[40] *P.J. Forrester*和*N.S. Witte*，τ函数理论在*Painlevé*方程与随机矩阵中的应用：*PIV*、*PII*和高斯酉系综，《数学物理通讯》*219*（*2000*年），*357–398*。 τ*O. Giraud*，随机纯态的双部纠缠分布，《物理学杂志*A*》*40*（*2007*年），*2793*。[41] *O. Giraud*，双部随机纯态的纯度分布，《物理学杂志*A*》*40*（*2007*年），*F1053*。[42] *F. Götze*和*A. Tikhomirov*，高斯酉系综和*Laguerre* 酉系综矩阵谱的收敛速率，《中欧数学杂志》*3*（*2005*年），*666–704*。[43] *M. Hanada*和*H. Watanabe*，关于量子色动力学中的热相变，《*Prog. Theor. Exp. Phys.*》*2024*年*043B02*。[44] *U. Haagerup*和*S. Thorbjørnsen*，具有复高斯元素的随机矩阵，《数学展望》*21*（*2003*年），*293–337*。[45] *P. J. Hanlon*、*R. P. Stanley*和*J. R. Stembridge*，正态分布随机矩阵谱的若干组合学方面，《当代数学》*138*（*1992*年），*151–174*。[46] *J. Harer*和*D. Zagier*，曲线模空间的欧拉示性数，《数学创刊》*85*（*1986*年），*457–485*。[47] *L.K. Hua*，《经典域中的多复变函数分析》，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，*1963*年。[48] *Y. Huang*、*L. Wei*和*B. Collaku*，冯·诺依曼纠缠熵的峰度，《物理学杂志*A*：数学与理论》*54*（*2021*年），*504003*。[49] *J. Kudler-Flam*，随机态和黑洞的相对熵，《物理评论快报》*126*（*2021*年），*171603*。[50] *S. Kumar*，β-*Wishart-Laguerre*系综最小特征值密度的递推关系，《统计物理学杂志》*175*（*2019*年），*126*。

[52] *S. Kumar*和*A. Pandey*，随机纯态中的纠缠：谱密度与平均冯·诺依曼熵，《物理学杂志*A*》*44*（*2011*年），*445301*。[53] *M. Ledoux*，经典正交多项式不变系综的微分算子与谱分布。连续情形，《*Electron. J. Probab.*》*9*（*2004*年），*177–208*。[54] *S.-H. Li*和*L. Wei*，量子纯度的矩与双正交多项式递推，《物理学杂志*A*》（*2021*年），*54 445204*。[55] *E. Lubkin*，系统与 k库关联所产生的熵，《*J. Math. Phys.*》*19*（*1978*年），*1028–1031*。[56] *M.L. Mehta*，《随机矩阵》，第*3*版，*Elsevier*，圣迭戈，*2004*年。[57] *F. Mezzadri*和*N.J. Simm*，具有 $\beta = 1$、*2*、*4*的混沌量子输运*τ*函数理论，《数学物理通讯》*324*（*2013*年），*465–513*。[58] *F. Mezzadri*、*A.K. Reynolds*和*B. Winn*，β系综特征值密度及久期系数的矩，《*Nonlinearity*》*30*（*2017*年），*1034*。[59] *C. Nadal*、*S. N. Majumdar*和*M. Vergassola*，随机纯态双部纠缠分布中的相变，《物理评论快报》*104*（*2010*年），*110501*。[60] *S.M. Nishigaki*，幺模圆系综的特征相位分布，《*Prog. Theor. Exp. Phys.*》*2024*年*021A02*。[61] *S.M. Nishigaki*，圆酉系综连续能级间距及其比值的分布：有限尺寸修正与黎曼 ζ 零点，*arXiv:2507.10193*。[62] *K. Okamoto*，*Painlevé*方程研究*III*。第二和第四*Painlevé*方程，P_{II} 与P_{IV}，《*Math. Ann.*》*275*（*1986*年），*221–255*。[63] *K. Okuyama*，随机纯态中的纠缠容量，《物理学快报*B*》*820*（*2021*年），*136600*。[64] *V.A. Osipov*和*E. Kanzieper*，玻色复制是否存在缺陷？《物理评论快报》*99*（*2007*年），*050602*。[65] *D. Page*，子系统的平均熵，《物理评论快报》*71*（*1993*年），*1291–1294*。[66] *Physics StackExchange*，*SU(N)*矩阵积分的迹恒等式，在线资源，*2021*年。[67] *A.P. Prudnikov*、*Yu.A. Brychkov*和*O.L. Marichev*，《积分与级数》，第*3*卷：更多特殊函数，*Gordon and Breach*，纽约，*1990*年。[68] *A.A. Rahman*和*P.J. Forrester*，经典矩阵系综预解式的线性微分方程，《随机矩阵：理论与应用》*10*（*2021*年），*2250003*。[69] *A. Sarkar*和*S. Kumar*，*Bures-Hall*系综：谱密度与平均熵，《物理学杂志*A*》*52*（*2019*年），*295203*。[70] *A. Scott*和*C. Caves*，量子烘焙者映射的纠缠能力，《物理学杂志*A*》*36*（*2003*年），*9553–9576*。[71] *P. Vivo*，具有正交对称性的纠缠随机纯态：精确结果，《物理学杂志*A*》*43*（*2010*年），*405206*。[72] *P. Vivo*，随机纯态的最大施密特特征值与混沌腔中的电导分布，《*J. Stat. Mech.*》*2011*（*2011*年），*P01022*。[73] *P. Vivo*、*M.P. Pato*和*G. Oshanin*，随机纯态：超越线性统计量的双部纠缠定量，《物理评论*E*》*93*（*2016*年），*052106*。[74] *L. Wei*，*Vivo-Pato-Oshanin*猜想关于冯·诺依曼熵涨落的证明，《物理评论*E*》*96*（*2017*年），*022106*。[75] *L. Wei*，随机纯态中*Tsallis*纠缠熵的精确方差，《*Entropy*》*21*（*2019*年），*539*。

[76] L. Wei，关于 *Bures-Hall*测度下冯·诺依曼纠缠熵的精确方差，《物理学杂志A》**102** (202)，062128。[77] L. Wei，冯·诺依曼纠缠熵的偏度，《物理学杂志A》**53** (2020)，075302。[78] L. Wei 和 N.S. Witte，量子插值系综：双正交多项式与平均熵，Random Matrices Th. Appl. 2250055。**12** (2023)。[79] E. P. Wigner，关于某些对称矩阵根的分布，《数学年刊》**67**(1958)，325–327。[80] S.-X. Xu、D. Dai 和 Y.-Q. Zhao，奇异摄动拉盖尔酉系综中的临界边缘行为与贝塞尔到艾里过渡，《数学物理通讯》，**332** (2014)，1257–1296。[81] K. Zyczkowski 和 H.-J. Sommers，混合量子态空间中的诱导测度，《物理学杂志A》**34** (2001)，7111–7125。