子对称性保护的紧致边缘态

Ruoqi Cheng[1†]、Domenico Bongiovanni[1, 2†]、Ziteng Wang[1†]、Zhichan Hu[1], Liqin Tang[1,3]*、Daohong Song[1,3], Roberto Morandotti[2], Hrvoje Buljan[1,4], 和 Zhigang Chen[1,3]*

[1]教育部弱光非线性光子学重点实验室、天津经济技术开发区应用物理研究院和南开大学物理学院，中国天津 *300457*[2]*INRS-EMT*，*Lionel-Boulet* 大道 *1650* 号，瓦伦，魁北克 *J3X 1S2*，加拿大[3]极端光学协同创新中心，山西大学，中国山西太原 *030006*[4]萨格勒布大学理学院物理系，*Bijenička* 街 *32* 号，萨格勒布 *10000*，克罗地亚

†这些作者对本研究的贡献相同 *电子邮箱：*tanya@nankai.edu.cn*，*zgchen@nankai.edu.cn*

子对称性（SubSy）保护的拓扑态代表了超越传统对称性保护拓扑（SPT）相框架的一种概念，表明即使相关对称性仅在希尔伯特空间的一个子空间中成立，拓扑边界态仍能保持稳健。典型的 SPT 和 SubSy 边界态会以指数形式衰减并延伸至体态中，这意味着它们并非仅局限于边界附近的少数晶格位点。在此，我们介绍由 SubSy 保护的拓扑紧致边缘态，其在晶格边界表现出极端的双位点局域，并且不会向体态发生任何衰减。这种紧致性源于边界处的局部相消干涉，而拓扑保护则由 SubSy 确保，其特征是量子化的绕数。实验上，我们在具有工程化类菱形晶胞的激光直写光子晶格中观测到紧致边缘态，证实了其在手征对称性和 SubSy 条件下抵抗扰动的稳健性。我们的研究突显了 SubSy 保护在实现光的拓扑约束方面的潜力，并为其在紧致波导、激光器和高灵敏度光子传感器中的应用铺平了道路。

关键词： 对称性保护拓扑相、手征对称性、紧致边缘态、子对称性、非平庸绕数

引言：

在过去二十年中，拓扑绝缘体（TIs） [1-5] 凭借确立体边对应（BBC）这一普适范式而成为一类突破性的材料；该范式将非平庸体不变量与稳健的边界态联系起来。拓扑绝缘体最初由凝聚态物理学引入，如今已迅速在包括电路[6, 7], 超冷原子 [8-10], 声学 [11, 12], 和光子学 [3, 5, 13-16], 在内的众多跨学科领域引发了广泛研究兴趣，从根本上重塑了我们对物质相和波输运动力学的理解。拓扑保护的边界态以其对无序和制造缺陷的非凡稳健性而闻名，是拓扑相的标志性特征。这一性质已在从拓扑激光器 [17-20] 到容错量子计算 [21]等颠覆性技术中得到广泛探索和充分验证。在稳健、可扩展且不受缺陷影响的光控制愿景推动下，拓扑光子学迅速成为前沿领域，有望在未来十年推动光子学、声学及其他平台中的新一轮拓扑现象研究，并产生深远影响[22, 23]。

一类尤为重要的拓扑相是对称性保护拓扑（SPT）相，其中边界态在保持特定对称性（或多种对称性）的扰动下仍具有稳健性，但一旦对称性被破坏，拓扑性质便会消失 [4, 5]。这种对称性依赖性既带来了设计拓扑响应的机会，也为实际应用带来了根本限制。在大多数 SPT 相中，例如拓扑晶体绝缘体，拓扑平庸或非平庸边界态的出现通常与晶格二聚化或耦合参数有关 [24-27]。通常，拓扑非平庸边界态的振幅分布从边界区域向体态呈指数衰减，并形成特征性的相位关系。因此，这类边界态并非严格局限于少数晶格位点，也就不具有高度局域性。另一方面，在笼目 [28, 29], 利布 [30-32], 和装饰蜂窝 [33-35] 等几何结构的平带晶格中，可以实现强空间局域化，而非扩展的布洛赫波。这些模型支持紧致局域态（CLS），其源于布洛赫模式的宏观简并以及晶格几何结构所导致的相消干涉 [36-39]。整个布里渊区内群速度为零，因此局域模式被限制在少数晶格位点内，无需外部无序或非线性效应。在此背景下，研究者利用平带模式的独特性质，实现了阿哈罗诺夫-玻姆笼 [40-42] 以及紧致体态或边界光局域化 [32, 43-45] 。然而，光局域化所依赖的平带

能带色散并不一定具有拓扑保护，因此容易受到扰动的影响。同样，具有镜面对称性的缺陷晶格可以支持对称性保护的连续谱束缚态（BICs） [46, 47], ；即使其能量位于扩展模的连续谱能带内，这些态仍会因相消干涉而保持局域。尽管这些态具有紧致局域性，但由于它们不受拓扑保护，因此在扰动下并不稳健 [48, 49]。

近年来，关于对称性保护拓扑相的研究进展，通过引入子对称性（SubSy）重新定义了保护判据——在这一框架中，对称算符仅在指定的希尔伯特子空间 [50-53] 内作用。在此框架下，只要扰动不破坏相应的 SubSy，属于该子空间的拓扑边界态就能受到保护，无需整个系统具备完整的全局对称性。这为在严格的全局对称性约束之外保护拓扑边缘态开辟了新途径。

在本研究中，我们利用 SubSy 保护的概念，展示了一类新型拓扑紧致边缘态，其类似于高度局域在晶格边界处的偶极子型模。其基础模型是一种准一维（1D）类菱形晶格，晶格中的最近邻（NN）跃迁均匀，并辅以次近邻（NNN）跃迁；后者会破坏全局手征对称性（CS），但保留晶格的子晶格对称性。不同于平带紧致局域态，这些紧致边缘态并不依赖平带，而是由具有相应拓扑非平庸绕数的相关 SubSy 所表征。因此，这些边界态兼具紧致性与拓扑鲁棒性，拓展了高度局域拓扑边界态的设计空间。在实验中，我们在具有所需晶格构型的激光直写光子晶格 中实现了 SubSy 保护的紧致边缘态，并将其与破坏 SubSy 的情形进行比较。我们的研究实现了局域相消干涉与拓扑 SubSy 保护的有效协同，为紧致波导和高灵敏度传感器的应用开辟了途径。

理论：

图1(a)插图中的示意图描绘了一种准一维周期性类菱形晶格，其中每个晶胞（由虚线方框划定）由四个子晶格组成，分别标记为A、B、C和D。该模型分为两个子系统：AB子系统（标为红色）和CD子系统（标为绿色）。耦合系数t 对应整个光子晶格中的所有最近邻相互作用，无论耦合发生在

晶胞内（胞内跃迁）还是不同晶胞之间（胞间跃迁）。理论模型包含一个记为t_1 的次近邻耦合（见图1(a)插图）。该t_1 耦合表示A和B位点之间的胞内耦合，以及C和D位点之间的胞间耦合。存在这种次近邻耦合时，全局手征对称性被破坏，而子晶格对称性得以保持。该晶格在动量空间中的布洛赫哈密顿量为

$$H(k)=\begin{pmatrix} 0 & t_1 & t & t+te^{-ik} \\ t_1 & 0 & t & t \\ t & t & 0 & t_1e^{-ik} \\ t+te^{ik} & t & t_1e^{ik} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 k 是布洛赫动量。

为研究该系统的拓扑性质，我们先讨论 $t_1=0$的情形，此时布洛赫哈密顿量 H 的形式为

$$H(k)=\begin{pmatrix} 0 & Q(k)^{\dagger} \\ Q(k) & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中 $Q(k)$ 表示左下角块。哈密顿量 H 具有手征对称性（CS），因为我们有$\Sigma H(k)\Sigma^{-1}=-H(k)$，其中 Σ 是手征对称算符:

$$\Sigma=\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中 I_2 表示一个2×2 单位矩阵。通过对角化布洛赫哈密顿量，我们得到能带结构 [图1(b1)], ，其在零能附近具有带隙。与典型的一维手征对称系统一样，该拓扑相可用绕数[54, 55]表征

$$W=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dk\,\frac{d\theta(k)}{dk}, \tag{4}$$

其中 $\theta(k)$ 定义为 $\det Q(k)=|\det Q(k)|e^{i\theta(k)}$。当 k 在整个布里渊区内变化时，绕数表示 $\det Q(k)$ 在复平面上绕原点的圈数。

对于具有均匀跃迁 t 和 $t_1=0$的准一维菱形晶格，我们得到绕数 $w=1$ （插图，图 1(b1)）。非零绕数表明存在一对零能量的拓扑边缘态 $\beta=0$。为验证它们的存在，我们对由 20 个晶胞 [组成的有限晶格进行数值求解图 1(b2)]中的本征值问题。手征对称晶格在带隙中支持两个钉扎在零能量处的本征值,

它们对应两个拓扑边缘态。这些边缘态的空间分布如图 1(b2)中的插图所示。值得注意的是，这些边缘态仅在两个边界格点处具有非零振幅，因此被称为“紧致边缘态”。这种内禀紧致性不同于传统的拓扑边缘态（例如 SSH [24] 和三聚体 [26]模型中的边缘态），后者的波函数振幅从边界向体态呈指数衰减。

为量化紧致边缘态的局域程度，通常采用逆参与率（IPR）作为衡量指标，其定义为 $\mathrm{IPR} = \sum|\psi_i|^4/(\sum|\psi_i|^2)^2$。IPR 的取值范围为 0 到 1，数值较小表示态较为扩展，数值较大则意味着强局域化。显然，可以看到两个拓扑边缘态的 IPR 均为 0.5（图 1(b3)中的绿色圆点）。这一数值明确证实了它们的紧致特性： 波函数振幅严格局限于两个边界晶格位点，不会泄漏到其他晶格位点 [56]。

与传统的一维拓扑系统（例如 SSH 模型及其变体）不同，后者需要通过二聚化（即链上具有不同耦合强度的“二聚体”）才能形成非平庸相；本文揭示的拓扑边缘态则出现在耦合强度完全相同的均匀耦合晶格中。这些态具有若干显著特征：局域化紧致，恰好局限于两个边界格点，且波函数振幅相位相反；同时，它们被限制在单个子系统内（即 AB 子系统或 CD 子系统）。其紧致性源于边界态的相消干涉。本系统不含平带，因此其局域化机制在本质上不同于平带模型中的局域化；在平带模型中，局域化由具有零动量相关能量色散的能带简并所促成 [45, 57, 58]。因此，我们的结果凸显了局域边界相消干涉与非局域体拓扑之间的有效相互作用。

接下来，我们分析 $t_1 \neq 0$ 时的模型。在这种情况下，全局手征对称性被破坏，但子晶格对称性仍然存在，并对左边缘态提供拓扑保护；而右边缘态失去了紧致性，也不再受到拓扑保护。从理论上，我们通过对 A 和 B 子晶格进行线性组合，并定义两个新的子晶格，来验证这一说法

$$|A'\rangle = (|A\rangle + |B\rangle)/\sqrt{2}, \tag{5}$$

$$|B'\rangle = (|A\rangle - |B\rangle)/\sqrt{2}. \tag{6}$$

该过程等价于执行酉变换$H'(k) = \Gamma H(k)\Gamma^{-1}$，其中

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

变换后的哈密顿量 $H'(k)$ 为

$$H'(k) = \begin{pmatrix} 2t_1 & 0 & \sqrt{2}t & \frac{(2+e^{-ik})t}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-ik}t}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}t & 0 & t_1 & e^{-ik}t_1 \\ \frac{(2+e^{ik})t}{\sqrt{2}} & \frac{e^{ik}t}{\sqrt{2}} & e^{ik}t_1 & t_1 \end{pmatrix} - t_1 I_4, \tag{8}$$

其中 I_4 表示一个4×4 单位矩阵。在由 $H'(k)$ 描述的变换后的模型中，B'- 子晶格对称性得以保留： $\Sigma_{B'}^{\dagger}(H'(k) + t_1 I_4)\Sigma_{B'}P_{B'} = -(H'(k) + t_1 I_4)P_{B'}$，其中 $P_{B'}$ 是作用于 B'子晶格的投影算符，且 $\Sigma_{B'} = 2P_{B'} - I_4$。根据公式 (8)，$B'$子晶格仅通过 $t/\sqrt{2}$ 的胞间跃迁与 D 子晶格耦合，不存在胞内跃迁。这种情形与拓扑非平庸的一维 SSH 模型在极限二聚化区间中的情况非常类似，此时胞内跃迁为零。该极限 SSH 模型支持一个仅位于单个格点上的紧致边缘态，该态可直接映射为由变换后的哈密顿量 $H'(k)$ 支持的紧致边缘态: $|\psi' = [0,1,0,。\ldots\ldots, 0]^T$ 其能量为$\beta = -t_1$。因此，该边缘态仅存在于 B'子晶格上，并受 B'- 子晶格对称性的保护。

需要指出的是，只有极限 SSH 模型的边缘态才能映射到 $H'(k)$，并局域于单个子晶格。相比之下，体态无法映射，因为它们并不局域于单个子晶格。由于 B' 子晶格对应于原始 A 和 B 子晶格的线性组合，实际的左边缘态因此仅占据 A 和 B 位点，并可解析地表示为 $|\psi = \Gamma^{-1}|\psi' = [1,-1,0,\ldots\ldots, 0]^T/\sqrt{2}$，其能量为 $\beta = -t_1$。作为示例，图1(c1)绘出了 $t = 1$ 且 t_1 =为0.4时的 k 空间能带结构。对于有限尺寸晶格，图1(c2)展示了实空间本征值谱以及边缘态的模式分布。左边缘态仍位于带隙内，逆参与率为0.5（见图1(c3)），表明其具有紧致性。相比之下，右边缘态几乎并入体能带——其逆参与率降低便是证明（[图1(c3)], ），由于此情形下没有 SubSy 保护，它同时失去了拓扑鲁棒性和空间局域化。此外，我们还数值计算了实空间本征值随耦合变化的情况

t_1 （见图1(a)）。当 t_1 从 -1 变化至 1 时，左边缘态（图1(a)中的绿线）仍然存在，其能量为 $\beta = -t_1$。这些数值结果与我们的理论预测高度吻合，证实当 $t_1 \neq 0$ 时，左边缘态仍受 B'-SubSy 保护并保持其紧致性，而右边缘态则失去紧致特征，并占据 AB 和 CD 子晶格（见图1(c2)上方插图）。

实验

为了在实验中观测到预言的紧致边缘态，我们构建了两种不同的准一维光子晶格——一种保持全局手征对称性（$t_1 = 0$），另一种仅保持B'-子晶格对称性（$t_1 \neq 0$）。通过激光直写技术 [32, 59, 60]，在光折变晶体（SBN:61）中构建了间距为35 μm的晶格结构。为准确实现图1(a)所示的理论模型，我们采用交错晶格结构，通过翻转相邻晶胞（沿y轴翻转B和C位点，同时保持A和D位点不变）[图2(a1)]。这种构型确保该系统中的胞间相互作用仅限于A和D位点。图2展示了手征对称晶格的实验和数值结果，其中耦合系数t_1 被适当设为零（参见图1(a)中的理论模型）。在实验装置中，我们通过精确控制波导间距来控制耦合。通过调整角度θ，我们实现了t_1 的变化，角度定义如图2(a1)插图所示。具体而言，当$\theta = 90°$时，t_1 约为0。图2(a1)展示了实验中的手征对称性保持晶格，对应于式（1）中的哈密顿量H ，其中$t_1 = 0$。探测光束被调制成偶极形图案，并具有适当的相位关系：与拓扑边缘态模式分布相匹配的反相构型[图2(a2)]，以及用于对比的同相构型[图2(a3)] 。为激发紧致边缘态，我们将反相探测光束发射到左边缘的A和B子晶格中。如图2(b1)所示，传播20 mm后，输出光强仍完美局域在被激发的波导上，同时保持反相关系（见图2(b1)插图）。相比之下，对于同相激发，光会耦合到C和D子晶格中，如图2(c1)所示。这是因为同相激发与边缘态模式不匹配。无论采用反相[图2(d1)] 还是同相[图2(e1)] 构型，体态激发都无法保持局域。此外，使用实验参数进行的相应数值模拟[图2(b2)-2(e2)] 与相同传播长度20 mm下的实验结果[图2(b1)-2(e1)]高度吻合。为更好地比较动力学过程，我们还将数值模拟的传播距离延长至100 mm [图。

2(b3)-2(e3)]。经过长距离传播后，反相光束仍局域在左边缘的A和B位点[图2(b3)]，，而在其他激发条件下，光束会扩散至附近的波导中[图2(c3)-2(e3)]。这些数值结果进一步证实了拓扑紧致边缘态的存在。

接下来，我们进行了一系列实验，以展示 B'-SubSy 晶格中紧致边缘态的保持与破坏，如图 3 所示。通过调节角度 θ，可以引入次近邻跃迁 t_1 。当角度 θ 超过 90 度时，t_1 不为零，进而破坏手征对称性，同时保持 B'-SubSy，如图 3(a1) 和 3(a2) 所示。传播 20 mm 后，将与拓扑紧致边缘态反相结构相匹配的探测光束注入左边界的 A 和 B 位点[图 3(b1)]，光束仍保持完整。相比之下，在右边缘进行相同激发时，并未观察到光束局域于 C 和 D 位点。相反，由于缺少 SubSy 保护，光会扩散到属于邻近晶胞的其他子晶格位点，如图 3(b2) 所示。在同相激发条件下，[图 3(c1) 和 3(c2)]，，传播 20 mm 后的输出强度相比反相激发出现了更明显的光扩散。图 3(d1) 和 3(d2) 给出了采用反相输入进行数值模拟的结果，与实验结果[图 3(b1) 和 3(b2)]吻合良好。为更清晰地呈现差异，我们展示了传播长度为 100 mm 的模拟结果，如图 3(e1) 和 3(e2) 所示。可以看到，左边缘态在长距离传播后仍保持良好局域，而右边缘的探测光束则显著扩散至体态，进一步证实了实现紧致边缘态需要 SubSy 保护。

讨论

对保持底层对称性的扰动具有鲁棒性，是任何与 SPT 相相关的拓扑边界态的定义性特征。在这方面，检验拓扑紧致边缘态在遵守相关对称性（或对称性）的扰动下是否稳定十分重要。首先，我们考虑在保持晶格对称性的前提下，耦合参数 t 和 t_1 发生扰动时紧致边缘态的鲁棒性。这类扰动使系统仍处于上述研究的相图范围内：对于 $t_1 = 0$，手征对称性（CS）可保护紧致边缘态；而对于 $t_1 \neq 0$，紧致边缘态的鲁棒性则由子晶格对称性（SubSy）保障。

然而，不保持晶格对称性的随机扰动会造成更大的破坏。为了研究这些扰动，我们对相应实空间哈密顿量 [图1(a)] 中的耦合项进行随机变化。每个晶格位点 n 与 m 之间的跃迁项

都包含一个无序分量：$t \to t + d \times \xi_{nm}$，$t_1 \to t_1 + d \times \xi_{nm}$，其中 d 为无序强度，而 ξ_{nm} 是区间 $[-1,1]$ 内的一个随机值（未扰动情况下不存在的耦合仍保持为零）。图4展示了对手征对称（$t_1 = 0$）和子晶格对称性（$t_1 \neq 0$）模型进行扰动测试的数值结果。图4(a1-a4)上排展示了系统本征值随扰动强度的变化，下排图4(b1-b4)展示了各态的逆参与率。为一般起见，我们对100组随机构型进行计算，并取结果的平均值。

对于跃迁参数为 $t = 1$ 和 $t_1 = 0$ 的手征对称晶格，仅在 t 上引入无序以保持手征对称性，见图 4(a1) 和 4(b1)。从图 4(a1) 中受扰动后的能带结构可以看出，只要无序强度尚未增大到足以引起能隙闭合的程度，两个边缘态的本征值（红线标示）就会保持在能隙内的零能量处。与此一致，随着无序强度增加，边缘态的 IPR 逐渐降低；带隙闭合后，其 IPR 最终与体态的 IPR 合并[图 4(b1)]。

对于跃迁参数为 $t = 1$ 和 $t_1 = 0.4$ 的 SubSy 对称晶格，无序同时施加于 t 和 t_1 跃迁参数上，见图 4(a2) 和 4(b2)。SubSy 晶格受扰动后的能带结构显示，左边缘态在带隙中受到保护，而右边缘态失去保护（见图 4(a2) 插图）：左边缘态的本征值（图 4(a2) 中的红线）保持在能隙内，除非无序强度显著增大，使其并入体能带。就 IPR 而言[图 4(b2)], ，左边缘态表现出与手征对称情形相似的行为[图 4(b1)]；而右边缘态（黄色圆点）的 IPR 则因缺乏保护而大幅降低。

因此，对于保持手征对称性和 SubSy 的晶格，我们发现，拓扑边缘态在遵守相应对称性（手征对称性或 SubSy）的扰动下受到保护并保持局域化；然而，逆参与率计算表明，在破坏晶格对称性的随机扰动下，紧致性无法得到完全保持。

接下来，我们可以提出这样一个问题：是否存在能够保持紧致性不变的随机无序扰动？我们发现，保持边缘态紧致性所需的附加条件为：$t_{AC}\, t_{BC} = t_{AD}\, t_{BD}$，其中 $t_{\alpha\beta}$ 表示子晶格 α 和 β 之间的胞间跃迁（这里，α 和 β 分别表示任意一个子晶格位点 A、B、C 或 D）。在图 4(a3)、4(b3)、4(a4) 和 4(b4) 中，除了满足相关对称性外，我们还额外要求满足紧致性条件，并重复进行了数值测试。对于手征对称晶格，

紧致性条件为 $t_{AC}\,t_{BC} = \frac{t_{AD}}{t_{BD}}$，见图 4(a3) 和 4(b3)。受扰动后的能带结构和逆参与率表明，这两个边缘态不仅在带隙内保持稳定，而且如较大的逆参与率所示，仍保持紧致性。请注意，较大的逆参与率意味着该态仍局域在两个格点上，但两者的振幅不相等。对于 B'-SubSy 晶格，紧致性条件为 $t_{AC}t_{BC} = t_{AD}t_{BD} = 1$，见图 4(a4) 和 4(b4)。能带结构和逆参与率表明，受保护的左边缘态的逆参与率始终保持为 0.5，这说明它以相等的振幅紧致局域在两个格点上。此外，图 4(a1-a4) 中的插图清晰地展示了无序强度为 0.2 时，受保护的紧致边缘态与未受保护态截然不同的分布形态。

结论

总之，我们从理论和实验上证明了一维光子菱形类晶格中拓扑紧致边缘态的存在。这类边缘态受到手征对称性或子晶格对称性的拓扑保护。不同于呈指数衰减的拓扑态，紧致边缘态严格局限于两个边界格点。这种前所未有的局域化精度为超紧致拓扑纳米腔和单发射体传感器等变革性应用开辟了道路。我们的研究不仅揭示了拓扑光子学中一种全新的边界物理形式，也重新定义了对称性保护的拓扑物质的设计原则，并将对不同物理平台中的量子相干性控制和拓扑工程产生广泛影响。

致谢

本研究得到 中国国家重点研发计划（项目编号：2022YFA1404800）和国家自然科学基金（W2541003、12134006、12374309、11922408、124B2078、12504385）的资助。 H.B.感谢项目“作为量子与复杂系统及李代数表示卓越科学中心的一部分，开展前沿研究并推动其应用”的支持，该项目编号为PK.1.1.10.0004，由欧盟通过欧洲区域发展基金—2021—2027年竞争力与凝聚力计划共同资助。Z.H.感谢中国博士后科学基金会的资助（项目编号：BX20240174）。D.B.感谢中华人民共和国人力资源和社会保障部的资助（项目编号：WGXZ2023110）。R.M.感谢加拿大自然科学与工程研究委员会探索计划及加拿大研究讲席计划的支持。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突或竞争性经济利益。

作者贡献

所有作者均参与并为这项工作作出了贡献。Z.C. 和 H.B. 负责指导该项目。通信及材料获取请求请联系 Z.C. 或 L.T。

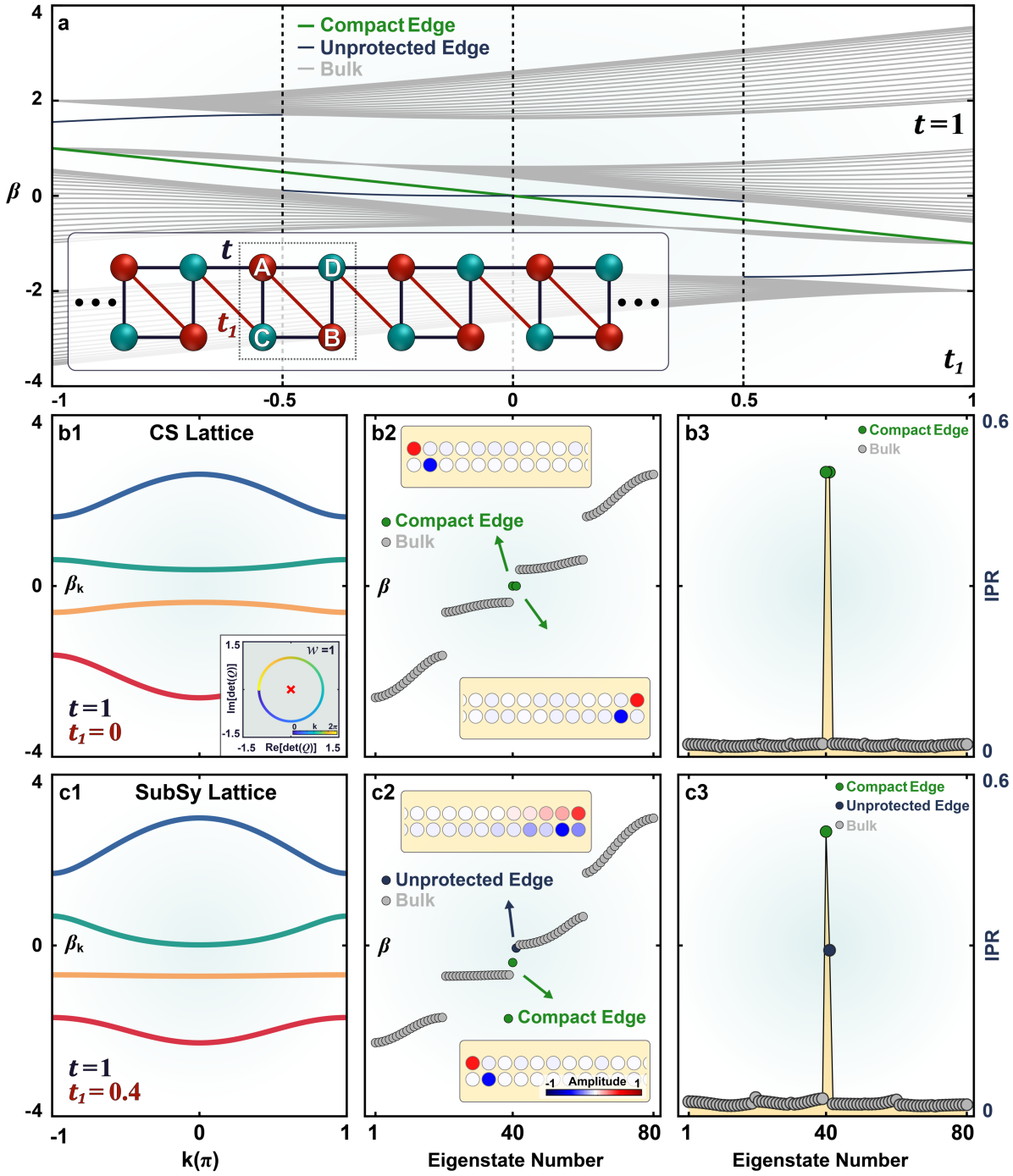


图 1 手征对称性和 SubSy 晶格中拓扑紧致边缘态的理论分析。 (a) 中的插图示意了一种准一维类菱形晶格，其中 t 表示相邻格点之间的最近邻跃迁，t_1 表示次近邻跃迁，每个晶胞包含四个子晶格，分别标记为 A、B、C 和 D。(a) 在实空间中计算的本征值谱随 t_1 变化的演化，参数为 $t = 1$，其中绿线标示紧致边缘态。(b1、c1) 分别为 (b1) 手征对称（$t_1 = 0$）和 (c1) SubSy（$t_1 = 0.4$）晶格在 $t = 1$ 下的k空间能带结构。请注意，(c1) 中黄色标示的表观平带实际上并非真正的平带。(b1) 中的插图展示了绕数的计算。(b2、c2) 对应于由 20 个晶胞组成的有限尺寸晶格的本征值谱。插图

显示对应左边缘态和右边缘态的本征模分布。（b3、c3）每个本征态的逆参与率（IPR），其中（b3）为手征对称晶格（$t_1 = 0$），（c3）为 SubSy 晶格（$t_1 = 0.4$）。

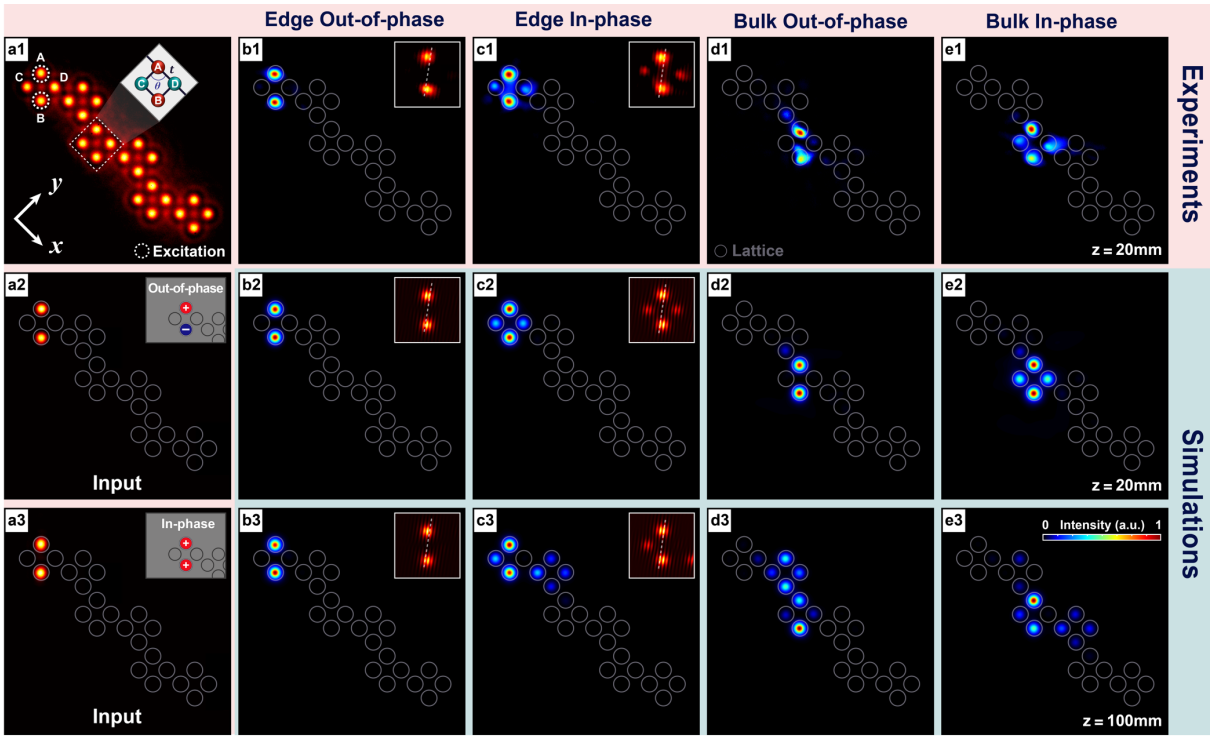


图 2 手征对称性下拓扑紧致边缘态的实验观测

晶格。（a1）交错手性对称光子晶格。（a2、a3）探测偶极形光束的输入强度分布，分别对应反相（a2）和同相（a3）关系。（b1-e1）探测光束经过 20 mm 长距离传播后的输出强度分布，分别对应（b1）边缘反相、（c1）边缘同相、（d1）体态反相和（e1）体态同相激发。（b2-e2、b3-e3）采用与实验相同参数进行的数值模拟，传播距离分别为（b2-e2）20 mm 和（b3-e3）100 mm。（b1-b3、c1-c3）中的插图显示了输出干涉图。

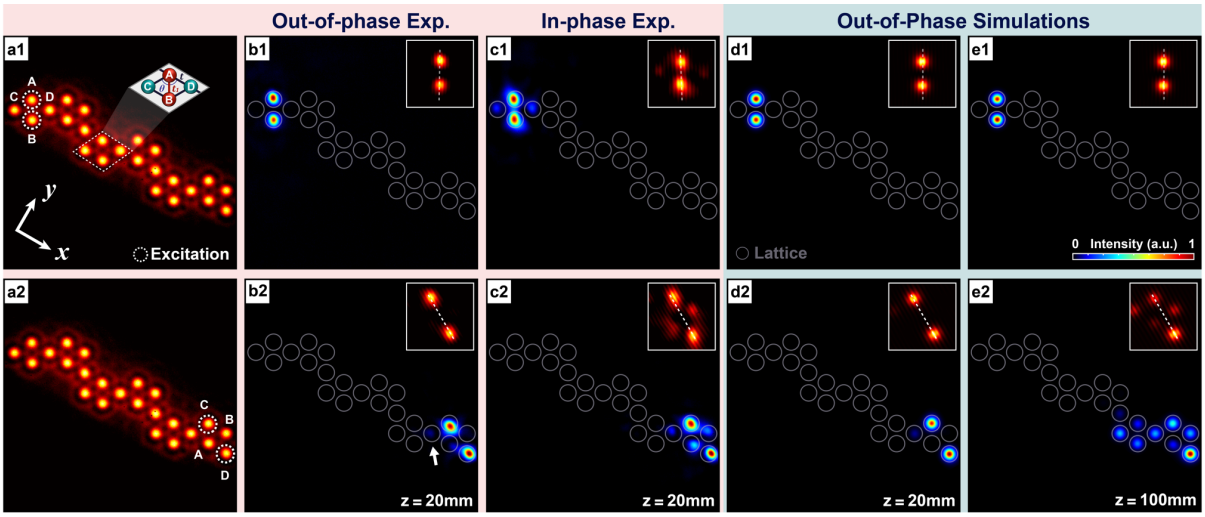


图 3 实 验观测拉伸 SubSy 晶格中的拓扑紧致态 **e.**

(a1, a2) 通过适当调整图 2(a1) 所示的手征对称结构（通过拉伸角度 θ 实现）得到的 SubSy 光子晶格。白色虚线圆圈标出了探测光束激发：(a1) 激发 AB 子晶格中保留的紧致左边缘态；(a2) 激发 CD 子晶格中被破坏的右边缘态。(b1, b2) 在反相激发下传播 20 mm 后的实验输出强度，其中 (b1) 为左边缘激发，(b2) 为右边缘激发。(c1, c2) 在同相激发下传播 20 mm 后，左、右边缘对应的实验输出强度。(d1- d2, e1-e2) 在反相激发下，左、右边缘于 (d1, d2) $z = 20mm$ 和 (e1, e2) $z = 100mm$ 处的数值模拟。(b1-e1, b2-e2) 右上角的插图显示了输出干涉图。

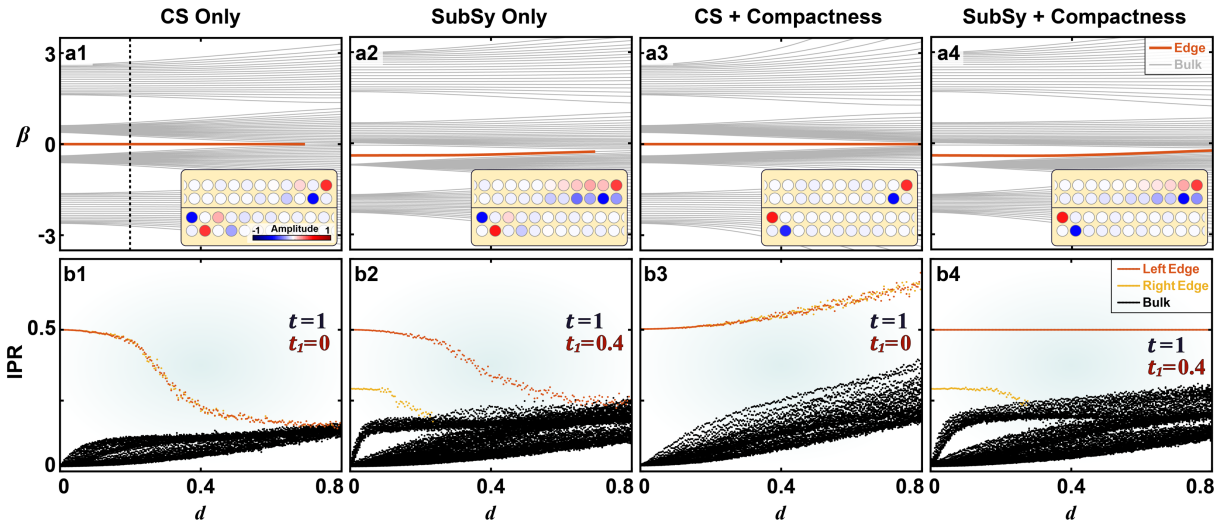


图 4 拓扑紧致边缘态的鲁棒性测试。(a1-a4) 在不同无序强度下，扰动晶格的扰动能谱演化；该晶格分别仅保留 (a1) 手征对称性 (CS)、(a2) B'-子晶格对称性，主文公式 (6) 中定义的变换后的子晶格 B' 、(a3) CS 和紧致性条件，以及 (a4) B'-子晶格对称性和紧致性条件。(b1-b4) 在与 (a1-a4) 相同的条件下，逆参与率 (IPR) 随 d 的变化，其中橙色和黄色虚线分别表示左边缘态和右边缘态。(a1-a4) 中的插图显示了 $d = 0.2$ 对应的左边缘态（下图）和右边缘态（上图）的模式分布。

参考文献

1. M. Z. Hasan 和 C. L. Kane, 《综述：拓扑绝缘体》, 《现代物理评论》**82**, 3045-3067（2010）。2. X.-L. Qi 和 S.-C. Zhang, 《拓扑绝缘体与超导体》, 《现代物理评论》**83**, 1057-1110（2011）。3. L. Lu、J. D. Joannopoulos 和 M. Soljačić, 《拓扑光子学》, 《自然·光子学》**8**, 821-829（2014）。4. C.-K. Chiu、J. C. Y. Teo、A. P. Schnyder 和 S. Ryu, 《具有对称性的拓扑量子物质分类》, 《现代物理评论》**88**, 035005（2016）。5. T. Ozawa、H. M. Price、A. Amo、N. Goldman、M. Hafezi、L. Lu、M. C. Rechtsman、D. Schuster、J. Simon、O. Zilberberg 和 I. Carusotto, 《拓扑光子学》, 《现代物理评论》**91**, 015006（2019）。6. C. H. Lee、S. Imhof、C. Berger、F. Bayer、J. Brehm、L. W. Molenkamp、T. Kiessling 和 R. Thomale, 《拓扑电路》, 《通信物理》**1**, 39（2018）。7. S. Imhof、C. Berger、F. Bayer、J. Brehm、L. W. Molenkamp、T. Kiessling、F. Schindler、C. H. Lee、M. Greiter 和 T. Neupert, 《拓扑电路实现拓扑角模》, 《自然·物理》**14**, 925-929（2018）。8. M. Atala、M. Aidelsburger、J. T. Barreiro、D. Abanin、T. Kitagawa、E. Demler 和 I. Bloch, 《拓扑布洛赫能带中Zak相位的直接测量》, 《自然·物理》**9**, 795-800（2013）。9. N. Cooper、J. Dalibard 和 I. Spielman, 《超冷原子的拓扑能带》, 《现代物理评论》**91**, 015005（2019）。10. K. Wintersperger、C. Braun、F. N. Ünal、A. Eckardt、M. D. Liberto、N. Goldman、I. Bloch 和 M. Aidelsburger, 《利用超冷原子实现反常 Floquet 拓扑系统》, 《自然 · 物理》 **16**, 1058-1063（2020）。11. C. He、X. Ni、H. Ge、X.-C. Sun、Y.-B. Chen、M.-H. Lu、X.-P. Liu 和 Y.-F. Chen, 《声学拓扑绝缘体与鲁棒单向声传输》, 《自然·物理》**12**, 1124-1129（2016）。12. H. Xue、Y. Yang 和 B. Zhang, 《拓扑声学》, 《自然·综述：材料》**7**, 974-990（2022）。13. F. D. M. Haldane 和 S. Raghu, 《在破缺时间反演对称性的光子晶体中实现定向光波导的可能性》, 《物理评论快报》**100**, 013904（2008）。14. Z. Wang、Y. Chong、J. D. Joannopoulos 和 M. Soljačić, 《单向无背向散射拓扑电磁态的观测》, 《自然》**461**, 772-775（2009）。15. M. C. Rechtsman、J. M. Zeuner、Y. Plotnik、Y. Lumer、D. Podolsky、F. Dreisow、S. Nolte、M. Segev 和 A. Szameit, 《光子Floquet拓扑绝缘体》, 《自然》**496**, 196-200（2013）。16. M. Hafezi、S. Mittal、J. Fan、A. Migdall 和 J. M. Taylor, 《硅光子学中拓扑边缘态的成像》, 《自然·光子学》**7**, 1001-1005（2013）。17. M. A. Bandres、S. Wittek、G. Harari、M. Parto、J. Ren、M. Segev、D. N. Christodoulides 和 M. Khajavikhan, 《拓扑绝缘体激光器：实验》, 《科学》**359**, eaar4005（2018）。18. Y. Zeng、U. Chattopadhyay、B. Zhu、B. Qiang、J. Li、Y. Jin、L. Li、A. G. Davies、E. H. Linfield、B. Zhang、Y. Chong 和 Q. J. Wang, 《具有谷边缘模的电泵浦拓扑激光器》, 《自然》**578**, 246-250（2020）。19. A. Dikopoltsev、T. H. Harder、E. Lustig、O. A. Egorov、J. Beierlein、A. Wolf、Y. Lumer、M. Emmerling、C. Schneider、S. Höfling、M. Segev 和 S. Klembt, 《拓扑绝缘体垂直腔面发射激光器阵列》, 《科学》**373**, 1514-1517（2021）。20. L. Yang、G. Li、X. Gao 和 L. Lu, 《拓扑腔面发射激光器》, 《自然·光子学》**16**, 279-283（2022）。21. C. Nayak、S. H. Simon、A. Stern、M. Freedman 和 S. Das Sarma, 《非阿贝尔任意子与拓扑量子计算》, 《现代物理评论》**80**, 1083-1159（2008）。22. Z. Chen 和 M. Segev, 《聚焦光子学：展望下一个十年》, eLight **1**, 2（2021）。23. X. Zhang、F. Zangeneh-Nejad、Z.-G. Chen、M.-H. Lu 和 J. Christensen, 《光子学与声学中的第二波拓扑现象》, 《自然》**618**, 687-697（2023）。24. W. P. Su、J. R. Schrieffer 和 A. J. Heeger, 《聚乙炔中的孤子》, 《物理评论快报》**42**, 1698-1701（1979）。25. C. W. Peterson、W. A. Benalcazar、T. L. Hughes 和 G. Bahl, 《具有拓扑保护角态的量子化微波四极矩绝缘体》, 《自然》**555**, 346-350（2018）。26. V. Martinez Alvarez 和 M. Coutinho-Filho, 《三聚体晶格中的边缘态》, 《物理评论A》**99**,

013833（2019）。27. A. El Hassan、F. K. Kunst、A. Moritz、G. Andler、E. J. Bergholtz 和 M. Bourennane，《光子波导中的光角态》，《自然·光子学》**13**，697-700（2019）。28. Y. Zong、S. Xia、L. Tang、D. Song、Y. Hu、Y. Pei、J. Su、Y. Li 和 Z. Chen，《Kagome光子晶格中局域平带态的观测》，《光学快报》**24**，8877-8885（2016）。29. J. Ma、J. W. Rhim、L. Tang、S. Xia、H. Wang、X. Zheng、S. Xia、D. Song、Y. Hu、Y. Li、B. J. Yang、D. Leykam 和 Z. Chen，《非平庸实空间拓扑产生的平带环态的直接观测》，《物理评论快报》**124**，183901（2020）。30. R. A. Vicencio、C. Cantillano、L. Morales-Inostroza、B. Real、C. Mejía-Cortés、S. Weimann、A. Szameit 和 M. I. Molina，《Lieb光子晶格中局域态的观测》，《物理评论快报》**114**，245503（2015）。31. S. Mukherjee、A. Spracklen、D. Choudhury、N. Goldman、P. Öhberg、E. Andersson 和 R. R. Thomson，《光子Lieb晶格中局域平带态的观测》，《物理评论快报》**114**，245504（2015）。32. S. Xia、A. Ramachandran、S. Xia、D. Li、X. Liu、L. Tang、Y. Hu、D. Song、J. Xu、D. Leykam、S. Flach 和 Z. Chen，《光子Lieb晶格中的非常规平带线态》，《物理评论快报》**121**，263902（2018）。33. W. Yan、H. Zhong、D. Song、Y. Zhang、S. Xia、L. Tang、D. Leykam 和 Z. Chen，《光子超蜂窝晶格中的平带线态》，《先进光学材料》**8**，1902174（2020）。34. S. Gao、L. Song、W. Yan、Y. Wang、S. Xia、L. Tang、D. Song、J. Xu 和 Z. Chen，《光子修饰蜂窝晶格中鲁棒边界模的展示》，《先进光学材料》**11**，2202045 2023( )。35. L. Song、S. Gao、J. Ma、L. Tang、D. Song、Y. Li 和 Z. Chen，《光子超Kagome晶格中的多重平带与局域态》，《光学快报》**48**，5947-5950（2023）。36. J.-W. Rhim 和 B.-J. Yang，《根据布洛赫波函数的能带交叉奇点对平带进行分类》，《物理评论B》**99**，045107（2019）。37. L. Tang、D. Song、S. Xia、S. Xia、J. Ma、W. Yan、Y. Hu、J. Xu、D. Leykam 和 Z. Chen，《光子平带晶格与非常规光局域化》，《纳米光子学》**9**，1161-1176（2020）。38. J. W. Rhim、K. Kim 和 B. J. Yang，《平带的量子距离与反常朗道能级》，《自然》**584**，59-63（2020）。39. J.-W. Rhim 和 B.-J. Yang，《奇异平带》，《先进物理：X》**6**，1901606（2021）。40. S. Mukherjee、M. Di Liberto、P. Ohberg、R. R. Thomson 和 N. Goldman，《光子晶格中阿哈罗诺夫-玻姆笼的实验观测》，《物理评论快报》**121**，075502（2018）。41. M. Kremer、I. Petrides、E. Meyer、M. Heinrich、O. Zilberberg 和 A. Szameit，《利用光子阿哈罗诺夫-玻姆笼实现具有非量子化指标的平方根拓扑绝缘体》，《自然·通讯》**11**，907（2020）。42. C. Jorg、G. Queralto、M. Kremer、G. Pelegri、J. Schulz、A. Szameit、G. von Freymann、J. Mompart 和 V. Ahufinger，《利用光波导中的轨道角动量模切换人工规范场》，《光科学与应用》**9**，150（2020）。43. D. Guzmán-Silva、C. Mejía-Cortés、M. Bandres、M. Rechtsman、S. Weimann、S. Nolte、M. Segev、A. Szameit 和 R. Vicencio，《光子Lieb晶格中体态与边缘输运的实验观测》，《新物理学杂志》**16**，063061（2014）。44. M. R. Slot、T. S. Gardenier、P. H. Jacobse、G. C. Van Miert、S. N. Kempkes、S. J. Zevenhuizen、C. M. S mith、D. Vanmaekelbergh 和 I. Swart，《电子Lieb晶格的实验实现与表征》，《自然·物理》**13**，672-676（2017）。45. L. Song、D. Bongiovanni、Z. Hu、Z. Wang、S. Xia、L. Tang、D. Song、R. Morandotti 和 Z. Chen，《“须状”光子kagome晶格中拓扑不同角态的观测》，《先进光学材料》**12**，2301614（2024）。46. Y. Plotnik、O. Peleg、F. Dreisow、M. Heinrich、S. Nolte、A. Szameit 和 M. Segev，《光学连续谱中的束缚态的实验观测》，《物理评论快报》**107**，183901（2011）。47. B. Zhen、C. W. Hsu、L. Lu、A. D. Stone 和 M. Soljačić，《光学连续谱中束缚态的拓扑本质》，《物理评论快报》**113**，257401（2014）。48. C. W. Hsu、B. Zhen、J. Lee、S.-L. Chua、S. G. Johnson、J. D. Joannopoulos 和 M. Soljačić，《辐射连续谱中受困光的观测》，《自然》**499**，188-191（2013）。49. C. W. Hsu、B. Zhen、A. D. Stone、J. D. Joannopoulos 和 M. Soljačić，《连续谱中的束缚态》，《自然·综述：材料》**1**，1-13（2016）。

50. Z. Wang, X. Wang, Z. Hu, D. Bongiovanni, D. Jukić, L. Tang, D. Song, R. Morandotti, Z. Chen, and H. Buljan, “亚对称性保护的拓扑态”, 《自然·物理》**19**, 992-998 (2023). 51. S. Verma, and M. J. Park, “亚对称性保护拓扑相的非布洛赫能带理论”, 《物理评论B》**110**, 035424 (2024). 52. X. Wang, D. Bongiovanni, Z. Wang, A. Abdrabou, Z. Hu, D. Jukic, D. Song, R. Morandotti, R. El- Ganainy, and Z. Chen, “通过亚对称性构造连续谱中的拓扑束缚态”, 《ACS光子学》**11**, 3213-3220 (2024). 53. Z. Wang, D. Bongiovanni, X. Wang, Z. Hu, D. Jukić, D. Song, J. Xu, R. Morandotti, Z. Chen, and H. Buljan, “多重拓扑物态”, arXiv预印本 arXiv:2411.11121 (2024). 54. J. Zak, “固体能带的贝里相位”, 《物理评论快报》**62**, 2747-2750 (1989). 55. C. L. Kane, and T. C. Lubensky, “等静格子中的拓扑边界模”, 《自然·物理》**10**, 39 45 2013- ( ). 56. G. Cáceres-Aravena, B. Real, D. Guzmán-Silva, A. Amo, L. E. F. Foa Torres, and R. A. Vicencio, “SSH-Stub光子晶格中边缘态的实验观测”, 《物理评论研究》**4**, 013185 (2022). 57. G. Cáceres-Aravena, M. Nedić, P. Vildoso, G. Gligorić, J. Petrovic, A. Maluckov, and R. A. Vicencio, “磁通修饰的类石墨烯光子晶格中的紧致拓扑边缘态”, 《物理评论快报》**133**, 116304 (2024). 58. Y. Wang, C. Jiang, M. Zhao, D. Zhao, and S. Ke, “通过轨道角动量模的混合耦合实现紧致拓扑边缘模”, 《物理评论A》**109**, 063516 (2024). 59. Y. Zhang, D. Bongiovanni, Z. Wang, X. Wang, S. Xia, Z. Hu, D. Song, D. Jukić, J. Xu, and R. Morandotti, “光子p轨道高阶拓扑绝缘体的实现”, eLight **3**, 5 (2023). 60. Z. Hu, D. Bongiovanni, Z. Wang, X. Wang, D. Song, J. Xu, R. Morandotti, H. Buljan, and Z. Chen, “拓扑轨道角动量提取与涡旋输运的双重保护”, 《自然·光子学》**19**, 162-169 (2025).