arXiv:2601.01717v1 [math.AP] 5 Jan 2026

带重力场的二维电流体动力学方程自由边界问题

Lili Du[1,2], 袁红 Zhao[2]

[1] 深圳大学数学科学学院，中国深圳 518061。[2] 四川大学数学系，中国成都 610064。

Abstract. 本文研究由电流体动力学方程描述的两相自由边界问题，该问题刻画了被介电气体包围的、具有重力作用的理想导电不可压缩无旋流体。分隔流体与气体的界面称为自由边界。

众所周知，除停滞点处外，自由表面始终保持光滑；在停滞点处，不可压缩流体的相对速度为零。在重力作用下，V̌arv̌aruc̆a 和 Weiss 所证明的斯托克斯猜想 [《数学学报》206, 363-403, （2011）], 表明，单相不可压缩流体中会出现角点型奇异性。自然会产生这样的问题：这一猜想在两相流问题中是否仍然成立？因此，本文的主要目标是刻画 x^{st} 电场作用下自由界面在停滞点附近可能出现的奇异剖面。

我们的主要成果是发现了电场在停滞点附近的临界衰减率 $\left|x-x^{\mathrm{st}}\right|^{1/2}$，这一发现揭示了自由表面奇异剖面的分类。更具体地说，我们证明，当电场的衰减率快于 $\left|x-x^{\mathrm{st}}\right|^{1/2}$ 时，其影响微不足道，因此奇异剖面必定是众所周知的斯托克斯角；该角关于重力方向对称，开角为 120°。当电场以 $\left|x-x^{\mathrm{st}}\right|^{1/2}$ 衰减时，角区域的对称性可能被打破，从而可能形成斯托克斯角或非对称角这两种奇异剖面。若衰减率慢于 $\left|x-x^{\mathrm{st}}\right|^{1/2}$，电场将占据主导地位，并彻底破坏角点结构，导致尖点奇异性。

对这些奇异性的分析依赖于变分原理和几何方法。关键技术工具包括Weiss型单调性公式、频率公式和浓缩紧性论证。

关键词：电流体动力学方程；两相流；重力；奇异性；自由边界。

*本工作得到国家自然科学基金委员会项目（批准号：12125102、12526202）、广东省自然科学基金（批准号：2024A1515012794）和深圳市科技计划（JCYJ20241202124209011）的资助。电子邮箱：dulili@scu.edu.cn。电子邮箱：zhaoyuanhong math@163.com。通讯作者。

Contents

1. 引言与主要结果 2 1.1. 引言 2 1.2. 数学问题的描述 5 1.3. 变分方法 9 1.4. 过渡条件的分析 13 1.5. 主要结果 15 2. 预备知识 23 3. 停滞点附近的奇异剖面 30 3.1. 情形 1.1 的可能奇异渐近行为 32 3.2. 情形 1.2 的可能奇异渐近行为 43 3.3. 情形 1.3 的可能奇异渐近行为 48 3.4. 情形 1 的可能奇异剖面 51 附录 A 56 附录 B 59 附录 C 63 参考文献 67

1. Introduction and main results

1.1. 引言。

本文研究一个由电流体动力学（下文简称 EHD）方程支配的自由边界问题，并考虑重力的作用。我们考虑一个模型，其中静止、无旋、不可压缩的完全导电流体处于重力场中，周围被介电气体包围（见图 1）。我们的目标是研究完全导电流体与介电气体之间的界面在停滞点附近可能出现的奇异剖面。停滞点 定义为自由边界上流体速度场消失的点。

电流体动力学（EHD）研究电场作用下的流体动力学，在化学、生物学和工程学中有广泛应用（参见 [32], [33], [39] ，以及其中引用的文献）。在自然大气条件下，水滴在强电场中的破碎对雷暴形成起着重要作用。研究表明，当水滴内外产生压力差时，流体动力学不稳定性会导致液滴破裂，并在其末端形成一个钝角锥尖。这种锥形结构称为泰勒锥（参见 [33]）。一项重要应用是电流体动力学喷墨打印，这是一种高分辨率的液滴沉积系统。其工作原理是产生一个电场

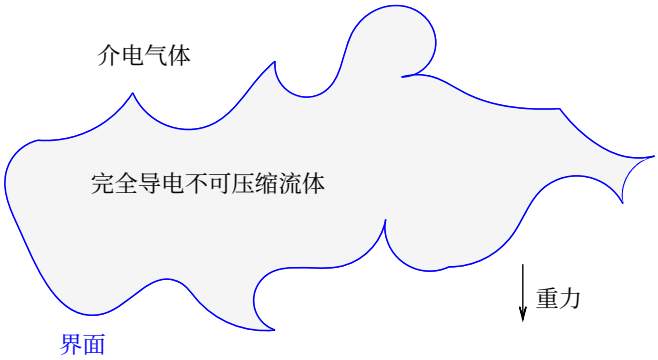


FIGURE 1. 两相电流体动力学流

使导电喷嘴与基底之间形成电势差。该电势梯度会引发由麦克斯韦应力张量驱动的界面变形，最终在喷嘴尖端形成锥形弯月面（泰勒锥）。电压升高时，射流会从圆锥顶端喷出，射向基底（参见图 2）。鉴于其重要的实际意义，深入理解电流体动力学界面波至关重要。因此，我们特别关注以电流体动力学方程作为模型。

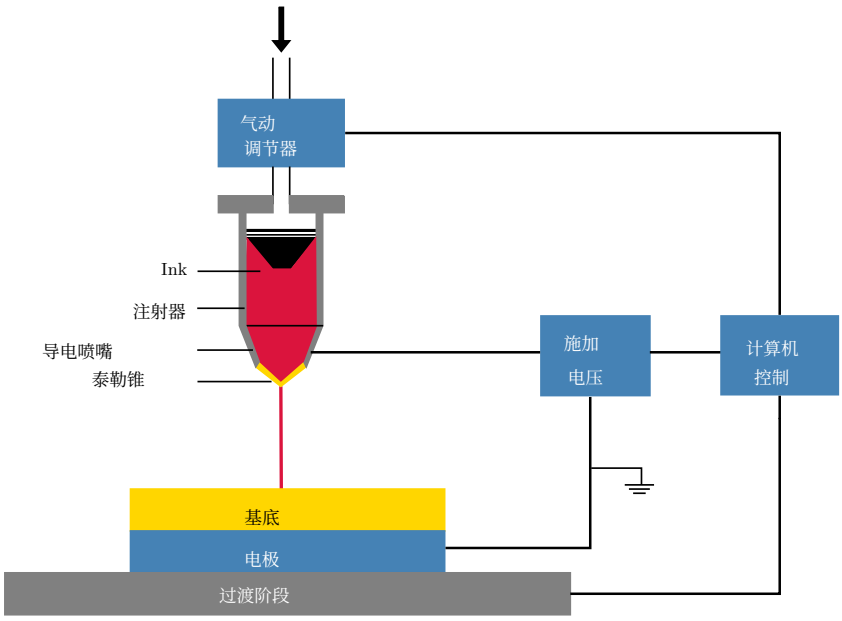


FIGURE 2. 电流体动力学喷墨打印装置，如 [28]所述

从数学角度看，这个问题可表述为一个两相流自由边界问题（详细推导见下一小节）。稳态两相流问题数学理论的一个里程碑，是 Alt-Caffarelli-Friedman 的工作；他们在 [1], 中建立了自由边界的基本正则性性质，适用于

变分问题。不久之后，Caffarelli 在一系列开创性论文 [4]–[6]中引入了粘性解的概念，显著推动了解的最优正则性与自由边界最优正则性的研究。这些进展最终确立了自由边界在停滞点之外具有 $C^{1,\alpha}$ 。此外，De Silva、Ferrari 和 Salsa 结合 [10], 中的技术，确立了由 [12, 13] 和 [16] 中的非齐次椭圆方程（关于散度型椭圆方程，见 [14, 15]）所控制的两相流问题自由边界的 $C^{1,\alpha}$ 正则性。近期， [20]在两相流自由边界正则性分析方面取得了重大突破。该工作严格分析了分叉点附近自由边界的 $C^{1,\alpha}$ 正则性；在这些分叉点的任意邻域内，单相和两相自由边界共存。后来， [18]将类似结果推广至三维轴对称两相流。

通过类似的方法，可以确立电流体动力学方程在非停滞点附近自由边界的正则性。相比之下，数学文献中很少探讨停滞点附近的奇异性分析。我们对含重力的电流体动力学方程的研究，受到 Garcia、V˘arv˘aruc˘a 和 Weiss 的开创性工作的启发（见 [27]）；他们首次研究了无重力时电流体动力学方程自由表面的奇异性。具体而言，他们严格证明，在对称轴上的任意停滞点处，轴对称自由边界都会形成一个尖点，其朝向流体区域或气体区域。然而，在停滞点附近，具有重力场的完全导电流与介电气体之间界面的奇异性分析仍是一个未解决的问题，即使在二维情形下也是如此。

另一方面，关于单相情形下停滞点附近自由表面的奇异性分析问题，已有一些研究对此进行探讨，这与一个称为斯托克斯猜想的重要问题有关。1880 年，斯托克斯猜想，无旋水波的自由边界在 [31] 中的每个停滞点处都会形成一个夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的对称角（见图 3）。V˘arv˘aruc˘a 和 Weiss 采用几何方法，在 [34], 中给出了这一猜想优雅而严谨的证明，且未对自由表面施加任何结构假设。具体而言，对于重力作用下自由边界上存在停滞点的定常不可压缩水波，他们证实，重力水波在任意停滞点处的渐近行为均由 [34]中的“斯托克斯角流”给出。在此基础上，V˘arv˘aruc˘a 和 Weiss 在 [35], 中揭示，对于具有涡量的不可压缩流体，停滞点附近可能形成一种有趣的新特征（称为尖点），而无旋情形下不会出现这种现象。不久之后，针对重力场中具有自由表面且受表面张力作用的二维不可压缩流动， [38] 中的结果表明不会形成尖点，并且该水波问题中的自由边界是解析的。最近， [19]对二维重力场中两相流自由边界问题的奇异性进行了研究。关于无涡量的三维定常轴对称重力水波问题，在停滞点附近以及沿着

对称轴的奇异性分析方面， [36]取得了开创性突破。更确切地说，他们证明，在停滞点附近（远离对称轴处）唯一可能的非平凡波形是斯托克斯角。此外，他们发现，沿对称轴（原点除外）唯一可能的奇异剖面是尖点，而原点处唯一可能的非平凡奇异剖面是一种名为 Garabedian 角的新特征。最近，在此基础上， [17]将涡量的影响纳入研究。具体而言，作者对具有涡量的定常轴对称流中停滞点附近及沿对称轴可能出现的奇异剖面进行了分类。基于这项工作的探索， [21]完成了对自由边界正则性与奇异性的全面分析。

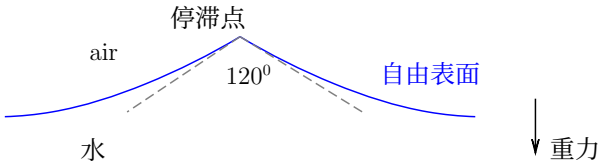


FIGURE 3. 二维水波的斯托克斯猜想

如前所述，据我们所知，开创性研究 [27] 仍是唯一一项探讨电流体动力学方程自由界面奇异性的研究。该研究通过仔细观察并分析自由表面上的过渡条件，验证了停滞点处的尖点奇异性。受到对该研究的深入探索 [27], 启发，本文将关注重力作用下二维电流体动力学方程自由边界上的奇异性。

1.2. **数学问题的描述**。

简要回顾经典电动力学和流体力学（见 [8], [29]和 [30]），可为本文研究的电流体动力学模型提供有益的背景知识。

为简便起见，我们考虑一个二维模型：完全导电流体在重力作用下，被介电气体包围，流体与气体之间的界面如图1所示。

假设流体静止、无旋、不可压缩、无黏且完全导电。另一方面，假设气体具有介电性，电场$\mathbf{E}$由完全导电流体区域与外边界之间的电势差产生。根据电荷守恒原理，电场$\mathbf{E}$ 可表示为标量电势 Φ的梯度，即$\mathbf{E} = -\nabla\Phi$。由于假设流体完全导电，其内部的电势 Φ 必为常数，这意味着流体区域内$\mathbf{E} \equiv 0$ 。标准电边界条件要求$\mathbf{E}$ 的切向分量在界面两侧连续。再结合 $\mathbf{E}$ 在流体一侧为零，可得

$$(\mathbf{E}, \nu) = 0 \quad \text{on the interface,}$$

其中， ν 是界面的任意切向量，(,)表示 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$中的欧几里得内积。因此，该界面构成一个等势面。由此可知，静止电势 Φ在整个流体及其界面上均取同一个常数值。不失一般性，我们可将该值归一化为零，即

$$\Phi = 0, \quad \text{in the fluid and on its free surface.}$$

令 ρ为不可压缩流体的恒定密度。不失一般性，设 $\rho \equiv 1$。因此，定常不可压无黏流受以下二维 Euler 方程组支配

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} + \nabla p + g\mathbf{e}_2 = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

满足无旋条件

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0, \tag{1.2}$$

其中， $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ 表示速度场， g 为引力常数， p 为压力， $x = (x_1, x_2)$ 表示空间变量，且 $\mathbf{e}_2 = (0,1)$（见图 4）。

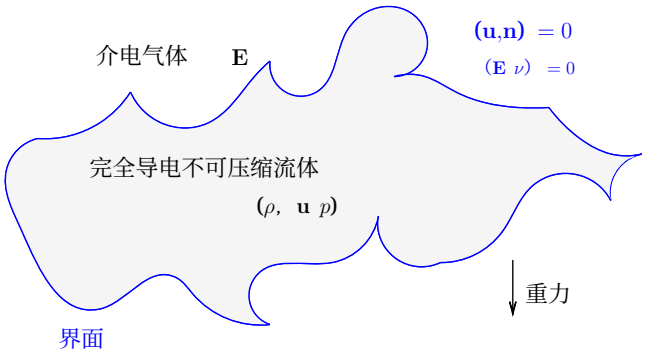


FIGURE 4. 两相电流体动力学流的物理模型

由式（1.1）中的质量守恒，可引入流函数 Ψ ，使得

$$u_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \quad \text{and} \quad u_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}.$$

由此可由式（1.2）推出

$$\Delta \Psi = 0 \quad \text{in the fluid region,} \tag{1.3}$$

另一方面，电荷守恒意味着电势 Φ 满足

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{in the gas region.} \tag{1.4}$$

另一方面，稳态不可压缩无旋流体的伯努利定律给出

$$\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + gx_2 + p = \mathcal{B} \quad \text{in the incompressible fluid field,} \tag{1.5}$$

其中 $\mathcal{B}$ 是不可压缩流体的伯努利常数。

注意，在界面上，$-p\mathbf{n} = p_e\,\mathbf{n}$，其中$\mathbf{n}$是界面的单位法向量，$p_e = \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{E}^2$ 是电能量密度，而 $\varepsilon > 0$–是介电常数（参见 [25] 第136页和 [30]第539页）。利用伯努利定律(1.5)中的关系 $p = -p_e$，自由边界上的过渡条件满足

$$\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + gx_2 - p_e = \mathcal{B} \quad \text{on the interface.} \tag{1.6}$$

将速度项改写为 $|\mathbf{u}|^2 = |\nabla\Psi|^2$，并将 $p_e = \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\Phi|^2$ 代入(1.6)，可得 –

$$\frac{1}{2}|\nabla\Psi|^2 - \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\Phi|^2 = \mathcal{B} - gx_2 \quad \text{on the interface.} \tag{1.7}$$

此外，通过引入重标度函数

$$\tilde{\Psi} = \sqrt{\frac{1}{2g}}\Psi, \quad \tilde{\Phi} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2g}}\Phi, \quad x_2^0 = \frac{\mathcal{B}}{g},$$

我们可以将过渡条件(1.7)改写为标准化形式：

$$\left|\nabla\tilde{\Psi}\right|^2 - \left|\nabla\tilde{\Phi}\right|^2 = x_2^0 - x_2, \tag{1.8}$$

其中，$x_2^0 = \mathcal{B}/g$ 称为不可压缩流体的均匀高度。

~ ~为简便起见，在本文余下部分，我们将继续分别用 Ψ 和 Φ 表示 Ψ 和 Φ。因此，结合（1.3）、（1.4）和（1.8），EHD 方程的两相自由边界问题可简化为

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0, & \text{in the gas region,} \\ \Delta\Psi = 0, & \text{in the fluid region,} \\ |\nabla\Psi|^2 - |\nabla\Phi|^2 = x_2^0 - x_2, & \text{on the interface,} \\ \Phi = 0, & \text{on the interface,} \\ \Psi = 0, & \text{on the interface.} \end{cases} \tag{1.9}$$

由于 Φ 和 Ψ 在各自的区域内均为调和函数（由（1.9）可知），根据最小值原理，在气体区域内有 $\Phi > 0$ （见 [26]）。同样地，在流体区域内有 $\Psi > 0$。此外，我们可以在气体区域内定义斯托克斯流函数 $\Psi \equiv 0$，同时在完全导电流体区域内定义电势 $\Phi \equiv 0$。由此，我们可以跨越各区域定义连续函数 u，如下所示：

$$u = \begin{cases} \Phi, & \text{in the gas region,} \\ -\Psi, & \text{in the fluid region.} \end{cases} \tag{1.10}$$

因此， u 的正部和负部满足

$$u^+ = \max\{u, 0\} = \Phi \text{ in the gas region},$$

$$u^- = \min\{u, 0\} = -\Psi \text{ in the fluid region},$$

and

$$u = 0 \quad \text{on the interface.}$$

此外，我们确定

$$\{u > 0\} \text{ as the gas region}, \quad \{u < 0\} \text{ as the fluid region},$$

and

$$\partial\{u > 0\} \cap \partial\{u < 0\} \text{ as the interface between fluid and gas.}$$

因此，两相自由边界问题 (1.9) 可用 u 表述如下（见图 5），

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \{u \neq 0\}, \\ |\nabla u^-|^2 - |\nabla u^+|^2 = x_2^0 - x_2, & \text{on } \partial\{u > 0\} \cap \partial\{u < 0\}. \end{cases} \tag{1.11}$$

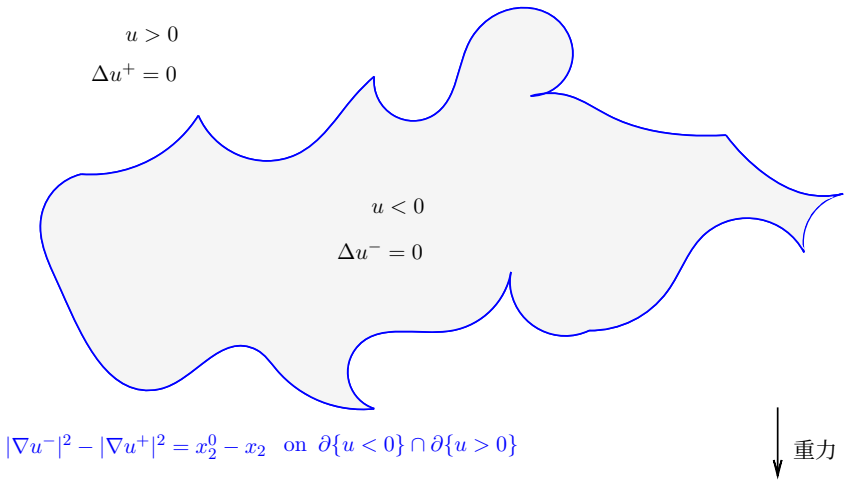


FIGURE 5. 两相自由边界问题

本文聚焦于不可压缩流体停滞点附近界面的奇异剖面。界面上的停滞点 $x^{\mathrm{st}} = \left(x_1^{\mathrm{st}}, x_2^{\mathrm{st}}\right)$ 由条件 $\left|\nabla u^-\left(x^{\mathrm{st}}\right)\right| = 0$定义。由（1.11）中的过渡条件可知，对于 $x_2 < x_2^0 = \mathcal{B}/g$，过渡条件右端严格为正，这意味着当 $x_2 < x_2^0$时， $|\nabla u^-(x)| > 0$ 。根据 [20], 中的经典正则性理论，可推出自由边界 $\partial\{u < 0\}$ 光滑。因此，本文主要研究满足 $x_2 \geqslant x_2^0$的点处界面可能出现的奇异性。

该问题的关键难点之一在于研究不可压缩流体停滞点附近的奇异剖面，具体而言，涉及正相 $|\nabla u^+|$ 的梯度是退化的还是非退化的。这一区分导致正相自由表面呈现出根本不同的行为：在非退化情形下它是光滑的，而在退化情形下则会出现奇异性。我们将在第1.4小节中分析这两种情形。

(1.11) 中的过渡条件提供了一些重要且有用的信息，例如停滞点可能出现的高度，以及它们附近 $|\nabla u^-|$ 的衰减率。此外，过渡条件右端的 $x_2^0 - x_2$ 源自重力，因此会产生与无重力情形不同的奇异波形剖面。例如，在 [27]，研究的无重力轴对称电流体动力学模型中，自由表面上的过渡条件为

$$x_1 \left|\nabla u^+(x_1, x_2)\right|^2 - \frac{1}{x_1}\left|\nabla u^-(x_1, x_2)\right|^2 = 0,$$

从而形成尖点奇异性，其中 x_2 是对称轴。这种差异促使我们研究带重力的自由边界问题。下一小节将进行更详细的讨论。

1.3. **变分方法**。

为了研究两相自由边界问题，Alt-Caffarelli-Friedman（ACF）泛函

$$E_{\mathrm{ACF}}(u, \Omega) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda_+^2 \chi_{\{u>0\}} + \lambda_-^2 \chi_{\{u<0\}} + \lambda_0^2 \chi_{\{u=0\}} \right) dx$$

自其在具有开创意义的论文 [1]，中被提出以来，一直是研究的核心对象，并推动了两相流领域的大量研究。这里，λ_+、λ_-、λ_0 是非负常数，χ_D 是集合 D 的特征函数。

相应的变分问题是在凸集 $\mathcal{K}$上极小化泛函 E_{ACF}

$$\mathcal{K} = \left\{ u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega),\ u = u^0 \text{ on } S \right\},$$

其中，S是 $\partial\Omega$的非空开子集，$u^0 \in W^{1,\ 2\,\mathrm{loc}}(\Omega)$是给定的边界函数。

在零水平集 $\{u = 0\}$之外，极小化子是调和的；由于能量中的特征函数不连续，u的梯度会出现跳跃条件。欧拉-拉格朗日方程为

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \{u \neq 0\}, \tag{1.12}$$

并且满足以下自由边界条件

$$\begin{cases} |\nabla u^-|^2 - |\nabla u^+|^2 = \lambda_-^2 - \lambda_+^2, & \text{on } \Gamma_{\mathrm{tp}} = \partial\{u>0\} \cap \partial\{u<0\}, \\ |\nabla u^-|^2 = \lambda_-^2 - \lambda_0^2, & \text{on } \Gamma_{\mathrm{op}}^- = \partial\{u<0\} \backslash \partial\{u>0\}, \\ |\nabla u^+|^2 = \lambda_+^2 - \lambda_0^2, & \text{on } \Gamma_{\mathrm{op}}^+ = \partial\{u>0\} \backslash \partial\{u<0\}, \end{cases} \tag{1.13}$$

其中， Γ_{tp} 表示两相自由边界点的集合，而 $\Gamma_{\mathrm{op}}^{\pm}$ 表示单相自由边界点的集合。这些集合定义如下:

(1) 若勒贝格测度满足条件，则点 $x \in \Gamma_{\mathrm{tp}}$

$$|B_r(x) \cap \{u > 0\}| > 0 \quad \text{and} \quad |B_r(x) \cap \{u < 0\}| > 0, \quad \text{for any } r > 0.$$

(2) 若存在一个足够小的 r_0，使得 $u \geqslant 0$ 属于 $B_{r_0}(x)$，则点 $x \in \Gamma_{\mathrm{op}}^{+}$

(3) 若存在一个足够小的 r_0，使得 $u \leqslant 0$ 属于 $B_{r_0}(x)$，则点 $x \in \Gamma_{\mathrm{op}}^{-}$

在条件 $\lambda_0 = \min\{\lambda_+, \lambda_-\}$ 下，Alt、Caffarelli 和 Friedman 建立了问题 (1.12) 和 (1.13) 中解的 Lipschitz连续性以及自由边界的 C^1 正则性，见 [1]。此外，借助黏性解理论，文献 [4]−[6] 建立了这种两相流自由边界的 $C^{1,\,\alpha}$ 正则性。最近，De Silva、Ferrari 和 Salsa 在 [12, 13] 和 [16] 中验证了由带强迫项的椭圆算子支配的两相流问题的自由边界 $C^{1,\,\alpha}$ 正则性。

两相自由边界 Γ_{tp} 的一个有趣特征是存在所谓的分叉点，记作 x^{br}，其中

$$x^{\mathrm{br}} \in \Gamma_{\mathrm{tp}} \quad \text{and} \quad \text{the Lebesgue measure } \left|B_r(x^{\mathrm{br}}) \cap \{u = 0\}\right| > 0, \text{ for any } r > 0.$$

分叉点附近自由边界的分析仍然是一个长期存在的开放问题。然而，众所周知，当 $\lambda_0 \geqslant \min\{\lambda_+, \lambda_-\}$ 时，泛函 E_{ACF} 不具有任何分叉点，详见 [1]的第 6 节。这自然促使我们研究当 $\lambda_0 < \min\{\lambda_+, \lambda_-\}$ 时是否会出现分叉点。值得注意的是， [11] 中的一个巧妙构造证明了: 存在一族泛函 E_{ACF} 的极小化子，满足 $\lambda_+^2 = \lambda_-^2 = 1$ 和 $\lambda_0 = 0$，并且其中必然存在分叉点。最近，De Philippis、Spolaor 和 Velichkov（见 [20]）在两相流问题的正则性理论方面取得了重大突破。为了研究分叉点附近的自由边界，他们考虑了两相泛函

$$E_{\mathrm{tp}}(u, \Omega) = \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + \lambda_+^2 \chi_{\{u>0\}} + \lambda_-^2 \chi_{\{u<0\}} \right) dx,$$

并证明，在每个双相点的某个邻域内，若 $\lambda_+ > 0$ 和 $\lambda_- > 0$成立，则自由边界是一条 $C^{1,\,\alpha}$-正则曲线。同时，单相自由边界 Γ_{op}^{+} 和 Γ_{op}^{-} 的正则性可由 [37]中的结果得出。

然而，在本文的背景下，参数 λ_+、 λ_- 和 λ_0 依赖于x_2-坐标，并在 $x_2 = x_2^0$处退化。因此，我们对它们进行适当选取，以构造合适的EHD泛函。将(1.13)中的自由边界条件与过渡条件进行比较

$$\left|\nabla u^-(x)\right|^2 - \left|\nabla u^+(x)\right|^2 = x_2^0 - x_2 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{tp}}.$$

容易看出，参数必须满足 $\lambda_-^2 - \lambda_+^2 = x_2^0 - x_2$。因此，我们作如下选择（不失一般性）：

$$\lambda_+^2 = \left(x_2 - x_2^0\right)^+, \quad \lambda_-^2 = \left(x_2 - x_2^0\right)^+ + x_2^0 - x_2, \quad \lambda_0^2 = 0, \tag{1.14}$$

其中 $x_2^0 = \frac{\mathcal{B}}{g}$。

在本文中，我们引入以下 EHD 泛函

$$E_{\mathrm{EHD}}(u,\Omega)=\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^2+\left(x_2-x_2^0\right)^+\chi_{\{u>0\}}+\left(\left(x_2-x_2^0\right)^++x_2^0-x_2\right)\chi_{\{u<0\}}\right)dx.$$

相应的 自由边界问题满足（详细推导见附录 A）

$$\begin{cases}\Delta u=0, & \text{in } \{u\neq 0\},\\ |\nabla u^-|^2-|\nabla u^+|^2=x_2^0-x_2, & \text{on } \Gamma_{\mathrm{tp}}=\partial\{u>0\}\cap\partial\{u<0\},\\ |\nabla u^-|^2=\left(x_2-x_2^0\right)^++x_2^0-x_2, & \text{on } \Gamma_{\mathrm{op}}^-=\partial\{u<0\}\backslash\partial\{u>0\},\\ |\nabla u^+|^2=\left(x_2-x_2^0\right)^+, & \text{on } \Gamma_{\mathrm{op}}^+=\partial\{u>0\}\backslash\partial\{u<0\}.\end{cases}\tag{1.15}$$

如果函数 u 满足以下条件，则称其为 Ω 中 $E_{\mathrm{EHD}}(u,\Omega)$ 的局部极小值点

$$E_{\mathrm{EHD}}(u,D)\leqslant E_{\mathrm{EHD}}(v,D),$$

对于每个开集 D 以及每个满足 $\bar{D}\subset\Omega$ 且在 Ω 上满足 $v=u$ 的函数 $v\in W^{1,2}(D)\backslash D$。

由于停滞点由流体区域 $\{u<0\}$ 定义，我们的分析将聚焦于自由边界 $\partial\{u<0\}$。下面的命题给出了一个关键刻画。

命题 1.1。设 u 是 $E_{\mathrm{EHD}}(u,\Omega)$ 的局部极小值点。那么

$$\Gamma_{\mathrm{op}}^+\cap\{x_2<x_2^0\}=\varnothing \quad \textit{and} \quad \Gamma_{\mathrm{op}}^-\cap\{x_2>x_2^0\}=\varnothing.$$

证明。我们用反证法。假设存在一点 $\tilde{x}\in\Gamma_{\mathrm{op}}^+\cap\{x_2<x_2^0\}$。那么，对某个足够小的 r_0,

$$u(x)\geqslant 0 \quad \text{in } B_r(\tilde{x}),$$

当 $0<r<r_0$ 时。因此，在区域 $\Omega\cap\{x_2<x_2^0\}$ 中，泛函简化为

$$E_{\mathrm{EHD}}(u,\Omega\cap\{x_2<x_2^0\})=\int_{\Omega\cap\{x_2<x_2^0\}}\left(|\nabla u|^2+\left(x_2^0-x_2\right)\chi_{\{u<0\}}\right)dx.$$

现在我们断言 $\Delta u=0$ 属于 $B_r(\tilde{x})$。否则，存在一个满足狄利克雷问题的 $w(x)$

$$\begin{cases}\Delta w=0, & \text{in } B_r(\tilde{x}),\\ w=u, & \text{on } \partial B_r(\tilde{x}),\end{cases}$$

使得

$$\int_{B_r(\tilde{x})}|\nabla w|^2\,dx<\int_{B_r(\tilde{x})}|\nabla u|^2\,dx.\tag{1.16}$$

由 $u\geqslant 0$ 可知

$$\begin{cases}\Delta\left(w-u\right)\leqslant 0, & \text{in } B_r(\tilde{x}),\\ w=u, & \text{on } \partial B_r(\tilde{x}).\end{cases}$$

因此，最小值原理推出 $w \geqslant u \geqslant 0$ 在 B_r（$\tilde{x}$）中。结合（1.16）以及 $\tilde{x}$的任意性，可得

$$\int_{\Omega\cap\{x_2<x_2^0\}} \left(|\nabla w|^2 + \left(x_2^0 - x_2\right)\chi_{\{w<0\}}\right) dx < \int_{\Omega\cap\{x_2<x_2^0\}} \left(|\nabla u|^2 + \left(x_2^0 - x_2\right)\chi_{\{u<0\}}\right) dx,$$

这与局部极小值点的定义相矛盾。

因此， $\Delta u = 0$ 属于 $B_r(\tilde{x})$。结合最大值原理可得， $u \equiv 0$ 属于$B_r(\tilde{x})$，这与 $\tilde{x} \in \Gamma_{\mathrm{op}}^+$ 的假设相矛盾。

因此， $\Gamma_{\mathrm{op}}^+ \cap \{x_2 < x_2^0\} = \varnothing$。第二个结论 $\Gamma_{\mathrm{op}}^- \cap \{x_2 > x_2^0\} = \varnothing$可通过类似的论证得出。□

注 1.1。 对于弱解（如附录 A 中定义 A 所定义的弱解），这一性质仍然成立。反设存在一点 $\tilde{x} \in \Gamma_{\mathrm{op}}^+ \cap \{x_2 < x_2^0\}$ 和一个充分小的 $r > 0$，使得 $u \geqslant 0$ 属于 $B_r(\tilde{x})$。根据弱解的定义和分部积分，我们得到

$$0 = \int_{B_r(\tilde{x})} \left(\left|\nabla u^+\right|^2 \mathrm{div}\tilde{\phi} - 2\nabla u^+ D\tilde{\phi}\nabla u^+\right) dx,$$

其中 $\tilde{\phi} = \phi \cap B_r(\tilde{x})$ 且 $\phi \in C_0^1(\Omega\ \mathbb{R}^2)$。根据 [7], 中的定理 3.1，对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\mathcal{H}^\varepsilon\left(\left\{u^+ = 0,\ \left|\nabla u^+\right| = 0\right\} \cap B_1\right) = 0,$$

其中 $\mathcal{H}^\varepsilon$ 是 ε 维豪斯多夫测度。由此可得，在 $B_r(\tilde{x})$ 中有 $\Delta u^+ = 0$。因此，最大值原理推出 $u^+ \equiv 0$。这与假设 $\tilde{x} \in \Gamma_{\mathrm{op}}^+$ 矛盾。

命题 1.1 表明，单相自由边界 Γ_{op}^+ 必须位于均匀高度 $x_2^0 = \frac{\mathcal{B}}{g}$ 之上，而 Γ_{op}^- 完全位于 x_2^0 之下。因此，

$$\partial\{u < 0\} \cap \{x_2 < x_2^0\} = \left(\Gamma_{\mathrm{tp}} \cup \Gamma_{\mathrm{op}}^-\right) \cap \{x_2 < x_2^0\} \tag{1.17}$$

and

$$\partial\{u < 0\} \cap \{x_2 > x_2^0\} = \Gamma_{\mathrm{tp}} \cap \{x_2 > x_2^0\}. \tag{1.18}$$

(1.14) 中的参数选择的主要优点在于，它能导出恒等式

$$\lambda_0^2(x_2) = \min\left\{\left(x_2 - x_2^0\right)^+, \left(x_2 - x_2^0\right)^+ + x_2^0 - x_2\right\},$$

并确保关于 Γ_{tp} 的条件与物理跃迁条件相符

$$\left|\nabla u^-(x)\right|^2 - \left|\nabla u^+(x)\right|^2 = x_2^0 - x_2 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{tp}}.$$

然而，（1.15）中还有其他条件

$$\begin{cases} |\nabla u^-|^2 = \left(x_2 - x_2^0\right)^+ + x_2^0 - x_2, & \text{on } \Gamma_{\mathrm{op}}^-, \\ |\nabla u^+|^2 = \left(x_2 - x_2^0\right)^+, & \text{on } \Gamma_{\mathrm{op}}^+. \end{cases} \tag{1.19}$$

重要的是，我们的分析不受附加条件（1.19）的影响。事实上，自由边界 $\partial\{u<0\}$ 仅取决于 Γ_{tp} 和 Γ_{op}^{-}，而与 Γ_{op}^{+}无关。此外，对于$x^{\mathrm{st}}\in\Gamma_{\mathrm{op}}^{-}$而言， Γ_{op}^{-} 的可能奇异剖面与单相情形中的剖面相似（如[34]所示）。因此，本文专门分析两相自由边界 Γ_{tp}的奇异性。

1.4. **过渡条件的分析**。

本文的主要目的是研究可能的停滞点附近界面的奇异剖面。

Garcia、V̌arv̌aruc̆a 和 Weiss 在 [27]中率先分析了轴对称电流体动力学方程自由边界中的奇异性。在该文中，作者研究了一个忽略重力的两相轴对称自由边界问题

$$\begin{cases}\operatorname{div}\left(x_1\nabla u(x)\right)=0, & \text{in gas region},\\ \operatorname{div}\left(\frac{1}{x_1}\nabla u(x)\right)=0, & \text{in fluid region},\\ x_1\left|\nabla u^{+}\right|^2-\frac{1}{x_1}\left|\nabla u^{-}\right|^2=0, & \text{on the interface between fluid and gas},\end{cases}\tag{1.20}$$

其中 $x=(x_1,x_2)$， x_2 为对称轴，Ω 是右半平面 $\{x\,|\,x_1\geqslant 0\}$ 的一个连通开子集。注意，(1.20) 中的过渡条件意味着

$$\left|\nabla u^{-}(x)\right|^2=x_1^2\left|\nabla u^{+}(x)\right|^2\quad\text{on the interface between fluid and gas.}$$

因此， x_2-轴上的点必定是停滞点，此处流体相的梯度为零，即 $|\nabla u^{-}|=0$。具体而言，在某个非退化条件下并假设自由表面为单射，研究表明，停滞点附近自由边界唯一可能的奇异剖面是尖点。

然而，考虑重力作用时，一个著名猜想（即所谓的斯托克斯猜想）表明，单相情形下会出现角点类型。这自然引出了一个问题：两相流问题中的奇异剖面是否也具有类似结构。特别是，我们强调，过渡条件（1.11）为分析自由边界上的奇异性提供了一些有用且重要的信息，因为它表明， $|\nabla u^{-}(x)|$ 的衰减率取决于正相项 $|\nabla u^{+}(x)|$ 和线性项 $x_2^0-x_2$。在过渡条件（1.11）的指引下，我们的工作取得了一项核心发现：确定了一个临界衰减率，它决定了所有可能奇异性的分类。

更准确地说，我们将不可压缩流体的停滞点集合定义为

$$S^u=\left\{x\,\middle|\,x\in\partial\{u<0\},\ \left|\nabla u^{-}(x)\right|=0\right\}$$

并考虑任意的 $x^{\mathrm{st}}=\left(x_1^{\mathrm{st}},\ x_2^{\mathrm{st}}\right)\in S^u$。在任何这样的点 x^{st}，式 (1.11) 中的过渡条件

$$\left|\nabla u^{-}\left(x\right)\right|^2=\left|\nabla u^{+}\left(x\right)\right|^2+x_2^0-x_2\quad\text{on the interface,}\tag{1.21}$$

与条件 $\left|\nabla u^{-}\left(x^{\mathrm{st}}\right)\right|=0$ 一起意味着 $x_2^{\mathrm{st}} \geqslant x_2^0$。因此，任何停滞点的高度都至少为均匀高度 $x_2^0=\frac{\mathcal{B}}{g}$。

这一观察自然地引出了基于停滞点相对于 x_2^0 的高度对其进行分类的方法。

$$\textbf{Case 1.}\quad x_2^{\mathrm{st}}=x_2^0=\frac{\mathcal{B}}{g}, \qquad \textbf{Case 2.}\quad x_2^{\mathrm{st}}>x_2^0=\frac{\mathcal{B}}{g}.$$

图 6 展示了总结所有可能情形的示意图。

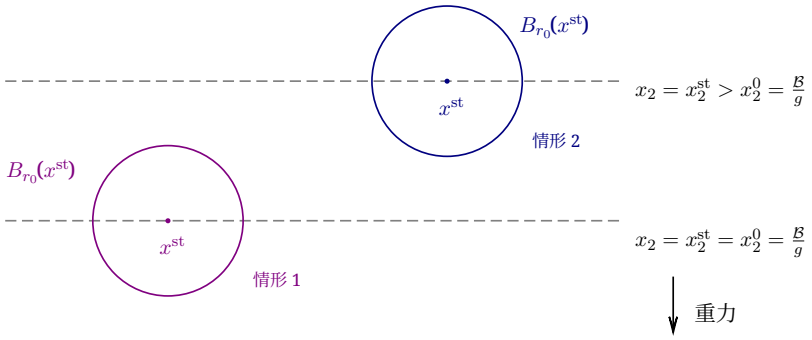


FIGURE 6. 可能的停滞点

情形 1。 $x_2^{\mathrm{st}}=x_2^0=\frac{\mathcal{B}}{g}$。在这种情形下，$u$ 的定义意味着电场 $|\mathbf{E}|=|\nabla u^{+}|$ 在 x^0 处消失。对过渡条件 (1.21) 进行严格分析后还可发现，特征衰减率与距离的平方根成正比，即 $\left|x-x^{\mathrm{st}}\right|^{1/2}$。这一衰减率在我们随后对电场如何影响停滞点附近不可压缩流体奇异性分析的分类中起着关键作用。因此，我们将 $\left|x-x^{\mathrm{st}}\right|^{1/2}$ 称为临界衰减率，并将情形 1 分为以下三个子情形。

情形 1.1. $x_2^{\mathrm{st}}=x_2^0$ 和 $|\mathbf{E}|$ 在x^{st}附近的衰减速度快于临界衰减率 $\left|x-x^{\mathrm{st}}\right|^{1/2}$。更确切地说，对于任意足够小的 $\varepsilon>0$，都存在 $r_0>0$ 使得

$$\left|\nabla u^{+}\right| \leqslant \varepsilon\left|x-x^{\mathrm{st}}\right|^{1/2}, \quad \text{in } B_{r_0}(x^{\mathrm{st}}) \cap \{u>0\}.$$

情形 1.2. $x_2^{\mathrm{st}}=x_2^0$ 和 $|\mathbf{E}|$ 在 x^{st}附近按 $\left|x-x^{\mathrm{st}}\right|^{1/2}$ 衰减，即存在 $0<C_1 \leqslant C_2$ 和 $r_0>0$ 使得

$$C_1\left|x-x^{\mathrm{st}}\right|^{1/2} \leqslant \left|\nabla u^{+}\right| \leqslant C_2\left|x-x^{\mathrm{st}}\right|^{1/2}, \quad \text{in } B_{r_0}(x^{\mathrm{st}}) \cap \{u>0\}.$$

情形 1.3. $x_2^{\mathrm{st}}=x_2^0$ 和 $|\mathbf{E}|$ 在 x^{st}附近的衰减速度慢于 $\left|x-x^{\mathrm{st}}\right|^{1/2}$，即对于任意足够大的$M>0$，都存在 $r_0>0$ 使得

$$\left|\nabla u^{+}\right| \geqslant M\left|x-x^{\mathrm{st}}\right|^{1/2}, \quad \text{in } B_{r_0}(x^{\mathrm{st}}) \cap \{u>0\}.$$

该分类涵盖了情形 1 中 $|\nabla u^{+}|$ 在停滞点附近所有可能的渐近行为。

情形 2。 $x_2^{\mathrm{st}} > x_2^0 = \frac{\mathcal{B}}{g}$。假设某个停滞点位于均匀高度之上。在此点处，(1.11) 中的过渡条件和 $\left|\nabla u^-\left(x^{\mathrm{st}}\right)\right| = 0$ 意味着 $\left|\nabla u^+\left(x^{\mathrm{st}}\right)\right|^2 = x_2^{\mathrm{st}} - x_2^0 > 0$。这种正相的非退化性通过平坦性改进方法（见 [20]）将迫使两相自由边界 $\Gamma_{\mathrm{tp}} = \partial\{u > 0\} \cap \partial\{u < 0\}$ 在 x^{st} 的某个小邻域内成为一条 $C^{1,\beta}$ 曲线，其中 $\beta \in (0, 1)$。为完整起见，附录 B 中给出了该结果的详细证明。

然而，这会导致矛盾。由命题 1.1 和 (1.18) 可知，在区域 $\{x_2 > x_2^0\}$ 中，自由边界 $\partial\{u < 0\}$ 仅由 Γ_{tp} 构成（因为 Γ_{op}^- 在那里为空）。因此，在 x^{st} 附近，自由边界完全是 $C^{1,\beta}$，这排除了停滞点的存在。因此，情形 2 不可能发生。

总之，过渡条件 (1.11) 迫使任意停滞点恰好位于均匀高度 $x_2 = x_2^0$（情形 1），此处电场退化。取 $x^{\mathrm{st}} = x^0 = (x_1^0,\ x_2^0)$ 后，后续分析便转而详细分类情形 1 中的各个子情形，而这取决于 $|\nabla u^+|$ 的衰减率。

1.5. 主要结果。

本文旨在刻画自由边界在 $\partial\{u < 0\}$ 上的停滞点 $x^{\mathrm{st}} = x^0 = (x_1^0,\ x_2^0)$ 附近的奇异性。

定理 1. 设 u 是问题 (1.15) 的一个弱解（定义见附录 *A* 中的定义 *A*）。当 $r_0 > 0$ 足够小时，我们假设以下陈述成立

- $u \geqslant 0$ 在 $\{x_2 \geqslant x_2^0\}$中。
- 对于情形 *1.1* 和情形 *1.2*，我们假设 $\{u = 0\}$ 局部只有有限多个连通分支，并且

$$\left|\nabla u^-\right| \leqslant \left|x_2 - x_2^0\right|^{1/2} \quad in\ B_{r_0}(x^0),$$

而对于情形 *1.3*，我们假设存在 $\alpha \in \left(1,\ \frac{3}{2}\right)$，使得对于某个 $C > 0$

$$\left|\nabla u^-\right| \leqslant C\left|x - x^0\right|^{\alpha-1} \quad and \quad \left|\nabla u^+\right| \leqslant C\left|x - x^0\right|^{\alpha-1} \quad in\ B_{r_0}(x^0).$$

那么，以下渐近行为成立

- 对于情形 *1.1*，唯一可能的奇异渐近行为是斯托克斯角（见图 7（A_1））， 即，

$$\frac{u(x^0 + r_m x)}{r_m^{3/2}} \to u_\infty(x) = U_\infty(\rho, \theta) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{3}\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta - \frac{\pi}{4}\right), & in\ \left(-\frac{5}{6}\pi, -\frac{\pi}{6}\right), \\ 0, & otherwise, \end{cases}$$

在 W^1 中如 $r_m \to 0^+$ 强收敛，$_{2\,\mathrm{loc}}$ $(\mathbb{R}^2)$，并在 $\mathbb{R}^2$ 上局部一致收敛，同时具有相应的负相密度（如附录 *A* 中定义 *C* 所定义）

$$M_{x^0,u^-}(0^+) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

其中 $u_\infty(x) = U_\infty(\rho, \theta)$ 为极坐标，且 $U_\infty(\rho, \theta) \leqslant 0$。

- 对于情形 *1.2*，奇异渐近行为必为以下某种斯托克斯型角点（见图 *7 (A_2)–(A_4)*），并且我们有如下收敛

$$\frac{u(x^0+r_m x)}{r_m^{3/2}} \to U_\infty(\rho,\theta) \quad as\ r_m \to 0^+$$

在 $W^{1,2\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 上强收敛，且在 $\mathbb{R}^2$ 上局部一致收敛。具体而言，

(A_2) 具有单点接触的斯托克斯型角点，即 $\left(\Gamma_{\mathrm{tp}} \cap B_r(x^0)\right) \setminus \{x^0\} = \varnothing$，其中 r足够小。

$$U_\infty(\rho,\theta) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{3}\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta - \frac{3\pi}{4}\right), & in\ \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right), \\ \frac{\sqrt{2}}{3}\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta - \frac{\pi}{4}\right), & in\ \left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right), \\ 0, & otherwise, \end{cases}$$

负相的密度为

$$M_{x^0,u^-}(0^+) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(A_3) 具有双侧接触的斯托克斯型角点，即 $\Gamma_{\mathrm{op}}^- \cap B_r(x^0) = \varnothing$。

$$U_\infty(\rho,\theta) = \begin{cases} \frac{2}{3}\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta + \frac{3\pi}{4}\right), & in\ \left[\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right), \\ \frac{2}{3}\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta - \frac{\pi}{4}\right), & in\ \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{\sqrt{6}}{3}\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta - \frac{\pi}{4}\right), & in\ \left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right), \end{cases}$$

负相的密度为

$$M_{x^0,u^-}(0^+) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(A_4) 带有单侧接触的斯托克斯型角点，即，$\Gamma_{\mathrm{op}}^- \cap B_r(x^0) \neq \varnothing$。更准确地说，$(A_{4.1})$ (左侧单边接触)

$$U_\infty(\rho,\theta) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta - \pi\right), & in\ \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right), \\ \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta\right), & in\ \left(-\pi, -\frac{\pi}{3}\right), \\ 0, & otherwise, \end{cases}$$

负相密度

$$M_{x^0,u^-}(0^+) = \frac{1}{2}.$$

$(A_{4.2})$ *(右侧单边接触)*

$$U_\infty(\rho,\theta) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta - \frac{\pi}{2}\right), & in\ \left(0, \frac{2\pi}{3}\right), \\ \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta - \frac{\pi}{2}\right), & in\ \left(-\frac{2\pi}{3}, 0\right), \\ 0, & otherwise, \end{cases}$$

负相密度

$$M_{x^0,u^-}(0^+) = \frac{1}{2}.$$

- 对于情形 *1.3*，停滞点必须是退化的，即：

$$\frac{u(x^0 + r_m x)}{r_m^\alpha} \to 0,$$

当 $r_m \to 0^+$ 在 $W^{1,\,2\text{个位置}}(\mathbb{R}^2)$ 上强收敛，并在 $\mathbb{R}^2$ 上局部一致收敛时，负相的密度为

$$M_{x^0,u^-,\alpha}(0^+) = 0,$$

其中， L^1_{loc} 的强 $\chi_{\{u(x^0+r_m x)<0\}}$ 极限为 0 或 1。

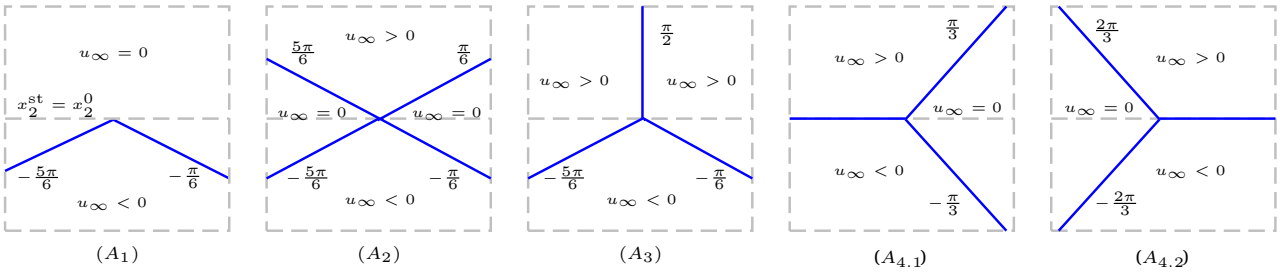


FIGURE 7. 可能出现的奇异渐近行为

注1.2。 设 x^0 是一个停滞点。我们将此类点分类如下。

- 非退化停滞点，满足 $u_\infty^-(x) \not\equiv 0$。它们对应于情形 (A_1)–(A_4)。

- 退化停滞点，满足 $u_\infty^-(x) \equiv 0$ （见情形 1.3）。此时，自由边界的奇异渐近行为由 $\chi_{\{u(x^0+r_m x)<0\}}$的强 L^1局部极限决定。具体而言，若该极限为 0，则形成尖点；若该极限为 1，则出现水平点。

注1.3。 我们的主要结果的一项关键贡献，是阐明电场对停滞点附近不可压缩流体奇异分析的影响。

一般而言，电场 $|\mathbf{E}| = |\nabla u^+|$ 的衰减率相对于临界衰减率 $\left|x - x^{\text{st}}\right|^{1/2}$ 决定了奇异渐近行为。

(1)快于临界衰减率。由于电场效应可以忽略，结果自然与 [34]中的单相情形一致。因此，停滞点附近的奇异渐近行为呈现为斯托克斯角。**(2) 临界衰减率。**停滞点附近的奇异渐近行为有两种截然不同的形式，具体取决于电场的分布。如果电场集中在停滞点，或均匀分布于

整个自由边界 $\partial\{u<0\}$上，则轴对称性得以保持，从而形成众所周知的斯托克斯角（见图 7（A_2）和（A_3））。相反，如果电场仅作用于停滞点附近的 $\partial\{u<0\}$ 一部分，则由此产生的力不平衡会破坏轴对称性，形成非对称斯托克斯角，如图 7（$A_{4.1}$）和（$A_{4.2}$）所示。

(3) **慢于临界衰减率**。电场效应占主导，完全破坏流体区域的局部角点结构，并导致一个退化停滞点。

在特殊情形 $\mathbf{E}\equiv 0$ 中，通过在 Ω 内的流体区域中定义 $U=-u^-\gt 0$，并在气体区域中定义 $U=u^+\equiv 0$，定理 1 中的情形（A_1）恢复了稳态水波的经典斯托克斯猜想，这与 [34] 中的定理 A 一致。

注 1.4。本注完成了对情形 1.2 的分类。根据 $\partial\{u>0\}$ 和 $\partial\{u<0\}$ 在停滞点 x^0 附近的局部交点情况，我们区分两个子情形。

(*a*) 不相交边界。如果两个边界仅在 x^0 局部相交（即，对于某个较小的 $r>0$，有 $\partial\{u>0\}\cap\partial\{u<0\}\cap B_r\left(x^0\right)=\left\{x^0\right\}$），那么电场不会影响角形区域的对称性。如 ($A_2$) 所示，该区域仍关于重力方向对称。(*b*) 相接边界。否则，构型取决于 $\partial\{u>0\}$ 与 $\partial\{u<0\}$之间的接触程度，具体而言，取决于 Γ_{op}^- 的部分在 x^0的某个邻域内是否为空。(b_1) 完全接触。如果对于任意 $r>0$都有 $\Gamma_{\mathrm{op}}^-\cap B_r\left(x^0\right)=\varnothing$，那么 $\partial\{u<0\}=\Gamma_{\mathrm{tp}}\subset\partial\{u>0\}$。在这种情形下，电场对角区域 $\{u<0\}$两侧的作用相同，从而保持其对称性。(b_2) 部分接触。如果 $\Gamma_{\mathrm{op}}^-\cap B_r\left(x^0\right)\neq\varnothing$，那么 $\{u>0\}$与 $\{u<0\}$ 的角区域共同构成一个张角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的空腔区域（见图 8）。假设 $u\geqslant 0$ 位于 $\{x_2\geqslant x_2^0\}$ 中，则自由边界 $\partial\{u<0\}\cap B_r\left(x^0\right)$（对于足够小的 $r>0$）必定位于第三象限 $\mathcal{Q}_3=\left\{\left(x_1,\ x_2\right)\ \middle|\ x_1\leqslant x_1^0,\ x_2\leqslant x_2^0\right\}$ 或第四象限 $\mathcal{Q}_4=\left\{\left(x_1,\ x_2\right)\ \middle|\ x_1\geqslant x_1^0,\ x_2\leqslant x_2^0\right\}$。因此，介电气体与不可压缩流体在 $B_r\left(x^0\right)\backslash\left\{x^0\right\}$ 内共享一段公共自由边界 Γ_{tp}。这段公共边界位于 $\mathcal{Q}_3$（形成左侧单侧接触（$A_{4.1}$））或 $\mathcal{Q}_4$（形成右侧单侧接触（$A_{4.2}$））。从物理上看，这段公共边界 $\Gamma_{\mathrm{tp}}\cap B_r\left(x^0\right)$ 同时受到电场和重力场的影响，而单相边界 $\Gamma_{\mathrm{op}}^-\cap B_r\left(x^0\right)$ 仅受重力影响。由此产生的力不平衡打破了轴对称性。后续计算证实，Γ_{tp} 变得平行于 x_2轴（见图 7（A_4））。

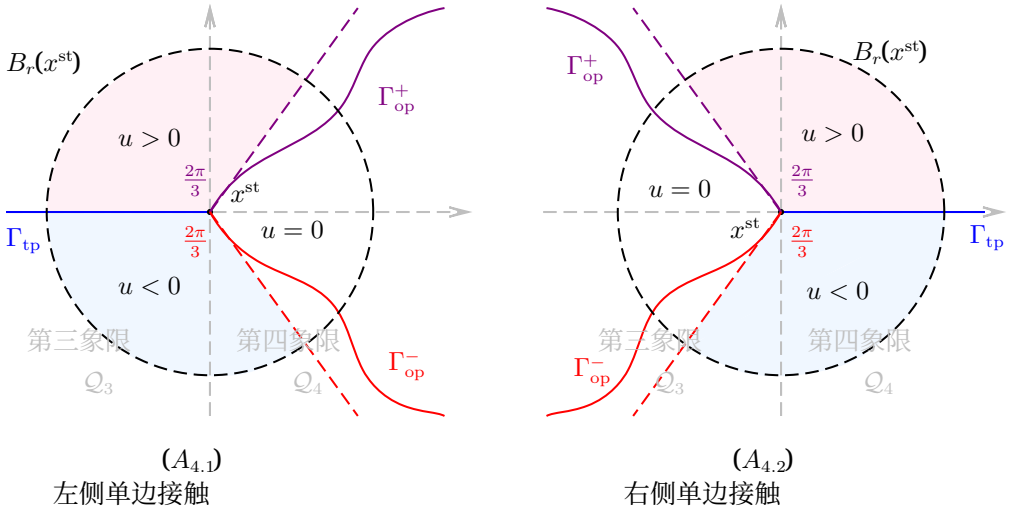


FIGURE 8. 左侧与右侧的划分

注1.5。 考虑以下函数

$$u_m^+ = \frac{u^+(r_m x + x^0)}{r_m^{3/2}} \quad \text{and} \quad u_m^- = \frac{u^-(r_m x + x^0)}{r_m^{3/2}}.$$

对于情形 1.1、1.2 和

$$u_m^+ = \frac{u^+(r_m x + x^0)}{r_m^{\alpha}} \quad \text{and} \quad u_m^- = \frac{u^-(r_m x + x^0)}{r_m^{\alpha}},$$

对于情形 1.3。不失一般性，假设 $u_m^+ \to q_1$ 和 $u_m^- \to q_2$ 在 $W^{1}{}_{\text{中强收敛，}2\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，并且在 $\mathbb{R}^2$ 上局部一致收敛。于是 $u_m = u_m^+ + u_m^- \to q_1 + q_2$。我们强调，极限$u_\infty = u_\infty^+ + u_\infty^-$ 是定义良好的，其中 $q_1 = u_\infty^+$ 和 $q_2 = u_\infty^-$。事实上，根据 u的定义（见（1.10）），函数 u^+ 和 u^- 的支集互不相交。由于这一性质在缩放和收敛过程中得以保持，因此 $\operatorname{supp} q_1 \cap \operatorname{supp} q_2 = \varnothing$。

注 1.6。 u 在停滞点 x^0 附近的渐近分析依赖于自由边界上的过渡条件。此外，这些假设源自第1.4小节中对电场的完整分类。

- 在情形 1.1 中，过渡条件与单相流问题的过渡条件一致。因此，我们假设 $\{u = 0\}$ 局部仅有有限个连通分支，$u \geqslant 0$ 在 $\{x_2 \geqslant x_2^0\}$ 中，并且 $|\nabla u^-|^2 \leqslant |x_2 - x_2^0|$ 在 $B_{r_0}(x^0)$ 中。

- 在情形 1.2 中，尽管自由边界同时受到电场和重力场的影响，但它们在 x^0 附近的综合作用仍类似于单相情形。因此，情形 1.1 的假设仍然适用。

- 在情形 1.3 中，电场占主导，其衰减速度比单相情形更慢。因此，我们假设存在常数 $\alpha \in (1,\ 3/2)$、$r_0 > 0$ 和 $C > 0$

使得 $|\nabla u^+| \leqslant C\left|x-x^0\right|^{\alpha-1}$ 属于 $B_{r_0}(x^0)$。上界 $\alpha<3/2$ 源于分类，而下界 $\alpha>1$ 则由 u 的 Lipschitz连续性（ [1]中的定理 5.3）推出，这保证了 u的梯度有界。最后，过渡条件为负相上的类似假设提供了依据，即$|\nabla u^-| \leqslant C\left|x-x^0\right|^{\alpha-1}$ 属于 $B_{r_0}(x^0)$。

为了分析停滞点附近自由边界可能的形状，我们建立了以下结果。

定理 2. 设 u 是 (1.15) 的一个弱解（定义见附录 *A* 中的定义 *A*）。假设 $u \geqslant 0$ 属于 $\{x_2 \geqslant x_2^0\}$，并且

- 对于情形 *1.1* 和情形 *1.2*，

$$\left|\nabla u^-\right| \leqslant \left|x_2-x_2^0\right|^{1/2} \quad in\ B_{r_0}(x^0),$$

- 对于情形 *1.3*，存在 α，其中 $1<\alpha<3/2$，使得

$$\left|\nabla u^+\right| \leqslant C\left|x-x^0\right|^{\alpha-1} \quad and \quad \left|\nabla u^-\right| \leqslant C\left|x-x^0\right|^{\alpha-1} \quad in\ B_{r_0}(x^0),$$

其中 $r_0>0$ 足够小，且 $C>0$。

此外，假设 $\partial\{u<0\}$ 局部上是一条连续单射曲线 $\sigma(t)=(\sigma_1(t)\ \sigma_2(t))$，其定义于 $t \in (-t_0, t_0)$，且满足 $t_0>0$，并且 $\sigma(0)=\left(x_1^0, x_2^0\right)$。那么，以下情况恰有一种成立（见图 *9*）。

(1) 斯托克斯角。

$$M_{x^0,u^-}(0^+)=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

在这种情况下，$\sigma_1(t) \neq x_1^0$ 位于 $(-t_0, t_0)\setminus\{0\}$ 内，并且

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\sigma_2(t)-x_2^0}{\sigma_1(t)-x_1^0}=-\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \lim_{t\to 0^-}\frac{\sigma_2(t)-x_2^0}{\sigma_1(t)-x_1^0}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(2) 非对称斯托克斯角。

$$M_{x^0,u^-}(0^+)=\frac{1}{2}.$$

- 左侧斯托克斯型角。

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\sigma_2(t)-x_2^0}{\sigma_1(t)-x_1^0}=-\sqrt{3}, \quad \lim_{t\to 0^-}\frac{\sigma_2(t)-x_2^0}{\sigma_1(t)-x_1^0}=0,$$

其中，对于所有 $(-t_0, t_0)\setminus\{0\}$，均有 $\sigma_1(t) \neq x_1^0$。

- 右侧斯托克斯型角点。

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\sigma_2(t)-x_2^0}{\sigma_1(t)-x_1^0}=0, \quad \lim_{t\to 0^-}\frac{\sigma_2(t)-x_2^0}{\sigma_1(t)-x_1^0}=\sqrt{3},$$

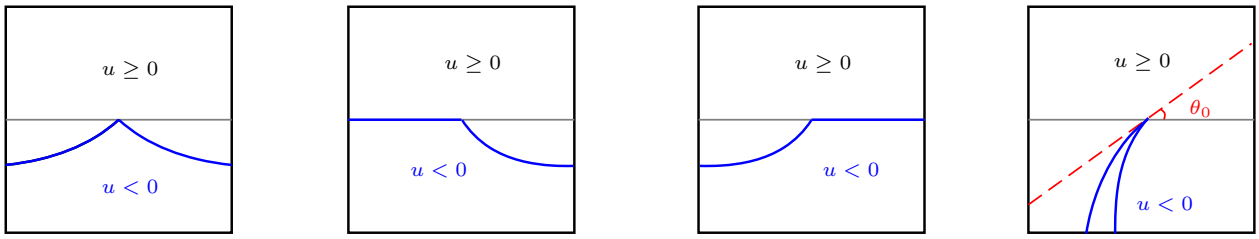
其中，对于所有 $\sigma_1(t) \neq x_1^0$，均有 $(-t_0, t_0)\setminus\{0\}$。

(3) 尖点。

$$M_{x^0,u^-,\alpha}(0^+) = 0,$$

在这种情况下，$\sigma_1(t) \neq x_1^0$ 在 $(-t_0, t_0) \setminus \{0\}$ 并且存在一个 $\theta_0 \in [0, \pi]$ 使得

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\sigma_2(t) - x_2^0}{\sigma_1(t) - x_1^0} = \lim_{t\to 0^-} \frac{\sigma_2(t) - x_2^0}{\sigma_1(t) - x_1^0} = \tan\theta_0.$$



斯托克斯角　　左侧斯托克斯型角　　右侧斯托克斯型角　　Cusp

FIGURE 9. 可能的奇异剖面

注1.7。 本研究揭示了重力作用下双相电流体动力学流动奇异性分析中的一项有趣发现。具体而言，关键见解是确定了 $|x - x^{\mathrm{st}}|^{1/2}$为电场的临界衰减率，该衰减率决定了停滞点附近奇异剖面的形成。此外，我们的结果弥合了 [27] 中研究的纯电应力驱动电流体动力学问题与 [34]中考察的不含电场的单相重力波问题之间的理论空白。

总之，本研究的一项核心贡献是严格刻画电场如何影响 x^{st} 附近具有 $x_2^{\mathrm{st}} = x_2^0$的奇异剖面。奇异剖面完全由电场衰减率相对于临界衰减率$|x - x^{\mathrm{st}}|^{1/2}$的大小决定。

(i) 如果电场的衰减速度快于临界衰减率 $|x - x^{\mathrm{st}}|^{1/2}$，其影响将变得可以忽略，从而形成斯托克斯角。(ii) 如果电场以临界衰减率衰减，停滞点附近的奇异剖面会分化为两种不同类型，具体取决于电场影响的范围。如果电场的影响严格局限于停滞点，或均匀分布于整个自由边界上，角区域的对称性便保持不变，从而形成经典的斯托克斯角。当电场的影响仅作用于自由边界的一部分时，对称性会被打破，形成非对称斯托克斯角。(iii) 如果电场的衰减速度慢于 $|x - x^{\mathrm{st}}|^{1/2}$，电场将从根本上破坏流体区域的角点几何形状，奇异剖面必须为尖点。

为清晰概述 x^{st} 处在 $x_2^{\mathrm{st}} = x_2^0$条件下可能出现的奇异渐近行为，所有结果均汇总于表1。表2和图10提供了不同情形及其剖面的示意图，以说明定理 2 的结论。

TABLE 1. 当 $x_2^{\mathrm{st}} = x_2^0$ 时可能出现的奇异渐近行为

渐近行为		非退化点				退化点	
		斯托克斯角			非对称斯托克斯角	Cusp	水平点
		(A_1)	(A_2)	(A_3)	(A_4)		
密度		$M_{x^0,u^-}(0^+) = \sqrt{3}/3$			$M_{x^0,u^-}(0^+) = 1/2$	$M_{x^0,u^-,\alpha}(0^+) = 0$	
$x_2^{\mathrm{st}} = x_2^0$	较快情形	√	×	×	×	×	×
	临界情形	×	√	√	√	×	×
	较慢情形	×	×	×	×	√	√

TABLE 2. 当 $x_2^{\mathrm{st}} = x_2^0$ 时可能出现的奇异剖面

概况		角点			Cusp
		斯托克斯	左侧斯托克斯型	右侧斯托克斯型	
密度		$M_{x^0,u^-}(0^+) = \sqrt{3}/3$	$M_{x^0,u^-}(0^+) = 1/2$		$M_{x^0,u^-,\alpha}(0^+) = 0$
$x_2^{\mathrm{st}} = x_2^0$	较快情形	√	×	×	×
	临界情形	√	√	√	×
	较慢情形	×	×	×	√

本文聚焦于一种被介电气体包围的二维重力驱动流体。证明的整体策略安排如下。

第 2 节介绍必要的预备知识。为分析停滞点附近的局部行为，我们利用 Weiss 型单调性公式研究吹胀极限。由于这种方法已十分成熟，详情请参见 [17, 19, 27, 34, 35, 36] 。

在第 3 节中，我们针对带有 $x_2^{\mathrm{st}} = x_2^0$ 的情形 1，按照电场的衰减率进行爆破分析。利用技术性估计和频率公式（详见第 3.1 小节），我们证明，情形 1.1 中可能的渐近行为对应于一个斯托克斯角，而在情形 1.2 中，可能的渐近行为既可能是斯托克斯角，也可能是斯托克斯型角点。我们进一步证明，在情形 1.3 中，爆破极限在停滞点附近必定是退化的，其中 $\chi_{\{u(x^0+r_m x)<0\}}$ 的强 L^1_{loc} 极限为 0 或 1。最后，在假设自由边界 $\partial\{u<0\}$ 是连续单射曲线的条件下，我们对具有 $x_2^{\mathrm{st}} = x_2^0$ 的停滞点的所有可能奇异剖面给出了完整分类。

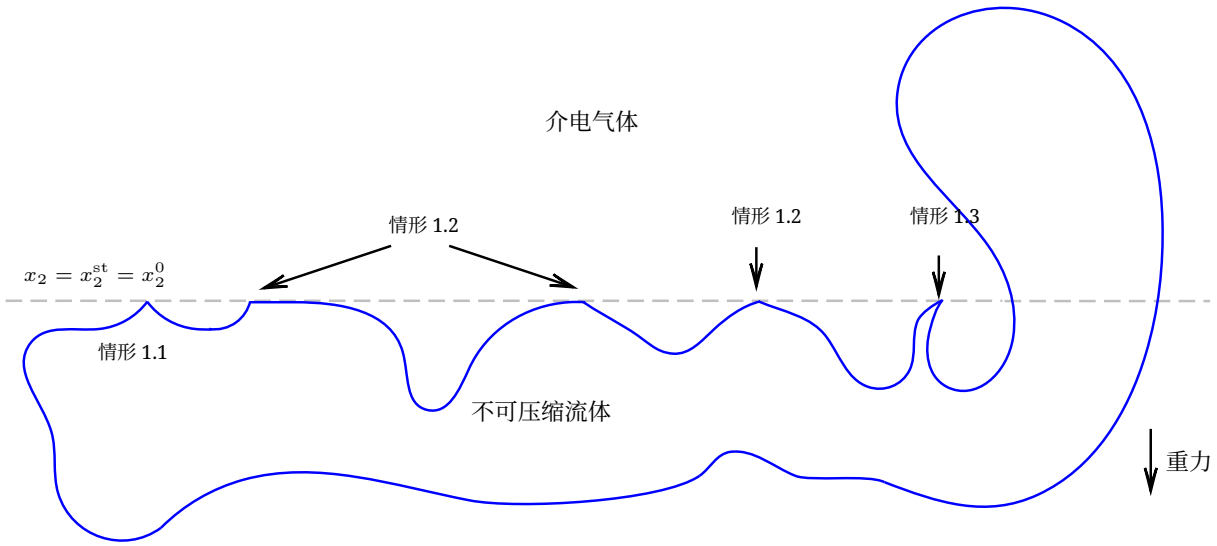


FIGURE 10. 两相自由边界问题的可能奇异剖面 Γ_{tp}

2. PRELIMINARIES

研究自由边界局部行为的主要技术是放大方法。具体而言，我们分析停滞点附近的吹胀极限（参见[17] 和 [34]−[37]）。

一个关键观察是，负相解 u^- 是单相流问题的弱解

$$\begin{cases} \Delta u^- = 0, & \text{in } \{u < 0\}, \\ |\nabla u^-|^2 = \left(x_2^0 - x_2\right)^+, & \text{on } \partial\{u < 0\}. \end{cases} \tag{2.1}$$

命题 2.1. 设 u 是区域 Ω 中两相自由边界问题 (1.15) 的一个弱解。那么 u^- 也是区域 Ω 中单相流问题 (2.1) 的一个弱解 $\cap \{u \leqslant 0\}$。

证明。 根据附录 A 中的定义 A 和定义 B，我们有

$$\begin{aligned} 0 = &\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 \operatorname{div}\phi - 2\nabla u D\phi \nabla u \right) dx + \int_{\Omega \cap \{x_2 < x_2^0\}} \left(\left(x_2^0 - x_2\right) \chi_{\{u<0\}} \operatorname{div}\phi - \chi_{\{u<0\}} \phi_2 \right) dx \\ &+ \int_{\Omega \cap \{x_2 > x_2^0\}} \left(\left(x_2 - x_2^0\right) \chi_{\{u>0\}} \operatorname{div}\phi + \chi_{\{u>0\}} \phi_2 \right) dx, \end{aligned} \tag{2.2}$$

对于所有 $\phi(x) = (\phi_1(x)\ \phi_2(x)) \in C_0^1\left(\Omega\ \mathbb{R}^2\right)$。只需证明 u^- 满足

$$0 = \int_{\Omega \cap \{u \leqslant 0\}} \left(|\nabla u|^2 \operatorname{div}\phi - 2\nabla u D\phi \nabla u \right) dx + \int_{\Omega \cap \{u \leqslant 0\} \cap \{x_2 < x_2^0\}} \left(\left(x_2^0 - x_2\right) \chi_{\{u<0\}} \operatorname{div}\phi - \chi_{\{u<0\}} \phi_2 \right) dx,$$

对所有 $\phi(x) \in C_0^1\left(\Omega \cap \{u \leqslant 0\},\ \mathbb{R}^2\right)$。

为证明这一点，我们任取一个 $\phi(x) \in C_0^1\left(\Omega \cap \{u \leqslant 0\},\ \mathbb{R}^2\right)$ 并将其按零延拓到整个 Ω，记此延拓为 $\tilde{\phi}$。由于 $\tilde{\phi} \in C_0^1\left(\Omega\ \mathbb{R}^2\right)$，我们可以将其代入 (2.2)，得到

$$
\begin{aligned}
0 = & \int_{\Omega}\left(|\nabla u|^2 \operatorname{div}\tilde{\phi} - 2\nabla u D\tilde{\phi}\nabla u\right) dx + \int_{\Omega\cap\{x_2<x_2^0\}}\left(\left(x_2^0 - x_2\right)\chi_{\{u<0\}}\operatorname{div}\tilde{\phi} - \chi_{\{u<0\}}\tilde{\phi}_2\right) dx \\
& + \int_{\Omega\cap\{x_2>x_2^0\}}\left(\left(x_2 - x_2^0\right)\chi_{\{u>0\}}\operatorname{div}\tilde{\phi} + \chi_{\{u>0\}}\tilde{\phi}_2\right) dx \\
= & \int_{\Omega\cap\{u\leqslant 0\}}\left(|\nabla u|^2 \operatorname{div}\phi - 2\nabla u D\phi\nabla u\right) dx \\
& + \int_{\Omega\cap\{u\leqslant 0\}\cap\{x_2<x_2^0\}}\left(\left(x_2^0 - x_2\right)\chi_{\{u<0\}}\operatorname{div}\phi - \chi_{\{u<0\}}\phi_2\right) dx.
\end{aligned}
$$

这正是关于 u^- 所需的恒等式，由此证明得证。 □

当停滞点位于均匀高度，即 $x_2^{\mathrm{st}} = x_2^0$ 时，过渡条件迫使 $|\nabla u^-|^2$ 的衰减率与线性项或 $|\nabla u^+|^2$ 相一致。前一种情形对应情形 1.1 和 1.2，后一种则对应情形 1.3。为形式化这一差别，我们针对 u 引入两种版本的单调性公式，其证明见附录 C。

命题 2.2。 (对于情形 1.1 和 1.2) 设 $r_0 = \frac{1}{2}dist\left(x^0, \partial\Omega\right)$。对于任意 $r \in (0,\ r_0)$ 以及每个在附录 *A* 的定义 *A* 中定义的弱解 u，我们引入 *Weiss* 型边界调整能量

$$
M_{x^0,u}(r) = r^{-3}I(r) - \frac{3}{2}r^{-4}J(r),
$$

其中

$$
I(r) = \int_{B_r(x^0)}\left(|\nabla u|^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^+\chi_{\{u>0\}} + \left(\left(x_2 - x_2^0\right)^+ + x_2^0 - x_2\right)\chi_{\{u<0\}}\right) dx,
$$

and

$$
J(r) = \int_{\partial B_r(x^0)} u^2 dS.
$$

那么，对几乎处处的 $r \in (0,\ r_0)$，

$$
\frac{d}{dr}M_{x^0,u}(r) = 2r^{-3}\int_{\partial B_r(x^0)}\left(\left(\nabla u^+, \nu\right) - \frac{3}{2r}u^+\right)^2 + \left(\left(\nabla u^-, \nu\right) - \frac{3}{2r}u^-\right)^2 dS,
$$

其中 ν 是单位外法向量。

命题 2.3。 (情形 1.3) 对于某个 $\alpha \in (1,\ 3/2)$，考虑关于 u的修正的 *Weiss* 型边界调整能量

$$
M_{x^0,u,\alpha}(r) = r^{-2\alpha}I(r) - \alpha r^{-2\alpha-1}J(r),
$$

其中 I（r）、 J（r）、 r_0和 u 的定义与命题 *2.2* 中相同。因此，对于几乎所有的 $r \in$（0，r_0）

$$
\frac{d}{dr}M_{x^0,u,\alpha}(r) = 2r^{-2\alpha}\int_{\partial B_r(x^0)}\left(\left(\nabla u^+, \nu\right) - \frac{\alpha}{r}u^+\right)^2 + \left(\left(\nabla u^-, \nu\right) - \frac{\alpha}{r}u^-\right)^2 dS + K(r),
$$

其中 ν 是单位外法向量，并且

$$K(r)=(3-2\alpha)r^{-2\alpha-1}\int_{B_r(x^0)}\left(\left(x_2-x_2^0\right)^+\chi_{\{u>0\}}+\left(x_2^0-x_2\right)^+\chi_{\{u<0\}}\right)dx.$$

为识别停滞点 $x^0\in\partial\{u<0\}$ 邻域内的爆破解，考虑以下增长条件

- 对于情形 1.1 和 1.2

$$\left|\nabla u^+\right|\leqslant C|x-x^0|^{1/2}\quad\text{and}\quad\left|\nabla u^-\right|\leqslant C|x-x^0|^{1/2}\quad\text{in } B_r(x^0),\tag{2.3}$$

- 对于情形 1.3

$$\left|\nabla u^+\right|\leqslant C|x-x^0|^{\alpha-1}\quad\text{and}\quad\left|\nabla u^-\right|\leqslant C|x-x^0|^{\alpha-1}\quad\text{in } B_r(x^0),\tag{2.4}$$

其中 $0<r<r_0$ 和 $1<\alpha<3/2$。

命题 2.4。 设 u 是(1.15)的一个弱解。假设 $x^0=\left(x_1^0、\ x_2^0\right)\in\partial\{u<0\}$ 和 u 满足(2.3)。则有以下结论。

(1) 极限 $M_{x^0,u}(0^+)=\lim_{r\to0^+}M_{x^0,u}(r)$ 存在且有限。

(2) 设 r_m 是一个序列，使得 $0<r_m\to0^+$ 当 $m\to\infty$，且爆破序列 e

$$u_m(x)=\frac{u(x^0+r_mx)}{r_m^{3/2}}$$

在 $W^{1,2\text{ loc}}(\mathbb{R}^2)$ 中弱收敛到爆破极限 u_∞，当 $m\to\infty$ 时成立。则 u_∞ 是关于 $\mathbb{R}^2$ 的 3/2 次齐次函数，即对所有 $x\in\mathbb{R}^2$ 和所有 $\lambda>0$，均有 $u_\infty(\lambda x)=\lambda^{3/2}u_\infty(x)$。

(3) u_m 在 $W^{1,2\text{ loc}}(\mathbb{R}^2)$ 中强收敛，并在 $\mathbb{R}^2$ 中局部一致收敛。

(4) 密度满足

$$M_{x^0,u}(0^+)=\lim_{m\to\infty}\int_{B_1}(x_2)^+\chi_{\{u_m>0\}}+(-x_2)^+\chi_{\{u_m<0\}}dx.$$

证明。 (1) 由关于 u 的 Weiss 型边界调整能量可直接得出，$M_{x^0,u}(r)$ 是单调递增函数。

此外，增长条件 (2.3) 表明

$$\left|u^+(x)\right|\leqslant C\left|x-x^0\right|^{3/2}\quad\text{in } B_r(x^0)$$

and

$$\left|u^-(x)\right|\leqslant C\left|x-x^0\right|^{3/2}\quad\text{in } B_r(x^0).$$

由于 $I(r)\geqslant0$，我们有

$$M_{x^0,u}(r)=r^{-3}I(r)-\frac{3}{2}r^{-4}J(r)\geqslant-\frac{3}{2}r^{-4}J(r),$$

这确保了 $M_{x^0,u}(r)$ 有下界。结合单调性，我们得出极限$M_{x^0,u}(0^+)$ 存在且有限。

(2) 增长条件意味着 u_m 在 $C^{0,1}(B_\delta(x^0))$ 中一致有界，对任意$0<\delta<\infty$均成立。因此，u_m 在 $\mathbb{R}^2$ 中局部一致收敛到 u_∞。对于任意 $0<\tau<\sigma<\infty$，我们有

$$\begin{aligned}&M_{x^0,u}(\sigma r_m)-M_{x^0,u}(\tau r_m)\\&=\int_{\tau r_m}^{\sigma r_m}2r^{-3}\int_{\partial B_r(x^0)}\left((\nabla u^+,\nu)-\frac{3}{2r}u^+\right)^2+\left((\nabla u^-,\nu)-\frac{3}{2r}u^-\right)^2dSdr,\end{aligned}$$

其中 ν 是单位外法向量。

另一方面，变量代换得到

$$\begin{aligned}&\int_{\tau r_m}^{\sigma r_m}2r^{-3}\int_{\partial B_r(x^0)}\left((\nabla u^+,\nu)-\frac{3}{2r}u^+\right)^2+\left((\nabla u^-,\nu)-\frac{3}{2r}u^-\right)^2dSdr\\&=\int_\tau^\sigma 2(r_ms)^{-3}r_m\int_{\partial B_{sr_m}(x^0)}\left((\nabla u^+,\nu)-\frac{3}{2sr_m}u^+\right)^2+\left((\nabla u^-,\nu)-\frac{3}{2sr_m}u^-\right)^2dSds\\&=\int_\tau^\sigma 2s^{-3}\int_{\partial B_s}\left((\nabla u_m^+,\nu)-\frac{3}{2s}u_m^+\right)^2+\left((\nabla u_m^-,\nu)-\frac{3}{2s}u_m^-\right)^2dSds\\&=2\int_{B_\sigma\setminus B_\tau}\frac{1}{|x|^3}\left(\left((\nabla u_m^+,x)-\frac{3}{2}u_m^+\right)^2+\left((\nabla u_m^-,x)-\frac{3}{2}u_m^-\right)^2\right)dx.\end{aligned}$$

由于 极限 $M_{x^0,u}(0^+)$ 存在，因此当 $m\to\infty$ 时，左端趋于零，这意味着 s

$$\int_{B_\sigma\setminus B_\tau}\frac{1}{|x|^3}\left(\left((\nabla u_m^+,x)-\frac{3}{2}u_m^+\right)^2+\left((\nabla u_m^-,x)-\frac{3}{2}u_m^-\right)^2\right)dx\to 0\quad\text{as } m\to\infty.$$

这等价于

$$\nabla u_\infty^+\cdot x-\frac{3}{2}u_\infty^+=0\quad\text{and}\quad\nabla u_\infty^-\cdot x-\frac{3}{2}u_\infty^-=0,\quad\text{for } x\in\mathbb{R}^2,$$

即 $u_\infty(\lambda x)=\lambda^{3/2}u_\infty(x)$，其中 $u_\infty=u_\infty^+-u_\infty^-$。

(3) 为了证明 u_m 在 $W^{1,2\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 中的强收敛（参见 [3] 中的命题 3.32），只需证明以下不等式

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left|\nabla u_m^+\right|^2\eta dx\leqslant\int_{\mathbb{R}^2}\left|\nabla u_\infty^+\right|^2\eta dx,$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left|\nabla u_m^-\right|^2\eta dx\leqslant\int_{\mathbb{R}^2}\left|\nabla u_\infty^-\right|^2\eta dx,$$

其中 $\eta\in C_0^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$。

首先，令 $\delta=\mathrm{dist}(x^0,\partial\Omega)/2$。那么，直接计算可得，

$$\Delta u_m=\Delta\left(\frac{u(x^0+r_mx)}{r_m^{3/2}}\right)=0\qquad\text{in } B_{\frac{\delta}{r_m}}\cap\{u_m\neq 0\},$$

这意味着

$$\Delta u_\infty=0\quad\text{in }\{u_\infty\neq 0\}.\tag{2.5}$$

现在我们分析负部 u_m^-。对于足够小的 $\delta > 0$，我们将积分分解如下，

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \left|\nabla u_m^-\right|^2 \eta dx \\
=&\int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla u_m^-, \nabla \left(\min\left\{u_m^- + \delta, 0\right\}\right)^{1+\delta}\right) \eta dx + \int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla u_m^-, \left(\nabla u_m^- - \nabla \left(\min\left\{u_m^- + \delta, 0\right\}\right)^{1+\delta}\right)\right) \eta dx \\
=&-\int_{\mathbb{R}^2} \left(\min\left\{u_m^- + \delta, 0\right\}\right)^{1+\delta} \Delta u_m^- \eta dx - \int_{\mathbb{R}^2} \left(\min\left\{u_m^- + \delta, 0\right\}\right)^{1+\delta} \left(\nabla u_m^-, \nabla \eta\right) dx \\
&+\int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla u_m^-, \left(\nabla u_m^- - \nabla \left(\min\left\{u_m^- + \delta, 0\right\}\right)^{1+\delta}\right)\right) \eta dx \\
=&I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

其中

$$I_1 = -\int_{\mathbb{R}^2} \left(\min\left\{u_m^- + \delta, 0\right\}\right)^{1+\delta} \Delta u_m^- \eta dx,$$

$$I_2 = -\int_{\mathbb{R}^2} \left(\min\left\{u_m^- + \delta, 0\right\}\right)^{1+\delta} \left(\nabla u_m^-, \nabla \eta\right) dx,$$

and

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla u_m^-, \left(\nabla u_m^- - \nabla \left(\min\left\{u_m^- + \delta, 0\right\}\right)^{1+\delta}\right)\right) \eta dx.$$

我们着重关注第二项，

$$\begin{aligned}
I_2 =& -\int_{\mathbb{R}^2} \left(\min\left\{u_m^- + \delta, 0\right\}\right)^{1+\delta} \left(\nabla u_m^-, \nabla \eta\right) dx \\
&-\int_{\mathbb{R}^2} \left(\min\left\{u_\infty^- + \frac{\delta}{2}, 0\right\}\right)^{1+\delta} \left(\left(\nabla u_m^- + \nabla u_\infty^-\right), \nabla \eta\right) dx \\
&+\int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla u_m^-, \nabla \eta\right) \left(\min\left\{u_\infty^- + \frac{\delta}{2}, 0\right\}\right)^{1+\delta} dx \\
&+\int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla u_\infty^-, \nabla \eta\right) \left(\min\left\{u_\infty^- + \frac{\delta}{2}, 0\right\}\right)^{1+\delta} dx \\
=&\int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla u_m^-, \nabla \eta\right) \left(\left(\min\left\{u_\infty^- + \frac{\delta}{2}, 0\right\}\right)^{1+\delta} - \left(\min\left\{u_m^- + \delta, 0\right\}\right)^{1+\delta}\right) dx \\
&-\int_{\mathbb{R}^2} \left(\min\left\{u_\infty^- + \frac{\delta}{2}, 0\right\}\right)^{1+\delta} \left(\left(\nabla u_m^- - \nabla u_\infty^-\right), \nabla \eta\right) dx \\
&-\int_{\mathbb{R}^2} \left(\min\left\{u_\infty^- + \frac{\delta}{2}, 0\right\}\right)^{1+\delta} \left(\nabla u_\infty^-, \nabla \eta\right) dx \\
=&J_1 + J_2 + J_3,
\end{aligned}$$

其中

$$J_1 = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla u_m^-, \nabla \eta\right) \left(\left(\min\left\{u_\infty^- + \frac{\delta}{2}, 0\right\}\right)^{1+\delta} - \left(\min\left\{u_m^- + \delta, 0\right\}\right)^{1+\delta}\right) dx,$$

$$J_2 = -\int_{\mathbb{R}^2} \left(\min\left\{ u_\infty^- + \frac{\delta}{2}, 0 \right\} \right)^{1+\delta} \left(\left(\nabla u_m^- - \nabla u_\infty^- \right), \nabla \eta \right) dx,$$

and

$$J_3 = -\int_{\mathbb{R}^2} \left(\min\left\{ u_\infty^- + \frac{\delta}{2}, 0 \right\} \right)^{1+\delta} \left(\nabla u_\infty^-, \nabla \eta \right) dx.$$

由一致收敛性和 u_∞ 的连续性，对于任意 $\varepsilon > 0$，我们可以推得 th at

$$\left| \left(\min\left\{ u_\infty^- + \frac{\delta}{2}, 0 \right\} \right)^{1+\delta} - \left(\min\left\{ u_m^- + \delta, 0 \right\} \right)^{1+\delta} \right| < \varepsilon \quad \text{and} \quad \left| \nabla u_m^- - \nabla u_\infty^- \right| < \varepsilon.$$

因此，存在正的常数 C_1 和 C_2，使得

$$|J_1| = \left| \int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla u_m^-, \nabla \eta \right) \left(\left(\min\left\{ u_\infty^- + \frac{\delta}{2}, 0 \right\} \right)^{1+\delta} - \left(\min\left\{ u_m^- + \delta, 0 \right\} \right)^{1+\delta} \right) dx \right| \leqslant C_1 \varepsilon,$$

and

$$|J_2| = \left| -\int_{\mathbb{R}^2} \left(\min\left\{ u_\infty^- + \frac{\delta}{2}, 0 \right\} \right)^{1+\delta} \left(\left(\nabla u_m^- - \nabla u_\infty^- \right), \nabla \eta \right) dx \right| \leqslant C_2 \varepsilon.$$

对于 J_3，我们计算得

$$\begin{aligned}
|J_3| &= \left| -\int_{\mathbb{R}^2} \left(\min\left\{ u_\infty^- + \frac{\delta}{2}, 0 \right\} \right)^{1+\delta} \left(\nabla u_\infty^-, \nabla \eta \right) dx \right| \\
&= \left| -\int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla u_\infty^-, \nabla \left(\left(\min\left\{ u_\infty^- + \frac{\delta}{2}, 0 \right\} \right)^{1+\delta} \right) \right) \eta dx - \int_{\mathbb{R}^2} \Delta u_\infty^- \left(\min\left\{ u_\infty^- + \frac{\delta}{2}, 0 \right\} \right)^{1+\delta} \eta dx \right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^2_+} \left| \nabla u_\infty^- \right|^2 \eta dx \qquad \text{as } \delta \to 0.
\end{aligned}$$

接下来，由 $\{u_m \neq 0\}$ 中的 $\Delta u_m = 0$ 可得 $|I_1| = 0$。

对于任意 $\varepsilon > 0$，由于 u_m 在 $W^{1,\infty}$ 局部 $(\mathbb{R}^2)$ 中有界，存在 $\delta_0(\varepsilon) > 0$ 和 $C_3 > 0$，使得

$$|I_3| = \left| \int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla u_m^-, \left(\nabla u_m^- - \nabla \left(\min\left\{ u_m^- + \delta, 0 \right\} \right)^{1+\delta} \right) \right) \eta dx \right| \leqslant C_3 \varepsilon, \quad \text{as } \delta < \delta_0(\varepsilon).$$

结合式 (2.6) 中上述估计，我们得出

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| \nabla u_m^- \right|^2 \eta dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^2} \left| \nabla u_\infty^- \right|^2 \eta dx.$$

对 u_m^+进行类似分析，从分解开始

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \left| \nabla u_m^+ \right|^2 \eta dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla u_m^+, \nabla \left(\max\left\{ u_m^+ - \delta, 0 \right\} \right)^{1+\delta} \right) \eta dx + \int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla u_m^+, \left(\nabla u_m^+ - \nabla \left(\max\left\{ u_m^+ - \delta, 0 \right\} \right)^{1+\delta} \right) \right) \eta dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2} \left(\max\left\{ u_m^+ - \delta, 0 \right\} \right)^{1+\delta} \Delta u_m^+ \eta dx - \int_{\mathbb{R}^2} \left(\max\left\{ u_m^+ - \delta, 0 \right\} \right)^{1+\delta} \left(\nabla u_m^+, \nabla \eta \right) dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla u_m^+, \left(\nabla u_m^+ - \nabla \left(\max\left\{ u_m^+ - \delta, 0 \right\} \right)^{1+\delta} \right) \right) \eta dx,
\end{aligned}$$

可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left|\nabla u_m^+\right|^2 \eta dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^2} \left|\nabla u_\infty^+\right|^2 \eta dx.$$

因此，序列 $\{u_m\}$ 在 $W^{1,\,2\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 中强收敛。

（4）为计算 $M_{x^0,\,u}(0^+)$，令 $\{u_m\}$ 为第（2）部分中定义的序列。则

$$\begin{aligned}
&M_{x^0,u}(0^+)\\
=&\lim_{m\to\infty} M_{x^0,u}(r_m)\\
=&\lim_{m\to\infty} r_m^{-3}\int_{B_{r_m}(x^0)} |\nabla u|^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^+ \chi_{\{u>0\}} + \left(x_2^0 - x_2\right)^+ \chi_{\{u<0\}} dx - \frac{3}{2} r_m^{-4}\int_{\partial B_{r_m}(x^0)} u^2 dS\\
=&\lim_{m\to\infty} \int_{B_1} \left|\nabla u_m^+\right|^2 + \left|\nabla u_m^-\right|^2 dx - \frac{3}{2}\int_{\partial B_1} \left(u_m^+\right)^2 + \left(u_m^-\right)^2 dS\\
&+\lim_{m\to\infty} \int_{B_1} (x_2)^+ \chi_{\{u_m>0\}} + (-x_2)^+ \chi_{\{u_m<0\}} dx\\
=&\int_{B_1} \left|\nabla u_\infty^+\right|^2 + \left|\nabla u_\infty^-\right|^2 dx - \frac{3}{2}\int_{\partial B_1} \left(u_\infty^+\right)^2 + \left(u_\infty^-\right)^2 dS\\
&+\lim_{m\to\infty} \int_{B_1} (x_2)^+ \chi_{\{u_m>0\}} + (-x_2)^+ \chi_{\{u_m<0\}} dx.
\end{aligned}$$

采用类似于（2.6）的论证，并回顾（2.5），可得

$$\begin{aligned}
&\int_{B_1} \left(\nabla u_\infty^+, \nabla \left(\max\left\{u_\infty^+ - \delta, 0\right\}\right)^{1+\delta}\right) dx\\
=&\int_{\partial B_1} \left(\nabla u_\infty^+, \nu\right) \left(\max\left\{u_\infty^+ - \delta, 0\right\}\right)^{1+\delta} dS - \int_{B_1} \left(\max\left\{u_\infty^+ - \delta, 0\right\}\right)^{1+\delta} \Delta u_\infty^+ dx\\
=&\int_{\partial B_1} \left(\nabla u_\infty^+, \nu\right) \left(\max\left\{u_\infty^+ - \delta, 0\right\}\right)^{1+\delta} dS\\
=&\frac{3}{2}\int_{\partial B_1} u_\infty^+ \left(\max\left\{u_\infty^+ - \delta, 0\right\}\right)^{1+\delta} dS,
\end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_1} \left(\nabla u_\infty^-, \nabla \left(\min\left\{u_\infty^- + \delta, 0\right\}\right)^{1+\delta}\right) dx\\
=&\int_{\partial B_1} \left(\nabla u_\infty^-, \nu\right) \left(\min\left\{u_\infty^- + \delta, 0\right\}\right)^{1+\delta} dS - \int_{B_1} \left(\max\left\{u_\infty^- + \delta, 0\right\}\right)^{1+\delta} \Delta u_\infty^- dx\\
=&\int_{\partial B_1} \left(\nabla u_\infty^-, \nu\right) \left(\min\left\{u_\infty^- + \delta, 0\right\}\right)^{1+\delta} dS\\
=&\frac{3}{2}\int_{\partial B_1} u_\infty \left(\min\left\{u_\infty^- + \delta, 0\right\}\right)^{1+\delta} dS.
\end{aligned}$$

令 $\delta \to 0$ 趋于极限，我们得到

$$\int_{B_1} \left|\nabla u_\infty^+\right|^2 dx = \frac{3}{2}\int_{\partial B_1} \left(u_\infty^+\right)^2 dS,$$

and

$$\int_{B_1} \left|\nabla u_\infty^-\right|^2 dx = \frac{3}{2}\int_{\partial B_1} \left(u_\infty^-\right)^2 dS.$$

因此,

$$\begin{aligned} M_{x^0,u}(0^+) =& M_{x^0,u^+}(0^+) + M_{x^0,u^-}(0^+) \\ =& \lim_{m\to\infty}\int_{B_1} (x_2)^+ \chi_{\{u_m>0\}} + (-x_2)^+ \chi_{\{u_m<0\}} dx. \end{aligned}$$

□

通过采用与命题 2.4 的证明类似的论证，我们立即得到以下结果（为简洁起见，省略细节）。

命题 2.5。 设 u 是满足 (1.15) 且具有 $1<\alpha<3/2$ 的弱解，并假设 u 满足 (2.4)。则以下结论成立。

(i) 极限 $M_{x^0,\ u,\ \alpha}(0^+)$ 存在且有限。(ii) 设 r_m 是满足 $0<r_m\to 0^+$ 的序列，并且爆破序列

$$u_m(x) = \frac{u(x^0 + r_m x)}{r_m^\alpha}$$

在 $W^{1,\ 2\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 中弱收敛于爆破极限 u_∞，当 $m\to\infty$ 时成立。则 u_∞ 是关于 $\mathbb{R}^2$ 的 α 次齐次函数，即对于所有 $x\in\mathbb{R}^2$ 和 $\lambda>0$，有 $u_\infty(\lambda x) = \lambda^\alpha u_\infty(x)$ 。

(iii) u_m 在 $W^{1,\ 2\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 中强收敛，并在 $\mathbb{R}^2$ 中局部一致收敛。

(iv) 密度

$$M_{x^0,u,\alpha}(0^+) = \lim_{m\to\infty} r_m^{3-2\alpha}\int_{B_1} (x_2)^+ \chi_{\{u_m>0\}} + (-x_2)^+ \chi_{\{u_m<0\}} dx = 0.$$

3. Singular profiles near the stagnation points

本节的主要贡献是严格推导三种不同情形下，不可压缩流体与介电气体之间的界面在停滞点 $x^{\mathrm{st}} = x^0 = (x_1^0,\ x_2^0)$ 附近可能出现的奇异渐近行为。该分析揭示了电场的衰减率如何决定自由边界在停滞点附近的局部奇异结构。

在假设自由边界是一条连续单射曲线的前提下，我们详细刻画了各情形中的奇异几何结构。具体而言，一个重要发现是确定了临界衰减率 $|x-x^{\mathrm{st}}|^{1/2}$。当电场的衰减速度快于 $|x-x^{\mathrm{st}}|^{1/2}$ 时，其影响可以忽略，奇异剖面为经典的斯托克斯角（关于竖直轴对称的 $\frac{2\pi}{3}$ 角）。当电场以 $|x-x^{\mathrm{st}}|^{1/2}$ 的速度衰减时，它可能破坏波形的对称性，形成斯托克斯角或非对称斯托克斯角。当衰减速度慢于 $|x-x^{\mathrm{st}}|^{1/2}$ 时，主导

电场会彻底破坏角点结构，在停滞点附近形成尖点。

遵循 [9] 和 [24], 中的方法，我们利用球面上拉普拉斯-贝尔特拉米算子的特征函数来确定爆破极限，这些特征函数与调和函数的齐次性相关。

在维数为 $n = 2$时，极坐标下的拉普拉斯算子为

$$u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}\Delta_\theta u,$$

其中Δ_θ 表示拉普拉斯-贝尔特拉米算子。

假设 u_∞ 是一个次数为3 2的齐次调和函数，则存在一个特征函数 $f(\theta)$，且可写为 $u_\infty(x) = U_\infty(\rho, \theta) = \rho^{3/2} f(\theta)$，其中 u_∞表示 u_m的爆破极限。将此形式代入区域 $\{u_\infty \neq 0\}$ 内的 $\Delta u_\infty = 0$ ，得到

$$\frac{3}{4}f(\theta) + \frac{3}{2}f(\theta) + f''(\theta) = 0.$$

求解该方程可得一般形式

$$u_\infty(x) = U_\infty(\rho, \theta) = C\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta + \varphi\right) \tag{3.1}$$

在 $\{u_\infty \neq 0\}$ 的每个连通分支中。更确切地说，$\{u_\infty \neq 0\}$ 的每个连通分支都是一个圆锥，其顶点位于停滞点 x^0 ，开角为 2π3 。

—

为简化后续对不同情形下相应密度的计算，我们首先观察到，特征函数满足以下性质。

命题 3.1. 设 u 是满足定理 *1* 中假设的 (1.15) 的弱解，并设 u_m 是命题 *2.4* 中定义的爆破序列。则在情形 *1.1* 和 *1.2* 中， χ_- 在 $\{u_\infty = 0\} \cap \{x_2 \leqslant 0\}$ 的内部为常数，其中 χ_- 是 $\chi_{\{u_m<0\}}$ 的强 L^1_{loc} 极限。

证明。 根据弱解的定义，对于任意 $\phi(x) = (\phi_1, \phi_2) \in C_0^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right)$ 和$\phi_m = (\phi_{m,1}, \phi_{m,2}) = \phi\left(\frac{x-x^0}{r_m}\right)$，我们有 ___

$$
\begin{aligned}
0=&\int_{B_{rm}(x^0)}\left(|\nabla u|^2\,\mathrm{div}\phi_m-2\nabla uD\phi_m\nabla u\right)dx\\
&+\int_{B_{rm}(x^0)\cap\{x_2<x_2^0\}}\left(\left(x_2^0-x_2\right)\chi_{\{u<0\}}\mathrm{div}\phi_m-\phi_{m,2}\chi_{\{u<0\}}\right)dx\\
&+\int_{B_{rm}(x^0)\cap\{x_2>x_2^0\}}\left(\left(x_2-x_2^0\right)\chi_{\{u>0\}}\mathrm{div}\phi_m+\phi_{m,2}\chi_{\{u>0\}}\right)dx\\
=&\int_{B_1}r_m^2\left(\left|\nabla u\left(x^0+r_mx\right)\right|^2\frac{1}{r_m}\mathrm{div}\phi-2\nabla u\left(x^0+r_mx\right)\frac{1}{r_m}D\phi_m\nabla u\left(x^0+r_mx\right)\right)dx\\
&+\int_{B_1\cap\{x_2<0\}}r_m^2\left(-r_mx_2\chi_{\{u(x^0+r_mx)<0\}}\frac{1}{r_m}\mathrm{div}\phi-\phi_2\chi_{\{u(x^0+r_mx)<0\}}\right)dx\\
&+\int_{B_1\cap\{x_2>0\}}r_m^2\left(r_mx_2\chi_{\{u(x^0+r_mx)>0\}}\frac{1}{r_m}\mathrm{div}\phi+\phi_2\chi_{\{u(x^0+r_mx)>0\}}\right)dx\\
=&r_m^2\left(\int_{B_1}\left(|\nabla u_m|^2\,\mathrm{div}\phi-2\nabla u_mD\phi\nabla u_m\right)dx+\int_{B_1\cap\{x_2<0\}}\left(-x_2\chi_{\{u_m<0\}}\mathrm{div}\phi-\phi_2\chi_{\{u_m<0\}}\right)dx\right.\\
&\left.+\int_{B_1\cap\{x_2>0\}}\left(x_2\chi_{\{u_m>0\}}\mathrm{div}\phi+\phi_2\chi_{\{u_m>0\}}\right)dx\right).
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

两边除以 r_m^2 并令 $r_m\to 0$ 趋于极限，得到

$$
\begin{aligned}
0=&\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u_\infty|^2\,\mathrm{div}\phi-2\nabla u_\infty D\phi\nabla u_\infty\right)dx\\
&+\int_{\mathbb{R}^2\cap\{x_2<0\}}\left(-x_2\chi_-\mathrm{div}\phi-\chi_-\phi_2\right)dx+\int_{\mathbb{R}^2\cap\{x_2>0\}}\left(x_2\chi_+\mathrm{div}\phi+\chi_+\phi_2\right)dx,
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

其中 χ_+ 和 χ_- 分别是$\chi_{\{u_m>0\}}$ 和$\chi_{\{u_m<0\}}$的强 L^1_{loc} 极限。

回想一下，$u^-(0^+)$ 表示 $\{x_2\leqslant x_2^0\}$中 u^- 的密度。由于ϕ的任意性，我们选择 $\phi\in C_0^1\left(\mathbb{R}^2\cap\{u_\infty=0\}\cap\{x_2<0\},\ \mathbb{R}^2\right)$。由 (3.3) 可得

$$
\int_{\mathbb{R}^2\cap\{x_2<0\}}\left(-x_2\chi_-\mathrm{div}\phi-\chi_-\phi_2\right)dx=0,
$$

对于所有满足 此类 ϕ。这意味着 χ_- 在 $\{u_\infty=0\}\cap\{x_2\leqslant 0\}$的内部是一个常数。 □

3.1. 情形 1.1 的可能奇异渐近行为。

为完成定理 1 中情形 1.1 的证明，我们注意到电场的影响可以忽略不计，且 $u_\infty^+\equiv 0$。因此，分析可归结为 u^-，根据 $\{u_\infty<0\}$ 是否为空，会出现两种情形。由假设 $u\geqslant 0$ 在 $\{x_2\geqslant x_2^0\}$ 中可知，$\{u_\infty<0\}$ 至多包含一个连通分支。

因此，当 $\{u_\infty<0\}$非空时，唯一可能的奇异渐近行为是斯托克斯角点。

定理 3.2. 设 u 是满足定理 *1* 中假设的(1.15) 的弱解，并设 u_m 是命题 *2.4* 中定义的爆破序列。那么

$$U_\infty^-(\rho,\theta)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{3}\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right), & in\ \left(-\frac{5}{6}\pi,-\frac{\pi}{6}\right),\\ 0, & otherwise,\end{cases}$$

具有相应的密度

$$M_{x^0,u^-}(0^+)=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

其中 $u_\infty(x) = U_\infty(\rho, \theta)$ 为极坐标。

证明。由（3.1）及 $u \geqslant 0$ 在 $\{x_2 \geqslant x_2^0\}$ 中的假设，我们有

$$U_\infty^-(\rho,\theta)=C\rho^{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{3}{2}\theta+\varphi\right)\quad \text{in } \{u_\infty<0\}.$$

现在考虑 $\{u_\infty < 0\}$ 具有一个连通分支的情形。由于 $u_m = u(x^0+r_m x)\, r_m^{3/2}$，由（3.2）可得

$$\begin{aligned}0=&\int_{B_1}\left(|\nabla u_m|^2\,\mathrm{div}\phi-\nabla u_m D\phi\nabla u_m\right)dx+\int_{B_1\cap\{x_2<0\}}\left(-x_2\chi_{\{u_m<0\}}-\chi_{\{u_m<0\}}\phi_2\right)dx\\&+\int_{B_1\cap\{x_2>0\}}\left(x_2\chi_{\{u_m>0\}}+\chi_{\{u_m>0\}}\phi_2\right)dx.\end{aligned}\tag{3.4}$$

由于对于情形 1.1 中任意充分小的 ε， $|\nabla u^+| \leqslant \varepsilon \left|x - x^0\right|^{1/2}$ 在 $B_r(x^0) \cap \{u > 0\}$ 中成立，因此爆破序列 u_m 满足

$$\left|\nabla u_m^+\right|=\frac{\left|\nabla u^+(x^0+r_m x)\right|}{r_m^{1/2}}\leqslant\varepsilon\frac{\left|x^0+r_m x-x^0\right|^{1/2}}{r_m^{1/2}}\leqslant\varepsilon|x_2|^{1/2},\quad \text{in } B_1\cap\{u_m>0\}.$$

因此， $u_m^+ \to 0$ 在 $W^{1,\,2\,\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^2\right)$ 中强收敛，当 $m \to \infty$时。在 (3.4) 中令 $m \to \infty$ 趋于极限，得到

$$\begin{aligned}0=&\int_{\mathbb{R}^2}\left(\left|\nabla u_\infty^-\right|^2\mathrm{div}\phi-2\nabla u_\infty^- D\phi\nabla u_\infty^-\right)dx\\&+\int_{\mathbb{R}^2\cap\{x_2<0\}}\left(-x_2\chi_-\mathrm{div}\phi-\chi_-\phi_2\right)dx.\end{aligned}\tag{3.5}$$

令 y 为 $\partial\{u_\infty<0\}\backslash\{O=(0,\ 0)\}$ 中的任意点，并选择 δ 使得 $B_\delta(y) \subset \{x_2 <0\}$。注意，$\partial\{u_\infty<0\}$ 在 $\partial\{u_\infty<0\}\cap B_\delta(y)$ 上取常数值 $\nu(y)$。将$\phi(x) = \eta(x)\nu(y)$代入 (3.5)，其中 $\eta \in C_0^1(B_\delta(y)\ \mathbb{R}^2)$ 是任意的，并分部积分，得到

$$0=\int_{B_\delta(y)\cap\partial\{u_\infty<0\}}\left(-\left|\nabla u_\infty^-\right|^2-x_2\left(1-\chi_-\right)\eta\right)dS.$$

现在，$\chi_{\{u_m<0\}} \to \chi_-$ 在 $L^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^2\cap\{x_2<0\}\right)$ 中强收敛，且 χ_- 在 $\{u_\infty=0\}\cap\{x_2\leqslant 0\}$的内部取值为 0 或 1。根据 Hopf 引理，必有 $\chi_- = 0$，因此 $\left|\nabla u_\infty^-\right|^2 = -x_2$在 $\partial\{u_\infty<0\}$上。

满足这些条件的爆破极限的具体形式是众所周知的

$$u_\infty(x) = U_\infty(\rho,\theta) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{3}\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta - \frac{\pi}{4}\right), & \text{in } \left(-\frac{5}{6}\pi, -\frac{\pi}{6}\right), \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

详细内容请参阅 [34] 。此外，密度为

$$\begin{aligned} M_{x^0,u^-}(0^+) &= \int_{B_1} -x_2 \chi_{\left\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\left|-\frac{5\pi}{6}<\theta<-\frac{\pi}{6}\right.\right\}} dx \\ &= \int_0^1 \int_{-\frac{5\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} -\rho^2 \sin\theta d\theta d\rho = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

□

另一方面，如果 $u_\infty^- \equiv 0$，命题 3.1 表明，密度的可能取值仅限于集合

$$M_{x^0,u^-}(0^+) \in \left\{\frac{2}{3}, 0\right\},$$

其中

$$\frac{2}{3} = \int_{B_1} (-x_2)^+ dx = r^{-3} \int_{B_r(x^0)} \left(x_2^0 - x_2\right)^+ dx.$$

遵循 [34]−[36] 中的方法，我们注意到，在伯恩斯坦条件的强形式下，可以排除密度 $M_{x^0,\ u^-}(0^+) = 0$ 。需要特别指出的是，这一结论依赖于以下假设： $u \geqslant 0$ 在 $\{x_2 \geqslant x_2^0\}$ 中成立，且对于某个足够小的 $r_0 > 0$， $\left|\nabla u^-\right|^2 \leqslant \left|x_2 - x_2^0\right|$ 在 $B_{r_0}(x^0)$ 中成立。因此，该结果在情形 1.2 中仍然成立。

定理 3.3。 设 u 是 (1.15) 的一个弱解，且满足 $x^0 \in \partial\{u < 0\}$。假设 u 满足$u \geqslant 0$ 在 $\{x_2 \geqslant x_2^0\}$ 中成立，并且

$$\left|\nabla u^-\right|^2 \leqslant |x_2 - x_2^0| \quad in\ B_{r_0}(x^0),$$

对某个充分小的 $r_0 > 0$。于是 $M_{x^0,u^-}(0^+) \neq 0$。

证明。 由于 $x^0 \in \partial\{u > 0\}$ 和 u_m 在 $W^{1,2\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 中弱收敛到 u_∞，假设反证 $M_{x^0,u^-}(0^+) = 0$。注意，对于任意 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u^- \Delta\varphi dx = \int_{\Omega\cap\{u<0\}} \Delta u^- \varphi dx + \int_{\Omega\cap\partial\{u<0\}} \left(u^- \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \varphi\frac{\partial u^-}{\partial\nu}\right) dS,$$

这意味着

$$\int_\Omega u^- \Delta\varphi dx = \int_{\Omega\cap\partial\{u<0\}} \varphi \left|\nabla u^-\right| dS.$$

应用自由边界条件

$$\left|\nabla u^-\right|^2 = x_2^0 - x_2 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{op}}^- \quad \text{and} \quad \left|\nabla u^-\right|^2 = \left|\nabla u^+\right|^2 + x_2^0 - x_2 \geqslant x_2^0 - x_2 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{tp}}$$

对于爆破序列 u_m ，得到

$$\left|\nabla u_m^-\right|^2 = \frac{1}{r_m}\left|\nabla u^-(x^0 + r_m x)\right|^2 \geqslant \frac{1}{r_m}(-r_m x_2) = -x_2 \quad \text{on } \partial_{\mathrm{red}}\{u_m < 0\},$$

其中 $\partial_{\mathrm{red}}\{u_m<0\}$ 表示 $\partial\{u_m<0\}$ 的约化边界。

因此，在测度意义下取极限，并利用 $|\nabla u_m^-|$ 的下界，如果 Δu_m^- 的极限测度消失，即出现矛盾，

$$0 \leftarrow \Delta u_m^-(B_1) \geqslant \int_{B_1\cap\partial_{\mathrm{red}}\{u_m<0\}} \sqrt{-x_2} > 0 \quad \text{as } m\to\infty,$$

其中， B_1 是 $\mathbb{R}^2$ 中的单位球， $\Delta u_m^-(B_1)$ 是 B_1 中的非负拉东测度（见 [22]）。

事实上，根据最大值原理，至少存在一个 V_m 的连通分支 $\{u_m<0\}$ 与原点接触，并包含点 $x^m\in\partial A$，其中 $A=(-1,\ 1)\times(-1,\ 0)$。考虑以下两种可能性

$$\max\{-x_2\,|\,x\in V_m\cap\partial A\}\nrightarrow 0 \quad \text{as } m\to\infty,$$

and

$$\max\{-x_2\,|\,x\in V_m\cap\partial A\}\to 0 \quad \text{as } m\to\infty.$$

注意到

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta u_m^-\left(V_m\cap A\right)\\
&= \int_{\partial V_m\cap A}\left(\nabla u_m^-,\nu\right)dS + \int_{V_m\cap\partial A}\left(\nabla u_m^-,\nu\right)dS\\
&\leqslant \int_{\partial V_m\cap A} -\left|\nabla u_m^-\right|dS + \int_{V_m\cap\partial A}\left|\nabla u_m^-\right|dS\\
&\leqslant \int_{\partial V_m\cap A} -\sqrt{-x_2}dS + \int_{V_m\cap\partial A}\sqrt{-x_2}dS.
\end{aligned}$$

通过分析这两种情形即可完成证明；根据与 [34] 中引理 4.4 的证明平行的论证，每种情形都会导致矛盾。 □

为完成定理 1 中情形 1.1 的证明，我们引入一种强有力的工具，即所谓的频率公式，它将使我们能够证明该情形

$$M_{x^0,u^-}(0^+) = \int_{B_r(x^0)}\left(x_2^0-x_2\right)^+dx = \int_{B_1}(-x_2)^+dx = \int_0^1\int_{-\pi}^0 -\rho^2\sin\theta d\theta d\rho = \frac{2}{3}.$$

是不可能的。

定义 3.1。 设 u 是方程 (1.15) 的弱解。定义集合

$$\Sigma^u = \left\{x\in\partial\{u<0\}\,\middle|\, x_2=x_2^0,\ \left|\nabla u^-(x)\right|=0 \text{ and } M_{x^0,u^-}(0^+)=\frac{2}{3}\right\}.$$

注记 3.1。 根据 [34], 中的注记 6.2，映射$x\longmapsto M_{x,\ u^-}(0^+)$是上半连续的，这意味着集合 Σ^u 是闭的。

Th定理 3.4。 设 x^0 是 Σ^u 中的一个点，并令 $\delta = \frac{1}{2}dist\left(x^0, \partial\Omega\right)$。定义函数 s

$$D_{x^0,u^-}(r) = \frac{r\int_{B_r(x^0)}\left|\nabla u^-\right|^2 dx}{\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^-\right)^2 dS},$$

and

$$V_{x^0,u^-}(r) = \frac{r\int_{B_r(x^0)}\left(x_2^0 - x_2\right)^+\left(1-\chi_{\{u<0\}}\right)dx}{\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^-\right)^2 dS}.$$

那么，“频率”

$$H_{x^0,u^-}(r) = D_{x^0,u^-}(r) - V_{x^0,u^-}(r) = \frac{r\int_{B_r(x^0)}\left|\nabla u^-\right|^2 dx}{\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^-\right)^2 dS} - \frac{r\int_{B_r(x^0)}\left(x_2^0 - x_2\right)^+\left(1-\chi_{\{u<0\}}\right)dx}{\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^-\right)^2 dS},$$

满足

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}H_{x^0,u^-}(r) =& \frac{2}{r}\int_{\partial B_r(x^0)}\left(\frac{r\left(\nabla u^-,\nu\right)}{\left(\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^-\right)^2 dS\right)^{1/2}} - D_{x^0,u^-}(r)\frac{u^-}{\left(\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^-\right)^2 dS\right)^{1/2}}\right)^2 dS \\ &+ \frac{2}{r}\left(D_{x^0,u^-}(r)V_{x^0,u^-}(r) - \frac{3}{2}V_{x^0,u^-}(r)\right),\end{aligned} \tag{3.6}$$

对几乎处处的 $r \in (0,\ \delta)$。

证明。定义

$$\tilde{I}(r) = r^{-3}\int_{B_r(x^0)}\left(\left|\nabla u^-\right|^2 + \left(x_2^0 - x_2\right)^+\chi_{\{u<0\}}\right)dx,$$

and

$$\tilde{J}(r) = r^{-4}\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^-\right)^2 dS.$$

重复命题 2.2 中的计算，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\tilde{I}(r) =& -3r^{-4}\int_{B_r(x^0)}\left(\left|\nabla u^-\right|^2 + \left(x_2^0 - x_2\right)^+\chi_{\{u<0\}}\right)dx \\ &+ r^{-3}\left(2\int_{\partial B_r(x^0)}\left(\nabla u^-,\nu\right)^2 dS + \frac{3}{r}\int_{B_r(x^0)}\left(x_2^0 - x_2\right)^+\chi_{\{u<0\}}dx\right) \\ =& 2r^{-3}\int_{\partial B_r(x^0)}\left(\nabla u^-,\nu\right)^2 dS - 3r^{-4}\int_{\partial B_r(x^0)}u^-\left(\nabla u^-,\nu\right)dS,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\tilde{J}(r) =& -4r^{-5}\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^-\right)^2 dS + r^{-4}\left(\frac{1}{r}\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^-\right)^2 dS + 2\int_{\partial B_r(x^0)}u^-\left(\nabla u^-,\nu\right)dS\right) \\ =& -3r^{-5}\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^-\right)^2 dS + 2r^{-4}\int_{\partial B_r(x^0)}u^-\left(\nabla u^-,\nu\right)dS.\end{aligned}$$

因此，对于几乎处处的 $r \in (0,\ \delta)$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dr} H_{x^0,u^-}(r) \\
=&\frac{\frac{d}{dr}\tilde{I}(r)}{\tilde{J}(r)} - \frac{\left(\tilde{I}(r) - \int_{B_1} (-x_2)^+ \, dx\right) \frac{d}{dr}\tilde{J}(r)}{\tilde{J}^2(r)} \\
=&\frac{2\int_{\partial B_r(x^0)} (\nabla u^-, \nu)^2 \, dS - 3r \int_{\partial B_r(x^0)} u^- (\nabla u^-, \nu) \, dS}{r \int_{\partial B_r(x^0)} (u^-)^2 \, dS} \\
&- \left(D_{x^0,u^-}(r) - V_{x^0,u^-}(r)\right) \frac{-3r \int_{\partial B_r(x^0)} (u^-)^2 \, dS + 2\int_{\partial B_r(x^0)} u^- (\nabla u^-, \nu) \, dS}{r \int_{\partial B_r(x^0)} (u^-)^2 \, dS} \\
=&\frac{2}{r}\left(\frac{r^2 \int_{\partial B_r(x^0)} (\nabla u^-, \nu)^2 \, dS}{\int_{\partial B_r(x^0)} (u^-)^2 \, dS} - \frac{3}{2} D_{x^0,u^-}(r)\right) - \frac{2}{r}\left(D_{x^0,u^-}(r) - V_{x^0,u^-}(r)\right)\left(D_{x^0,u^-}(r) - \frac{3}{2}\right),
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

其中，最后一个方程用到了恒等式

$$
D_{x^0,u^-}(r) = \frac{r \int_{\partial B_r(x^0)} u^- (\nabla u^-, \nu) \, dS}{\int_{\partial B_r(x^0)} (u^-)^2 \, dS}. \tag{3.8}
$$

将 (3.8) 和关系 $D_{x^0,\ u^-}(r) = H_{x^0,\ u^-}(r) + V_{x^0,\ u^-}(r)$ 代入 (3.7)，得到 (3.6)。 □

注 3.2. 根据 $D_{x^0,\ u^-}(r) = H_{x^0,\ u^-}(r) + V_{x^0,\ u^-}(r)$，容易验证

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dr} H_{x^0,u^-}(r) =& \frac{2}{r} \int_{\partial B_r(x^0)} \left(\frac{r (\nabla u^-, \nu)}{\left(\int_{\partial B_r(x^0)} (u^-)^2 \, dS\right)^{1/2}} - H_{x^0,u^-}(r) \frac{u^-}{\left(\int_{\partial B_r(x^0)} (u^-)^2 \, dS\right)^{1/2}} \right)^2 dS \\
&+ \frac{2}{r} V_{x^0,u^-}(r) \left(H_{x^0,u^-}(r) - \frac{3}{2}\right),
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

对于几乎处处的 $r \in (0,$
$\delta)$。

接下来，我们将建立 $H_{x^0,\ u^-}(r)$ 的若干关键性质。

命题 3.5。 设 u 是满足定理 *1* 中假设的(1.15) 弱解，其中 $x^0 \in \Sigma^u$ 和 $\delta = \frac{1}{2} dist\ \left(x^0, \partial\Omega\right)$。那么，当 $r \in (0, \delta)$ 充分小时，以下结论成立。

(1) $\frac{d}{dr} H_{x^0,u^-}(r) \geqslant \frac{2}{r}\left(V_{x^0,u^-}(r)\right)^2$。*(2)* 极限 $\lim_{r \to 0^+} H_{x^0,u^-}(r)$ $= H_{x^0,u^-}(0^+)$ 存在。*(3)* 函数 $r \longmapsto \frac{2}{r}\left(V_{x^0,u^-}(r)\right)^2$ 在 $(0, \delta)$ 上可积。*(4)* 函数 $r \longmapsto r^{-4} \int_{\partial B_r(x^0)} (u^-)^2 \, dS$ 单调不减。

(5) 函数 $r \longmapsto r^{-4}\int_{B_r(x^0)}\left(x_2^0-x_2\right)^+\left(1-\chi_{\{u<0\}}\right)dx$ 在 $(0,\delta)$ 上可积。

证明。 （1）由命题 2.2 可得

$$M_{x^0,u^-}(r)=r^{-3}\int_{B_r(x^0)}\left(\left|\nabla u^-\right|^2+\left(x_2^0-x_2\right)^+\chi_{\{u<0\}}\right)dx-\frac{3}{2}\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^-\right)^2dS,$$

and

$$\frac{d}{dr}M_{x^0,u^-}(r)=2r^{-3}\int_{\partial B_r(x^0)}\left(\left(\nabla u^-,\nu\right)-\frac{3}{2r}\right)^2dS.$$

由于

$$M_{x^0,u^-}(r)-M_{x^0,u^-}(0^+)=\int_0^r\frac{d}{dr}M_{x^0,u^-}(s)ds\geqslant 0,$$

两边乘以 $r^4/\int_{\partial B_r(x^0)}(u^-)^2dS$ 可得

$$\frac{r\int_{B_r(x^0)}\left|\nabla u^-\right|^2dx}{\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^-\right)^2dS}-\frac{r\int_{B_r(x^0)}\left(x_2^0-x_2\right)^+\left(1-\chi_{\{u<0\}}\right)dx}{\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^-\right)^2dS}-\frac{3}{2}\geqslant 0, \tag{3.10}$$

这等价于 $H_{x^0,u^-}(r)=D_{x^0,u^-}(r)-V_{x^0,u^-}(r)\geqslant\frac{3}{2}$。

现在，由（3.6）和（3.10）可得

$$\frac{d}{dr}H_{x^0,u^-}(r)\geqslant\frac{2}{r}V_{x^0,u^-}(r)\left(D_{x^0,u^-}(r)-\frac{3}{2}\right)\geqslant\frac{2}{r}\left(V_{x^0,u^-}(r)\right)^2. \tag{3.11}$$

(2) 结合 (1) 中的单调性 $\frac{d}{dr}H_{x^0,u^-}(r)\geqslant 0$ 以及 $H_{x^0,u^-}(r)\geqslant\frac{3}{2}$，易于证明极限 $H_{x^0,u^-}(0^+)$ 存在。

(3) 根据 (3.11)，$r\longmapsto\frac{2}{r}\left(V_{x^0,u^-}(r)\right)^2$ 在 $(0,\delta)$ 上的可积性等价于 $\frac{d}{dr}H_{x^0,u^-}(r)$ 的可积性，因为

$$\int_0^\delta\frac{2}{r}\left(V_{x^0,u^-}(r)\right)^2dr\leqslant\int_0^\delta\frac{d}{dr}H_{x^0,u^-}(r)dr<\infty.$$

这个不等式也证明了极限 $H_{x^0,u^-}(0^+)$ 的存在性，从而完成了 (2) 的证明。

(4) 证明与 [34] 中的推论 7.4 类似，此处省略。

(5) 只需证明

$$\frac{d}{dr}\left(r^{-4}\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^-\right)^2dS\right)\geqslant 0.$$

事实上，利用 $M_{x^0,u^-}(r)\geqslant M_{x^0,u^-}(0^+)$，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\left(r^{-4}\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^-\right)^2dS\right)&=2r^{-5}\left(r\int_{B_r(x^0)}\left|\nabla u^-\right|^2dx-\frac{3}{2}\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^-\right)^2dS\right)\\&\geqslant 2r^{-5}\left(r\int_{B_r(x^0)}\left(x_2^0-x_2\right)^+\left(1-\chi_{\{u<0\}}\right)dx\right)\geqslant 0.\end{aligned} \tag{3.12}$$

(6) 考虑

$$u_m^- = \frac{u^-(x^0 + r_m x)}{r_m^{3/2}},$$

并观察到

$$\begin{aligned}\lim_{r_m\to 0^+} r_m^{-4}\int_{\partial B_{r_m}(x^0)} \left(u^-\right)^2 dS &= \lim_{r_m\to 0^+} r_m^{-4}\int_{\partial B_1} \left(u^-\left(x^0 + r_m y\right)\right)^2 r_m dS \\ &= \lim_{r_m\to 0^+}\int_{\partial B_1}\left(u_m^-\right)^2 dS \\ &= \int_{\partial B_1}\left(u_\infty^-\right)^2 dS = 0,\end{aligned}$$

当 $x^0 \in \Sigma^u$ 时。结合 (3.12)，我们推得

$$\int_0^\delta t^{-4}\int_{B_t(x^0)}\left(x_2^0 - x_2\right)^+\left(1 - \chi_{\{u<0\}}\right) dxdt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^\delta \frac{d}{dt}\left(t^{-4}\int_{\partial B_t(x^0)}\left(u^-\right)^2 dS\right) dt < \infty,$$

因为 $r^{-4}\int_{\partial B_r(x^0)}(u^-)^2\, dS$ 在 $r \to 0^+$ 时有界。

□

基于已建立的框架，我们现在证明频率公式可以取极限。

命题 3.6。 设 u 是满足 $x^0 \in \Sigma^u$ 的 (1.15) 的弱解。那么

(1) 这些极限

$$\lim_{r\to 0^+} V_{x^0,u^-}(r) = 0 \quad and \quad \lim_{r\to 0^+} D_{x^0,u^-}(r) = H_{x^0,u^-}(0^+) \quad exist.$$

(2) 对于任意序列 $r_m \to 0^+$，当 $m \to \infty$ 时，爆破序列

$$v_m(x) = \frac{u^-\left(x^0 + r_m x\right)}{\sqrt{r_m^{-1}\int_{\partial B_{r_m}(x^0)}\left(u^-\right)^2 dS}} \tag{3.13}$$

在 $W^{1,2}(B_1)$ 中有界。

(3) 对于任意序列 $r_m \to 0^+$，当 $m \to \infty$ 且满足 (3.13) 中的 v_m 在 $W^{1,2}(B_1)$ 中弱收敛到爆破极限 w，并且函数 w 是次数为 $H_{x^0,u^-}(0^+)$ 的齐次函数时，它满足

$$w \leqslant 0 \quad in\ B_1, \quad w \equiv 0 \quad in\ B_1 \cap \{x_2 \geqslant 0\} \quad and \quad \int_{\partial B_1} w^2 dS = 1.$$

证明。 证明依赖于一个关键估计

$$\int_{B_\sigma \setminus B_\rho} 2|x|^{-5}\left((\nabla v_m, x) - H_{x^0,u^-}(0^+)v_m\right)^2 dx \to 0, \tag{3.14}$$

对于任意序列 $r_m \to 0$，当 $m \to \infty$ 时以及 $0 < \rho < \sigma < 1$。

确实 d，对 (3.9) 关于 r 从 $r_m\rho$ 到 $r_m\sigma$ 积分，并利用 (3.10) 可得

$$\int_{r_m\rho}^{r_m\sigma}\frac{2}{r}\int_{\partial B_r(x^0)}\left(\frac{r\left(\nabla u^-,\nu\right)}{\left(\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^-\right)^2dS\right)^{1/2}}-H_{x^0,u^-}(r)\frac{u^-}{\left(\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^-\right)^2dS\right)^{1/2}}\right)^2dSdr$$

$$=\int_{\rho}^{\sigma}\frac{2}{s}\int_{\partial B_s}\left(\frac{s\left(\nabla v_m,\nu\right)}{\left(\int_{\partial B_s}\left(v_m\right)^2dS\right)^{1/2}}-H_{x^0,u^-}(r_ms)\frac{v_m}{\left(\int_{\partial B_s}\left(v_m\right)^2dS\right)^{1/2}}\right)^2dSds$$

$$\leqslant\int_{r_m\rho}^{r_m\sigma}\frac{d}{dr}H_{x^0,u^-}(r)dr\to 0,\qquad \text{as } m\to\infty.$$

由命题 3.5 中的 (4)，可得

$$\int_{\partial B_s}(v_m)^2\,dS=\frac{\int_{\partial B_{r_ms}(x^0)}\left(u^-\right)^2dS}{\int_{\partial B_{r_m}(x^0)}\left(u^-\right)^2dS}=\frac{(r_ms)^{-4}\int_{\partial B_{r_ms}(x^0)}\left(u^-\right)^2dS}{r_m^{-4}\int_{\partial B_{r_m}(x^0)}\left(u^-\right)^2dS}\,s^4\leqslant s^4,$$

这证明了 (3.14)。

由命题 3.5 中的 (2)，我们首先注意到，$V_{x^0,u^-}(0^+)$ 的存在性等价于$D_{x^0,u^-}(0^+)$ 的存在性。

为证明 $\lim_{r\to0^+}V_{x^0,u^-}(r)=0$，反设存在一个序列 $s_m\to0$，使得 $V_{x^0,u^-}(s_m)$ 与 0 的距离有正下界。应用命题 3.5 中的 (3)，得到

$$\min_{r\in[s_m,2s_m]}V_{x^0,u^-}(r)\to0\quad\text{as } m\to\infty.$$

选择 $r_m\in[s_m,2s_m]$ 使得 $V_{x^0,\,u^-}(r_m)\to0$ 当 $m\to\infty$时。注意

$$D_{x^0,u^-}(r_m)=\frac{r_m\int_{B_{r_m}(x^0)}\left|\nabla u^-\right|^2dx}{\int_{\partial B_{r_m}(x^0)}\left(u^-\right)^2dS}=\int_{B_1}\left|\nabla v_m\right|^2dx.$$

令 $m\to\infty$ 并取极限，可得$D_{x^0,\,u^-}(r_m)$ 有界。与 [34]−[36] 中相同的论证表明 $v_m\in W^{1,\,2}(B_1)$，从而完成了 (2) 的证明。

此外，令 w 为 v_m 的弱极限。由紧嵌入 $W^{1,\,2}\hookrightarrow L^2(\partial B_1)$，可得$\|v_m\|_{L^2(\partial B_1)}\to\|w\|_{L^2(\partial B_1)}=1$ 当 $m\to\infty$时。 w 的齐次度由 (3.14) 得出。此外，由于 $u\leqslant0$ 属于 $B_{r_m}(x^0)$ 且 $u\geqslant0$ 属于 $B_{r_m}(x^0)\cap\{x_2\geqslant x_2^0\}$，我们得出 $w\leqslant0$ 属于 B_1 且 $w\equiv0$ 属于 $B_1\cap\{x_2\geqslant0\}$。由此完成了陈述 (3) 的证明。

最后，根据命题 3.5 的第（5）部分，对于 $s_m\leqslant r_m\leqslant2s_m$，我们有

$$\begin{aligned}V_{x^0,u^-}(s_m)&\leqslant\frac{s_m\int_{B_{r_m}(x^0)}\left(x_2^0-x_2\right)^+\left(1-\chi_{\{u<0\}}\right)dx}{\int_{\partial B_{r_m/2}(x^0)}\left(u^-\right)^2dS}\\&\leqslant\frac{r_m\int_{B_{r_m}(x^0)}\left(x_2^0-x_2\right)^+\left(1-\chi_{\{u<0\}}\right)dx}{\int_{\partial B_{1/2}}\left(v_m\right)^2dS\int_{\partial B_{r_m/2}(x^0)}\left(u^-\right)^2dS}\\&\leqslant\frac{V_{x^0,u^-}(r_m)}{\int_{\partial B_{1/2}}\left(v_m\right)^2dS}.\end{aligned}\tag{3.15}$$

由 w 和 $\int_{\partial B_1} w^2 = 1$ 的齐次性，存在一个满足下式的子序列

$$\int_{\partial B_{1/2}} (v_m)^2 \, dS \to \int_{\partial B_{1/2}} w^2 dS > 0.$$

因此，(3.15) 与我们的假设矛盾，这意味着 $\lim_{r\to 0^+} V_{x^0,\ u^-}(r) = 0$。 □

为进行后续的爆破分析，我们引入以下二维集中紧性结论，它保证我们的爆破序列强收敛。此处省略证明，详情请参阅 [23] 和 [34] 。

命题 3.7. 设 u 是 (1.15) 的一个弱解，满足定理 *1* 中关于 $x^0 \in \Sigma^u$ 的假设。设 $r_m \to 0^+$ 使得在(3.13) 中定义的序列 v_m 在 $W^{1,\ 2}(B_1)$ 中弱收敛到 w 。那么

(1) v_m 在 $W^{1,\ 2\,\mathrm{loc}}(B_1\backslash\{O\})$ 中强收敛到 w，其中 $O = (0,\ 0)$。
(2) w 在 B_1 中连续。(3) $\Delta w \geqslant 0$ 在 B_1 中。(4) $w\Delta w = 0$ 在 B_1 上以拉东测度的意义收敛。

现在推导爆破极限 w 的显式形式。

命题 3.8。 设 u 是满足定理 *1* 中假设的 (1.15) 的弱解。那么在每一点 $x^0 \in \Sigma^u$ ，存在一个整数 $N_0 \geqslant 2$ ，使得 $H_{x^0,\ u^-}(0^+) = N_0$，且

$$\frac{u^-(x^0 + r_m x)}{\sqrt{r_m^{-1} \int_{\partial B_{r_m}(x^0)} (u^-)^2 \, dS}} \to w(\rho, \theta)$$

在 $W^{1,2\,\mathrm{loc}}(B_1\backslash\{O\})$ 中强收敛，并在 $W^{1,2}(B_1)$ 中弱收敛，当 $r \to 0^+$ 时，其中

$$w(\rho,\theta) = \begin{cases} -\frac{\rho^{N_0}|\sin(N_0\,\theta)|}{\sqrt{\left|\int_{-\pi}^{0}(\sin(N_0\,\theta))^2 d\theta\right|}}, & \theta \in (-\pi, 0)\,, \\ 0, & otherwise, \end{cases}$$

和 $x = (\rho\cos\,\theta,\ \ \rho\sin\,\theta)$。

证明。 设 $r_m \to 0^+$ 是任意序列，使得在 (3.13) 中定义的 v_m 在 $W^{1,2}(B_1)$ 中弱收敛到 w。令 $N_0 = H_{x^0,u^-}(0^+)$，下面将证明 N_0 是一个整数。根据命题 3.6 (3) 和命题 3.7，我们有 $N_0 \geqslant \frac{3}{2}$ 和 $\Delta w = 0$ 属于 $B_1 \cap \{w < 0\}$。此外，

$$w(\rho,\theta) = \begin{cases} -C\rho^{N_0}\left|\sin\left(N_0\theta + \varphi_-\right)\right|, & \theta \in (\theta_1, \theta_2)\,, \\ 0, & \theta \notin (\theta_1, \theta_2)\,, \end{cases} \tag{3.16}$$

其中 $\theta_1 < \theta_2$ 且条件 $\int_{\partial B_1} w^2 dS = 1$ 意味着

$$C = \frac{1}{\sqrt{\left|\int_{-\pi}^{0}\left(\sin\left(N_0\theta + \varphi_-\right)\right)^2 d\theta\right|}}.$$

接下来我们断言

$$\theta_1 = -\pi \quad \text{and} \quad \theta_2 = 0.$$

反设 $-\pi < \theta_1 < 0$。不失一般性，取$y_0 = (r_0 \cos\,\theta_1,\ r_0 \sin\,\theta_1)$ 以及 $r_m = \frac{1}{2} r_0 \sin\,\theta_1$，使得 $B_{r_m}(y^0) \cap \{x_2 = 0\} = \varnothing$。由于$u_\infty \equiv 0$，我们可以推导出

$$\Delta u_m^-(B_{r_m}(y^0)) \to 0 \quad \text{as } r_m \to 0^+. \tag{3.17}$$

然而，关于连通分支的假设意味着，$\partial_{red}\{u\left(x^0 + r_m x\right) < 0\}$包含一条连续曲线，当 $r_m \to 0^+$时，其像在 $\{x_2 < 0\}$ 中局部收敛于半直线 $\{\beta x \,|\, \beta > 0,\ x_2 < 0\}$。因此，

$$\Delta u_m^-(B_{r_m}(y^0)) = \int_{B_{r_m}(y^0)\cap\partial\{u_m<0\}} \left|\nabla u_m^-\right| dS \geqslant \int_{B_{r_m}(y^0)\cap\partial_{\mathrm{red}}\{u_m<0\}} \sqrt{-x_2} dS > 0,$$

这与（3.17）矛盾。因此，我们可以得到 $\theta_1 = -\pi$ 和 $\theta_2 = 0$。

由于 $w = 0$ 属于 $B_1 \cap \{x_2 \geqslant 0\}$ 且 w 在 B_1中连续，由（3.16）可知$H_{x^0,\ u^-}(0^+)$ 是一个整数，并且 $N_0 \geqslant 2$。因此，

$$w(\rho,\theta) = \begin{cases} -\frac{\rho^{N_0}|\sin(N_0\,\theta)|}{\sqrt{\left|\int_{-\pi}^{0}(\sin(N_0\,\theta))^2 d\theta\right|}}, & \theta \in (-\pi, 0)\,, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

□

命题 3.9。设 u 是满足定理 *1* 中假设的 (1.15) 的一个弱解。那么 Σ^u 在 Ω 中局部为有限集。

证明。假设结论不成立。存在 $x^m \in \Sigma^u$ 收敛于 $x^0 \in \Omega$，其中 $x^m \neq x^0$对所有 m均成立。由注 3.1 可知 Σ^u 是闭的，因此有 $x^0 \in \Sigma^u$。令 $r_m = 2\left|x^m - x^0\right|$ 和$y = \frac{x^m - x^0}{r_m}$。利用事实 (3.13)，并注意到

$$\frac{u_m^-(y + rx)}{r^{\frac{3}{2}}} = \frac{u^-(x^0 + r_m(y + rx))}{r^{\frac{3}{2}} r_m^{\frac{3}{2}}} = \frac{u^-(x^m + r_m r x)}{(r r_m)^{\frac{3}{2}}} \to 0 \quad \text{as } m \to \infty,$$

我们得出，对于任意 $m \in \mathbb{N}$，都有 $y \in \Sigma^{u_m}$。

现在，由于 $H_{x^0,\ u^-}(r) \geqslant -\frac{3}{2}$ 且 $V_{x^0,\ u^-}(r) \geqslant 0$，由 $y \in \Sigma^{u_m}$ 可得

$$r \int_{B_r(y)} |\nabla v_m|^2 dx \geqslant \frac{3}{2} \int_{\partial B_r(y)} (v_m)^2 dS \quad \text{for all } r \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

根据命题 3.7 并取极限，得到

$$r \int_{B_r(y)} |\nabla w|^2 dx \geqslant \frac{3}{2} \int_{\partial B_r(y)} w^2 dS \quad \text{for all } r \in \left(0, \frac{1}{4}\right). \tag{3.18}$$

另一方面，由泰勒公式可知

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r\int_{B_r(y)} |\nabla w|^2 dx}{\int_{\partial B_r(y)} w^2 dS} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r\int_{\partial B_r(y)} w\,(\nabla w, r\nu)\, dS}{\int_{\partial B_r(y)} w^2 dS} = 1,$$

这与（3.18）矛盾。 □

最后，我们完成情形 1.1 中 $M_{x^0,\ u^-}(0^+) \neq \frac{2}{3}$ 的证明。

定理 3.10。 设 u 是满足定理 *1* 中假设的 *(1.15)* 的弱解，则 Σ^u 为空。

证明。 反设存在矛盾，即 $\Sigma^u \neq \varnothing$，且存在一点 $x^0 \in \Sigma^u$。根据命题 3.8，当 $r \to 0^+$

$$\frac{u^-(x^0+r_m x)}{\sqrt{r_m^{-1}\int_{\partial B_{r_m}(x^0)}(u^-)^2\,dS}} \to w(\rho,\theta) = \begin{cases} -\frac{\rho^{N_0}|\sin(N_0\,\theta)|}{\sqrt{\left|\int_{-\pi}^0(\sin(N_0\,\theta))^2 d\theta\right|}}, & \theta \in (-\pi, 0)\,, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

在 $W^{1,\ 2\,\mathrm{loc}}(B_1\backslash\{O\})$ 中强收敛，并在 $W^{1,\ 2}(B_1)$ 中弱收敛，其中 $x = (\rho\cos\,\theta,\ \rho\sin\,\theta)$。

事实上，$N_0 \geqslant 2$ 意味着存在 θ，使得 $w(x) = 0$ 在 $\{\theta r_m \,|\, r_m > 0\}$ 上。然而，由于 $x^0 \in \Sigma^u$，对于任意 $\tilde{B} \subset\subset B_1 \cap \{x_2 < 0\}$，当 r_m 足够小时，我们有 $v_m < 0$ 在 $\tilde{B}$ 中。因此，我们可以选择 B，使得 $B \cap \{\theta r_m \,|\, r_m > 0\} \neq \varnothing$。

与定理 3.3 的证明类似，我们得到

$$0 \leftarrow \Delta u_m^-(\tilde{B}) \geqslant \int_{\tilde{B}\cap\partial_{red}\{u(x^0+r_m x)<0\}} \sqrt{-x_2}\,dS > 0,$$

这就产生了矛盾。 □

3.2. **情形 1.2 的可能奇异渐近行为**。

在本小节中，我们分析情形 1.2 的爆破极限。考虑重缩放函数

$$u_m = \frac{u\left(x^0 + r_m x\right)}{r_m^{3/2}}.$$

满足

$$C_1\left|x - x^0\right| \leqslant \left|\nabla u^+\right|^2 \leqslant C_2\left|x - x^0\right| \quad \text{in } B_{r_m}\left(x^0\right) \cap \{u > 0\}, \tag{3.19}$$

对某个 $0 < C_1 < C_2$ 成立。注意，爆破极限 u_∞^- 非平凡，即 $u_\infty^- \neq 0$。这可由以下估计得到

$$\begin{aligned} \left|\nabla u_m^-\right|^2 =& \frac{1}{r_m}\left|\nabla u^-(r_m x + x^0)\right|^2 \\ \geqslant& -\frac{1}{r_m} r_m x_2 = -x_2 > 0 \qquad \text{on } \partial\{u_m < 0\} \cap \{x_2 < 0\}, \end{aligned}$$

这确保了频率公式和定理 3.3 在情形 1.2 中仍然适用。

在此情况下，$u_\infty^+ \not\equiv 0$ 至关重要。否则，分类 (3.19) 得出

$$\left|\nabla u_m^+\right|^2 = \left|\frac{\nabla u^+(x^0 + r_m x)}{r^{1/2}}\right|^2 \geqslant \frac{C_1 r|x|}{r} = C_1|x|.$$

结合 u_m 到 u_∞ 在 $W^{1,\,2\,\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^2\right)$ 中的强收敛，可得

$$\int_A \left|\nabla u_\infty^+\right|^2 dx \leftarrow \int_A \left|\nabla u_m^+\right|^2 dx \geqslant \int_{A\cap\{u_m>0\}} C_1|x|dx \geqslant C\rho > 0,$$

其中 $A=\left\{x\in\mathbb{R}^2\,|\,|x|\geqslant\rho>0\right\}$，这与 $u_\infty^+=0$ 矛盾。

T证明的其余部分与情形 1.1 的证明基本相同，从而得到渐近 ic

$$u_\infty^-(x)=U_\infty^-(\rho,\theta)=C_-\rho^{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{3}{2}\theta+\varphi_-\right)\quad \text{in } \{u_\infty<0\}.$$

同样，根据命题 2.4，我们也有

$$u_\infty^+(x)=U_\infty^+(\rho,\theta)=C_+\rho^{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{3}{2}\theta+\varphi_+\right)\quad \text{in } \{u_\infty>0\}.$$

To 为完成定理 1 中情形 1.2 的证明，我们继续明确确定 u_∞ y.

首先，我们推导 u_∞ 的自由边界条件。按照情形 1.1 中的论证，令 $z=(\rho\cos\theta_1,\ \rho\sin\theta_1)\in\partial\{u_\infty<0\}\backslash\{O\}$，并选取足够小的 $\delta>0$，使得 $B_\delta(z)\subset\{x_2<0\}$。由于 $\partial\{u_\infty<0\}$ 的法向量在 $\partial\{u_\infty<0\}\cap B_\delta(z)$ 上为常值 $\nu(z)$，我们将测试函数 $\phi(x)=\eta(x)\nu(z)$ 替换为任意的 $\eta\in C_0^1(B_\delta(z)\ \mathbb{R}^2)$，代入 (3.3)，并进行分部积分。这将得到以下两种可能。

(1) $z\in\partial\{u_\infty<0\}\cap\partial\{u_\infty>0\}$.

$$\begin{aligned}
0&=\int_{B_\delta(z)}\left(|\nabla u_\infty|^2\operatorname{div}\phi-2\nabla u_\infty D\phi\nabla u_\infty-x_2\chi_-\operatorname{div}\phi-\chi_-\phi_2\right)dx\\
&=\int_{B_\delta(z)\cap\{u_\infty\geqslant 0\}}\left(\operatorname{div}\left(\left|\nabla u_\infty^+\right|^2\phi-2\left(\phi,\nabla u_\infty^+\right)\nabla u_\infty^+\right)+\operatorname{div}\left(-x_2\phi\right)\chi_-\right)dx\\
&\quad+\int_{B_\delta(z)\cap\{u_\infty<0\}}\left(\operatorname{div}\left(\left|\nabla u_\infty^-\right|^2\phi-2\left(\phi,\nabla u_\infty^-\right)\nabla u_\infty^-\right)+\operatorname{div}\left(-x_2\phi\right)\right)dx\\
&=\int_{B_\delta(z)\cap\partial\{u_\infty<0\}\cap\partial\{u_\infty>0\}}\left(-\left(\left|\nabla u_\infty^-\right|^2-\left|\nabla u_\infty^+\right|^2\right)-x_2\left(1-\chi_-\right)\right)(\eta,\nu)\,dS.
\end{aligned}$$

注意，χ_- 是$\chi_{\{u_m<0\}}$ 和 $\chi_-\in\{0,1\}$的强 L^1_{loc} 极限。若 $\chi_-=1$，则有 e

$$\left|\nabla u_\infty^-\right|^2-\left|\nabla u_\infty^+\right|^2=0\quad\text{on }\partial\{u_\infty<0\}\cap\partial\{u_\infty>0\}\cap B_\delta(y).$$

在极坐标下，这变为

$$\frac{9}{4}C_+^2\rho=\left|\nabla u_\infty^+\right|^2=\left|\nabla u_\infty^-\right|^2=\frac{9}{4}C_-^2\rho,$$

这意味着 $C_+=C_-$。另一方面，由

$$\lim_{\tau\to\theta_1+}\partial_\theta\left(1,\tau\right)=-\lim_{\tau\to\theta_1-}\partial_\theta\left(1,\tau\right).$$

我们得到

$$\sin\left(\frac{3}{2}\theta_1+\varphi_+\right)+\sin\left(\frac{3}{2}\theta_1+\varphi_-\right)=2\sin\left(\frac{3}{2}\theta_1+\frac{\varphi_++\varphi_-}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_+-\varphi_-}{2}\right)=0.\quad(3.20)$$

然而，由于 $U_\infty^-(\rho,\ \theta_1) = U_\infty^+(\rho,\ \theta_1) = 0$，我们有（见图 11 (1)）

$$\frac{3}{2}\theta_1 + \varphi_+ = \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi, \quad \frac{3}{2}\theta_1 + \varphi_- = -\frac{3\pi}{2} + 2k_2\pi,$$

或（见图 11（2））

$$\frac{3}{2}\theta_1 + \varphi_+ = -\frac{\pi}{2} + 2k_3\pi, \quad \frac{3}{2}\theta_1 + \varphi_- = -\frac{\pi}{2} + 2k_4\pi,$$

其中 $k_i \in \mathbb{Z}$ 对于 $i \in \{1,2,3,4\}$。

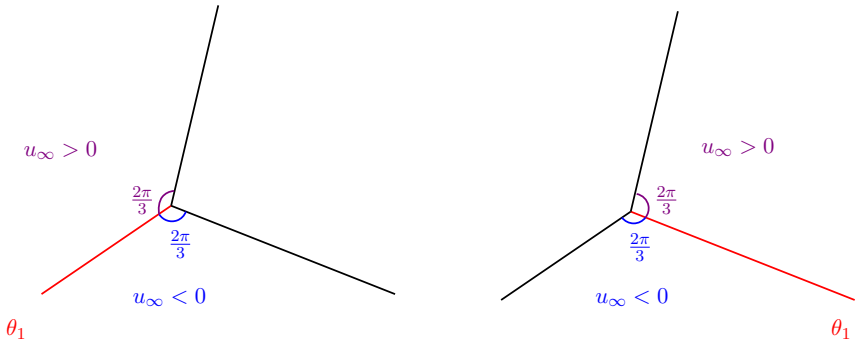


FIGURE 11. 可能的情形

因此，

$$\sin\left(\frac{3}{2}\theta_1 + \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}\right) \neq 0 \quad \text{and} \quad \cos\left(\frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2}\right) \neq 0,$$

这与（3.20）矛盾。因此，$\chi_- = 0$ 和

$$\left|\nabla u_\infty^-\right|^2 - \left|\nabla u_\infty^+\right|^2 = -x_2 \quad \text{on } \partial\{u_\infty < 0\} \cap \partial\{u_\infty > 0\}. \tag{3.21}$$

(2) 若 $z \in \partial\{u_\infty < 0\}\backslash\partial\{u_\infty > 0\}$，我们取足够小的 δ，使得 $u_\infty \leqslant 0$ 属于 $B_\delta(z)$。类似地，若 $z \in \partial\{u_\infty > 0\}\backslash\partial\{u_\infty < 0\}$，我们选择足够小的 δ，使得 $u_\infty \geqslant 0$ 属于$B_\delta($ $z)$。因此，仿照情形 1.1 的证明，我们得到

$$\left|\nabla u_\infty^-\right|^2 = -x_2 \quad \text{on } \partial\{u_\infty < 0\}\backslash\partial\{u_\infty > 0\}, \tag{3.22}$$

and

$$\left|\nabla u_\infty^+\right|^2 = x_2 \quad \text{on } \partial\{u_\infty > 0\}\backslash\partial\{u_\infty < 0\}. \tag{3.23}$$

注意，$\{u_\infty < 0\}$ 和 $\{u_\infty > 0\}$ 的每个连通分支都是一个以原点为顶点、开角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的圆锥，并且 $\{u_\infty > 0\}$ 至多包含两个连通分支。现在我们考察可能的奇异渐近构型。

(1) 假设 $\{u_\infty > 0\}$ 只有一个连通分支。

(1a) 如果 $\partial\{u_\infty>0\}$ 和 $\partial\{u_\infty<0\}$ 仅在一点相接（即 $\partial\{u_\infty>0\}\cap\partial\{u_\infty<0\}=\{O\}$），那么根据 (3.22) 和 (3.23)，解 u_∞ 的形式为

$$U_\infty(\rho,\theta)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{3}\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta-\frac{3\pi}{4}\right), & \text{in } \left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right),\\ \frac{\sqrt{2}}{3}\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right), & \text{in } \left(-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right),\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

密度为 $M_{x^0,\ u^-}(0^+)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，其中 $u_\infty(x)=U_\infty(\rho,\ \theta)$，以极坐标表示 .

(1b) 若 $\partial\{u_\infty>0\}$ 和 $\partial\{u_\infty<0\}$ 共享一段公共自由边界（见图 12），即 $\partial\{u_\infty<0\}\backslash\partial\{u_\infty>0\}\neq\varnothing$，则自由边界条件为

$$\begin{cases}|\nabla u_\infty^-|^2-|\nabla u_\infty^+|^2=-x_2, & \text{on } \partial\{u_\infty>0\}\cap\partial\{u_\infty<0\},\\ |\nabla u_\infty^-|^2=-x_2, & \text{on } \partial\{u_\infty<0\}\backslash\partial\{u_\infty>0\},\\ |\nabla u_\infty^+|^2=x_2, & \text{on } \partial\{u_\infty>0\}\backslash\partial\{u_\infty<0\}.\end{cases}\tag{3.24}$$

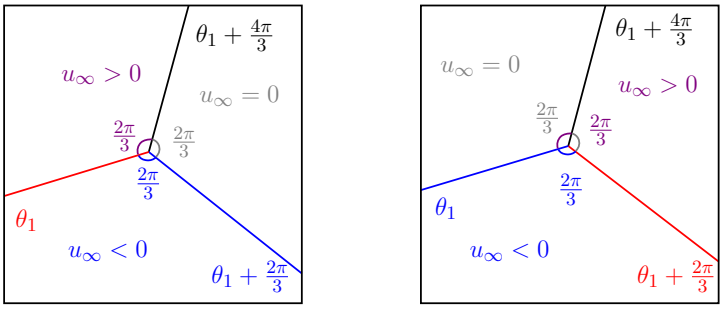


FIGURE 12. $\partial\{u_\infty>0\}\backslash\partial\{u_\infty<0\}\neq\varnothing$

设 $\{u_\infty<0\}=\{(\rho,\ \theta)\ |\theta_1<\theta<\theta_1+\frac{2\pi}{3}\}$，其中 $-\pi\leqslant\theta_1\leqslant-\frac{2\pi}{3}$。代入显式形式

$$U_\infty^-(\rho,\theta)=C_-\rho^{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{3}{2}\theta+\varphi_-\right)\quad\text{in }\{u_\infty<0\},$$

$$U_\infty^-(\rho,\theta)=C_+\rho^{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{3}{2}\theta+\varphi_+\right)\quad\text{in }\{u_\infty>0\},$$

代入（3.24），对于图 12（1）中的构型，

$$\begin{cases}\frac{9}{4}C_-^2-\frac{9}{4}C_+^2=-\sin\theta_1,\\ \frac{9}{4}C_-^2=-\sin\left(\theta_1+\frac{2\pi}{3}\right),\\ \frac{9}{4}C_+^2=\sin\left(\theta_1+\frac{4\pi}{3}\right),\end{cases}$$

或者对于图 12（2），

$$\begin{cases} \frac{9}{4}C_-^2 - \frac{9}{4}C_+^2 = -\sin\left(\theta_1 + \frac{2\pi}{3}\right), \\ \frac{9}{4}C_-^2 = -\sin\theta_1, \\ \frac{9}{4}C_+^2 = \sin\left(\theta_1 + \frac{4\pi}{3}\right), \end{cases}$$

这意味着 $\theta_1 = -\pi$ 或 $\theta_1 = -\frac{2\pi}{3}$。—

因此， u_∞ 可表示为

$$U_\infty(\rho,\theta) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta - \pi\right), & \text{in } \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right), \\ \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta\right), & \text{in } \left(-\pi, -\frac{\pi}{3}\right), \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

or

$$U_\infty(\rho,\theta) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta - \frac{\pi}{2}\right), & \text{in } \left(0, \frac{2\pi}{3}\right), \\ \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta - \frac{\pi}{2}\right), & \text{in } \left(-\frac{2\pi}{3}, 0\right), \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

其对应的密度为

$$\begin{aligned} M_{x^0,u^-}(0^+) &= \int_{B_1} -x_2 \chi_{\left\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\middle|\, -\pi<\theta<-\frac{\pi}{3}\right\}} dx \\ &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{3}} -\rho^2\sin\theta d\theta d\rho = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} M_{x^0,u^-}(0^+) &= \int_{B_1} -x_2 \chi_{\left\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\middle|\, -\frac{2\pi}{3}<\theta<0\right\}} dx \\ &= \int_0^1 \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{0} -\rho^2\sin\theta d\theta d\rho = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

（2）假设 $\{u_\infty > 0\}$ 由两个连通分支组成，并令负相由 $\{u_\infty < 0\} = \left\{(\rho,\theta) \,\middle|\, \theta_1 < \theta < \theta_1 + \frac{2\pi}{3}\right\}$ 给出，其中 $-\pi \leqslant \theta_1 \leqslant -\frac{2\pi}{3}$。则该解具有如下形式 —

$$\begin{cases} U_\infty^- = C_1\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta + \varphi_1\right), & \text{in } \left[\theta_1, \theta_1 + \frac{2\pi}{3}\right), \\ U_\infty^+ = C_2\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta + \varphi_2\right), & \text{in } \left[\theta_1 + \frac{2\pi}{3}, \theta_1 + \frac{4\pi}{3}\right), \\ U_\infty^+ = C_3\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta + \varphi_3\right), & \text{in } \left[\theta_1 + \frac{4\pi}{3}, \theta_1 + 2\pi\right). \end{cases} \quad \text{(see Fig. 13)}$$

我们采用与 (1) 类似的论证，得到

$$\begin{cases} \frac{9}{4}C_1^2 - \frac{9}{4}C_3^2 = -\sin\theta_1, \\ \frac{9}{4}C_1^2 - \frac{9}{4}C_2^2 = -\sin\left(\theta_1 + \frac{2\pi}{3}\right), \\ \frac{9}{4}C_2^2 = \frac{9}{4}C_3^2 = \sin\left(\theta_1 + \frac{4\pi}{3}\right), \end{cases}$$

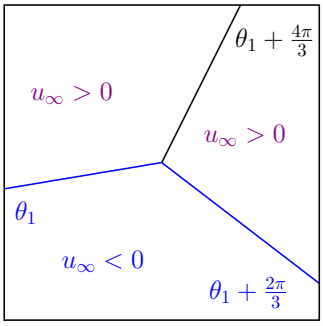


FIGURE 13. $\partial\{u_\infty > 0\} \backslash \partial\{u_\infty < 0\} = \varnothing$

这意味着 $\theta_1 = -\frac{5\pi}{6}$。因此

$$U_\infty(\rho,\theta) = \begin{cases} \frac{2}{3}\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta + \frac{3}{4}\pi\right), & \text{in } \left[\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right), \\ \frac{2}{3}\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta - \frac{\pi}{4}\right), & \text{in } \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{\sqrt{6}}{3}\rho^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta - \frac{\pi}{4}\right), & \text{in } \left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right), \end{cases}$$

具有密度

$$M_{x^0,u^-}(0^+) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

这就完成了定理 1 中情形 1.2 的证明。

3.3. **情形 1.3 可能出现的奇异渐近行为。**

根据命题 2.1，我们沿用小节 3.2 中的推导来分析 u^-，由此得到以下结果。

命题 3.11. 设 u 是(1.15) 的一个弱解，满足定理 *1* 中的假设，并考虑爆破序列

$$u_m = \frac{u\left(x^0 + r_m x\right)}{r_m^\alpha}, \quad 1 < \alpha < 3/2,$$

如附录 *A* 中定义 *C* 所定义。随后，$u_m \to u_\infty \equiv 0$ 在 $W^{1,\,2\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 中强收敛，并且当 $m \to \infty$ 时在 $\mathbb{R}^2$ 中局部一致收敛。

证明。 我们用反证法。假设 $\{u_\infty < 0\} \neq \varnothing$（情形 $\{u_\infty > 0\} \neq \varnothing$ 可用类似的论证处理，细节从略）。根据命题 2.5 中所述的 u_∞ 的齐次性，$\{u_\infty > 0\}$ 和 $\{u_\infty < 0\}$ 的每个连通分支都是一个开角为 π/α 的角区域，其中 $1 < \alpha < \frac{3}{2}$。由前两个小节可知，若 $\{u_\infty < 0\}$ 非空，则它恰好由一个连通分支组成。因此，在极 $^-$

坐标中,

$$u_\infty^-(x)=U_{\infty,\alpha}^-(\rho,\theta)=\begin{cases}C\rho^\alpha\cos\left(\alpha\theta+\varphi\right), & \text{in } \left(\theta_1,\theta_1+\frac{\pi}{\alpha}\right),\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

对于某些 $C>0$, $\varphi\in[-\pi,\pi)$ 和 $\theta_1\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{\alpha}\right]$。

现在，按照命题 3.1 的证明，取 $\phi\in C_0^1\left(\mathbb{R}^2,\ \mathbb{R}^2\right)$。由 (3.2) 得到

$$\begin{aligned}0=&r_m^{2\alpha-1}\int_{B_1}\left(|\nabla u_m|^2\operatorname{div}\phi-2\nabla u_m D\phi_m\nabla u_m\right)dx\\&+r_m^2\int_{B_1\cap\{x_2<0\}}\left(-x_2\chi_{\{u_m<0\}}\operatorname{div}\phi-\phi_2\chi_{\{u_m<0\}}\right)dx\\&+r_m^2\int_{B_1\cap\{x_2>0\}}\left(x_2\chi_{\{u_m>0\}}\operatorname{div}\phi+\phi_2\chi_{\{u_m>0\}}\right)dx.\end{aligned}$$

两边除以 $r_m^{2\alpha-1}$，得到

$$\begin{aligned}0=&\int_{B_1}\left(|\nabla u_m|^2\operatorname{div}\phi-2\nabla u_m D\phi_m\nabla u_m\right)dx\\&+r_m^{3-2\alpha}\int_{B_1\cap\{x_2<0\}}\left(-x_2\chi_{\{u_m<0\}}\operatorname{div}\phi-\phi_2\chi_{\{u_m<0\}}\right)dx\\&+r_m^{3-2\alpha}\int_{B_1\cap\{x_2>0\}}\left(x_2\chi_{\{u_m>0\}}\operatorname{div}\phi+\phi_2\chi_{\{u_m>0\}}\right)dx.\end{aligned}$$

由于 $1<\alpha<\frac{3}{2}$，指数 $(3-2\alpha)$ 为正。此外

$$\left|\int_{B_1\cap\{x_2<0\}}\left(-x_2\chi_{\{u_m<0\}}\operatorname{div}\phi-\phi_2\chi_{\{u_m<0\}}\right)dx+\int_{B_1\cap\{x_2>0\}}\left(x_2\chi_{\{u_m>0\}}\operatorname{div}\phi+\phi_2\chi_{\{u_m>0\}}\right)dx\right|<\infty.$$

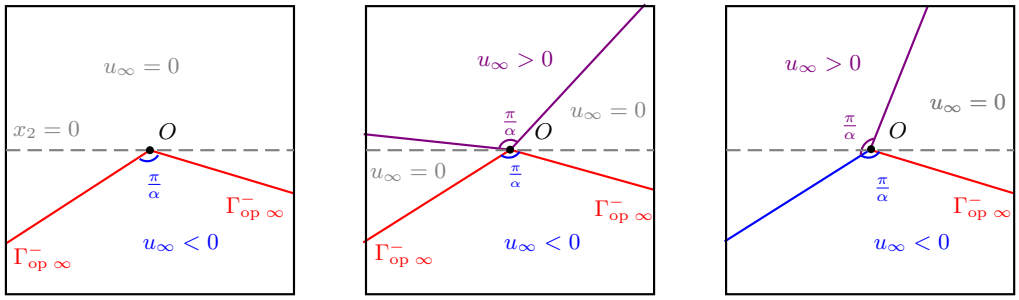
因此，取极限 $m\to\infty$，得到

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u_\infty|^2\operatorname{div}\phi-2\nabla u_\infty D\phi\nabla u_\infty\right)dx=0.$$

现在，我们断言存在一个单相自由边界点 $z\in\Gamma_{\text{op},\ \infty}^-\backslash\{O\}$，其中$\Gamma_{\text{op},\ \infty}^-=\partial\{u_\infty<0\}\backslash\partial\{u_\infty>0\}$。事实上，由于 $1<\alpha<3/2$，$\{u_\infty>0\}$ 和 $\{u_\infty<0\}$ 的每个连通分支都是一个开角为 π/α的角区域，其开角严格介于 $2\pi/3$ 和 π之间。假设 $\{u_\infty<0\}$ 恰有一个分支，这意味着$\{u_\infty>0\}$ 至多有一个分支。

(1) 若 $\{u_\infty>0\}=\varnothing$（见图 14 (1)），则 $\partial\{u_\infty<0\}$的整个自由边界与 $\Gamma_{\text{op},\ \infty}^-$重合。因此，该断言显然成立。

(2) 如果 $\{u_\infty>0\}\neq\varnothing$（见图 14 (2) 和 (3)），接触集 $\partial\{u_\infty<0\}\cap\partial\{u_\infty>0\}$最多只能占据 $\partial\{u_\infty<0\}$的一部分。因此， $\partial\{u_\infty<0\}$的其余部分由单相自由边界点构成，这再次证明了该结论。



(1) (2) (3)

FIGURE 14. $\Gamma^-_{\text{op},\ \infty}$

取这样一个点 z，并选择足够小的 $\delta > 0$，使得 $B_\delta(z) \subset \{x_2 < 0\}$。类似于情形 1.1 的证明，我们得到

$$\left|\nabla u^-_\infty\right| = 0, \quad \text{on } \Gamma^-_{\text{op},\infty} \cap B_\delta(z).$$

然而，根据 Hopf 引理可知（∇u^-_∞，ν）$\neq 0$ 在 $\Gamma^-_{\text{op},\ \infty} \cap B_\delta$（$z$）上成立。这是一个矛盾。□

在情形 1.3 中，我们仍然可以得到一个类似于命题 3.1 的结果。

命题 3.12。令 u_m 为命题 *2.5* 中定义的爆破序列。则在情形 *1.3* 中，χ_- 是 $\{u_\infty = 0\} \cap \{x_2 \leqslant 0\}$ 内部的一个常数，其中 χ_- 是$\chi_{\{u_m<0\}}$的强 L^1_{loc}极限。

证明。对于情形 1.3，令 $\phi \in C^1_0$（$\mathbb{R}^2 \cap \{x_2 \leqslant 0\}$，$\mathbb{R}^2$）。根据弱解（3.2）的定义，我们改写为

$$\begin{aligned} 0 =& r_m^{2\alpha-3} \int_{B_1} \left(|\nabla u_m|^2 \operatorname{div}\phi - 2\nabla u_m D\phi \nabla u_m \right) dx \\ &+ \int_{B_1 \cap \{x_2<0\}} \left(-x_2 \chi_{\{u_m<0\}} \operatorname{div}\phi - \phi_2 \chi_{\{u_m<0\}} \right) dx \\ =& A_m + B_m, \end{aligned}$$

其中

$$A_m = r_m^{2\alpha-3} \int_{B_1} \left(|\nabla u_m|^2 \operatorname{div}\phi - 2\nabla u_m D\phi \nabla u_m \right) dx,$$

and

$$B_m = \int_{B_1 \cap \{x_2<0\}} \left(-x_2 \chi_{\{u_m<0\}} \operatorname{div}\phi - \phi_2 \chi_{\{u_m<0\}} \right) dx.$$

显然，$|B_m|$ 有界。此外，由于 BV 到 L^1的紧嵌入，$\chi_{\{u_m<0\}}$在 $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 中强收敛，我们将其记为 χ_-。因此，B_m 的极限存在

且为有限值，即,

$$\lim_{m\to\infty}|B_m| = \left|\int_{B_1\cap\{x_2<0\}} (-x_2\chi_-\mathrm{div}\phi - \phi_2\chi_-)\,dx\right| = C, \quad \text{for some } C \geqslant 0.$$

我们断言 $C = 0$。于是，我们得到

$$0 = \int_{\mathbb{R}^2\cap\{x_2<0\}} (-x_2\chi_-\mathrm{div}\phi - \phi_2\chi_-)\,dx.$$

重复情形 1.1 和 1.2 中的论证，我们得出 χ_- 在 $\{u_\infty = 0\}\cap\{x_2 \leqslant 0\}$ 的内部为常数。

反设 $C \neq 0$，从而导出矛盾。考虑一个连通开集 U，它包含于 $\{u_\infty = 0\}\cap\{x_2 \leqslant 0\}$ 的内部。由于 u_m 在 $\mathbb{R}^2$ 中一致收敛于 0，对于某个 $d_0 > 0$ 以及充分大的 m，存在 $V = \{x \in U \,|\, u_m < -\delta\}$，使得当 $\delta > 0$ 足够小时，$\mathrm{dist}\,(V, \{u_m = 0\}) \geqslant d_0$。现在考虑连接 V 与 $\{u_m = 0\}$ 的水平线段 L。由此可得，u_m^- 沿 L 的切向导数严格为正。根据柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\int_L \left|\nabla u_m^-\right|^2 d\ell \geqslant \tilde{C} > 0, \quad \text{for some } \tilde{C} > 0,$$

其中 $d\ell$ 是沿 L的弧长元。

由于 L 的选择是任意的，我们得出

$$0 = \int_U \left|\nabla u_\infty^-\right|^2 dx \leftarrow \int_U \left|\nabla u_m^-\right|^2 dx \geqslant \tilde{C} > 0,$$

这就产生了矛盾。 □

3.4. **情形 1 的可能奇异剖面**。

为刻画电场在不同构型下形成的奇异剖面，其中 $x^{\mathrm{st}} = x^0 =$ 为（x_1^0， x_2^0），我们证明

（1）密度为$M_{x^0,\ u^-}(0^+) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 的奇异剖面是斯托克斯角。（2）密度为$M_{x^0,\ u^-}(0^+) = \frac{1}{2}$ 的奇异剖面是非对称斯托克斯角。（3）密度为$M_{x^0,\ u^-,\ \alpha}(0^+) = 0$ 的奇异剖面是尖点。

更具体地说,

- 斯托克斯角

首先，我们以 $M_{x^0,u^-}(0^+) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 为代表例子给出证明。定理 2 的证明分为三个步骤。情形 $M_{x^0,u^-}(0^+) = \frac{1}{2}$ 可通过类似的论证并稍作修改得到。

步骤 1. 假设 $\partial\{u < 0\}$ 由一条连续单射曲线给出

$$\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t)), \quad t \in (-t_0, t_0) \quad \text{with } t_0 > 0 \quad \text{and} \quad \sigma(0) = \left(x_1^0, x_2^0\right).$$

定义可能的切向方向集合

$$\mathfrak{L}^{\pm}=\left\{\theta^{*}\in[-\pi,0]\,\middle|\,\text{there is } t_m\to 0^{\pm} \text{ such that } \arg\left(\sigma(t_m)-\sigma(0)\right)\to\theta^{*} \text{ as } m\to\infty\right\}.$$

我们断言

$$\mathfrak{L}^{+} \text{ and } \mathfrak{L}^{-} \text{ are subsets of } \left\{-\pi,-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6},0\right\}.$$

假设该断言不成立。那么存在一个序列 $t_m\to 0$ 和一个方向 $\theta^{*}\in\left(\mathfrak{L}^{+}\cup\mathfrak{L}^{-}\backslash\left\{-\pi,-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6},0\right\}\right)$，使得 $\arg\left(\sigma(t_m)-\sigma(0)\right)\to\theta^{*}$ 当 $m\to\infty$。令

$$r_m=\left|\sigma(t_m)-\sigma(0)\right| \quad \text{and} \quad u_m=\frac{u(x^0+r_m x)}{r_m^{\frac{3}{2}}}.$$

选取足够小的 $\rho>0$，使得 $B^{*}=B_{\rho}(\cos\theta^{*},\ \sin\theta^{*})$（见图 15）满足

$$B^{*}\cap\left(\left\{(x,0)\,|\,x\in\mathbb{R}\right\}\cap\left\{\left(x,-\frac{\sqrt{3}}{3}|x|\right)\,|\,x\in\mathbb{R}\right\}\right)=\varnothing.$$

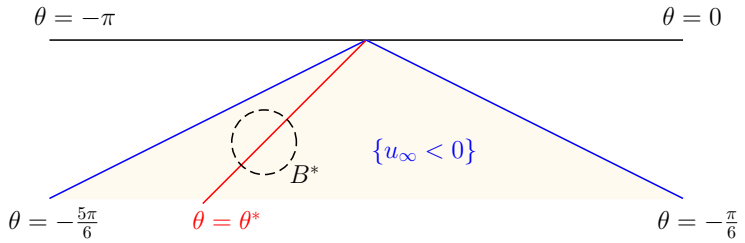


FIGURE 15. B^{*}

由 $u_m\to u_\infty$ 在 $W^{1,\,2\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 中强收敛可知，

$$\Delta u_m^{-}(B^{*})\to\Delta u_\infty^{-}(B^{*})=0.$$

然而，根据假设，$u\geqslant 0$ 在 $\{x_2\geqslant x_2^0\}$

$$\Delta u_m^{-}(B^{*})=\int_{B^{*}\cap\partial\{u_m<0\}}\left|\nabla u_m^{-}\right|dS\geqslant\int_{B^{*}\cap\partial\{u_m<0\}\cap\partial\{u_m>0\}}-x_2 dS>0, \tag{3.25}$$

这就产生了矛盾。

步骤 2。 $\mathfrak{L}^{+}$ 和 $\mathfrak{L}^{-}$ 是连通集。

这等价于说，若存在 θ_1、$\theta_2\in\mathfrak{L}^{+}$ 满足 $\theta_1<\theta_2$ 和 $t_m^{(1)}$，以及 $t_m^{(2)}$，使得当 $t_m^{(1)}\to 0$、$t_m^{(2)}\to 0$时，$\arg\sigma\left(t_m^{(1)}\right)\to\theta_1$ 和$\arg\sigma\left(t_m^{(2)}\right)\to\theta_2$，则我们断言，对于任意$\theta_3\in(\theta_1,\theta_2)$，$\theta_3\in\mathfrak{L}^{+}$。

事实上，根据自由边界的连续性和介值定理，我们得出存在 $t_m^{(3)}$，使得 $t_m^{(1)}<t_m^{(3)}<t_m^{(2)}$ 满足 $\arg\sigma\left(t_m^{(3)}\right)\to\theta_3$。类似地，我们得到 $\mathfrak{L}^{+}$ 和 $\mathfrak{L}^{-}$ 是连通集。

此外，定义

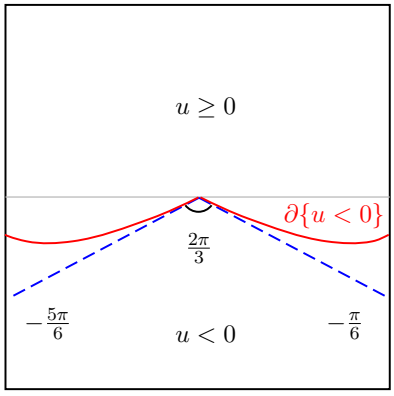
$$l^+ = \lim_{t\to 0^+} \arg\left(\sigma(t)-\sigma(0)\right) \quad \text{and} \quad l^- = \lim_{t\to 0-} \arg\left(\sigma(t)-\sigma(0)\right),$$

其中，极限 l^+和 l^-存在，且取值于集合$\left\{-\pi, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, 0\right\}$。

步骤 3。我们确定每种构型下 l^+ 和 l^- 的取值。

- 斯托克斯角。

注意，在情形 1.1 中，$M_{x^0,\ u^-}(0^+) = \int_{B_1}(-x_2)\chi_{\{(\rho\text{余弦 }\theta,\ \rho\text{正弦 }\theta)\,|\,-\frac{5\pi}{6}<\theta<-\frac{\pi}{6}\}}dx$，由此可得 $\Delta u^-_\infty\left(B_{1/10}\left(\sqrt{3}/2,\ -1/2\right)\right) > 0$且 $\Delta u^-_\infty\left(B_{1/10}\left(-\sqrt{3}/2,\ -1/2\right)\right) > 0$。因此，$\{l^+, l^-\}$同时包含 $-\frac{\pi}{6}$和 $-\frac{5\pi}{6}$，这一事实推出了情形 1.1 下定理 2 的结论（见图 16）。



斯托克斯角

FIGURE 16. 情形 1.1 的奇异剖面

- 非对称斯托克斯角。

现在考虑情形 $M_{x^0,\ u^-}(0^+) = \frac{1}{2}$。按照步骤 1，我们断言

$$\mathfrak{L}^+ \text{ and } \mathfrak{L}^- \text{ are subsets of } \left\{-\pi, -\frac{\pi}{3}, 0\right\}$$

or

$$\mathfrak{L}^+ \text{ and } \mathfrak{L}^- \text{ are subsets of } \left\{-\pi, -\frac{2\pi}{3}, 0\right\}.$$

假设存在 $0 \neq t_m \to 0$，使得当 $m\to\infty$ 时 $\arg\sigma(t_m) \to \theta^*$，其中

$$\theta^* \in \left(\mathfrak{L}^+ \cup \mathfrak{L}^- \setminus \left\{-\pi, -\frac{\pi}{3}, 0\right\}\right) \quad \text{or} \quad \theta^* \in \left(\mathfrak{L}^+ \cup \mathfrak{L}^- \setminus \left\{-\pi, -\frac{2\pi}{3}, 0\right\}\right).$$

因此，对于每个满足条件的 $\rho > 0$，使得 $B^* = B_\rho(\cos\theta^*,\ \sin\theta^*)$

$$B^* \cap \left(\{(x,0)\,|\,x\in\mathbb{R}\} \cap \left\{\left(x, -\sqrt{3}\,|x|\right)\,\middle|\,x\in\mathbb{R}\right\}\right) = \varnothing,$$

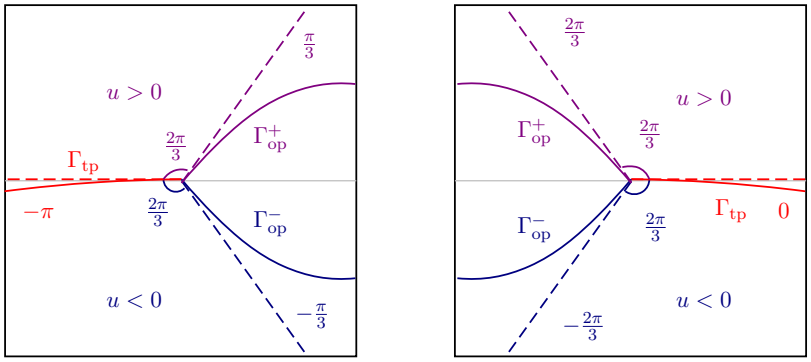
我们观察到 (3.25) 仍然成立。根据步骤 2，极限 l^+ 和 l^- 均存在，且取值属于集合 $\{-\pi, -\frac{2\pi}{3}, 0\}$ 或集合 $\{-\pi, -\frac{\pi}{3}, 0\}$。因此，如果

$$M_{x^0,u^-}(0^+) = \int_{B_1} (-x_2)\chi_{\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,|\,-\pi<\theta<-\frac{\pi}{3}\}}dx,$$

我们得到 $\Delta u_\infty^-\left(B_{1/10}\left(1/2,\ -\sqrt{3}/2\right)\right) > 0$ 且 $\{l^+, l^-\}$ 包含 $-\frac{\pi}{3}$。根据 u_∞^-的齐次性，可以直接证明 $l^- = -\pi$ 和 $l^+ = -\frac{\pi}{3}$。类似地，如果

$$M_{x^0,u^-}(0^+) = \int_{B_1} (-x_2)\chi_{\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,|\,-\frac{2\pi}{3}<\theta<0\}}dx,$$

那么 $l^- = -\frac{2\pi}{3}$ 和 $l^+ = 0$ （见图 17）。



$l_- = -\pi$ 和 $l_+ = -\frac{\pi}{3}$　　$l_- = -\frac{2\pi}{3}$ 和 $l_+ = 0$

FIGURE 17. 情形 1.2 的奇异剖面

- 尖点。

在情形 1.3 中，电场效应占主导地位，完全破坏了其他情形中观察到的角点结构。因此，自由边界 $\partial\{u<0\}$ 附近的奇异剖面 x^0 必定是尖点。

根据命题 3.12

$$\lim_{m\to\infty}\int_{B_1\cap\{x_2<0\}}\chi_{\{u_m<0\}}dx \in \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}.$$

现在，我们通过证明以下内容来说明自由边界 $\partial\{u<0\}$的奇异剖面是尖点

$$\lim_{m\to\infty}\int_{B_1\cap\{x_2<0\}}\chi_{\{u_m<0\}}dx = 0. \tag{3.26}$$

为导出矛盾，假设

$$\lim_{m\to\infty}\int_{B_1\cap\{x_2<0\}}\chi_{\{u_m<0\}}dx = \frac{\pi}{2}.$$

为简化证明，假设停滞点位于原点 $O=(0,\ 0)$。那么存在 $r_0>0$、θ_1 和 θ_2，使得

$$\Delta u=0 \quad \text{in } \{u<0\}\cap B_{r_0} \quad \text{and} \quad \overline{G}\backslash\{O\}\subset\{u<0\}\cap B_{r_0},$$

其中 $-\pi\leqslant\theta_1<\theta_2\leqslant 0$ 和 $\theta_2-\theta_1>\frac{\pi}{\alpha}$ 和

$$G=\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,|\,0<\rho<r_0,\theta_1<\theta<\theta_2\}.$$

按照 [35], 中命题 6.5 的策略，存在 $C_0>0$ 使得

$$u^-(0,x_2)\geqslant C_0|x_2|^\gamma \quad \text{for all } x_2\in(0,r_0),$$

其中 $\gamma=\frac{\pi}{\theta_2-\theta_1}$。由 $\theta_2-\theta_1>\frac{\pi}{\alpha}$ 可得 $1<\gamma<\alpha$，因为 $1<\alpha<3/2$。这与以下估计矛盾

$$u^-(0,x_2)\leqslant C|x_2|^\alpha,$$

这是 B_{r_0}中所假设的增长条件 $|\nabla u|\leqslant C\,|x|^{\alpha-1}$ 的推论。

此外，回顾

$$\mathfrak{L}^\pm=\left\{\theta^*\in[-\pi,0]\,\middle|\,\text{there is } t_m\to 0^\pm \text{ such that } \arg\left(\sigma(t_m)-\sigma(0)\right)\to\theta^* \text{ as } m\to\infty\right\}.$$

由 $\partial\{u<0\}$ 的连续性，集合 $\mathfrak{L}^+$ 和 $\mathfrak{L}^-$ 是连通的。现在定义

$$\theta_+=\sup\mathfrak{L}^+,\quad \theta_-=\inf\mathfrak{L}^-,\quad \text{with } \theta_-\leqslant\theta_+.$$

我们断言 $\theta_+=\theta_-$。否则，根据定义，存在 $t_m^+\to 0^+$ 和 $t_m^-\to 0^-$，使得 $\arg(\sigma(t_m^\pm)-\sigma(0))\to\theta_\pm$ 且 $\theta_-<\theta_+$。令 $\delta=\frac{\theta_+-\theta_-}{3}>0$ 并 ——

$$r_m=\min\left\{\left|\sigma(t_m^+)-\sigma(0)\right|,\left|\sigma(t_m^-)-\sigma(0)\right|\right\} \quad \text{and} \quad u_m=\frac{u(x^0+r_mx)}{r_m^\alpha}.$$

任取 $\bar\theta\in I=(\theta_-+\delta,\ \theta_+-\delta)\subset B_1\cap\{x_2<0\}$。然后取足够小的 $\varepsilon<\frac{\delta}{4}$ 和 $\rho>0$，使得 $u_m<0$ 属于 D（见图 18），其中

$$D=\left\{x\in A\,\middle|\,\arg(x)\in\left(\bar\theta-\varepsilon,\bar\theta+\varepsilon\right)\right\}\subset I,\quad A=\left\{x\,\middle|\,\frac{\rho}{2}<|x|<\rho\right\}.$$

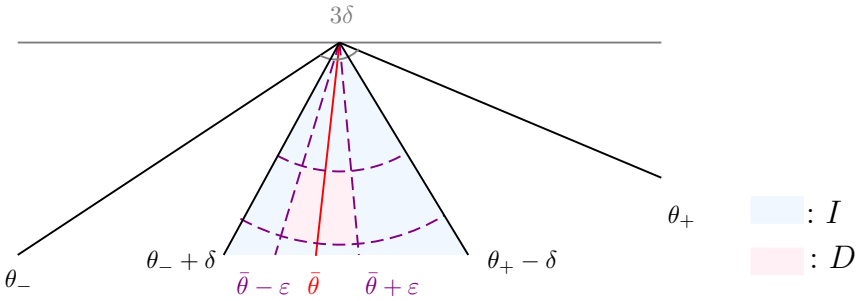


FIGURE 18. D 的构造

因此,

$$\int_{B_1\cap\{x_2<0\}}\chi_{\{u_m<0\}}dx \geqslant \int_D \chi_{\{u_m<0\}}dx \geqslant C(\varepsilon)>0,$$

其中 $C(\varepsilon)$与 m无关。这与 (3.26) 矛盾。

Appendix A

回顾自由边界问题 (1.11)，我们将泛函 $E_{\mathrm{EHD}}(u,\ \Omega)$ 定义为

$$E_{\mathrm{EHD}}(u,\Omega)=\int_\Omega\left(|\nabla u|^2+\left(x_2-x_2^0\right)^+\chi_{\{u>0\}}+\left(\left(x_2-x_2^0\right)^++x_2^0-x_2\right)\chi_{\{u<0\}}\right)dx.$$

We n现在介绍自由边界问题 (1.11) 的弱解定义。

定义 A. 若函数 $u\in W^{1,\ 2}(\Omega)$ 满足以下条件，则称其为 (1.11) 的弱解。

(1) $u\in C\left(\Omega\right)\cap C^2(\Omega\cap\{u\neq 0\})$。

(2) 泛函关于区域变分的一阶变分

$$E_{EHD}(v,\Omega)=\int_\Omega\left(|\nabla v|^2+\left(x_2-x_2^0\right)^+\chi_{\{v>0\}}+\left(\left(x_2-x_2^0\right)^++x_2^0-x_2\right)\chi_{\{v<0\}}\right)dx$$

在 $v=u$ 处消失。也就是说

$$\begin{aligned}0=&\int_\Omega\left(|\nabla u|^2\operatorname{div}\phi-2\nabla uD\phi\nabla u\right)dx+\int_{\Omega\cap\{x_2<x_2^0\}}\left(\left(x_2^0-x_2\right)\chi_{\{u<0\}}\operatorname{div}\phi-\chi_{\{u<0\}}\phi_2\right)dx\\&+\int_{\Omega\cap\{x_2>x_2^0\}}\left(\left(x_2-x_2^0\right)\chi_{\{u>0\}}\operatorname{div}\phi+\chi_{\{u>0\}}\phi_2\right)dx\end{aligned}$$

对于每个 $\phi(x)=(\phi_1(x)\ \phi_2(x))\in C_0^1\left(\Omega\ \mathbb{R}^2\right)$。

(3) 拓扑自由边界 $\partial\{u<0\}\cap\Omega$ 是一条局部 $C^{2,\ \alpha}$-光滑曲线。

注 3.3。 按照分布的意义进行分部积分，可得

$$\begin{aligned}0=&2\int_\Omega\left(-\nabla uD^2u\phi+\nabla uD^2u\phi+(\phi,\nabla u)\,\Delta u\right)dx\\&+\int_{\Gamma_{\mathrm{tp}}}\left|\nabla u^-\right|^2\left(\phi,\nu^-\right)-2\left(\nabla u^-,\phi\right)\left(\nabla u^-,\nu^-\right)dS\\&+\int_{\Gamma_{\mathrm{tp}}}\left|\nabla u^+\right|^2\left(\phi,\nu^+\right)-2\left(\nabla u^+,\phi\right)\left(\nabla u^+,\nu^+\right)+\left(x_2^0-x_2\right)\left(\phi,\nu^-\right)dS\\&+\int_{\Gamma_{\mathrm{op}}^-}\left|\nabla u^-\right|^2\left(\phi,\nu^-\right)-2\left(\nabla u^-,\phi\right)\left(\nabla u^-,\nu^-\right)+\left(\left(x_2-x_2^0\right)^++x_2^0-x_2\right)\left(\phi,\nu^-\right)dS\\&+\int_{\Gamma_{\mathrm{op}}^+}\left|\nabla u^+\right|^2\left(\phi,\nu^+\right)-2\left(\nabla u^+,\phi\right)\left(\nabla u^+,\nu^+\right)+\left(x_2-x_2^0\right)^+\left(\phi,\nu^+\right)dS,\end{aligned}$$

其中，ν^- 和 ν^+ 表示外法向量。将 $\phi=\xi\nu^-$ 代入积分方程，其中 ξ 是一个支集位于 Γ_{tp} 和 Γ_{op}^-邻域内的光滑标量测试函数。类似地，代入 $\phi=\xi\nu^+$，其中 ξ 的支集位于

Γ_{op}^{+}。根据假设的光滑性，并利用 $\{u \neq 0\}$中的$(\phi,\ \nabla u)\,\Delta u = 0$、 Γ_{tp}上的 $\nu^{+} = -\nu^{-}$ 以及 $\nabla u^{\pm} = -\left|\nabla u^{\pm}\right| \nu^{\pm}$，我们推导得

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \{u \neq 0\}, \\ |\nabla u^{-}|^{2} - |\nabla u^{+}|^{2} = x_2^0 - x_2, & \text{on } \Gamma_{\mathrm{tp}}, \\ |\nabla u^{-}|^{2} = \left(x_2 - x_2^0\right)^{+} + x_2^0 - x_2, & \text{on } \Gamma_{\mathrm{op}}^{-}, \\ |\nabla u^{+}|^{2} = \left(x_2 - x_2^0\right)^{+}, & \text{on } \Gamma_{\mathrm{op}}^{+}. \end{cases}$$

注记 3.4. 泛函 $E_{\mathrm{EHD}}(u,\Omega)$ 的极小化子的存在性意味着满足定义 A 中条件 (1) 和 (2) 的解集非空（参见[1]中的定理1.1）。另一方面，根据 [20], 的精妙工作，条件 (3) 已得到验证。因此，弱解定义良好。

为研究停滞点 $x^0 \in \partial\{u < 0\}$，我们注意到 u^{-} 确实是一个单相自由边界问题的弱解（见命题 2.1）。现在我们在 $\Omega \cap \{u \leqslant 0\}$ 中定义弱解。

定义 B. 非正函数 $w \in W^{1,2}(\Omega)$ 称为下列方程的弱解

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & \text{in } \{w < 0\}, \\ |\nabla w|^{2} = \left(x_2^0 - x_2\right)^{+}, & \text{on } \partial\{w < 0\}, \end{cases}$$

若满足以下条件。

(1) $w \in C(\Omega) \cap C^{2}(\Omega \cap \{w < 0\})$。

(2) 泛函关于区域变分的一阶变分

$$E_{op}(v,\Omega) = \int_{\Omega} \left(|\nabla v|^{2} + \left(x_2^0 - x_2\right)^{+} \chi_{\{v<0\}} \right) dx$$

在 $v = w$ 处消失。即

$$0 = \int_{\Omega} \left(|\nabla w|^{2} \operatorname{div}\phi - 2\nabla w D\phi \nabla w \right) dx + \int_{\Omega \cap \{x_2 < x_2^0\}} \left(\left(x_2^0 - x_2\right) \chi_{\{w<0\}} \operatorname{div}\phi - \chi_{\{w<0\}} \phi_2 \right) dx,$$

对于每个 $\phi(x) = (\phi_1(x)\ \phi_2(x)) \in C_0^1\left(\Omega\ \mathbb{R}^2\right)$。

(3) 拓扑自由边界 $\partial\{w < 0\} \cap \Omega$ 是局部 $C^{2,\ \alpha}$-光滑曲线。

对自由边界的进一步分析依赖于对所谓爆破解的研究。因此，我们为爆破序列引入以下定义。

定义 C。令 $r_m > 0$ 在 $m \to +\infty$ 且 $x^{\mathrm{st}} = x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ 时收敛于 *0*。爆破序列定义如下。

- 在情形 *1.1* 和情形 *1.2* 中

$$u_m = \frac{u(x^0 + r_m x)}{r_m^{3/2}},$$

- 在情形 *1.3* 中，当 $1<\alpha<\frac{3}{2}$ 时，

$$u_m=\frac{u(x^0+r_mx)}{r_m^\alpha}.$$

为刻画任意停滞点 $x^0\in\partial\{u<0\}$ 附近的爆破极限，我们在情形 1.1 和 1.2 中引入了针对 u 的 Weiss 型单调性公式

$$\begin{aligned}M_{x^0,u}(r)=&r^{-3}\int_{B_r(x^0)}\left(|\nabla u|^2+\left(x_2-x_2^0\right)^+\chi_{\{u>0\}}+\left(x_2^0-x_2\right)^+\chi_{\{u<0\}}\right)dx-\frac{3}{2}r^{-4}\int_{\partial B_r(x^0)}u^2dS\\=&r^{-3}\int_{B_r(x^0)}\left(\left|\nabla u^+\right|^2+\left(x_2-x_2^0\right)^+\chi_{\{u>0\}}\right)dx-\frac{3}{2}r^{-4}\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^+\right)^2dS\\&+r^{-3}\int_{B_r(x^0)}\left(\left|\nabla u^-\right|^2+\left(x_2^0-x_2\right)^+\chi_{\{u<0\}}\right)dx-\frac{3}{2}r^{-4}\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^-\right)^2dS\\=&M_{x^0,u^+}(r)+M_{x^0,u^-}(r).\end{aligned}$$

此外，我们在情形 1.3 中考虑了针对 u 的修正 Weiss 型单调性公式

$$\begin{aligned}M_{x^0,u,\alpha}(r)=&r^{-2\alpha}\int_{B_r(x^0)}\left(|\nabla u|^2+\left(x_2-x_2^0\right)^+\chi_{\{u>0\}}+\left(x_2^0-x_2\right)^+\chi_{\{u<0\}}\right)dx-\alpha r^{-2\alpha-1}\int_{\partial B_r(x^0)}u^2dS\\=&r^{-2\alpha}\int_{B_r(x^0)}\left(\left|\nabla u^+\right|^2+\left(x_2-x_2^0\right)^+\chi_{\{u>0\}}\right)dx-\alpha r^{-2\alpha-1}\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^+\right)^2dS\\&+r^{-2\alpha}\int_{B_r(x^0)}\left(\left|\nabla u^-\right|^2+\left(x_2^0-x_2\right)^+\chi_{\{u<0\}}\right)dx-\alpha r^{-2\alpha-1}\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^-\right)^2dS\\=&M_{x^0,u^+,\alpha}(r)+M_{x^0,u^-,\alpha}(r).\end{aligned}$$

在第 2 节中，我们已证明 $M_{x^0,u}(0^+)$ 和 $M_{x^0,u,\alpha}(0^+)$ 作为 $r\to0$ 存在。具体而言，

$$\begin{aligned}M_{x^0,u}(0^+)=&\lim_{m\to\infty}r_m^{-3}\int_{B_{r_m}(x^0)}\left(x_2-x_2^0\right)^+\chi_{\{u>0\}}+\left(x_2^0-x_2\right)^+\chi_{\{u<0\}}dx\\=&\lim_{m\to\infty}\int_{B_1}\left((x_2)^+\chi_{\{u_m>0\}}+(-x_2)^+\chi_{\{u_m<0\}}\right)dx,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}M_{x^0,u,\alpha}(0^+)=&\lim_{m\to\infty}r_m^{-2\alpha}\int_{B_{r_m}(x^0)}\left(x_2-x_2^0\right)^+\chi_{\{u>0\}}+\left(x_2^0-x_2\right)^+\chi_{\{u<0\}}dx\\=&\lim_{m\to\infty}r_m^{3-2\alpha}\int_{B_1}\left((x_2)^+\chi_{\{u_m>0\}}+(-x_2)^+\chi_{\{u_m<0\}}\right)dx.\end{aligned}$$

特别地，我们将负相密度定义为

$$M_{x^0,u^-}(0^+)=\lim_{m\to\infty}\int_{B_1}(-x_2)^+\chi_{\{u_m<0\}}dx,$$

and

$$M_{x^0,u^-,\alpha}(0^+)=\lim_{m\to\infty}r_m^{3-2\alpha}\int_{B_1}(-x_2)^+\chi_{\{u_m<0\}}dx=0.$$

Appendix B

按照第1.4小节中情形 2 的类似推导，我们得到 $\left|\nabla u^{+}(x^{\mathrm{st}})\right|>0$。基于此，我们将证明自由边界 $\partial\{u<0\}$ 是 $\Omega\cap\{x_2>x_2^0\}$ 中的一条局部 $C^{1,\beta}$ 曲线，如 $0<\beta<1$。

根据命题 2.2 和命题 2.4 的证明中的论证，我们立即得到两个引理。

引理 3.13。设 $r_0=\frac{1}{2}dist\left(x^{\mathrm{st}},\partial\Omega\right)$，且 u 是根据附录 *A* 中定义 *A* 的弱解。考虑情形 *2* 中 u 的 *Weiss* 型边界调整能量

$$M_{x^{\mathrm{st}},u,1}(r)=r^{-2}I(r)-r^{-3}J(r).$$

则对于几乎处处的 $r\in(0,\ r_0)$ 和 $x_2^{\mathrm{st}}>x_2^0$

$$\frac{d}{dr}M_{x^{\mathrm{st}},u,1}(r)=2r^{-2}\int_{\partial B_r(x^{\mathrm{st}})}\left(\left(\nabla u^{+},\nu\right)-\frac{1}{r}u^{+}\right)^2+\left(\left(\nabla u^{-},\nu\right)-\frac{1}{r}u^{-}\right)^2dS+K(r),$$

其中

$$K(r)=r^{-3}\int_{B_r(x^{\mathrm{st}})\cap\{x_2>x_2^0\}}\left(x_2-x_2^{\mathrm{st}}\right)\chi_{\{u<0\}}dx+r^{-3}\int_{B_r(x^{\mathrm{st}})\cap\{x_2<x_2^0\}}\left(x_2^{\mathrm{st}}-x_2\right)\chi_{\{u<0\}}dx.$$

引理 3.14。设 u 是根据附录 *A* 中定义 *A* 的弱解。设 $x^{\mathrm{st}}=(x_1^{\mathrm{st}},\ x_2^{\mathrm{st}})\in\partial\{u<0\}$，其中 $x_2^{\mathrm{st}}>x_2^0$。则

(1) 极限 $M_{x^{\mathrm{st}},u,1}(0^{+})=\lim_{r\to0^{+}}M_{x^{\mathrm{st}},u,1}(r)$ 存在且有限。

(2) 设 $0<r_m\to0^{+}$ *as* $m\to\infty$ 是一个序列，使得爆破序列

$$u_m(x)=\frac{u(x^{\mathrm{st}}+r_mx)}{r_m}$$

在 $W^{1,2\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 中弱收敛到爆破极限 u_∞。则 u_∞ 是关于 $\mathbb{R}^2$ 的 *1* 次齐次函数，即对于所有 $x\in\mathbb{R}^2$ 和所有 $\lambda>0$，有 $u_\infty(\lambda x)=\lambda u_\infty(x)$。

(3) u_m 在 $W^{1,2\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 中强收敛。

(4) 对于 $x_2^{\mathrm{st}}>x_2^0$

$$M_{x^{\mathrm{st}},u,1}(0^{+})=\lim_{m\to\infty}\int_{B_1}\left(x_2^{\mathrm{st}}-x_2^0\right)\chi_{\{u_m>0\}}dx.$$

证明。注意到

$$\begin{aligned}K(r)=&r^{-3}\int_{B_r(x^{\mathrm{st}})\cap\{x_2>x_2^0\}}\left(x_2-x_2^{\mathrm{st}}\right)\chi_{\{u<0\}}dx+r^{-3}\int_{B_r(x^0)\cap\{x_2<x_2^0\}}\left(x_2^{\mathrm{st}}-x_2\right)\chi_{\{u<0\}}dx\\ \leqslant&Cr^{-3}r^3\leqslant C,\end{aligned}$$

这意味着 $K(r)$ 可积。因此，通过与 [35] 中引理 4.4 类似的证明，可以得到引理 3.14。□

此外，借鉴 [22]和 [34]−[36]中的思路，我们可以将 u_∞^{+} 完整地刻画为$x_2^{\mathrm{st}}>x_2^0$。

命题 3.15。 (分类 u_∞^+) 对于引理 *3.14* 中定义的 u_m ， u_∞^+ 具有以下形式之一。

(1) u_∞^+ 具有一个连通分支，并且存在 $e=(e_1,e_2)$ </style>使得

$$u_\infty^+(x)=\sqrt{x_2^{\mathrm{st}}-x_2^0}\,(x\cdot e)^+.$$

(2) u_∞^+ 具有两个连通分支，即存在一个常数 $\gamma>0$ 和 $e=(e_1,e_2)$ </style>使得

$$u_\infty^+(x)=\gamma\,|x\cdot e|.$$

(3) $u_\infty^+\equiv 0$。

证明。 考虑引理 3.14 中的爆破序列 $u_m=u(x^{\mathrm{st}}+r_mx)/r_m$。注意，对于 $r_m\in(0,r_0)$，有 $B_1\cap\left\{x_2<\frac{x_2^0-x_2^{\mathrm{st}}}{r_m}\right\}=\varnothing$，其中 $r_0=x_2^{\mathrm{st}}-x_2^0$，这意味着

$$\int_{B_1\cap\left\{x_2<\frac{x_2^0-x_2^{\mathrm{st}}}{r_m}\right\}}(x_2^0-x_2^{\mathrm{st}}-r_mx_2)\chi_{\{u_m<0\}}dx\to 0\quad\text{as } m\to\infty.$$

此外， u_m 在 $W^{1,\,2\,\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^2\right)$ 中强收敛到 u_∞ ，以及从有界变差空间到 L^1 的紧嵌入，意味着 u_∞ 满足

$$0=\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u_\infty|^2\,\mathrm{div}\phi-2\nabla u_\infty D\phi\nabla u_\infty+\left(x_2^{\mathrm{st}}-x_2^0\right)\chi_0\mathrm{div}\phi\right)dx,\tag{3.27}$$

对于任意 $\phi\in C_0^1\left(\mathbb{R}^2,\ \mathbb{R}^2\right)$，其中 χ_0 是 $\chi_{\{u_m>0\}}$的强 L^1_{loc} 极限。利用以下事实:

$$\chi_0\in\{0,1\}\quad\text{a.e.}\quad\text{and}\quad\int_{B_r(x^0)}u_m^+\left(1-\chi_{\{u_m>0\}}\right)dx=0,$$

u_m 的局部一致收敛意味着

$$\chi_0=1\quad\text{in }\{u_\infty>0\}.\tag{3.28}$$

现在，选取一个测试函数 ϕ ，其支集位于 $\{u_\infty^+=0\}$的内部，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left(x_2^{\mathrm{st}}-x_2^0\right)\chi_0\mathrm{div}\phi dx=0.\tag{3.29}$$

因此， χ_0 在 $\{u_\infty^+=0\}$的内部是一个常数。

由于 u_∞ 是一次齐次函数，我们分两步完成此证明。

步骤 1。 首先，假设 $\{u_\infty>0\}=\varnothing$。

结合 (3.28) 和 (3.29) 可知，在 $\{u_\infty^+=0\}$ 的内部， $\chi_0=0$ 只能为 0 或 1。因此，密度有两种形式:

$$M_{x^{\mathrm{st}},u,1}(0^+)=\begin{cases}0, & \text{if }\chi_0=0,\\ \int_{B_1}\left(x_2^{\mathrm{st}}-x_2^0\right)dx=\left(x_2^{\mathrm{st}}-x_2^0\right)\omega_2, & \text{if }\chi_0=1,\end{cases}$$

其中， ω_2 是 $\mathbb{R}^2$ 中单位球的体积。

步骤 2. $\{u_\infty>0\}\neq\varnothing$.

由于 $\left|\nabla u^{-}\left(x^{\mathrm{st}}\right)\right|=0$，缩放得到

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left|\nabla u_m^{-}\right|^2 dx=\int_{\mathbb{R}^2}\left|\nabla u^{-}\left(x^{\mathrm{st}}+r_m x\right)\right|^2 dx\to 0 \quad \text{as } m\to\infty.$$

结合 u_m 在 $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 中强收敛到 u_∞，可得

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left|\nabla u_\infty^{-}\right|^2 dx=0.$$

因此，$|\nabla u_\infty^{-}|=0$，进而 $u_\infty^{-}=0$。

现在，取一点 $y\in\partial\{u_\infty>0\}\backslash\{O\}$。当 $\delta>0$ 足够小时，$\partial\{u_\infty>0\}$ 上的单位法向量$\nu(y)$ 在 $\partial\{u_\infty>0\}\cap B_\delta(y)$ 上为常数。将 $\phi(x)=\eta(x)\nu(y)$，其中$\eta\in C_0^1\left(B_\delta(y)\ \mathbb{R}^2\right)$，代入 (3.27) 并进行分部积分，得到

$$\int_{B_\delta(y)\cap\partial\{u_\infty>0\}}|\nabla u_\infty|^2(\eta,\nu)\,dx=\int_{B_\delta(y)\cap\partial\{u_\infty>0\}}\left(x_2^{\mathrm{st}}-x_2^0\right)(1-\chi_0)(\eta,\nu)\,dx, \tag{3.30}$$

因此，与小节 3.2 类似，由 (3.30) 可得

$$\left|\nabla u_\infty^{+}\right|^2=x_2^{\mathrm{st}}-x_2^0 \quad \text{on } \partial\{u_\infty>0\}. \tag{3.31}$$

首先，考虑 $\{u_\infty>0\}$ 恰好有一个连通分支的情形。在 ∂B_1 上求解常微分方程的 u_∞^{+}，得到 $u_\infty^{+}(x)=\sqrt{x_2^{\mathrm{st}}-x_2^0}(x\cdot e)^{+}$，其对应的密度为 $M_{x^0,\ u,\ 1}(0^{+})=\frac{1}{2}\left(\overline{x_2^{\mathrm{st}}-x_2^0}\right)\omega_2$。

另一方面，如果 $\{u_\infty>0\}$ 有两个连通分支，那么对 (3.31) 的论证表明，$|\nabla u_\infty^{+}|$ 在 $\partial\{u_\infty>0\}$的两侧取相同的常数值，相应的密度为 $M_{x^{\mathrm{st}},\ u,\ 1}(0^{+})=\left(x_2^{\mathrm{st}}-x_2^0\right)\omega_2$。□

要证明情形 2 中不存在驻点，只需证明以下两个断言。

(1) $u_\infty^{+}(x)=\sqrt{x_2^{\mathrm{st}}-x_2^0}(x\cdot e)^{+}$。(2) 当 $x_2^{\mathrm{st}}>x_2^0$时，
停滞点集 S^u 为空。

命题3.16。对于满足 $x_2^{\mathrm{st}}>x_2^0$的 $x^{\mathrm{st}}\in\partial\{u<0\}$，设 u 是 (1.15) 的弱解。则 $u_\infty^{+}(x)=\sqrt{x_2^{\mathrm{st}}-x_2^0}(x\cdot e)^{+}$。

证明。参照命题 3.15 中对 u_∞^{+} 的分类，只需证明对于某个 $\gamma>0$，$u_\infty^{+}\equiv 0$和 $u_\infty^{+}(x)=\gamma|x\cdot e|$ 是不可能的。

(1) 假设 $u_\infty^{+}\equiv 0$。由于 $x_2^{\mathrm{st}}>x_2^0$，我们可以选取足够小的 $r_0>$，使得对于所有 $0<r<r_0$，$x_2>x_2^0$ 都属于 $B_r(x^{\mathrm{st}})$。由命题 1.1 可知，这意味着 $\partial\{u<0\}=\Gamma_{\mathrm{tp}}$ 在 $B_r(x^{\mathrm{st}})$ 中局部成立。

现在，由 $u_\infty^{+}\equiv 0$ 可得 $\Delta u_\infty^{+}=0$。按照定理 3.3 的证明，我们对任意 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 得到恒等式

$$\Delta u^{+}(B_r(x^{\mathrm{st}}))=\int_{\partial\{u>0\}\cap B_r(x^{\mathrm{st}})}\varphi\left|\nabla u^{+}\right|dS.$$

在 Γ_{tp} 上，我们有 $|\nabla u^+|^2 = |\nabla u^-|^2 + x_2 - x_2^0 \geqslant x_2 - x_2^0$；而在 Γ_{op}^+ 上，我们有 $|\nabla u^+|^2 = (x_2 - x_2^0)^+$。考虑

$$u_m^+(x) = \frac{u^+\left(x^{\mathrm{st}} + r_m x\right)}{r_m}.$$

由上述下界可知，对于某个常数 $C_0 > 0$ ，

$$\left|\nabla u_m^+\right|^2 = \left|\nabla u^+(r_m x + x^{\mathrm{st}})\right|^2 \geqslant x_2^{\mathrm{st}} - x_2^0 + r_m x_2 \geqslant C_0 \quad \text{on } \partial_{\mathrm{red}}\{u_m > 0\} \cap B_1.$$

因此，

$$0 \leftarrow \Delta u_m^+(B_1) \geqslant \int_{\partial_{\mathrm{red}}\{u_m>0\}\cap B_1} \left|\nabla u_m^+\right| dS > 0 \quad \text{as } m \to \infty,$$

这就产生了矛盾。因此，假设 $u_\infty^+ = 0$ 不成立。

(2) 假设对于某个 $\gamma > 0$， $u_\infty^+(x) = \gamma\,|x \cdot e|$。注意到 u_∞^+ 满足

$$\begin{cases} \Delta u_\infty^+ = 0, & \text{in } \{u_\infty > 0\}, \\ |\nabla u_\infty^+|^2 = x_2^{\mathrm{st}} - x_2^0, & \text{on } \partial\{u_\infty > 0\}, \end{cases}$$

这意味着 u_∞^+ 是单相流问题的一个解。然而，直接计算表明，与 $u_\infty^+(x) = \gamma\,|x \cdot e|$ 相关的密度严格小于 $\left(x_2^{\mathrm{st}} - x_2^0\right)\omega_2$，这与 [2] 中定理 4.3 所确立的下界矛盾。因此， $u_\infty^+(x)$ 不可能具有这种形式。□

这里的一个关键观察是 $\partial\{u < 0\} = \Gamma_{\mathrm{tp}} \subset \partial\{u > 0\}$。由此可知， Γ_{tp} 是 $\Omega \cap \{x_2 > x_2^0\}$ 中的一条局部 $C^{1,\,\beta}$ 曲线，对任意 $\beta \in (0,1)$ 都成立。反过来，这种正则性意味着停滞点集 S^u 在 $\{x_2 > x_2^0\}$ 中必为空，即 $x_2^{\mathrm{st}} = x_2^0$。

定理 3.17. 对任意满足 $x_2 > x_2^0$ 的 $x \in S^u$，令 u 为 (1.15) 的弱解，则停滞点集 $S^u = \varnothing$。

证明. 反设 S^u 在 $\Omega \cap \{x_2 > x_2^0\}$ 中非空。于是存在一个停滞点 $x^{\mathrm{st}} \in S^u$，使得 $\left|\nabla u^+(x^{\mathrm{st}})\right| = \sqrt{x_2^{\mathrm{st}} - x_2^0} > 0$。

相应的爆破极限具有如下形式： $u_\infty^+(x) = \gamma\,(x \cdot e)^+$，其中 $\gamma = \sqrt{x_2^{\mathrm{st}} - x_2^0}$。接下来，我们采用关于 u^+ 的 ε-正则性结果，该结果可通过调整 [20] 的论证得到。具体而言，存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得若 $U_m^+(x)$ 满足

$$\gamma_1\,(x \cdot e_1 - \varepsilon)^+ \leqslant U_m^+ \leqslant \gamma_1\,(x \cdot e_1 + \varepsilon)^+ \quad \text{in } B_1,$$

对于某个 $\gamma_1 \geqslant \gamma > 0$ 以及任意 $\varepsilon < \varepsilon_0$，则可以找到常数 γ_2、 $C > 0$，一个满足 $|\gamma_1 - \gamma_2| + |e_1 - e_2| \leqslant C\varepsilon$ 的单位向量 e_2，以及 $\rho \in (0,\ 1)$，使得

$$\gamma_2\left(x \cdot e_2 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^+ \leqslant (U_m)_\rho^+(x) \leqslant \gamma_2\left(x \cdot e_2 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^+ \quad \text{in } B_1,$$

其中

$$(U_m)_\rho^+(x) = \frac{U_m^+(\rho x)}{\rho} = \frac{u^+\left(x^{\mathrm{st}} + r_m \rho x\right)}{r_m \rho},$$

且 $x \in \Gamma_{\mathrm{tp}} = \partial\{u > 0\} \cap \partial\{u < 0\}$。

我们省略证明中的技术细节，仅概述主要思路。完整论证见 [20]。关键步骤是引入线性化序列

$$w_m = \frac{U_m^+ - \gamma\,(x \cdot e)^+}{\varepsilon_m \gamma},$$

并分析其极限行为。

- **步骤 1. 边界哈纳克不等式与平坦度改进。**
  利用部分边界哈纳克引理（见 [20]），我们证明 w_m 收敛到一个 H¨older 函数 w_∞。这表明，如果 u 在 B_1 中对 $\gamma(x \cdot e)^+$ 是 ε- 平坦的，那么对于某个 $0 < c < 1$，它必然会变为 $(1-c)\varepsilon$-平坦。这在数学上对应于以下陈述：如果

$$\gamma\,(x \cdot e - \varepsilon)^+ \leqslant u(x) \leqslant \gamma\,(x \cdot e + \varepsilon)^+ \quad \text{in } B_1,$$

  then

$$\gamma\,(x \cdot e - (1-c)\varepsilon)^+ \leqslant u(x) \leqslant \gamma\,(x \cdot e + (1-c)\varepsilon)^+ \quad \text{in } B_{1/2}.$$

- **步骤 2. 极限线性化问题。**
  我们验证极限 w_∞ 满足线性化问题

$$\begin{cases} \Delta w_\infty = 0, & \text{in } B_1 \cap \{x \cdot e > 0\}, \\ \nabla w_\infty \cdot e = 0, & \text{on } B_1 \cap \{x \cdot e = 0\}. \end{cases}$$

- **结论。自由边界的正则性。**
  $\partial\{u > 0\} \cap \partial\{u < 0\}$ 的平坦性衰减直接由步骤 1 和 2 中得到的 w_∞ 的正则性推出。

在情形 2 中，$|\nabla u^+|$ 在停滞点附近严格为正。借鉴 [20], 中引理 2.5 的论证，可以直接验证 u 是方程 (1.15) 的粘性解。此外，自由边界 $\partial\{u > 0\} \cap \partial\{u < 0\}$ 的平坦性衰减意味着方向向量 e 唯一，并且对于某个 $\beta \in$，其中 (0,1)，$\partial\{u > 0\} \cap \partial\{u < 0\}$ 在每个 x^{st} 的一个小邻域内具有 $C^{1,\beta}$-正则性。

在情形 2 中，$\Gamma_{\mathrm{op}}^- \cap \{x_2 > x_2^0\} = \varnothing$ 意味着 $\partial\{u < 0\} = \Gamma_{\mathrm{tp}}$。因此，我们得到自由边界 $\partial\{u < 0\}$ 在 $\Omega \cap \{x_2 > x_2^0\}$ 中局部是一条 $C^{1,\beta}$ 曲线，对每个 $\beta \in (0,1)$ 均成立。这种正则性与停滞点处的既定假设 $\left|\nabla u^-(x^{\mathrm{st}})\right| = 0$ 矛盾，从而完成证明。□

Appendix C

命题 2.2 的证明 我们将证明分为三个步骤。

步骤 1. 我们计算 $J(r)$ 关于 r 的导数。

设 $y=\frac{1}{r}(x-x^0)$。那么

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}J(r)&=\frac{d}{dr}\left(\int_{\partial B_1} r\left(\left(u^+(x^0+ry)\right)^2+\left(u^-(x^0+ry)\right)^2\right)dS\right)\\&=\int_{\partial B_1}\left(u^+(x^0+ry)\right)^2dS+2r\int_{\partial B_1}u^+(x^0+ry)\left(\nabla u^+\left(x^0+ry\right),y\right)dS\\&\quad+\int_{\partial B_1}\left(u^-(x^0+ry)\right)^2dS+2r\int_{\partial B_1}u^-(x^0+ry)\left(\nabla u^-\left(x^0+ry\right),y\right)dS\\&=\frac{1}{r}\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^+\right)^2dS+2\int_{\partial B_r(x^0)}u^+\left(\nabla u^+,\nu\right)dS\\&\quad+\frac{1}{r}\int_{\partial B_r(x^0)}\left(u^-\right)^2dS+2\int_{\partial B_r(x^0)}u^-\left(\nabla u^-,\nu\right)dS.\end{aligned}$$

步骤 2. 接下来，我们计算 $I(r)$关于 r的导数。对于较小的 $\tau>0$，定义

$$\eta_\tau(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant r-\tau,\\ \frac{r-t}{\tau}, & r-\tau<t<r,\\ 0, & r\leqslant t<\infty.\end{cases}$$

令 $\phi_\tau(x)=\eta_\tau(|x-x^0|)(x-x^0)$。由于弱解的定义要求测试函数 $\eta(x)\in C_0^1(B_r(x^0)\ \mathbb{R}^2)$，在以下计算中，我们用其标准磨光 $\tilde{\phi}_\tau(x)\in C_0^1(B_r(x^0)\ \mathbb{R}^2)$替换 $\phi_\tau(x)$。

根据弱解的定义，

$$\begin{aligned}0=&\int_\Omega\left(\left|\nabla u^+\right|^2+\left(x_2-x_2^0\right)^+\chi_{\{u>0\}}\right)\left(\eta_\tau'(|x-x^0|)\left|x-x^0\right|+2\eta_\tau(|x-x^0|)\right)dx\\&+\int_\Omega\left(\left|\nabla u^-\right|^2+\left(x_2^0-x_2\right)^+\chi_{\{u<0\}}\right)\left(\eta_\tau'(|x-x^0|)\left|x-x^0\right|+2\eta_\tau(|x-x^0|)\right)dx\\&-2\int_\Omega\left|\nabla u^+\right|^2\eta_\tau(|x-x^0|)dx-2\left(\nabla u^+,\frac{x-x^0}{|x-x^0|}\right)^2\eta_\tau'(|x-x^0|)\left|x-x^0\right|dx\\&-2\int_\Omega\left|\nabla u^-\right|^2\eta_\tau(|x-x^0|)dx-2\left(\nabla u^-,\frac{x-x^0}{|x-x^0|}\right)^2\eta_\tau'(|x-x^0|)\left|x-x^0\right|dx\\&+\int_{\Omega\cap\{x_2>x_2^0\}}\left(x_2-x_2^0\right)\chi_{\{u>0\}}\left(\eta_\tau'(|x-x^0|)\left|x-x^0\right|+2\eta_\tau(|x-x^0|)\right)dx\\&+\int_{\Omega\cap\{x_2<x_2^0\}}\left(x_2^0-x_2\right)\chi_{\{u<0\}}\left(\eta_\tau'(|x-x^0|)\left|x-x^0\right|+2\eta_\tau(|x-x^0|)\right)dx\\&+\int_{\Omega\cap\{x_2>x_2^0\}}\chi_{\{u>0\}}\eta_\tau(|x-x^0|)\left(x_2-x_2^0\right)dx\\&-\int_{\Omega\cap\{x_2<x_2^0\}}\chi_{\{u<0\}}\eta_\tau(|x-x^0|)\left(x_2-x_2^0\right)dx.\end{aligned}$$

令 $\tau \to 0$，我们得到

$$\begin{aligned}
0 =& - r \int_{\partial B_r(x^0)} \left(\left| \nabla u^+ \right|^2 + (x_2 - x_2^0)^+ \chi_{\{u>0\}} \right) dS \\
& - r \int_{\partial B_r(x^0)} \left(\left| \nabla u^- \right|^2 + \left((x_2 - x_2^0)^+ + x_2^0 - x_2 \right) \chi_{\{u<0\}} \right) dS \\
& + 2r \int_{\partial B_r(x^0)} \left(\nabla u^+, \nu \right)^2 + \left(\nabla u^-, \nu \right)^2 dS + \int_{B_r(x^0) \cap \{x_2 > x_2^0\}} 3 \left(x_2 - x_2^0 \right) \chi_{\{u>0\}} dx \\
& + \int_{B_r(x^0) \cap \{x_2 < x_2^0\}} 3 \left(x_2^0 - x_2 \right) \chi_{\{u<0\}} dx,
\end{aligned}$$

其中 $\nu = \frac{x - x^0}{|x - x^0|}$。因此，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} I(r) =& \int_{\partial B_r(x^0)} \left(\left| \nabla u^+ \right|^2 + \left(x_2 - x_2^0 \right)^+ \chi_{\{u>0\}} \right) dS \\
& + \int_{\partial B_r(x^0)} \left(\left| \nabla u^- \right|^2 + \left(x_2^0 - x_2 \right)^+ \chi_{\{u<0\}} \right) dS \\
=& 2 \int_{\partial B_r(x^0)} \left(\nabla u^+, \nu \right)^2 + \left(\nabla u^-, \nu \right)^2 dS + \frac{1}{r} \int_{B_r(x^0) \cap \{x_2 > x_2^0\}} 3 \left(x_2 - x_2^0 \right) \chi_{\{u>0\}} dx \\
& + \frac{1}{r} \int_{B_r(x^0) \cap \{x_2 < x_2^0\}} 3 \left(x_2^0 - x_2 \right) \chi_{\{u<0\}} dx.
\end{aligned}$$

步骤 3。为求得 $M_{x^0,\ u}(r)$ 的导数，我们结合 $\frac{d}{dr} I(r)$ 和 $\frac{d}{dr} J(r)$。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} M_{x^0,u}(r) =& \frac{d}{dr} \left(r^{-3} I(r) - \frac{3}{2} r^{-4} J(r) \right) \\
=& - 3r^{-4} I(r) + r^{-3} \frac{d}{dr} I(r) + 6r^{-5} J(r) - \frac{3}{2} r^{-4} \frac{d}{dr} J(r) \\
=& - 3r^{-4} \int_{B_r(x^0)} \left(|\nabla u|^2 + \left(x_2 - x_2^0 \right)^+ \chi_{\{u>0\}} + \left(x_2^0 - x_2 \right)^+ \chi_{\{u<0\}} \right) dx \\
& + 2r^{-3} \int_{\partial B_r(x^0)} \left(\nabla u^+, \nu \right)^2 + \left(\nabla u^-, \nu \right)^2 dS \\
& + 3r^{-4} \left(\int_{B_r(x^0) \cap \{x_2 > x_2^0\}} \left(x_2 - x_2^0 \right) \chi_{\{u>0\}} dx \int_{B_r(x^0) \cap \{x_2 < x_2^0\}} \left(x_2^0 - x_2 \right) \chi_{\{u<0\}} dx \right) \\
& + 6r^{-5} \int_{\partial B_r(x^0)} u^2 dS - \frac{3}{2} r^{-5} \int_{\partial B_r(x^0)} u^2 dS \\
& - 3r^{-4} \int_{\partial B_r(x^0)} u^+ \left(\nabla u^+, \nu \right) + u^- \left(\nabla u^-, \nu \right) dS.
\end{aligned}$$

由于 $\Delta u = 0$ 属于 $\{u \neq 0\}$，对于任意 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\int_{B_r(x^0)} \left(\nabla u^+, \nabla \left(\max \left\{ u^+ - \varepsilon, 0 \right\} \right)^{1+\varepsilon} \right) dS = \int_{\partial B_r(x^0)} \left(\max \left\{ u^+ - \varepsilon, 0 \right\} \right)^{1+\varepsilon} \left(\nabla u^+, \nu \right) dS,$$

and

$$\int_{B_r(x^0)} \left(\nabla u^-, \nabla \left(\min\left\{u^- + \varepsilon, 0\right\}\right)^{1+\varepsilon}\right) dS = \int_{\partial B_r(x^0)} \left(\min\left\{u^- + \varepsilon, 0\right\}\right)^{1+\varepsilon} \left(\nabla u^-, \nu\right) dS.$$

由于 $\varepsilon \to 0$

$$\int_{B_r(x^0)} \left|\nabla u^+\right|^2 dx = \int_{\partial B_r(x^0)} u^+ \left(\nabla u^+, \nu\right) dS,$$

and

$$\int_{B_r(x^0)} \left|\nabla u^-\right|^2 dx = \int_{\partial B_r(x^0)} u^- \left(\nabla u^-, \nu\right) dS.$$

因此,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} M_{x^0,u}(r) =& -6r^{-4} \int_{\partial B_r(x^0)} u^+ \left(\nabla u^+, \nu\right) dS - 6r^{-4} \int_{\partial B_r(x^0)} u^- \left(\nabla u^-, \nu\right) dS \\
&+ 2r^{-3} \int_{\partial B_r(x^0)} \left(\nabla u^+, \nu\right)^2 dS + 2r^{-3} \int_{\partial B_r(x^0)} \left(\nabla u^-, \nu\right)^2 dS \\
&+ \frac{9}{2} r^{-5} \int_{\partial B_r(x^0)} \left(u^+\right)^2 dS + \frac{9}{2} r^{-5} \int_{\partial B_r(x^0)} \left(u^-\right)^2 dS \\
=& 2r^{-3} \int_{\partial B_r(x^0)} \left(\left(\nabla u^+, \nu\right) - \frac{3}{2r} u^+\right)^2 + \left(\left(\nabla u^-, \nu\right) - \frac{3}{2r} u^-\right)^2 dS,
\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

命题 2.3 的证明 回顾命题 2.2 的证明，可以直接推出

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} I(r) =& 2 \int_{\partial B_r(x^0)} \left(\nabla u^+, \nu\right)^2 dS + \frac{3}{r} \int_{B_r(x^0)} \left(x_2 - x_2^0\right)^+ \chi_{\{u>0\}} dx \\
&+ 2 \int_{\partial B_r(x^0)} \left(\nabla u^-, \nu\right)^2 dS + \frac{3}{r} \int_{B_r(x^0)} \left(x_2^0 - x_2\right)^+ \chi_{\{u<0\}} dx,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} J(r) =& \frac{1}{r} \int_{\partial B_r(x^0)} \left(u^+\right)^2 dS + 2 \int_{\partial B_r(x^0)} u^+ \left(\nabla u^+, \nu\right) dS \\
&+ \frac{1}{r} \int_{\partial B_r(x^0)} \left(u^-\right)^2 dS + 2 \int_{\partial B_r(x^0)} u^- \left(\nabla u^-, \nu\right) dS.
\end{aligned}$$

则对于几乎处处的 $r \in (0, r_0)$ 和 $x_2^{\mathrm{st}} = x_2^0$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dr} M_{x^0,u,\alpha}(r) =& \frac{d}{dr}\left(r^{-2\alpha} I(r) - \alpha r^{-2\alpha-1} J(r)\right) \\
=& -2\alpha r^{-2\alpha-1} \int_{B_r(x^0)} \left(|\nabla u|^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^+ \chi_{\{u>0\}} + \left(x_2^0 - x_2\right)^+ \chi_{\{u<0\}} \right) dx \\
&+ 2r^{-2\alpha} \int_{\partial B_r(x^0)} \left(\nabla u^+, \nu\right)^2 dS + \int_{\partial B_r(x^0)} \left(\nabla u^-, \nu\right)^2 dS \\
&+ \frac{3}{r} \int_{B_r(x^0)} \left(\left(x_2 - x_2^0\right)^+ \chi_{\{u>0\}} + \left(x_2^0 - x_2\right)^+ \chi_{\{u<0\}} \right) dx \\
&+ \alpha\left(2\alpha+1\right) r^{-2\alpha-2} \int_{\partial B_r(x^0)} u^2 dS - \alpha r^{-2\alpha-2} \int_{\partial B_r(x^0)} u^2 dS \\
&+ 2\alpha r^{-2\alpha-1} \int_{\partial B_r(x^0)} u^+ \left(\nabla u^+, \nu\right) dS + 2\alpha r^{-2\alpha-1} \int_{\partial B_r(x^0)} u^- \left(\nabla u^-, \nu\right) dS \\
=& 2r^{-2\alpha-1} \int_{\partial B_r(x^0)} \left(\nabla u^+, \nu\right)^2 dS - 4\alpha r^{-2\alpha-1} \int_{\partial B_r(x^0)} u^+ \left(\nabla u^+, \nu\right) dS \\
&+ 2r^{-2\alpha-1} \int_{\partial B_r(x^0)} \left(\nabla u^-, \nu\right)^2 dS - 4\alpha r^{-2\alpha-1} \int_{\partial B_r(x^0)} u^- \left(\nabla u^-, \nu\right) dS \\
&+ 2\alpha^2 r^{-2\alpha-2} \int_{\partial B_r(x^0)} \left(u^+\right)^2 dS + 2\alpha^2 r^{-2\alpha-2} \int_{\partial B_r(x^0)} \left(u^-\right)^2 dS \\
&+ (3-2\alpha) r^{-2\alpha-1} \int_{B_r(x^0)} \left(\left(x_2 - x_2^0\right)^+ \chi_{\{u>0\}} + \left(x_2^0 - x_2\right)^+ \chi_{\{u<0\}} \right) dx \\
=& 2r^{-2\alpha} \int_{\partial B_r(x^0)} \left(\left(\nabla u^+, \nu\right) - \frac{\alpha}{r} u^+ \right)^2 + \left(\left(\nabla u^-, \nu\right) - \frac{\alpha}{r} u^- \right)^2 dS \\
&+ (3-2\alpha) r^{-2\alpha-1} \int_{B_r(x^0)} \left(\left(x_2 - x_2^0\right)^+ \chi_{\{u>0\}} + \left(x_2^0 - x_2\right)^+ \chi_{\{u<0\}} \right) dx.
\end{aligned}
$$

□

References

[1] H. W. Alt、L. A. Caffarelli、A. Friedman，具有两相及其自由边界的变分问题，*Trans. Amer. Math. Soc.* 282 （1984），431-461。[2] H. W. Alt、L. A. Caffarelli，带自由边界的最小化问题的存在性与正则性， *J. ReineAngew. Math.* 325（1981），105–144。[3] H. Brezis，泛函分析、索伯列夫空间与偏微分方程， *Springer New York.* 2010。[4] L. A. Caffarelli，关于自由边界正则性的哈纳克不等式方法。I. 利普希茨自由边界是 $C^{1,\alpha}$， *Rev. Mat. Iberoamericana.* 3 （1987），139-162。[5] L. A. Caffarelli，关于自由边界正则性的哈纳克不等式方法。II. 平坦自由边界是利普希茨的， *Comm. Pure Appl. Math.* 42（1989），55-78。[6] L. A. Caffarelli，关于自由边界正则性的哈纳克不等式方法。III. 存在性理论、紧性以及对 X的依赖性， *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.* 15 （1988），583-602。[7] L. A. Caffarelli、A. Friedman，线性与超线性椭圆方程解的零集的部分正则性， *J. Differ. Equ.* 60 （1985），420–433。[8] A. J. Chorin、J. E. Marsden，流体力学数学导论， *Springer New York.* 1993。

[9] L. A. Caffarelli、S. Salsa，自由边界问题的几何方法， *Graduate Studies in Mathe-matics Ams.* 第68卷。美国数学会，普罗维登斯，2005年。[10] D. De Silva，带右端项问题的自由边界正则性， *Interfaces Free Bound.* 13（2011），223-238。[11] G. David、M. Engelstein、M. Smit Vega Garcia、T. Toro，两相自由边界问题（几乎）极小化子的分支点， *Forum Math. Sigma.* 11 （2023），1-28。[12] D. De Silva、F. Ferrari、S. Salsa，带分布源的两相问题：自由边界的正则性， *Anal. PDE.* 7 （2014），267-310。[13] D. De Silva、F. Ferrari、S. Salsa，带分布源问题中自由边界的正则性， *Geom. Methods PDE's Springer INdAM Ser.* 13 （2015），313-340。[14] D. De Silva、F. Ferrari、S. Salsa，带分布源的两相自由边界问题的 Perron 解， *Nonlinear Anal.* 121（2015），382-402。[15] D. De Silva、F. Ferrari、S. Salsa，受散度型方程支配的两相问题中自由边界的正则性及其应用， *Nonlinear Anal.* 138 （2016），3-30。[16] D. De Silva、F. Ferrari、S. Salsa，两相自由边界问题：从存在性到光滑性， *Adv.Nonlinear Stud.* 17 （2017），369-385。[17] L. L. Du、J. L. Huang、Y. Pu，带涡量的稳态轴对称无黏流的自由边界 I：退化点附近， *Comm. Math. Phys.* 400 （2023），2137-2179。[18] L. L. Du、F. Ji，两相轴对称无黏流体自由边界的正则性， *arXiv:*2403.00348（2024）。[19] L. L. Du、F. Ji，重力场中两相无黏流体自由边界的奇异与正则分析， *arXiv: 2502.00720*（2025）。[20] G. De Philippis、L. Spolaor、B. Velichkov，两相伯努利问题自由边界的正则性， *Invent. Math.* 225 （2021），347-394。[21] L. L. Du、C. L. Yang，带涡量的稳态轴对称无黏流的自由边界 II：非退化点附近， *Comm. Math. Phys.* 405 （2024），第262号，58页。[22] L. C. Evans、R. F. Gariepy，测度论与函数的精细性质， *CRC Press.* 1991。[23] L. C. Evans、S. M¨uller，Hardy 空间与具有非负涡量的二维欧拉方程， *J. Amer. Math. Soc.* 7（1994），199–219。[24] S. Friedland、W. K. Hayman，球面上狄利克雷问题的特征值不等式与次调和函数的增长， *Comment. Math. Helvetici.* 51 （1976），133-161。[25] S. Grandison、J. M. Vanden-Broeck、D. T. Papageorgiou、T. Miloh、B. Spivak，电流体动力学流动中的轴对称波， *J. Engrg. Math.* 62 （2008），133-148。[26] D. Gilbarg、N. S. Trudinger，二阶椭圆型偏微分方程，1998年版本的重印本，数学经典， *Springer-Verlag, Berlin.* 2001。[27] M. S. V. Garcia、E. Vˇarvˇarucˇa、G. S. Weiss，电流体动力学方程轴对称自由边界中的奇异性， *Arch. Ration. Mech. Anal.* 222（2016），573-601。[28] J. Jiang、B. Bao、M. Li、J. Sun、C. Zhang、Y. Li、F. Li、X. Yao、Y. Song，利用喷墨打印制造透明多层电路， *Adv. Mater.* 28（2016），1420–1426。[29] F. Lacava，经典电动力学， *Springer Cham.* 2022。[30] O. M. Stuetzer，磁流体动力学与电流体动力学， *Phys. Fluids.* 5 （1962），534-544。[31] G. G. Stokes，关于能够以不变形状传播的振荡无旋波的最大高度的考察， *Mathematical and Physical Papers.* 第1卷（1880），225-228。[32] K. C. Sahu、M. K. Tripathi、J. Chaudhari，交变电场作用下弱导电液滴的模拟， *Electrophoresis.* 41 （2020），1953-1960。[33] G. Taylor，电场中水滴的破碎， *Proc. Roy. Soc. London Ser. A.* 280 （1964），383-397。

[34] E. V̌arv̌aruc̆a，G. S. Weiss，广义斯托克斯猜想的几何方法， *Acta Math.* 206(2011)，363-403。[35] E. V̌arv̌aruc̆a，G. S. Weiss，带涡量波的斯托克斯猜想， *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire.* 29(2012)，861-885。[36] E. V̌arv̌aruc̆a，G. S. Weiss，受重力作用的稳态轴对称自由表面流的奇异性， *Comm.Pure Appl. Math.* 67(2014)，1263-1306。[37] G. S. Weiss，自由边界最小化问题的部分正则性， *J. Geom. Anal.* 9 (1999)，317-326。[38] G. S. Weiss，G. Zhang，二维稳态毛细重力水波的自由边界方法， *Arch. Ration. Mech. Anal.* 203 (2012)，747-768。[39] N. M. Zubarev，导电流体自由表面电流体动力学不稳定性的硬激发判据， *Phys. D.* 152-153(2001)，787-793。