任意子-PT对称晶格中的相变与拓扑保护

Ruiying Zhang[1], *Ziteng Wang*[1], *Daohong Song*[1,2], *Liqin Tang*[1, 2*], *Konstantinos G. Makris*[3, 4*], 以及 *Zhigang Chen*[1, 2*]

Ruiying Zhang 和 Ziteng Wang 对本研究的贡献相同。

Ruiying Zhang、Ziteng Wang、Daohong Song、Liqin Tang、Zhigang Chen 教育部弱光非线性光子学重点实验室、天津经济技术开发区应用物理研究院及南开大学物理学院，中国天津 300457 *电子邮件： tanya@nankai.edu.cn; makris@physics.uoc.gr; zgchen@nankai.edu.cn

Liqin Tang、Daohong Song、Zhigang Chen 极端光学协同创新中心，山西大学，中国山西太原 030006

Konstantinos G. Makris

国际理论物理中心，克里特大学物理系，71003，希腊伊拉克利翁；电子结构与激光研究所（IESL），FORTH，71110，希腊伊拉克利翁

资助： 中国国家重点研发计划（2022YFA1404800）；国家自然科学基金（12134006、W2541003、12374309、12274242 和 124B2078）；天津市自然科学基金（21JCJQJC00050）；中国111计划（B23045）；电子结构与激光研究所、FORTH 和克里特大学获得欧洲研究委员会通过巩固者资助（ERC-Consolidator）提供的资助，资助协议编号为 101045135（Beyond_Anderson）。

关键词：任意子-PT对称性、相变、边缘态、拓扑保护**摘要：** 宇称-时间（PT）对称性和反PT对称性因其非厄米谱性质而备受关注，尤其是在各自的对称性未破缺区间中分别出现纯实本征值和纯虚本征值这一现象。近期，这两种情形被统一到一个称为任意子-PT对称性的更一般框架之下，但其在波导平台中的物理意义，以及在扩展晶格系统中的相应拓扑特征，仍鲜有研究。在此，我们系统研究了任意子-PT对称

系统在波导晶格中的相变和拓扑保护。在对称性未破缺区间，所有体态本征值的辐角被限制为两个相差 π 的离散值，从而产生独特的振荡传播动力学，并伴随可控的放大或耗散。对于一维晶格，能带在相变过程中呈现能隙闭合与重开。此外，在对称性未破缺区间，拓扑边缘态出现在体能隙内，并受到广义赝任意子厄米性（PAH）对称性的保护。我们的研究确立了任意子-PT对称性作为非厄米波导系统的一种新的可调自由度，其中本征值辐角为信息编码提供了一个自然的物理量。本研究拓展了广义非厄米对称性下拓扑保护的概念基础。

1. 引言

拓扑已成为现代物理学中的统一框架，为理解和控制各种物理系统的行为提供了深刻洞见。[1–6] 这一框架的基石之一是体边对应，它确立了体拓扑不变量与稳健边界态出现之间的直接联系。这些拓扑边界态对保持特定对称性的微扰表现出非凡的韧性，从而体现出拓扑保护。近年来，拓扑物理学取得了重大进展，研究范围也从厄米系统拓展至非厄米区域。[7–18] 在宇称-时间（PT）对称性[19–21] 和非厄米光子学的背景下探索拓扑，[22–30] 其中增益或损耗自然产生于非保守系统，为深化理论认识以及实现对复杂物理系统的实际控制提供了有前景的方向。

非厄米系统通常表现出复特征值和非正交本征态，[19–21] 支持一系列厄米系统中不存在的现象，包括PT对称性相变、[22–31] 例外点（EP）、[32–41] 以及非厄米趋肤效应（NHSE）。[42–49] 另一方面，对称性在物理学中发挥着关键作用，代表系统在特定变换下的不变性和守恒定律。在非厄米系统中，PT对称性和反PT对称性[50–53] 因能够在对称性未破缺区间产生纯实或纯虚特征值而受到越来越多的关注。当本征态不再遵循其内在对称性时，便会发生相变。临界点对应于例外点（EP），其表现出一种独特的非厄米简并。[54–59] 最近，一种名为任意子-PT对称性的新概念被提出，[60] 它通过可调相位因子统一了PT对称性和反PT对称性。迄今为止，任意子-PT对称性仅应用于数量有限的研究中，例如复耦合激光器、[61] 量子系统中的熵动力学，[62] 以及耦合谐振器系统中的可调例外点。[63] 然而，这些研究主要集中于仅包含少数耦合元件的系统，并强调可观测现象。由任意子-PT对称性本身诱导的相变尚未得到系统讨论。据我们所知，这种对称性尚未在扩展波导晶格中实现，相关拓扑现象仍需进一步研究。

在本研究中，我们探究了非厄米周期性波导系统中任意子-PT对称性下的相变。通过理论分析和一个简单的双位点模型，我们揭示了对称性未破缺区间的性质，在该区间内，本征值

辐角被限制为两个相差 π 的固定值。光功率呈现振荡，同时总体上发生放大或耗散。随后，我们将系统扩展至一维（1D）波导晶格，并发现参数空间可划分为三个截然不同的相：未破缺、部分破缺和完全破缺。在相变过程中，能带经历能隙闭合与重开。当耦合非平庸时，系统支持两个拓扑边缘态。在对称性未破缺区间，边缘态位于带隙内，并受到一种称为伪任意子厄米性（PAH）对称性的新对称性保护。该对称性保护边缘态的手征特性和能量相位。

2. 任意子宇称-时间对称性

任意子-PT对称性由以下对易关系定义：

$$PTH = \exp(-2i\Gamma)\, HPT, \tag{1}$$

其中，P 和 T 分别表示宇称算符和时间反演算符。Γ 是取值范围为 $[0,\pi)$ 的实参数，用于控制系统的对称性。这意味着，当 $\Gamma = 0$ 时，该关系化为 PT 对称情形；而当 $\Gamma = \pi/2$ 时，则对应反 PT 对称情形。

更具体地说，在定态（或沿传播距离均匀）系统中，本征值 E 和本征态 ψ 由定态薛定谔方程 $H\psi = E\psi$决定。对于任意给定的哈密顿量 H，若其满足方程（1）所述的任意子-PT对称性条件，则其本征值具有以下性质：

$$E = \exp(2i\Gamma)E^{*}. \tag{2}$$

星号表示复共轭，也代表时间反演，这是时间反演算符作用的结果。我们可以将本征值写成极坐标形式 $E = A\exp(i\phi)$，其中 ϕ 是复数辐角。将此极坐标形式代入方程（2），可得到关于 ϕ 的一个简单而明确的条件：

$$\phi = \Gamma + n\pi, \tag{3}$$

其中 n 为整数。方程（3）描述了任意子 PT 对称未破缺区内系统的关键特征，即本征值的辐角只能取两个固定值：Γ 和 $\Gamma+\pi$。这一推广不仅统一了其背后的数学结构，还揭示了不同物理系统中非常规的特征。

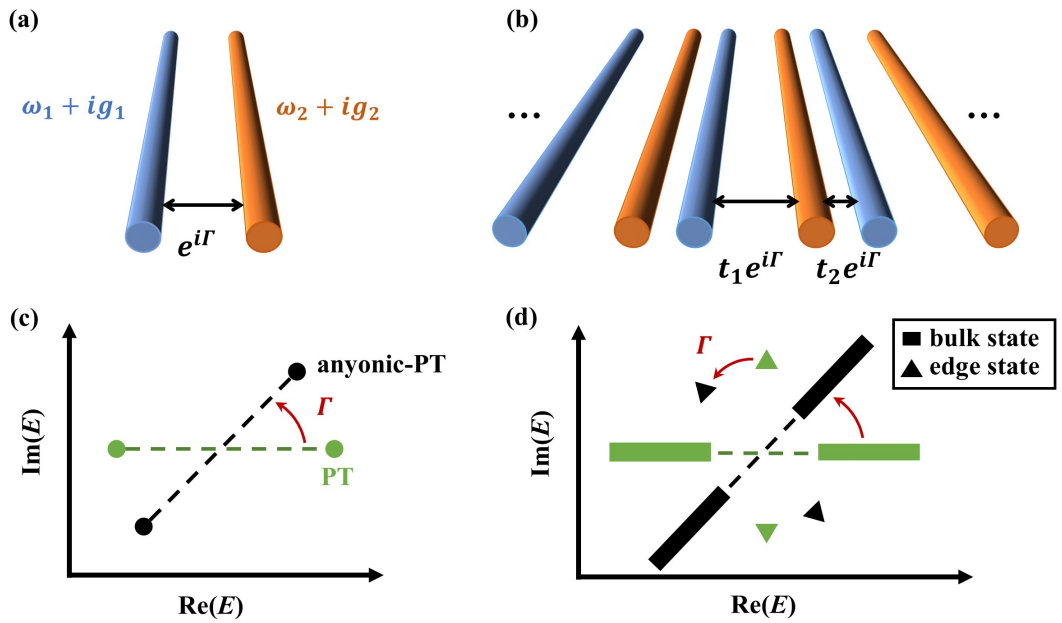


图 1. 任意子-PT对称模型及其能量特征。 (a) 任意子-PT对称下双位点模型的示意图。每个波导都具有复数格点势 $\omega_i + ig_i$。两个波导之间的耦合为 $\exp(i\Gamma)$。(b) 由与 (a) 中所示模型相同的晶胞组成的一维晶格，其胞内耦合 $t_1\exp(i\Gamma)$ 和胞间耦合 $t_2\exp(i\Gamma)$ 经调制。(c-d) 对称性未破缺区间内，PT对称情形（绿色）与任意子-PT对称情形（黑色）的本征值比较。Γ 是任意子-PT对称性的一个可控参数，表现为本征值相对于PT对称轴的旋转角。

3. 双位点模型中的相变与动力学

本节以一个简单的双位点波导模型为例（**图 1a**），研究任意子-PT对称性相变。这里，$\omega_i + ig_i$ 表示格点势，其中实部表示折射率，虚部对应增益或损耗。这种由紧束缚模型描述的双位点系统，其哈密顿量可写为：

$$H = \begin{pmatrix} \omega_1 + ig_1 & \exp(i\Gamma) \\ \exp(i\Gamma) & \omega_2 + ig_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

如果该矩阵满足任意子-PT对称性，那么通过求解方程（1），对角参数需要满足以下条件：

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \omega_1 \cos 2\Gamma + g_1 \sin 2\Gamma, \\ g_2 &= \omega_1 \sin 2\Gamma - g_1 \cos 2\Gamma. \end{aligned} \tag{5}$$

当 $\Gamma = 0$时，该模型恢复为众所周知的 PT 对称情形，其中 $\omega_1 = \omega_2$和 $g_1 = -g_2$。在这种情况下，系统的两个本征值具有相同的虚部。此外，非零的 Γ 会使所有参数在坐标轴上旋转 Γ 角，如图 1c 所示。这体现了任意子-PT对称性未破缺区域的特征值特性。

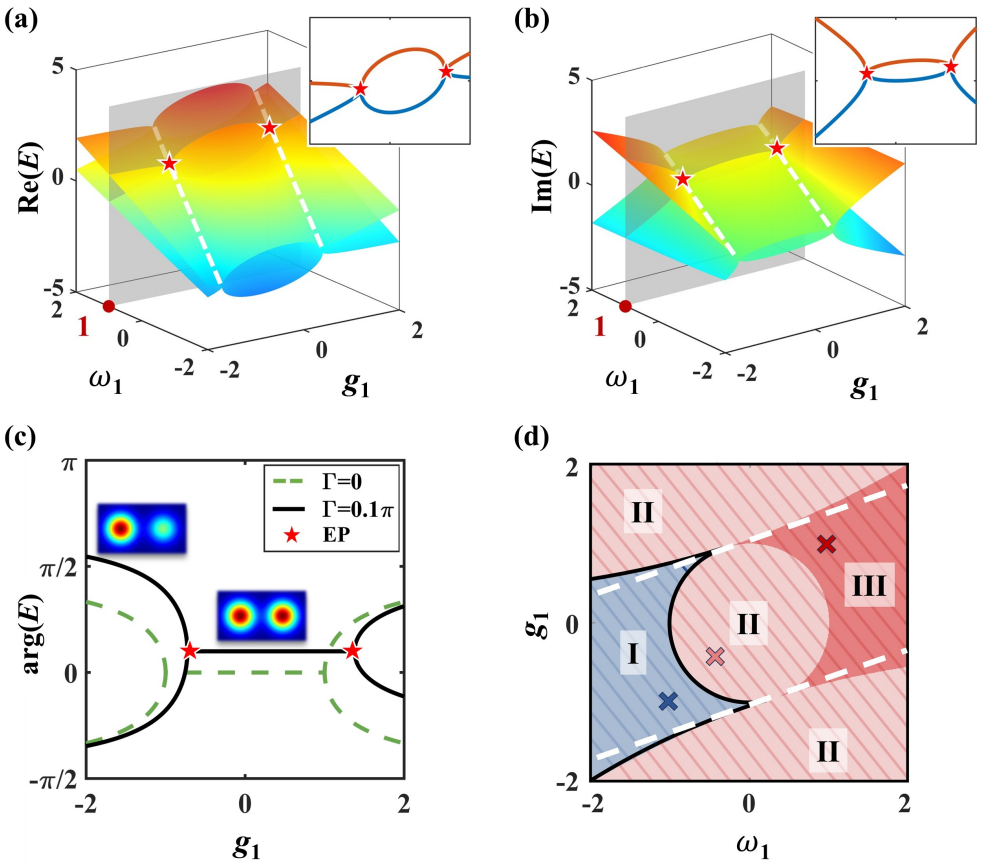


图 2. 双位点模型的本征值和传播行为。 (a-b) 参数空间中本征值的实部 (a) 和虚部 (b) 由 ω_1 和 g_1 张成，适用于 $\Gamma = 0.1\pi$。白色虚线表示相变线。灰色平面表示 $\omega_1 = 1$ 截面处的截断面，其与本征值的交点在插图中突出显示。例外点以红色五角星标出。(c) 在 $\omega_1 = 1$处不同 Γ 取值下的本征值辐角曲线。两个例外点分别出现在 g_1 约等于 -0.7 和 1.3 处。插图展示了对称性未破缺区和破缺区中的本征态振幅分布。(d) 参数空间中任意子PT对称系统的动力学相图。蓝色和红色区域由黑色曲线分隔，分别表示耗散和放大。彩色叉号表示在三个不同区域中选取的参数。区域 I：即时耗散；区域 II：延迟放大；区域 III：即时放大。

接下来，我们探讨由 ω_1 和 g_1定义的参数空间内本征值的特征。根据方程（5）中的关系，ω_2 和 g_2 可用ω_1 和 g_1表示。如**图** 2a、b 所示，在 $\Gamma = 0.1\pi$固定时，与传统PT对称情形相比，一个显著区别是本征值的实部和虚部都呈现中空形状。两个能量沿白色虚线相交，这些虚线标示了任意子PT对称相变的位置。沿着这些线，本征值和本征态均发生并合（见补充信息中的方程（S1–S3）），形成例外线，其中每一点都对应一个例外点。两条虚线之间的区域表示任意子 PT 对称未破缺区，而外侧区域则对应破缺相。与传统PT系统或反PT系统中通常沿单一参数轴控制相变的情况不同，这里的任意子PT相变可以沿 ω_1 和 g_1 参数维度分别独立调节。例如，固定 $\omega_1 = 1$后，我们可以通过图 2a、b 的插图观察本征值随 g_1 变化的情况。例外点以红色五角星标出。除例外点外，两个本征值的实部和虚部均非简并，这不仅增强了对应本征态的可区分性，还能在系统中对各个模式进行更加灵活、独立的控制。

为了直观地展示相变，我们在图2c中给出了本征值辐角，并比较了任意子-PT对称性与传统PT对称性。曲线展示了在两个Γ取值下，辐角随g_1 在$\omega_1 = 1$ 处的变化。两个能量简并的区域对应对称性未破缺相。对于$\Gamma = 0.1\pi$（黑色曲线），相变约发生在$g_1 \approx -0.7$和$g_1 \approx 1.3$处。例外点的具体参数值可通过补充信息中的公式（S3）获得。与PT对称情形相比，由于本征值整体旋转，例外点发生了偏移。插图展示了相应的本征态幅值分布：在对称性未破缺区间内，两个格点上的幅值均匀（中间插图）；在对称破缺区内，幅值则不对称（左侧插图）。

尽管其本征态与传统 PT 对称系统中的本征态相似，但任意子 PT 对称系统独特的本征值结构导致了截然不同的波传播动力学。图 2d 展示了参数空间中相应的动力学相图。借助该图，我们可以确定在任意位置进行单点激发时的传播特性。此处，我们仅关注对称性未破缺区间内的动力学，该区间对应于两条白色虚线之间的区域。功率呈现振荡[23]，并伴有耗散或放大。蓝色区域

表示耗散，红色区域则表示放大。根据本征值的虚部，参数空间还可进一步划分为三个不同区域，分别记为区域 I、区域 II 和区域 III，各自表现出不同的动力学行为。蓝色区域对应区域 I，此处两个本征值的虚部均为负，因此传播过程中会发生耗散。在区域 II，一个本征值的虚部为正，另一个为负。因此，当初态为两个本征态的任意叠加时，衰减模在传播过程中会逐渐消失，而放大模则占据主导。传播过程中，总功率有时可能先耗散，随后再放大。在区域 III，两个本征值的虚部均为正，因此会立即放大。补充信息中展示了不同区域的功率动力学，对应于图 2d 中三个不同颜色的叉号。

4. 二聚体晶格中的拓扑性质

现在我们转向任意子晶格。特别是，我们考察一个满足任意子-PT对称性的二聚体晶格（**图** 3a）。该模型可以视为一维非厄米 Su–Schriefer–Heeger (SSH) 模型的扩展。[64–67] 通过研究这一晶格，我们可以确定其动量空间中的能带结构，以及实空间中的边界现象。

动量空间中的哈密顿量可写成如下形式：

$$H_k = \begin{pmatrix} \omega_1 + ig_1 & t_1\exp(i\Gamma) + t_2\exp(i\Gamma)\exp(-ik) \\ t_1\exp(i\Gamma) + t_2\exp(i\Gamma)\exp(ik) & \omega_2 + ig_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

其中，k 是动量空间中的波数。胞内和胞间耦合分别为$t_1\exp(i\Gamma)$ 和 $t_2\exp(i\Gamma)$。这里，t_1 和t_2 均为实数。每个晶胞（在图 3a 中以红色虚线标出）都包含两个具有不同格点势的格点。与双位点模型类似，格点势必须满足方程（5）。

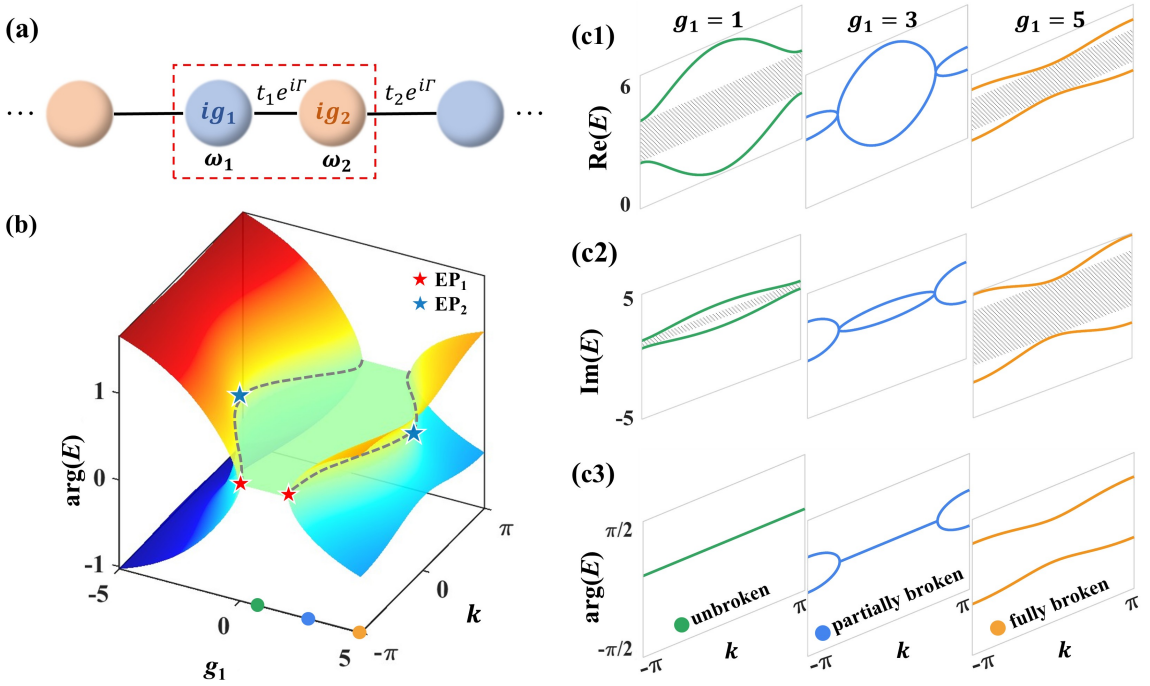


图 3. 无限二聚体波导晶格及其能带结构。 (a) 无限晶格示意图。晶胞（红色虚线）具有格点势 $\omega_i + ig_i$，以及调制耦合 $t_1\exp(i\Gamma)$（胞内）和 $t_2\exp(i\Gamma)$（胞间）。(b) 合成参数空间（g_1, k）中的本征值辐角。以红色和蓝色五芒星标示的例外点位于布里渊区（BZ）的中心和边界。沿 g_1 轴的三个彩色点表示不同相对应的参数值。(c) 不同 g_1值下，实部 (c1)、虚部 (c2) 和辐角 (c3) 的能带结构随k的变化。各子图的颜色对应于 (b) 中以相同颜色标记的参数点。能隙以灰色阴影区域突出显示。此处所有计算均采用 $\Gamma = 0.1\pi$, $\omega_1 = 3$,$t_1 = 1$ 和 $t_2 = 2t_1$。

与双位点模型不同，二聚体晶格的相变条件同时取决于参数和布洛赫波数（见补充信息中的方程（S4））。在该系统中，由例外点分隔出三个不同的相：对称性未破缺、部分破缺和完全破缺。在图3b中，不同的例外点分别以红色（EP1）和蓝色（EP2）五芒星标出。这里，我们仍关注g_1 变化时的相变，并取ω_1 为 3、 $\Gamma = 0$、1π、$t_1 = 1$ 和$t_2 = 2t_1$。从图3b中可以看到，中间有一片绿色的平坦区域，其中能量辐角均匀。在两个红色五角星之间的区域内，对于所有k，能量辐角值都保持恒定。我们将该区域称为任意子 PT 对称未破缺区。然而，在红色和蓝色所界定的区域中

在五芒星区域内，我们观察到，靠近布里渊区（BZ）中心时，部分本征值辐角仍固定在某一数值，而在接近 BZ 边界处开始变化。这表明对称性破缺始于 BZ 边界。我们将该区域称为对称性部分破缺区。最后，当所选区域位于蓝色五芒星之外时，能量辐角在整个 BZ 内发生变化，对应于对称性完全破缺区。

除了本征值辐角的独特行为外，能带在相变过程中还会先发生能隙闭合，随后重新打开。在图3c中，我们展示了本征值的实部（c1）、虚部（c2）和辐角（c3）对应的能带结构。能带的颜色对应于图3b中彩色圆点所示的参数值。可以观察到，在对称性未破缺相和完全破缺相中均存在带隙。这是相变的标志，并为边缘态位于带隙中提供了条件，从而实现拓扑保护。

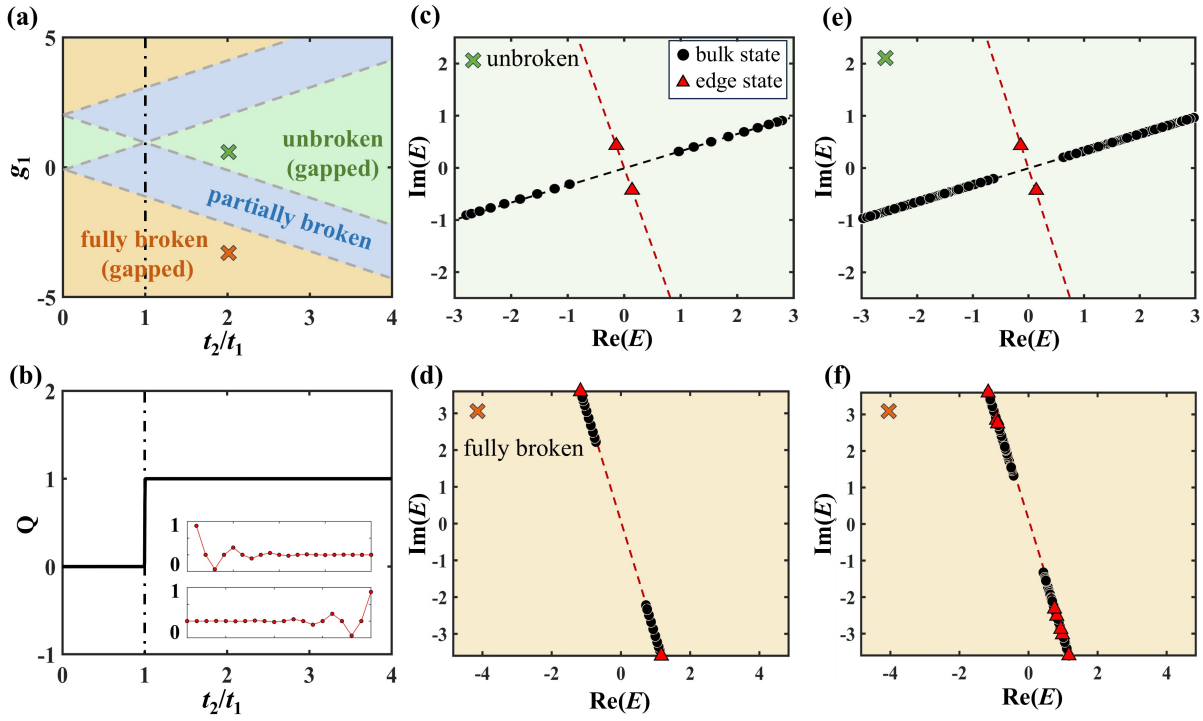


图4. 边缘态的拓扑保护和鲁棒性。（a）由 g_1 和耦合比 t_2/t_1 构成的参数空间中的相图。灰色虚线表示任意子-PT对称性的相变。三种颜色分别表示任意子-PT对称性的三种相。垂直点划线划分了存在边缘态和不存在边缘态的区域。（b）当 g_1 = 0=.5 时，计算得到的全局贝里相位随耦合比的变化关系。插图展示了 $Q = 1$ 时两个边缘态的分布，呈现手征分布。（c-

d) (c)中的有限H_0 系统（含$N = 20$ 个格点）的本征值：(c)对称性未破缺区间，$g_1 = 0.5$；(d)完全破缺区间，$g_1 = -3$。参数对应于面板(a)和$t_2 = 2t_1$中标记的两个彩色叉号。红色三角形表示边缘态，黑色圆圈表示体态。(e-f) 对(c)和(d)中的系统施加随机非对角扰动，并进行100次实现，同时保持 PAH 对称性。在所有图中，黑色虚线与实轴的夹角为$\Gamma = 0.1\pi$，且$\omega_1 = 3$。

尽管这里我们仅考虑 $t_2 > t_1$ 的情况来分析无限晶格的能带结构，但只要 $t_2 \neq t_1$，就会存在带隙闭合与重开的过程。通过计算贝里相，可以得到不同参数条件下的相变行为：[68, 69]

$$\varphi_B^{\pm} = \oint_C A^{\pm} = \oint_C i\langle u_{\pm}|\partial_k|\lambda_{\pm}\rangle, \tag{7}$$

其中，$A^{\pm} = i\mathrm{Q}u_{\pm}|\partial_k|\lambda_{\pm}\mathrm{V}$ 是贝里联络。这里，$\mathrm{W}\lambda_{\pm}\mathrm{V}$ 和 $\mathrm{Q}u_{\pm}\mathrm{W}$ 分别表示哈密顿量 $H(k)$ 的右本征态和左本征态。方程（ 7 ）展示了非厄米诱导几何相。由于系统中的增益 - 损耗调制，每条能带的贝里相都是复数。任意子-PT对称性的相变对应于贝里相的实部或虚部发生突变（见补充信息图 S2）。**图** 4a 展示了参数空间中的相图。绿色和橙色区域分别表示任意子-PT对称性的未破缺区和完全破缺区域，其中体能带是有带隙的。可以观察到，对于任意耦合比（$t_2 = t_1$ 除外），改变g_1都会诱导能隙闭合与重开。

By s将两条能带的贝里相相加，即可得到全局贝里相位：[70]

$$Q = \varphi_B^{+} + \varphi_B^{-}. \tag{8}$$

Q的取值是量子化的，可用于区分是否存在边缘态。当$Q = 0$时，系统没有边缘态。当$Q = 1$时，系统支持两个具有手性分布的边缘态，其分布轮廓如图4b的插图所示。我们发现，Q仅取决于耦合比t_2/t_1。当Q发生突变时，便出现拓扑相变；如图4a、b所示，该相变由位于$t_2 = t_1$ 的垂直点划线标示。我们强调，这里存在两种类型的相变。第一种由灰色虚线标示，用于区分任意子-PT对称性的不同区域。第二种由垂直点划线标示，用于区分是否存在边缘态。

在此，我们认为，只有当 $Q = 1$ 且系统处于任意子 PT 对称未破缺区时，边缘态才受到拓扑保护。在传统的一维 PT 或反 PT

对称晶格中，边缘态由伪反厄米性或伪厄米性对称性保护。[67] 然而，这两种对称性会被复耦合项和严格的格点势约束破坏。因此，我们引入一种广义对称性，即伪任意子厄米性（PAH）对称性。正是这种新对称性保护了该系统中的拓扑边缘态。

PAH 对称性定义如下：

$$H_0(k) = -e^{2i\Gamma}\eta H_0{}^{+}(k)\eta^{-1}, \tag{9}$$

其中 $\eta = \eta,\ ^{1} = \sigma_z$。$H_0{}^{+}(k)$ 表示 $H_0(k)$ 的厄米共轭。这里，H_0 并非原始晶格哈密顿量，而是通过从原始哈密顿量 H 中去除整体能量偏移得到的：

$$H_0 = H - \frac{\omega_1+ig_1+\omega_2+ig_2}{2}. \tag{10}$$

该操作不会改变拓扑性质，但能简化分析。在 PAH 对称性下，本征值成对出现（E, $-E^{*}\exp(2i\Gamma)$）。对于有限晶格，$\eta = \eta,\ _{1} = \sigma_z \otimes I_{N/2}$，其中 N 为格点总数。因此，边缘态呈现手征分布，即它们是 η 的本征态，位于一个子晶格上，如图4b 插图所示。由于边界效应，边缘态满足 $E = -E^{*}\exp(2i\Gamma)$，其能量位于复平面上角度为 $\Gamma + \frac{\pi}{-}$ " 的直线上。

图4c展示了 H_0 任意子-PT对称性未破缺区域中的本征值，其中$g_1 = 0.5$ 且 $t_2 = 2t_1$，对应于图4a中绿色叉号所示的参数。由于任意子-PT对称性，体态（黑色圆圈）被限制在黑色虚线上；而边缘态（红色三角形）受 PAH 对称性限制，位于红色虚线上。在这种情况下，边缘态位于复平面的体线隙内。[13]

施加保持 PAH 对称性的随机非对角扰动，并进行 100 次实现（图4e）后，边缘态仍位于带隙内并处于红色虚线上，这证实边缘态受到 PAH 对称性的保护。相比之下，在完全破缺区域（图4d）中，所有体态都坍缩到红色虚线上，边缘态则并入体态。补充信息中的方程（S9）给出了扰动的显式形式。在施加扰动后（图4f），尽管边缘态仍受相位约束，但不再位于带隙内，因此不受拓扑保护。

严格来说，PAH 对称性并不确定边缘态能量，而是将其相位限制在红色虚线上分布（见图4c）。因此，我们可以说，PAH 对称性使相位受到保护，$\Gamma +$ ！“。关于对角

扰动的更多结果见补充信息，且得出了相同的结论。此外，我们发现，无论施加何种类型的扰动，只要胞间耦合的绝对值大于胞内耦合的绝对值，就会出现边缘态并呈现手征分布。然而，当系统处于任意子-PT 部分破缺或完全破缺区域时，这些边缘态不再位于带隙中，因此不受拓扑保护。只有当$Q = 1$ 且系统处于任意子-PT 未破缺区域时，它们才受到拓扑保护。

5. 结论

总之，我们研究了任意子-PT对称性在非厄米波导系统中的作用，尤其关注其对相变和拓扑性质的影响。通过分析最简双位点模型和扩展的一维晶格，我们揭示了独特的谱学与动力学特征，使任意子-PT对称性有别于传统PT和反PT对称系统。在对称性未破缺区间，体态本征值被约束在复平面内的一条倾斜直线上，而边缘态本征值则固定在一条与之垂直的直线上，这反映了多重对称性约束的共存。

我们对扩展晶格的研究进一步揭示了任意子-PT对称性与拓扑边界态出现之间直接且非平凡的联系。我们表明，这些边界态源于复能带结构中的带隙闭合与重开过程，并且仅在任意子 PT 对称未破缺区内具有稳健性。其保护由一种称为伪任意子厄米对称性的广义对称性所保证；这种对称性约束边缘态能量的相位，而非固定其绝对值。这一机制加深了我们对非厄米系统中拓扑保护的理解，并突显了本征值辐角作为具有物理意义且可控的量所发挥的作用。

任意子-PT对称性所带来的丰富物理现象，为光信号操控和信息处理中的应用提供了广阔前景；在这些应用中，本征值相位可作为振幅和频率之外的额外自由度。与此同时，任意子-PT对称性的许多方面仍有待探索。尤其是，与例外点相关的灵敏度增强，以及通过任意子-PT参数或光学非线性动态调谐和控制拓扑局域态的可能性，都值得进一步研究。因此，我们的工作为

探索广义非厄米对称性、相位工程拓扑及其在光子系统中的应用奠定了基础。

致谢

本工作得到中国国家重点研发计划（2022YFA1404800）、国家自然科学基金（12134006、W2541003、12374309、12274242 和 124B2078）、天津市自然科学基金（21JCJQJC00050）、中国111计划（B23045）的资助；并得到电子结构与激光研究所、FORTH 和克里特大学通过欧洲研究委员会巩固者资助协议第 101045135 号（Beyond_Anderson）的支持。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

数据可用性声明

支持本研究发现的数据可根据合理请求向通信作者获取。

参考文献

1. Hasan, M. Z. 和 C. L. Kane。综述：拓扑绝缘体。《现代物理评论》 **82**, 3045–3067（2010）doi:10.1103/RevModPhys.82.3045。2. Qi, Xiao-Liang 和 Shou-Cheng Zhang。拓扑绝缘体和超导体。《现代物理评论》 **83**，1057–1110（2011）doi:10.1103/RevModPhys.83.1057。3. Hafezi, Mohammad、Eugene A. Demler、Mikhail D. Lukin 和 Jacob M. Taylor。具有拓扑保护的稳健光学延迟线。《现代物理评论》 **7**，907–912（2011）doi:10.1038/nphys2063。4. Khanikaev, Alexander B. 等。光子拓扑绝缘体。《自然·材料》 **12**，233–239（2013）doi:10.1038/nmat3520。5. Benalcazar, Wladimir A.、B. Andrei Bernevig 和 Taylor L. Hughes。量子化电多极绝缘体。《科学》 **357**，61–66（2017）doi:10.1126/science.aah6442。

6. Ozawa, Tomoki 等。拓扑光子学。《现代物理评论》 **91**，015006（2019）doi:10.1103/RevModPhys.91.015006。

7. Rudner, M. S. 和 L. S. Levitov。非厄米量子行走中的拓扑相变。《物理评论快报》 **102**, 065703（2009）doi:10.1103/PhysRevLett.102.065703。

8. Longhi, Stefano、Davide Gatti 和 Giuseppe Della Valle。非厄米光子晶格中的稳健光传输。*Sci. Rep.* **5**, 13376（2015）doi:10.1038/srep13376。

9. Lee, Tony E.。非厄米晶格中的反常边缘态。《物理评论快报》 **116**, 133903（2016）doi:10.1103/PhysRevLett.116.133903。

10. Leykam, Daniel、Konstantin Y. Bliokh、Chunli Huang、Y. D. Chong 和 Franco Nori。非厄米系统中的边缘模、简并与拓扑数。《物理评论快报》 **118**, 040401（2017）doi:10.1103/PhysRevLett.118.040401。

11. Shen, Huitao、Bo Zhen 和 Liang Fu。非厄米哈密顿量的拓扑能带理论。《物理评论快报》 **120**，146402（2018年）doi:10.1103/PhysRevLett.120.146402。

12. Takata, Kenta 和 Masaya Notomi。纯粹由增益与损耗诱导的光子拓扑绝缘相。《物理评论快报》 **121**，213902（2018年）doi:10.1103/PhysRevLett.121.213902。

13. Gong, Zongping 等。非厄米系统的拓扑相。*Phys. Rev. X* **8**，031079（2018年）doi:10.1103/PhysRevX.8.031079。

14. Kunst, Flore K.、Elisabet Edvardsson、Jan Carl Budich 和 Emil J. Bergholtz。非厄米系统中的双正交体边对应。《物理评论快报》 **121**，026808（2018年）doi:10.1103/PhysRevLett.121.026808。

15. Borgnia, Dan S., Alex Jura Kruchkov, and Robert-Jan Slager. 非厄米边界模与拓扑。《物理评论快报》 **124**, 056802 (2020) doi:10.1103/PhysRevLett.124.056802.

16. Denner, M. Michael 等 异常拓扑绝缘体。《自然·通讯》*12*，5681（2021）doi:10.1038/s41467-021-25947-z。

17. Yan, Qiuchen 等 非厄米拓扑光子学的进展与应用。《纳米光子学》*12*，2247–2271（2023）doi:10.1515/nanoph-2022-0775。

18. Nasari, Hadiseh, Georgios G. Pyrialakos, Demetrios N. Christodoulides 和 Mercedeh Khajavikhan。非厄米拓扑光子学。《光学材料快报》 **13**, 870 (2023) doi:10.1364/OME.483361。

19. Bender, Carl M. 和 Stefan Boettcher。具有 PT 对称性的非厄米哈密顿量中的实谱。《物理评论快报》 **80**, 5243–5246 (1998) doi:10.1103/PhysRevLett.80.5243。

20. Bender, Carl M.、Stefan Boettcher 和 Peter N. Meisinger。$\mathcal{PT}$-对称量子力学。《数学物理杂志》 **40**, 2201–2229 (1999) doi:10.1063/1.532860。

21. Bender, Carl M.。理解非厄米哈密顿量。《物理学进展报告》 **70**, 947– 1018 (2007) doi:10.1088/0034-4885/70/6/R03。

22. El-Ganainy, R., K. G. Makris, D. N. Christodoulides 和 Ziad H. Musslimani。耦合光学PT对称结构理论。《光学快报》 **32**, 2632 (2007) doi:10.1364/OL.32.002632。

23. Makris, K. G., R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides 和 Z. H. Musslimani。PT对称光学晶格中的光束动力学。《物理评论快报》 **100**, 103904 (2008) doi:10.1103/PhysRevLett.100.103904。

24. Musslimani, Z. H., K. G. Makris, R. El-Ganainy 和 D. N. Christodoulides。PT周期势中的光学孤子。《物理评论快报》 **100**, 030402 (2008) doi:10.1103/PhysRevLett.100.030402。

25. Guo, A. 等 在复光学势中观测到 PT 对称性破缺。《物理评论快报》 **103**, 093902 (2009) doi:10.1103/PhysRevLett.103.093902.

26. Rüter, Christian E. 等 光学中宇称-时间对称性的观测。《自然·物理》 **6**, 192–195 (2010) doi:10.1038/nphys1515.

27. Regensburger, Alois 等 宇称–时间合成光子晶格。《自然》 **488**, 167–171 (2012) doi:10.1038/nature11298.

28. Feng、Liang、Ramy El-Ganainy 和 Li Ge。基于宇称–时间对称性的非厄米光子学。《自然·光子学》 **11**, 752–762 (2017) doi:10.1038/s41566-017-0031-1.

29. El-Ganainy, Ramy 等。非厄米物理与PT对称性。《自然·物理》 **14**, 11–19 (2018年) doi:10.1038/nphys4323.

30. Kremer, Mark 等。二维PT对称晶体的展示。《自然·通讯》 **10**, 435 (2019) doi:10.1038/s41467-018-08104-x.

31. Li, Jiaming 等。在超冷原子耗散Floquet系统中观测到宇称–时间对称性破缺跃迁。《自然·通讯》 **10**, 855 (2019) doi:10.1038/s41467-019-08596-1.

32. Heiss, W D. 例外点的物理学。《物理学杂志*A*：数学与理论》 **45**, 444016 (2012) doi:10.1088/1751-8113/45/44/444016.

33. Wiersig, Jan. 利用例外点提升频率与能级劈裂检测的灵敏度：在用于单粒子检测的微腔传感器中的应用。《物理评论快报》 **112**, 203901 (2014) doi:10.1103/PhysRevLett.112.203901.

34. Doppler, Jörg 等。动态环绕例外点实现非对称模式切换。《自然》 **537**, 76–79 (2016) doi:10.1038/nature18605.

35. Miri, Mohammad-Ali and Andrea Alù. 光学与光子学中的例外点。《科学》 **363**, eaar7709 (2019) doi:10.1126/science.aar7709.

36. Özdemir, Ş. K., S. Rotter, F. Nori, 和 L. Yang. 光子学中的宇称-时间对称性与例外点。《自然·材料》 **18**, 783–798 (2019) doi:10.1038/s41563-019-0304-9。

37. Bergholtz, Emil J.、Jan Carl Budich 和 Flore K. Kunst。非厄米系统的例外拓扑。《现代物理评论》 **93**，015005（2021） doi:10.1103/RevModPhys.93.015005。

38. Bergman, Arik 等。在光纤中观测到反宇称-时间对称性、相变和例外点。《自然·通讯》 **12**，486（2021）doi:10.1038/s41467- 020-20797-7。

39. Xia, Shiqiang 等 驱动的非厄米光子利布晶格中的高阶奇异点与朗道–齐纳布洛赫振荡。*APL Photonics* **6**, 126106 (2021) doi:10.1063/5.0069633.

40. Ding, Kun、Chen Fang 和 Guancong Ma. 非厄米拓扑与奇异点几何。*Nat. Rev. Phys.* **4**, 745–760 (2022) doi:10.1038/s42254-022-00516-5.

41. Nasari, Hadiseh 等 无需环绕奇异点即可观测到手征态转移。《自然》 **605**, 256–261 (2022) doi:10.1038/s41586-022-04542-2.

42. Yao, Shunyu 和 Zhong Wang. 非厄米系统的边缘态与拓扑不变量。《物理评论快报》 **121**, 086803 (2018) doi:10.1103/PhysRevLett.121.086803.

43. Xiong, Ye. 为什么体边对应在某些非厄米拓扑模型中会失效。*J. Phys. Commun.* **2**, 035043（2018年）doi:10.1088/2399-6528/aab64a。

44. Liu, Tao 等。非厄米系统中的二阶拓扑相。《物理评论快报》 **122**，076801（2019年）doi:10.1103/PhysRevLett.122.076801。

45. Weidemann, Sebastian 等。光的拓扑汇聚。《科学》 **368**，311–314（2020年）doi:10.1126/science.aaz8727。

46. Wang, Wei、Xulong Wang 和 Guancong Ma。拓扑模态的非厄米形变。《自然》 **608**，50–55（2022年）doi:10.1038/s41586-022-04929-1。

47. Zhang、Xiujuan、Tian Zhang、Ming-Hui Lu 和 Yan-Feng Chen。《非厄米趋肤效应综述》。*Adv. Phys: X* **7**，2109431（2022）doi:10.1080/23746149.2022.2109431。

48. Sun, Yeyang 等 光子弗洛凯趋肤拓扑效应。《物理评论快报》 **132**, 063804 (2024) doi:10.1103/PhysRevLett.132.063804。

49. Lin, Zhiyuan 等 硅光子学中 Floquet 非厄米趋肤效应的拓扑相变观测。《物理评论快报》 **133**, 073803 (2024) doi:10.1103/PhysRevLett.133.073803。

50. Ge, Li 和 Hakan E. Türeci。具有平衡正、负折射率材料的反对称 PT 光子结构。《Phys. Rev. A》 **88**，053810（2013）doi:10.1103/PhysRevA.88.053810。

51. Peng, Peng 等。飞行原子的反宇称-时间对称性。《自然·物理》 **12**，1139–1145（2016）doi:10.1038/nphys3842。

52. Mallick, Arindam、Nana Chang、Alexei Andreanov 和 Sergej Flach。反 PT 平带。《Phys. Rev. A》 **105**，L021305（2022）doi:10.1103/PhysRevA.105.L021305。

53. Selim, Mahmoud A. 等。通过反宇称-时间对称性选择性过滤光子量子纠缠。《科学》 **387**，1424–1428（2025）doi:10.1126/science.adu3777。

54. Ding, Kun、Z. Q. Zhang 和 C. T. Chan。一维 PT 对称光子晶体中例外点的合并及相图。*Phys. Rev. B* **92**，235310（2015）doi:10.1103/PhysRevB.92.235310。

55. Ding, Kun、Guancong Ma、Meng Xiao、Z. Q. Zhang 和 C. T. Chan。多重例外点的出现、合并与拓扑性质及其实验实现。*Phys. Rev. X* **6**，021007（2016）doi:10.1103/PhysRevX.6.021007。

56. Chen, Weijian、Şahin Kaya Özdemir、Guangming Zhao、Jan Wiersig 和 Lan Yang。例外点增强光学微腔中的传感。《自然》 **548**，192–196（2017）doi:10.1038/nature23281。

57. Mao, Wenbo, Zhoutian Fu, Yihang Li, Fu Li, and Lan Yang. 例外点增强相位传感。*Sci. Adv.* **10**, eadl5037 (2024) doi:10.1126/sciadv.adl5037.

58. Hodaei, Hossein 等 高阶例外点处的灵敏度增强。《自然》**548**, 187–191 (2017) doi:10.1038/nature23280.

59. Wiersig, Jan. 基于例外点的传感器综述。*Photon. Res.* **8**, 1457 (2020) doi:10.1364/PRJ.396115.

60. Longhi, S. 和 E. Pinotti。任意子PT对称性、漂移势与非厄米离域。*EPL* **125**, 10006 (2019) doi:10.1209/0295-5075/125/10006。

61. Arwas, Geva 等。复耦合激光器中的任意子宇称-时间对称性。*Sci. Adv.* **8**, eabm7454 (2022) doi:10.1126/sciadv.abm7454。

62. Liu, Zhihang 和 Chao Zheng。任意子PT对称系统中的连续相变。预印本 (2023) doi:10.48550/ARXIV.2312.10350。

63. Gao, Yong-Pan、Yang Sun、Xiao-Fei Liu、Tie-Jun Wang 和 Chuan Wang。具有可调例外点的宇称-时间-任意子耦合谐振腔系统。*IEEE Access* **7**, 107874–107878 (2019) doi:10.1109/ACCESS.2019.2933198。

64. Zhu, Baogang、Rong Lü 和 Shu Chen。在具有复边界势的非厄米 Su-Schrieffer-Heeger模型中的PT对称性。*Phys. Rev. A* **89**, 062102 (2014) doi:10.1103/PhysRevA.89.062102。

65. Parto, Midya 等。一维拓扑有源阵列中的边缘模激射。《物理评论快报》**120**, 113901 (2018) doi:10.1103/PhysRevLett.120.113901。

66. Lieu, Simon。非厄米Su-Schrieffer-Heeger模型中的拓扑相。*Phys.Rev. B* **97**, 045106 (2018) doi:10.1103/PhysRevB.97.045106。

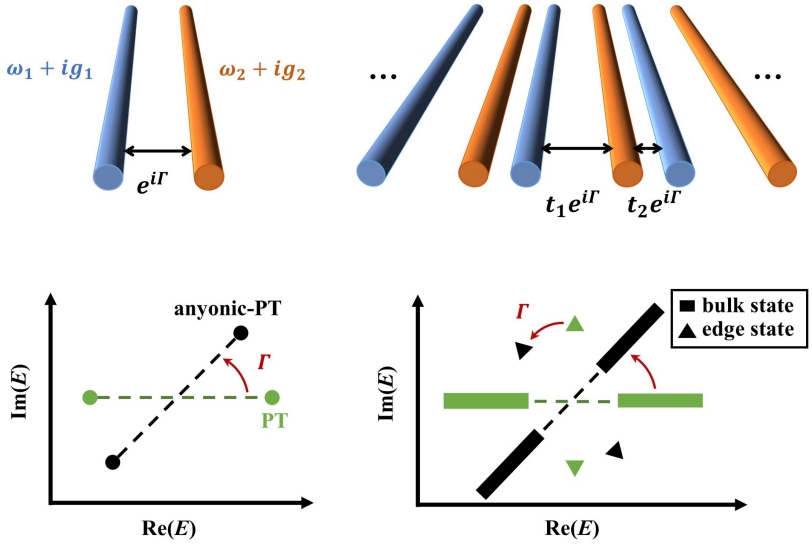
67. Song, Wange 等。有限非厄米光学晶格中拓扑零模的破裂与恢复。《物理评论快报》 **123**, 165701 (2019) doi:10.1103/PhysRevLett.123.165701。

68. Zhao, Han, Stefano Longhi, 和 Liang Feng. 非厄米光学材料中的量子相变所产生的稳健光态。*Sci. Rep.* **5**, 17022 (2015年) doi:10.1038/srep17022.

69. Pan, Mingsen, Han Zhao, Pei Miao, Stefano Longhi, 和 Liang Feng. 非厄米光子晶格中的光子零模。《自然·通讯》 **9**, 1308 (2018年) doi:10.1038/s41467-018-03822-8.

70. Liang, Shi-Dong 和 Guang-Yao Huang。非厄米系统中的拓扑不变性与全局贝里相位。*Phys. Rev. A* **87**，012118（2013年）doi:10.1103/PhysRevA.87.012118。

P任意子-PT 对称晶格中的相变与拓扑保护 **es**



任意子-PT对称性通过可调相位 Γ 扩展了 PT物理，该相位会旋转复谱。我们采用双位点二聚体和扩展的一维晶格研究相变，并进一步通过贝里相对其进行表征。在对称性未破缺区间，我们探究动力学，并表明边缘态受到伪任意子厄米对称性的保护。