arXiv:2601.01727v1 [math.RT] 5 Jan 2026

酉群上傅里叶–雅可比周期的全局 Gan–Gross–Prasad 猜想 II：相对迹公式的比较

PAUL BOISSEAU、WEIXIAO LU 和 HANG XUE

Abstract. 本文是系列三篇论文中的第二篇。我们在这一系列论文中证明酉群上傅里叶–雅可比周期的 Gan–Gross–Prasad 猜想及其 Ichino–Ikeda 型精化。我们的方法基于 Liu 提出的相对迹公式比较。本文的目标是比较这两个相对迹公式。

Contents

1. 引言 1

第 1 部分：测试函数的匹配 5

2. 回顾 3. 无穷小几何分布 4. 测试函数的匹配 5 9 17

第二部分：匹配的谱刻画 24

5. 谱比较的预备知识 24 6. 局部球特征 29 7. 局部相对迹公式 38 8. 分裂情形 48

参考文献 53

1. Introduction

这是三篇系列论文中的第二篇，旨在确立酉群上傅里叶–雅可比周期的全局 Gan–Gross–Prasad（GGP）猜想。关于本文在我们研究 GGP 猜想的方法中所处的位置，读者可参阅 [BLX] 的引言。

Date: 2026年1月6日。

1.1. 本系列第一篇取得了哪些成果? 设 E/F 为数域的一个二次扩张， $\mathbb{A}$， $\mathbb{A}_E$ 分别为 F 和 E 的阿代尔。令 $G'_n = \mathrm{GL}_{n,F}$，以及 $G_n = \mathrm{Res}^{E/F}\mathrm{GL}_{n,E}$。令 $G_+ = G \times E_n$。对于 G 的每个尖点数据 χ，我们定义了 $G_+(\mathbb{A})$上的一个分布I_χ。这些称为相对迹公式（RTF）中的谱项，本文不会用到它们。令 $\mathcal{A}$ 为 E 上的一个 $2n$维仿射空间，将其视为 F上的代数簇；对于每个 $\alpha \in \mathcal{A}(F)$，我们定义 $G_+(\mathbb{A})$上的另一个分布 I_α（其中一些按定义为零）。这些称为 RTF 中的几何项。我们将在第 2 节回顾这些项。 G_+ 上的 RTF 粗略形式如下恒等式

$$\sum_\chi I_\chi(f_+) = \sum_\alpha I_\alpha(f_+). \tag{1.1}$$

对所有 $f_+ \in \mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))$。这里，求和 χ 遍历 G的所有尖点数据，而求和 α 遍历所有 $\alpha \in \mathcal{A}(F)$。

类似地，设 V 为维数为 n 的斜厄米空间，$\mathrm{U}(V)$ 为其酉群。令 $\mathrm{U}_V = \mathrm{U}(V) \times \mathrm{U}(V)$，且 $\mathrm{U}_{V,+} = \mathrm{U}_V \times V$。对于 U_V的每个尖点数据 χ，我们定义了 $\mathrm{U}_{V,+}(\mathbb{A})$ 上的一个分布 J^V_χ。这些称为酉群相对迹公式（RTF）中的谱项；同样，本文不需要用到它们。对于每个 $\alpha \in \mathcal{A}(F)$，我们定义 $\mathrm{U}_{V,+}(\mathbb{A})$ 上的另一个分布 J^V_α （其中一些按定义为零）。这些称为酉群相对迹公式中的几何项。我们将在第 2 节回顾这些项。$\mathrm{U}_{V,+}$ 上相对迹公式的粗略形式是以下恒等式

$$\sum_\chi J^V_\chi(f^V_+) = \sum_\alpha J^V_\alpha(f^V_+). \tag{1.2}$$

对所有 $f^V_+ \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(\mathbb{A}))$。这里，求和 χ 遍历 $\mathrm{U}_{V,+}$的所有尖点数据，而求和 α 遍历所有 $\alpha \in \mathcal{A}(F)$。

1.2. 本文要实现什么? 本文的首要目标是定义测试函数匹配这一概念。对于正则半单 $\alpha \in \mathcal{A}(F)$，这是我们将在第 4 节定义的概念，此时几何项 I_α 和 J^V_α 可化为更为熟悉的轨道积分。我们定义，若函数 $f_+ \in \mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))$ 与一组函数 $f^V_+ \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(\mathbb{A}))$ 满足以下条件，则称它们匹配： V 遍历所有维数为 n 的斜厄米空间

$$I_\alpha(f_+) = \sum_V J^V_\alpha(f^V_+), \tag{1.3}$$

对所有正则半单 $\alpha \in \mathcal{A}(F)$而言，对于这样的 α，右侧至多有一项非零。我们将证明，对于匹配的测试函数，恒等式（1.3）对所有 $\alpha \in \mathcal{A}(F)$ 都成立，而不仅限于正则半单的情形。这就是所谓的测试函数奇异转移。它通过将几何项 I_α 和 J^V_α 下降到李代数上来实现，恒等式（1.3）最终归结为 [CZ21]的结果。我们能够进行这种归约，归根结底依赖于我们设定和截断相对迹公式的特定方式，如 [BLX]中所采用的方式。另请参阅 [BLX] 的引言，了解更多讨论。

测试函数的匹配是一种局部性质。设 v 是 F的一个地方。对于函数$f_{+,v} \in \mathcal{S}(G_+(F_v))$以及一组函数$f^V_{+,v} \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(F_v))$，其中 V 遍历 E_v上的所有维数为 n 的斜厄米空间，我们可以类似地定义匹配的概念。事实上，全局（可分解）测试函数在所有地方都匹配，当且仅当它们彼此匹配。我们证明了关于匹配测试函数$f_{+,v}$ 和$f^V_{+,v}$的两个结果。

- 测试函数的转移。给定 $f_{+,v}$ 我们可以找到一组 $f^V_{+,v}$ 与之匹配，反之亦然。若 v 是阿基米德的，这一结论仅对测试函数的稠密子集得到证明。
- 基本引理。这意味着，如果地方 v 上的所有数据都是非分歧的，那么非分歧测试函数应当匹配。精确陈述见定理 4.8。

这两个结果构成了本文所讨论的相对迹公式比较的基石。

这些结果构成了本文的第一部分。本文其余部分致力于证明匹配测试函数的局部特征标恒等式。再次设 v 为 F的一个地方。设 π_v 为 $\mathrm{U}_V(F_v)$ 的一个不可约温和表示，且具有非零的傅里叶–雅可比模型；相关说明见第 6.1 小节。我们在 $\mathrm{U}^+_V(F_v)$ 上定义一个分布 J^V_π。对于其到 $G(F_v)$ 的基变换 Π_v，我们在 $G_+(F_v)$ 上定义另一个分布 I_{Π_v}。我们证明存在一个显式常数 $\kappa(\pi_v)$，使得对所有匹配测试函数 $f_{+,v}$和 $\{f^V_{+,v}\}_V$，都有

$$J^V_{\pi_v}(f^V_+) = \kappa(\pi_v) I_{\Pi_v}(f_+).$$

我们还证明了这个恒等式刻画了测试函数的匹配。这一结果将在本系列论文的第三篇中发挥决定性作用。它既用于证明全局 GGP 猜想的一个精细化版本，也用于在相对迹公式的谱侧筛选出特定的尖点数据。

1.3. **一般记号与约定**。 我们沿用 [BLX]中的一般记号和约定。现回顾如下内容。

- 设 E/F 是数域或特征零局部域的二次扩张。两种情形下，我们都用 c 表示 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 中非平凡的伽罗瓦共轭。若 A 是一个受 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 作用的群，我们用 A^- 表示 A中的纯虚元素，即满足 $x^{\mathrm{c}} = -x$的$x \in A$。我们固定一个非零的 $\tau \in E^-$。

- 若 E/F 是数域，我们分别用 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}_E$ 表示 F 和 E 的阿代尔环。我们将 $\mathbb{A}$的有限阿代尔环记作 $\mathbb{A}_f$。若 S 是 F的有限地点集，我们设$F_{\mathrm{S}} := \prod_{v\in S} F_v$。当 $\mathrm{S} = V_{F,\infty}$ 是 F的阿基米德地方集时，我们也记作$F_\infty := F_{V_{F,\infty}}$。

- 我们固定一个 $F\backslash\mathbb{A}$上的非平凡加性特征标 ψ，并令 ψ^E 和 ψ_E 分别为 $\mathbb{A}_E$ 上的非平凡加性特征标，定义如下：

$$\psi^E(x) = \psi(\mathrm{Tr}_{E/F}(\tau x)), \quad \psi_E(x) = \psi(\mathrm{Tr}_{E/F}\, x).$$

令 η 为 $F^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ 的二次特征，它通过整体类域论与扩张 E/F 相关联。令 μ 为$E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times$ 的一个特征，其在 $\mathbb{A}^\times$ 上的限制为 η。当 E/F 为特征零的局部域时，也采用相同的记号。

• 对于任意定义在 F上的约化群 G，令 $X(G)$表示G上的 F-有理特征空间。设 $\mathfrak{a}_G = \mathrm{Hom}(X(G), \mathbb{R})$，并令$\mathfrak{a}_G^* = X(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$。记 $H_G\colon G(F) \to \mathfrak{a}_G$ 为通常的Harish-Chandra映射，参见 [BLX，第3.5]节。

• 对于 G 定义在 F上的代数群，我们定义了施瓦茨函数空间 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$（如果$F$ 是数域），以及 $\mathcal{S}(G(F))$（如果 F 是特征零局部域），参见 [BLX，第3节。3]。

• 设 G 是定义在 F上的约化群， P 是一个抛物子群。我们常将其Levi子群记为 M_P，幂零根记为 N_P。当我们写作 $P = MN$时，始终表示 M 是Levi子群， N 是幂零根。当 F 是数域时，令 $[G]_P = N(\mathbb{A})M(F)\backslash G(\mathbb{A})$，并令 $[G] = [G]_G$。

• 令 $G'_n = \mathrm{GL}_{n,\,F}$、 $G_n = \mathrm{Res}^{E/F}\mathrm{GL}_{n,\,E}$。设 $G = G_n \times G_n$ 为 G 的对角子群，它与 G_n 同构，并按分量嵌入 G。若 $g \in G$ 或 G'，我们总将两个分量记作 $g = (g_1,\ g_2)$。定义 G'（$\mathbb{A}$）上的二次特征 $\eta_{G'}$（当 F 为局部域时，则定义在 G'（F）上），使得 $\eta_{G'}(g') = \eta(\det g'_1 g'_2)^{n+1}$。

• 设 n 是定义在 E 上的一个 n 维斜厄米空间，$\mathrm{U}(V)$ 为其酉群。令 $\mathrm{U}_V = \mathrm{U}(V) \times \mathrm{U}(V)$，并令 U'_V 为对角子群，它与 $\mathrm{U}(V)$ 同构。

• 关于测度的说明。本文第一部分确实需要精确选取测度。为避免进一步增加记号上的复杂性，我们只假设已在每个要积分的空间上预先指定了测度。本文第二部分将建立球特征之间的精确公式，并在第 5 节说明所采用的测度。

1.4. **致谢**。 我们感谢 Rapha¨el Beuzart-Plessis 和 Wei Zhang 进行了许多有益的讨论。PB 部分经费由欧盟 ERC整合者基金 RELANTRA 项目资助，项目编号为 101044930。但所表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究委员会的观点。欧盟及授予资助的机构均不对此承担责任。WL 在 2023年春季于加利福尼亚州伯克利的数学科学研究所驻留期间，部分获得美国国家科学基金会第 1440140 号拨款的支持。HX 部分获得美国国家科学基金会 DMS # 2154352 号拨款的支持。

第1 部分：匹配测试函数

2. Recollections

2.1. **一般线性群上的几何分布。** 我们在 [BLX] 中构建了一般线性群上相对迹公式的粗略形式。本小节回顾其几何侧。

BLX [中的一项重大创新] 是使用雅可比群。设 $L = E^n$， $L^\vee = E_n$，以及$S = L^\vee + L + E$ 海森堡群。设 $J_n = S \rtimes G_n$ 为雅可比群。群 J_n 可实现为 G_{n+2} 的一个子群，由形如以下形式的矩阵组成

$$\begin{pmatrix} 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \star \\ & * & * & * & \circ \\ & * & * & * & \circ \\ & * & * & * & \circ \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

这里， $*$给出群 G_n， $\bullet$给出 E_n， $\circ$给出 E^n ，而 $\star$ 给出中心 E。后三者合在一起构成海森堡群 S。

的标准抛物子群 G_n 是那些分块上三角子群。我们在 J_n 中引入了 [BLX]中的标准 D-抛物子群这一概念。设 $\mathcal{F}$ 为 J_n的标准 D-抛物子群集合。 $\mathcal{F}$ 中的 D-抛物子群可以用以下具体方式描述。对于$P \in \mathcal{F}$， 令 $P_n = P \cap G_n$。那么 P_n 是 G_n的标准抛物子群。假设 P_n 是旗的稳定子群

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_r = L. \tag{2.1}$$

那么 P 要么具有以下形式

$$P = (L_k^\perp \times L_k \times E) \rtimes P_n \tag{2.2}$$

对于某个 $0 \le k \le r$，此时我们称 P 为 I 型；要么具有以下形式

$$P = (L_k^\perp \times L_{k+1} \times E) \rtimes P_n \tag{2.3}$$

对于 $0 \le k \le r-1$，此时我们称 P 为 II 型。如果 P 为 I 型，则 P 的 D-Levi 分解为

$$M_P = (0 \times 0 \times E) \rtimes M_{P_n}, \quad N_P = (L_k^\perp \times L_k \times 0) \rtimes N_{P_n}.$$

如果 P 为 II 型，则 P 的 D-Levi 分解为

$$M_P = (L_k^\perp / L_{k+1}^\perp \times L_{k+1}/L_k \times E) \rtimes M_{P_n}, \quad N_P = (L_{k+1}^\perp \times L_k \times 0) \rtimes N_{P_n}.$$

我们在 [BLX，引理 4.2] 证明了 $\mathcal{F}$ 与以下抛物子群的集合之间存在双射： $P_{n+1} \times P_n$属于 $G_{n+1} \times G_n$ 且满足 $P_n = P_{n+1} \cap G_n$ 并且是标准的。

用矩阵表示时，一个 I 型 D-抛物子群看起来如下：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \bullet & \star \\ & * & * & * & \circ \\ & * & * & * & \circ \\ & & & * & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & & \star \\ & * & * & & \\ & * & * & & \\ & & & * & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

其 D-列维子群（右侧矩阵）是若干较小 GL群（以及右上角的中心）的乘积。一个 II 型 D-抛物子群看起来像

$$\begin{pmatrix} 1 & & \bullet & \bullet & \star \\ & * & * & * & \circ \\ & & * & * & \circ \\ & & & * & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \bullet & & \star \\ & * & & & \\ & & * & & \circ \\ & & & * & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

其 D-Levi子群（右侧矩阵）是若干 GL群和一个较小雅可比群的乘积。

对于 $P = MN \in \mathcal{F}$，其中 M是 D-列维子群， N是 D-幺幂根基，我们记作 $P_n = P \cap G_n = M_n N_n$，它是 G_n的一个抛物子群，并且 $M_G = M_n \times M_n$, $N_G = N_n \times N_{n^\circ}$ 我们还用 $M_{L^\vee} = M \cap L^\vee$ 和 $M_L = M \cap L$ 表示它们，它们是 S的子群。

为了陈述相对迹公式的几何侧，我们回顾以下记号，摘自 [BLX，第 6]节。

- 令 A_{n+1} 为 G'_{n+1} 和 $\mathfrak{a}'_{n+1} = \mathfrak{a}'_{A_{n+1}}$的对角极大环面。
- 令 $G^+ = G \times L^{\vee,-} \times L^-$ 并赋予其直积群结构。回想一下，对于 $L^\vee$ 或 L 中的任意子集 A， A 中纯虚元素构成的子集记为 A^-。群 $H \times G'$ 从右侧作用于 G^+，作用方式如下：

$$(g, w, v) \cdot (h, g') = (h^{-1} g g', w g'_1, g_1'^{-1} v). \tag{2.4}$$

- 设 $P = MN \in \mathcal{F}$。令 $M^+ = M_G \times M^-_{L^\vee} \times M^-_L$, $N^+ = N_G \times N^-_{L^\vee} \times N^-_L$ 和 $P^+ = M^+ N^+$。相应地，我们常将 P^+ 中的元素写作 $m^+ n^+$ 。
- 设 $q : G^+ \to \mathcal{A} = G^+ // (H \times G')$ 为几何不变量理论商。我们定义一个态射 $G^+ \to \mathrm{Res}_{E/F} \mathbf{A}_{2n,E}$ ，定义如下：

$$((g_1, g_2), w, v) \mapsto (a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n), \tag{2.5}$$

其中 $\mathbf{A}_{2n,E}$ 表示 E 上的 $2n$ 维仿射空间，并令

$$s = (g_1^{-1} g_2)(g_1^{-1} g_2)^{\mathsf{c},-1}, \quad a_i = \mathrm{Trace} \wedge^i s, \quad b_i = w s^i v, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

该映射下降为一个局部闭嵌入 $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathrm{Res}^{E/F} \mathbf{A}_{2n,E}$。我们始终将$\mathcal{A}$ 视为 $\mathrm{Res}^{E/F} \mathbf{A}_{2n,E}$ 的局部闭子概形。

• 若 $\alpha \in \mathcal{A}(F)$，我们将 G_α^+ 定义为 α 的原像（视为 G^+ 的闭子概形）。对于 $P = MN \in \mathcal{F}$，我们令 $M_\alpha^+ = G_\alpha^+ \cap M^+$。

对于 $\alpha \in \mathcal{A}(F)$、$f^+ \in \mathcal{S}(G^+(\mathbb{A}))$ 和 $P \in \mathcal{F}$，我们在 $[H]_{P_H} \times [G']_{P_{G'}}$ 上定义了一个核函数：

$$k_{f^+,P,\alpha}(h, g') = \sum_{m^+ \in M_\alpha^+(F)} \int_{N^+(\mathbb{A})} f^+(m^+ n^+ \cdot (h, g')) \mathrm{d}n^+.$$

我们定义了一个修正后的核函数

$$k_{f^+,\alpha}^T(h, g') = \sum_{P \in \mathcal{F}} \epsilon_P \sum_{\substack{\gamma \in P_H(F) \backslash H(F) \\ \delta \in P_{G'}(F) \backslash G'(F)}} \widehat{\tau}_{P_{n+1}}(H_{P_{n+1}}(\delta_1 g_1') - T_{P_{n+1}}) k_{f^+,P,\alpha}(\gamma h, \delta g').$$

这里 ϵ_P是附加到 P上的某个符号，$T \in \mathfrak{a}_{n+1}'$是一个截断参数，而 $\widehat{\tau}(...)$ 是 $\mathfrak{a}_{n+1}'$中某个锥的特征函数。未作解释的术语的定义见 [BLX第 3 节。5], 但就本文而言，我们不需要它们的精确定义。

利用这些核函数，我们在 [BLX第 6]节中定义了分布

$$i_\alpha^T(f^+) = \int_{[G']} \int_{[H]} k_{f^+,\alpha}^T(h, g') \eta_{G'}(g') \mathrm{d}h \mathrm{d}g'.$$

当 T充分大（即 T属于某个锥，参见 [BLX第 3.5 小节。3]中的定义）时，该表达式绝对收敛。函数 $T \mapsto i_\alpha^T(f)$ 是一个多项式指数函数的限制，其纯多项式部分为常数。这个常数记作 $i_\alpha(f^+)$。

我们定义了一个积分变换

$$-^\dagger : \mathcal{S}(G_+(\mathbb{A})) \to \mathcal{S}(G^+(\mathbb{A})), \quad f_+ \mapsto f^+ = (f_+)^\dagger.$$

这本质上是一个部分傅里叶变换。我们将在本文第二部分中遇到它的一个局部类比。由此，我们定义了分布 I_α^T 和 I_α 在 $\mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))$ 上，定义如下

$$I_\alpha^T(f_+) = i_\alpha^T(f^+), \quad I_\alpha(f_+) = i_\alpha(f^+).$$

它们是相对迹公式中出现的几何项。

2.2. **酉群上的几何分布**。与一般线性群的情形一样，我们在 [BLX] 中引入了雅可比群。

令 Res V 为 F 上的辛空间，其底层向量空间为 V，辛形式为 $\mathrm{Tr}^{E/F} \circ q_V$。令 $S(V) = \mathrm{Res}\, V \times F$ 为海森堡群，$J(V) = S(V) \rtimes \mathrm{U}(V)$ 为雅可比群。群 $J(V)$ 可实现为 $\mathrm{U}(V + \mathbb{H})$ 的子群，其中 $\mathbb{H}$ 是二维分裂斜厄米空间。若将 $\mathrm{U}(V + \mathbb{H})$ 实现为矩阵，则 $J(V)$ 由以下形式的矩阵$_7$组成

组成

$$\begin{pmatrix} 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & * & * & * & \bullet \\ & * & * & * & \bullet \\ & * & * & * & \bullet \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

其中，$\bullet$给出海森堡群 $S(V)$，而 $*$给出 $\mathrm{U}(V)$。

令 $\mathcal{F}_V$为 $J(V)$ 的标准 D-抛物子群集合。 $J(V)$ 的标准 D-抛物子群可具体描述如下。我们固定 $P_0 = M_0 N_0$，即 $\mathrm{U}(V)$ 的一个极小抛物子群。设 P和 $P' = P \cap \mathrm{U}(V)$。那么，若 P包含 P_0，则称 P为标准的。若 P'若 P' 稳定了如下形式的一个各向同性旗标

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_r \tag{2.6}$$

在 V中。那么，相应的 $P \in \mathcal{F}_V$由 $P = (X_r^{\perp} \times F) \rtimes P'$给出。我们在 [BLX，引理 4。7] 中证明了， $P \mapsto P'$ 是 $\mathcal{F}_V$与 $\mathrm{U}(V$的标准抛物子群集合之间的一个双射。用矩阵表示， $J(V)$ 的 D-抛物子群形如

$$\begin{pmatrix} 1 & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & * & * & * & \bullet \\ & & * & * & \bullet \\ & & & * & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & \bullet & & \bullet \\ & * & & & \\ & & * & & \bullet \\ & & & * & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

其 D-列维子群（右侧矩阵）是 GL群与一个附属于较小斜厄米空间 V_0 的雅可比群的直积。注意，$X_r^{\perp} = X_r + V_0$。

对于 $P = MN \in \mathcal{F}_V$，我们令 $P_{\mathrm{U}} = P' \times P'$ 为 U_V 的一个抛物子群。

为陈述相对迹公式的几何侧，我们回顾 [BLX第 8] 节中的以下记号。

- 令 A_0 为 P_0 和 $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_{A_0}$ 中的极大分裂环面。
- 我们赋予 $\mathrm{U}_V^+ = \mathrm{U}_V \times V$ 直积群结构。群 $\mathrm{U}'_V \times \mathrm{U}'_V$ 从右侧通过 $(g, v) \cdot (x, y) = (x^{-1}gy, y^{-1}v)$ 作用于 U_V^+。
- 令

$$P^+ = P_{\mathrm{U}} \times X_r^{\perp}, \quad M_P^+ = M_{P_{\mathrm{U}}} \times V_0, \quad N_P^+ = N_{P_{\mathrm{U}}} \times X_r.$$

这些是 U_V^+ 的子群。

- 根据 [CZ21，引理 15.1.4， 1] 范畴商 $\mathrm{U}_V^+ /\!/ (\mathrm{U}'_V \times \mathrm{U}'_V)$ 典范地同一于 $\mathcal{A} = G^+ /\!/ (H \times G')$。典范态射 $q_V \colon \mathrm{U}_V^+ \to \mathcal{A}$ 由下式给出：

$$((g_1, g_2), v) \mapsto (a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n)$$

其中

$$a_i = \mathrm{Trace} \wedge^i (g_1^{-1} g_2), \quad b_i = 2(-1)^{n-1} \tau^{-1} q_V(g_1^{-1} g_2 v, v).$$

这里 $\mathcal{A}$ 被视为 $\mathrm{Res}^{E/F}\mathbf{A}_{2n}$的局部闭子概形，$E$ 与一般线性群的情形相同。在$-1)^{n-1}\tau^{-1}$ 中额外乘上因子 2(b_i稍后比较相对迹公式时将说明这一选择的合理性，参见4.1。

- 对于 $\alpha \in \mathcal{A}(F)$，令 U_V^+，α 为 α 在 U_V^+ 中的原像，视为闭子概形。我们还定义

$$M_{P,\alpha}^+ = \mathrm{U}_{V,\alpha}^+ \cap M_P^+.$$

对于 $f^+ \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_V^+(\mathbb{A}))$、$P \in \mathcal{F}_V$和 $\alpha \in \mathcal{A}(F)$，我们定义了核函数

$$k_{f^+,P,\alpha}(x,y) = \sum_{m^+ \in M_{P,\alpha}^+(F)} \int_{N_P^+(\mathbb{A})} f^+(m^+n^+ \cdot (x,y))\mathrm{d}n^+.$$

对于 $T \in \mathfrak{a}_0$和 $x,\ y \in [\mathrm{U}_V']$及 $\alpha \in \mathcal{A}(F)$，我们定义

$$k_{f^+,\alpha}^T(x,y) = \sum_{P \in \mathcal{F}_V} \epsilon_P \sum_{\substack{\gamma \in P'(F)\backslash \mathrm{U}_V'(F) \\ \delta \in P'(F)\backslash \mathrm{U}_V'(F)}} \widehat{\tau}_{P'}(H_{P'}(\delta y) - T_{P'}) k_{f^+,\alpha,P}(\gamma x, \delta y).$$

这里再次地，ϵ_P是附加于 P的某个符号，$T \in \mathfrak{a}_0$是一个截断参数，而 $\widehat{\tau}(...)$ 是 $\mathfrak{a}_0$中某个锥的特征函数。关于未解释术语的定义，同样见 [BLX第 3 节。5], 但就本文而言，我们不需要这些术语的精确定义。

我们定义了一个分布

$$j_\alpha^T(f^+) = \int_{[\mathrm{U}_V'] \times [\mathrm{U}_V']} k_{f^+,\alpha}^T(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

当 T 足够正则时，j_α^T 与 T 的某个指数多项式函数的限制相一致，其纯多项式项为常数 $j_\alpha(f^+)$。

我们定义了一个积分变换

$$-^\ddagger : \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(\mathbb{A})) \to \mathcal{S}(\mathrm{U}_V^+((\mathbb{A})), \quad f_+ \mapsto f^+ = (f_+)^\ddagger. \tag{2.7}$$

这本质上是一种部分傅里叶变换。我们将在本文第二部分中遇到它的一个局部类比。由此，我们定义了分布 J_α^T 和 J_α 在 $\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(\mathbb{A}))$ 上：

$$J_\alpha^T(f_+) = j_\alpha^T(f^+), \quad J_\alpha(f_+) = j_\alpha(f^+).$$

它们是相对迹公式中出现的几何项。

3. Infinitesimal geometric distributions

3.1. 简化：一般线性群。本小节的目标是简化分布 i_α。我们来引入以下附加空间和群作用。

- 我们定义

$$S_n = \{g \in G_n \mid gg^{\mathsf{c},-1} = 1\},$$

这是 F上的 G_n 闭子簇。群 G'_n 通过通常共轭作用从右侧作用于 S_n，并且我们有一个 G'_n-簇同构 $S_n \simeq G_n/G'_n$。令

$$\nu : G_n \to S_n, \quad \nu(g) = gg^{\mathsf{c},-1}$$

是自然投影。

- 令 $X = S_n \times L^{\vee,-} \times L^-$， G'_n 在其上通过以下方式从右侧作用：

$$(\gamma, w, v) \cdot g' = (g'^{-1}\gamma g', wg', g'^{-1}v).$$

令 $G_n^+ = G_n \times L^{\vee,-} \times L^-$， G' 在其上通过以下方式从右侧作用：

$$(g, w, v) \cdot (g'_1, g'_2) = (g'^{-1}_1 g g'_2, wg'_1, g'^{-1}_1 v).$$

我们将映射 ν扩展为映射 $G_n^+ \to X$，定义为 $\nu(g,u,v) = (\nu(g)\ u, v)$。将其与映射 $G_n \times G_n \to G_n$，$(g_1, g_2) \mapsto g_1^{-1}g_2$复合后，我们进一步得到映射 $G^+ \to X$。注意， $G^+(\mathbb{A}) \to X(\mathbb{A})$ 是满射。

- 注意，商态射 $G/H \to G_n$，$(g_1, g_2) \mapsto g_1^{-1}g_2$ 和 ν 都是主齐性空间；范畴商 $G_n^+//G'$、$X//G'_n$ 和 $G^+//(H \times G')$ 可典范地识别，并统称为 $\mathcal{A}$。范畴商 $q: G^+ \to \mathcal{A}$经由映射 $\nu: G^+ \to X$ 分解，我们仍将诱导映射记为 $q: X \to \mathcal{A}$。若 $\alpha \in \mathcal{A}(F)$，则令 X_α 为 α 在 X 中的原像（作为闭子概形）。

- 令 $P = MN \in \mathcal{F}$，记作 $P_n = P \cap G_n = M_n N_n$。置

$$M_n^+ = M_n \times M_{L^\vee}^- \times M_L^-, \quad N_n^+ = N_n \times N_{L^\vee}^{\vee,-} \times N_L^-.$$

G'_n在 G_n^+上的右作用限制为 M'_n在 M_n^+上的作用。

- 将嵌入 $M_n^+ \subset G_n^+$与映射 $G_n^+ \to \mathcal{A}$复合，得到映射 $M_n^+ \to \mathcal{A}$；对于任意 $\alpha \in \mathcal{A}(F)$，我们将 α在 M_n^+中的原像（作为一个闭子概形）记为 $M_{n,\alpha}^+$。

对于 $\varphi \in \mathcal{S}(X(\mathbb{A}))$，在 $[G'_n]_{P'_n}$ 上定义函数 $k_{\varphi, P, \alpha}$，其定义为

$$k_{\varphi,P,\alpha}(h) = \sum_{m \in M_n^+(F) \cap X_\alpha(F)} \int_{N_n^+(\mathbb{A})/N'_n(\mathbb{A})} \varphi(h^{-1}\nu(xn)h)\mathrm{d}n,$$

其中 x是 M_n^+中满足 $\nu(x) = m$的任意元素，而 N_n^+/N'_n表示 $N_n/N'_n \times N^{\vee, P^-, L^\vee} \times N_P^-, L$。与 [BLX，引理 61] 相同的论证表明

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}(F)} \sum_{m \in M_{n,\alpha}^+(F)} \int_{N_n^+(\mathbb{A})/N'_n(\mathbb{A})} |\varphi(h^{-1}\nu(xn)h)|\mathrm{d}n$$

是收敛的。

我们定义一个积分变换

$$\mathcal{S}(G^+(\mathbb{A})) \to \mathcal{S}(X(\mathbb{A})), \quad f^+ \mapsto \varphi_{f^+}$$

如下。对于任意 $(\gamma,\ w,\ v) \in X(\mathbb{A})$，令

$$\varphi_{f^+}(\gamma,w,v) = \begin{cases} \int_{G_n(\mathbb{A})}\int_{G'_n(\mathbb{A})} f^+((h^{-1},h^{-1}xg'_n),w,v)\mathrm{d}h\mathrm{d}g'_n, & n \text{ odd};\\ \int_{G_n(\mathbb{A})}\int_{G'_n(\mathbb{A})} f^+((h^{-1},h^{-1}xg'_n),w,v)\mu(\det xg'_n)\mathrm{d}h\mathrm{d}g'_n, & n \text{ even}. \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $x \in G_n(\mathbb{A})$ 是满足以下条件的任意元素：$\nu(x) = \gamma$。我们注意到，由于映射 $G^+ \to X$ 是一个光滑态射，积分变换 $f^+ \mapsto \varphi_{f^+}$ 是满射，参见 [AG08，定理 B.2。4]。若S 是一个有限地点集，且 $f^+ \in \mathcal{S}(G^+(F_S))$，则我们以相同方式定义 $\varphi_{f^+} \in \mathcal{S}(X(F_S))$，在群的 F_S-点上积分。

下一个引理给出了核函数 k_{f^+} 与 $k_{\varphi_{f^+}}$ 之间关于 $f^+ \in \mathcal{S}(G^+(\mathbb{A}))$的关系。对于 $G' = G'_n \times G'_n$中的元素或子群，我们用下标 1 和 2 分别表示第一和第二个分量。

引理 3.1。对于所有 $\alpha \in \mathcal{A}(F)$ 和 $f^+ \in \mathcal{S}(G^+(\mathbb{A}))$，表达式

$$\int_{[H]}\int_{[G'_n]} \sum_{\substack{\gamma\in P_H(F)\backslash H(F)\\ \delta_2\in P'_2(F)\backslash G'_n(F)}} \sum_{m\in M^+_\alpha(F)} \int_{N^+(\mathbb{A})} \left|f^+(mn\cdot(\gamma h,\delta_2 g'))\right| \mathrm{d}n\mathrm{d}g'_2\mathrm{d}h$$

收敛，并且我们有

$$\int_{[H]}\int_{[G'_n]} \sum_{\substack{\gamma\in P_H(F)\backslash H(F)\\ \delta_2\in P'_2(F)\backslash G'_n(F)}} k_{f^+,P,\alpha}(\gamma h,\delta_2 g')\eta_{G'}(g')\mathrm{d}g'_2\mathrm{d}h = k_{\varphi_{f^+},P,\alpha}(g'_1)\eta(g'_1). \tag{3.2}$$

这里回顾一下，$g' = (g'_1,g'_2) \in G'(\mathbb{A})$、$g'_1$、$g'_2 \in G'_n(\mathbb{A})$，以及 $\delta_2 g'$ 表示元素 $(g'_1,\delta_2 g'_2) \in G'(\mathbb{A})$。积分关于 h 和 g'_2进行，最后得到一个定义在 g'_1上的函数。

证明。我们将证明（3.2）。绝对收敛性可通过相同的计算得到，只需做显而易见的细微调整。

我们首先展开关于 γ 和 δ 的求和，从而得到（3.2）等于

$$\int_{[H]_{P_H}}\int_{[G'_n]_{P'_n}} k_{f^+,P,\alpha}(h,g')\eta_{G'}(g')\mathrm{d}g'_2\mathrm{d}h.$$

我们固定 K_H 和 K'_2 的良好极大紧子群 $H(\mathbb{A})$ 以及 $G'_n(\mathbb{A})$。根据伊瓦萨瓦分解，左侧的 (3.2) 等于

$$\eta(\det g'_1)^{n+1} \sum_{m\in M^+_\alpha(F)} \int_{K_H}\int_{K'_2}\int_{[M_{P_H}]}\int_{[M'_n]}\int_{N^+(\mathbb{A})} e^{\langle -2\rho_{P_H},H_{P_H}(m_H)\rangle+\langle -2\rho_{P'_n},H_{P'_n}(m')\rangle}$$
$$f^+(mn\cdot(m_Hk_H,(g'_1,m'k')))\eta(\det m'k')^{n+1}\mathrm{d}n\mathrm{d}m'\mathrm{d}m_H\mathrm{d}k'\mathrm{d}k_H.$$

将关于 $m \in M_\alpha^+(F)$ 的求和展开后，我们得到其等于

$$\eta(\det g_1')^{n+1} \sum_{m\in M_\alpha^+(F)/(M_{P_H}(F)\times M_2'(F))} \int_{K_H}\int_{K_2'}\int_{M_{P_H}(\mathbb{A})}\int_{M_n'(\mathbb{A})}\int_{N^+(\mathbb{A})}$$
$$e^{\langle -2\rho_{P_H},\ H_{P_H}(m_H)\rangle+\langle -2\rho_{P_n'},\ H_{P_n'}(m')\rangle} f^+\left(nm\cdot(m_Hk_H,\ (g_1',\ m'k'))\right)\eta(\det\ m'k')^{n+1}\mathrm{d}n\mathrm{d}m'\mathrm{d}m_H\mathrm{d}k'\mathrm{d}k_H.$$

我们有

$$M_\alpha^+(F)/(M_{P_H}(F)\times M_n'(F)) = M_{n,\alpha}^+(F)/M_n'(F).$$

我们还将关于 $N^+(\mathbb{A})$ 的积分分解为关于 $N_H(\mathbb{A})$ 和 $N_n^+(\mathbb{A})$ 的积分。将 $N_n^+(F)$ 中的元素视为 $N^+(F)$ 中的元素，其对应关系为 $(g,\ x,\ y)\mapsto((1,\ g)\ x,\ y)$。于是，上述积分等于

$$\begin{aligned}\eta(\det g_1')^{n+1} &\sum_{m\in M_{n,\alpha}^+(F)/M_n'(F)} \int_{K_H}\int_{K_2'}\int_{M_{P_H}(\mathbb{A})}\int_{M_n'(\mathbb{A})}\int_{N_H(\mathbb{A})}\int_{N_n^+(\mathbb{A})}\\ &e^{\langle -2\rho_{P_H},H_{P_H}(m_H)\rangle+\langle -2\rho_{P_n'},H_{P_n'}(m')\rangle} f^+\left(n_Hmn_2\cdot(m_Hk_H,(g_1',m'k'))\right)\\ &\eta(\det m'k')^{n+1}\mathrm{d}n_2\mathrm{d}n_H\mathrm{d}m'\mathrm{d}m_H\mathrm{d}k'\mathrm{d}k_H.\end{aligned}$$

我们进一步将关于 $N_n^+(\mathbb{A})$ 的积分分解为关于 $N_n^+(\mathbb{A})/N_n'(\mathbb{A})$ 和 $N_n'(\mathbb{A})$ 的积分，得到

$$\begin{aligned}\eta(\det g_1')^{n+1} &\sum_{m\in M_{n,\alpha}^+(F)/M_n'(F)} \int_{K_H}\int_{K_2'}\int_{M_{P_H}(\mathbb{A})}\int_{M_n'(\mathbb{A})}\int_{N_H(\mathbb{A})}\int_{N_n^+(\mathbb{A})/N_n'(\mathbb{A})}\int_{N_n'(\mathbb{A})}\\ &e^{\langle -2\rho_{P_H},H_{P_H}(m_H)\rangle+\langle -2\rho_{P_n'},H_{P_n'}(m')\rangle} f^+\left(n_Hmn_2n_2'\cdot(m_Hk_H,(g_1',m'k'))\right)\\ &\eta(\det m'k')^{n+1}\mathrm{d}n_2'\mathrm{d}n_2\mathrm{d}n_H\mathrm{d}m'\mathrm{d}m_H\mathrm{d}k'\mathrm{d}k_H.\end{aligned}\tag{3.3}$$

利用伊瓦萨瓦分解，我们将 m'，n' 和 k' 的积分合并为关于$G_n'(\mathbb{A})$的积分，并将 m_H，n_H和 k_H 的积分合并为关于 $H(\mathbb{A})$的积分。注意，对于 $\mu(\det\ mn_2)$，$=1$当 $m\in M_n'(F)$以及 $n\in N_n(\mathbb{A})$时。由此可得（3.3）等于

$$\eta(\det g_1') \sum_{m\in M_{n,\alpha}^+(F)/M_n'(F)} \int_{N_{n,+}(\mathbb{A})/N_n'(\mathbb{A})} \varphi_{f^+}\left(g_1'^{-1}\nu(mn_2)g_1'\right)\mathrm{d}n_2.$$

注意到，φ_{f^+} 在 n 为偶或奇时的定义略有不同，但最终都化简为统一的表达式。最后，映射 ν 在$M_{n,\alpha}^+(F)/M_n'(F)$与 $M_n^+(F)\cap X_\alpha(F)$之间诱导出一个自然双射。这就完成了证明。□

3.2. **无穷小变体**。我们用哥特体字母表示相应群的李代数。例如，若 G 是定义在 F 上的群，则我们用 $\mathfrak{g}$ 表示它的李代数（作为代数簇，它是 F上的一个仿射空间）。我们将这一约定稍作扩展，使之适用于带有指定点 e 的代数簇；此时，我们用相应的哥特体字母表示该簇在 e处的切空间。例如，$G^+=G\times L^{\vee,\ -}\times L^-$是一个带有指定点的代数簇，其指定点为（1，0，0），而 $\mathfrak{g}^+=\mathfrak{g}\times L^{\vee,\ -}\times L^-$ 表示该点处的切空间。

现在我们引入分布 i_α的一种无穷小变体，并将 i_α 与之联系起来。事实上，这种无穷小变体与雅克–拉尔利斯相对迹公式中出现的变体基本相同；这些公式用于研究酉群上的贝塞尔周期。

我们定义 $\mathfrak{s}_n := M_n(E)^-$，即 $M_n(E)$中纯虚元素构成的子空间，它可识别为 S_n 在 1 处的切空间。令 $\mathfrak{x} = \mathfrak{s}_n \times L^{\vee,\,-} \times L^-$，视为定义在 F 上的代数簇。我们将其中的一个元素写作 $(\gamma,\ w,\ v)$。它具有 G'_n 的右作用，定义如下：

$$(\gamma, w, v) \cdot g' = (g'^{-1}\gamma g', wg', g'^{-1}v), \quad (\gamma, w, v) \in \mathfrak{x}, \quad g' \in G'_n(F). \tag{3.4}$$

令 $\mathfrak{x} \to \mathcal{B} = \mathfrak{x}//G'_n$ 为范畴商。 $\mathcal{B}$ 的具体描述见 [Zha14a，引理 3。1]。范畴商 $\mathcal{B}$ 同构于定义在 F 上的维数为 $2n$的仿射空间。我们将 $\mathcal{B}$ 视为定义在 E 上的维数为 $2n$的仿射空间的一个闭子空间，其元素满足

$$(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n)$$

满足

$$a_i^{\mathsf{c}} = (-1)^i a_i, \quad b_i^{\mathsf{c}} = (-1)^{i-1} b_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

商映射 $q : \mathfrak{x} \to \mathcal{B}$ 定义如下：

$$(\gamma, w, v) \mapsto (a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n)$$

其中

$$a_i = \mathrm{Trace} \wedge^i \gamma, \quad b_i = w\gamma^{i-1}v, \quad i = 1, \ldots, n.$$

对于任意 $\alpha \in \mathcal{B}(F)$，我们将 $\mathfrak{x}_\alpha$ 记作 α 在 $\mathfrak{x}$ 中的原像（作为闭子概形）。

设 $P = MN \in \mathcal{F}$，置 $\mathfrak{x}_M = \mathfrak{m}_n^+ \cap \mathfrak{x}$和 $\mathfrak{x}_N = \mathfrak{n}_n^+ \cap \mathfrak{x}$。对于 $\alpha \in \mathcal{B}(F)$，置$\mathfrak{x}_{M,\ \alpha} = \mathfrak{x}_M \cap \mathfrak{x}_\alpha$。这里我们将所有空间视为 $\mathrm{Res}_{E/F}\, \mathfrak{gl}_{n,\ E} \times L^{\vee,\,-} \times L^-$ 的子空间，并在其中取交集。

取 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathfrak{x}(\mathbb{A}))$和 $\alpha \in \mathcal{B}(F)$。对于$g' \in [G'_n]_{P'_n}$，我们定义一个核函数

$$k_{\varphi,P,\alpha}(g') = \sum_{m \in \mathfrak{x}_{M,\alpha}(F)} \int_{\mathfrak{x}_N(\mathbb{A})} \varphi((m+n) \cdot g') \mathrm{d}n.$$

对于 $T \in \mathfrak{a}'_{n+1}$，我们定义一个修正核函数

$$k^T_{\varphi,\alpha}(g') = \sum_{P \in \mathcal{F}} \epsilon_P \sum_{\delta \in P'_n(F) \backslash G'_n(F)} \widehat{\tau}_{P'_{n+1}}(H_{P'_{n+1}}(\delta g') - T_{P'_{n+1}}) k_{\varphi,P,\alpha}(\delta g').$$

与其他修正核的情形一样，对于固定的 g'，对 δ 的求和是有限的。

下一个命题概述了 [Zyd18], 的主要结果，另见 定`理 5.1.5.1 和 5.2.1.1，载于 [CZ21]。

命题 3.2. 我们有如下结论。

(1) 该表达式

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{B}(F)} \int_{[G'_n]} |k^T_{\varphi,\alpha}(g')| \mathrm{d}g'$$

当 T 充分大时是有限的。

(2) 我们记

$$\mathfrak{i}_\alpha^T(\varphi) = \sum_{\alpha\in\mathcal{B}(F)} \int_{[G'_n]} k_{\varphi,\alpha}^T(g')\eta(\det g')\mathrm{d}g',$$

于是，函数 $T \mapsto \mathfrak{i}_\alpha^T(\varphi)$ 是某个指数多项式的限制，其纯多项式项为一个常数，记作 $\mathfrak{i}_\alpha(\varphi)$。

(3) 分布 $\varphi \mapsto \mathfrak{i}_\alpha(\varphi)$ 是 $\mathcal{S}(\mathfrak{x}(\mathbb{A}))$ 上的连续线性泛函，并且关于 (G'_n, η) 不变。这意味着

$$\mathfrak{i}_\alpha(g'\cdot\varphi) = \eta(\det g')\mathfrak{i}_\alpha(\varphi)$$

对于所有满足 $g' \in G'_n(\mathbb{A})$ 且 $g'\cdot\varphi(x) = \varphi(g'^{-1}xg)$的情形。

现在我们引入 Cayley 变换。令 $E^1 = \{x \in E \mid N_{E/F}x = xx^{\mathfrak{c}} = 1\}$ 并取一个$\xi \in E^1$。记

$$X^\xi = \{(\gamma, w, v) \in X \mid \gamma + \xi \text{ is invertible}\}$$

Then X^ξ 是 X 的一个开子概形，并且 G'_n 的作用保持它不变。我们还记

$$\mathfrak{x}' = \{(A, w, v) \mid A^2 - 4 \text{ is invertible}\}.$$

于是， $\mathfrak{x}'$ 是 $\mathfrak{x}$的一个开子概形，并且 G'_n 的作用保持它不变。

我们定义一个 Cayley 变换

$$\mathfrak{c}_\xi : \mathfrak{x}' \to X^\xi, \quad (A, w, v) \mapsto \left(\xi(1 + A/2)(1 - A/2)^{-1}, w, v\right).$$

注意，$\mathfrak{c}_\xi$是 G'_n-等变的，并且存在 ξ_1，……， $\xi_{n+1} \in E^1$，使得$\mathfrak{c}_{\xi_i}$的像构成 X的一个开覆盖。令 $\mathcal{B}'$ 为 $\mathfrak{x}'$ 在 $\mathcal{B}$ 中的像，并令 $\mathcal{A}^\xi$ 为 X^ξ 在 $\mathcal{A}$中的像。于是，Cayley 变换$\mathfrak{c}_\xi$ 诱导出一个同构 $\mathcal{B}' \to \mathcal{A}^\xi$，我们仍将其记为$\mathfrak{c}_\xi$。

设 S 是一个有限地点集。对于 $\varphi \in \mathcal{S}(X^\xi(F_\mathsf{S}))$，我们如下定义函数 $\varphi_\natural \in \mathcal{S}(\mathfrak{x}'(F_\mathsf{S}))$。若 n 是奇数，则令

$$\varphi_\natural(A, w, v) = \mu(\xi_1)^{-(n-1)^2}\varphi(\mathfrak{c}_\xi(A), w, v).$$

若 n 是偶数，则令

$$\varphi_\natural(A, v, w) = \mu(\xi_1)^{-n(n-2)}\mu(\det(1 - A/2))\varphi(\mathfrak{c}_\xi(A), w, v).$$

那么 $\varphi_\natural \in \mathcal{S}(\mathfrak{x}'(F_\mathsf{S}))$。若 $f^+ \in \mathcal{S}(G^+(F_\mathsf{S}))$，则记作 $f^+_\natural = (\varphi_{f^+})_\natural$。各种额外因子$\mu(\det(1 - X/2))$以及 $\mu(\xi_1)$的幂，将在事后由引理4.4证明其合理性。它们都源于 $G^+(F_\mathsf{S})$与 $\mathfrak{x}(F_\mathsf{S})$上的转移因子之间的比较。

命题 3.3. 固定一个 $\alpha \in \mathcal{B}'(F)$。令 S 为一个包含所有阿基米德地方的有限地点集，使得对于 $v \notin \mathsf{S}$，满足以下性质。

- E/F 在 v处非分歧。
- μ在 E 中位于 v上方的任意地方 w 处均非分歧。

对于 E 中位于 v上方的任意地方 w，• 2、 τ、 ξ_1 都属于 $\mathcal{O}_{E_w}^\times$ 。

- $\alpha \in \mathcal{B}'(\mathcal{O}_{F_v})$。

那么，对于任意$f_{\mathfrak{s}}^{+}\in\mathcal{S}(G^{+}(F_{\mathfrak{s}}))$ 且 $T\in\mathfrak{a}_0$ 充分正的情形，我们有

$$i^{T}_{\mathfrak{c}_{\xi}(\alpha)}\left(f_{\mathfrak{s}}^{+}\otimes 1_{G^{+}(\mathcal{O}_{F}^{\mathfrak{s}})}\right)=\mathfrak{i}^{T}_{\alpha}\left((f_{\mathfrak{s}}^{+})_{\natural}\otimes 1_{\mathfrak{g}^{+}(\mathcal{O}_{F}^{\mathfrak{s}})}\right).$$

证明。我们记 a为$\mathfrak{c}_{\xi}(\alpha)$，并令 $f^{+}:=f_{\mathfrak{s}}^{+}\otimes 1_{G^{+}(\mathcal{O}_{F}^{\mathfrak{s}})}\in\mathcal{S}(G^{+}(\mathbb{A}))$。根据定义可得 $\varphi_{f^{+}}=\varphi_{f_{\mathfrak{s}}^{+}}\otimes\mathbf{1}_{X(\mathcal{O}_{F}^{\mathfrak{s}})}$。于是有

$$\begin{aligned}i_{a}^{T}(f^{+})&=\int_{[H]}\int_{[G']}k_{f}^{T}(h,g')\eta_{G'}(g')\mathrm{d}h\mathrm{d}g'\\&=\int_{[G'_{n}]}k^{T}_{\varphi_{f^{+}},a}(g')\eta(\det g')\mathrm{d}g'\quad\text{(By Lemma 3.1)}\\&=i_{a}^{T}(\varphi_{f_{\mathfrak{s}}^{+}}\otimes 1_{X(\mathcal{O}_{F}^{\mathfrak{s}})}).\end{aligned}$$

因此只需证明

$$k_{\varphi\otimes\mathbf{1}_{X(\mathcal{O}_{F}^{\mathfrak{s}})},P,a}=k_{\varphi_{\natural}\otimes\mathbf{1}_{\mathfrak{x}(\mathcal{O}_{F}^{\mathfrak{s}})},P,\alpha}$$

对所有 $\alpha\in\mathcal{B}(F)$，$P\in\mathcal{F}_{\mathrm{RS}}$ 以及 $\varphi\in\mathcal{S}(X(F_{\mathfrak{s}}))$。这可由 [Zyd20第 5],节的讨论推出，参见 [Zyd20，推论5。8]。□

令 $\mathfrak{s}$ 为满足条件的有限地点集，并令 $f_{+,\mathfrak{s}}\in\mathcal{S}(G_{+}(F_{\mathfrak{s}}))$，于是我们定义

$$f_{+,\mathfrak{s},\natural}=\left(f_{+,\mathfrak{s}}^{\dagger}\right)_{\natural}.$$

由命题 3.3可得以下推论。

推论3.4。设 $\mathfrak{s}$是满足命题*3.3*中条件的有限地点集，且$f_{+}=\mathbf{1}_{G_{+}(\mathcal{O}_{F}^{\mathfrak{s}})}\otimes f_{+,\mathfrak{s}}$ 其中 $f_{+,\mathfrak{s}}\in\mathcal{S}(G_{+}(F_{\mathfrak{s}}))$，则

$$I^{T}_{\mathfrak{c}_{\xi}(\alpha)}\left(f_{+,\mathfrak{s}}\otimes 1_{G_{+}(\mathcal{O}_{F}^{\mathfrak{s}})}\right)=\mathfrak{i}^{T}_{\alpha}\left(f_{+,\mathfrak{s},\natural}\otimes 1_{\mathfrak{g}^{+}(\mathcal{O}_{F}^{\mathfrak{s}})}\right)$$

3.3. **无穷小分布：酉群**。几何分布 J^{T}_{α}可以得到简化，并且如一般线性群的情形一样与其无穷小不变量联系起来。我们仅陈述结果而略去证明，因为它们与一般线性群情形中的证明本质上相同。

我们沿用小节2.2中的记号。设 V 是一个 n维斜厄米空间。记作 $\mathfrak{u}_{V}^{+}=\mathfrak{u}_{V}\times V$，$Y^{V}=\mathrm{U}(V)\times V$，并记 $\mathfrak{y}^{V}=\mathfrak{u}(V)\times V$。对于 $P\in\mathcal{F}_{V}$，我们定义

$$\mathfrak{p}^{+}=\mathfrak{p}\times X_{r}^{\perp},\quad\mathfrak{m}^{+}=\mathfrak{m}\times V_{0},\quad\mathfrak{n}^{+}=\mathfrak{n}\times X_{r}.$$

它们是 $\mathfrak{y}^{V}$ 的子空间。

群 $\mathrm{U}(V)$ 在 Y^{V}or $\mathfrak{y}^{V}$ 上有一个右作用，其作用由 $(A,v)\cdot g=(g^{-1}Ag,g^{-1}v)$ 给出。范畴商 q_{V}: $\mathrm{U}_{V}^{+}\to\mathcal{A}$ 经由 Y^{V} 分解，并将范畴商 $Y^{V}//\mathrm{U}(V)$ 与 $\mathcal{A}$ 等同。根据 [Zha14a，引理 3.1]，范畴商 $\mathfrak{y}^{V}//\mathrm{U}_{V}'$ 与 $\mathcal{B}$ 等同。自然映射 $Y^{V}\to\mathcal{A}_{V}$ 和 $\mathfrak{y}^{V}\to\mathcal{B}$ 均记为 q_{V}，其定义为（同一个公式）

$$(A,b)\mapsto(a_{1},\dots,a_{n};b_{1},\dots,b_{n}),$$

其中

$$a_i = \operatorname{Tr} \wedge^i A, \quad b_i = 2(-1)^{n-1}\tau^{-1}q_V(A^{i-1}b, b), \quad i = 1, \dots, n.$$

对于 $\alpha \in \mathcal{A}(F)$（分别地， $\mathcal{B}(F)$），我们将 α 在 Y^V（分别地， $\mathfrak{y}^V$）中的原像（作为闭子簇）记为 Y^V_α（分别地， $\mathfrak{y}^V_\alpha$）。

对于标准的 $P \in \mathcal{F}_V$ 和 $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{y}^V(\mathbb{A}))$，在 $[\mathrm{U}(V)]_P$ 上定义一个核函数

$$k_{f,P}(g) = \sum_{m \in \mathfrak{m}^+(F)} \int_{\mathfrak{n}_+(\mathbb{A})} f((m+n)\cdot g)\mathrm{d}n.$$

对于 $\alpha \in \mathcal{A}(F)$，我们定义

$$k_{f,P,\alpha}(g) = \sum_{m \in \mathfrak{m}^+(F) \cap \mathfrak{u}^+_{V,\alpha}(F)} \int_{\mathfrak{n}_+(\mathbb{A})} f((m+n)\cdot g)\mathrm{d}n.$$

对于 $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{u}^+(\mathbb{A}))$ 和 $T \in \mathfrak{a}_0$，我们置

$$k^T_f(g) = \sum_{P \in \mathcal{F}_V} \epsilon_P \sum_{\delta \in P(F)\backslash \mathrm{U}(V)(F)} \widehat{\tau}_P(H_P(\delta g) - T_P) k_{f,P}(\delta g),$$

其中 $g \in [\mathrm{U}(V)]$。类似地，对于 $\alpha \in \mathcal{B}(F)$，置

$$k^T_{f,\alpha}(g) = \sum_{P \in \mathcal{F}_V} \epsilon_P \sum_{\delta \in P(F)\backslash \mathrm{U}(V)(F)} \widehat{\tau}_P(H_P(\delta g) - T_P) k_{f,P,\alpha}(\delta g).$$

下述定理概述了 [Zyd18，定理 3.1，定理 4。5]。

定理 3.5。当 T 充分大时，有以下断言。

(1) 该表达式

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{B}(F)} \int_{[\mathrm{U}(V)]} \left| k^T_{f,\alpha}(g) \right| \mathrm{d}g$$

是有限的。

(2) 对于 $\alpha \in \mathcal{B}(F)$ 和 $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{u}^+_V(\mathbb{A}))$，关于 T 的函数

$$\mathrm{j}^T_\alpha(f) = \int_{[\mathrm{U}(V)]} k^T_{f,\alpha}(g)\mathrm{d}g$$

是一个指数多项式的限制，其纯多项式项为常数，记作 $\mathrm{j}_\alpha(f)$。

(3) 分布 $f \mapsto \mathrm{j}_\alpha(f)$ 是 $\mathcal{S}(\mathfrak{u}^+_V(\mathbb{A}))$ 上的连续线性形式，且为 H 不变。

我们注意到 U^+_V 上和 $\mathfrak{y}^V$ 上的几何分布之间的关系。若 $f^+ \in \mathcal{S}(\mathrm{U}^+_V(\mathbb{A}))$，则定义

$$\varphi_{f^+}(\delta, b) = \int_{\mathrm{U}(V)(\mathbb{A})} f^+((g^{-1}, g^{-1}\delta), v)\mathrm{d}g. \tag{3.5}$$

于是 $\varphi_{f^+} \in \mathcal{S}(Y^V(\mathbb{A}))$。

令 Y^ξ_V 为 Y^+_V 的开子概形，它由满足 $\det(g - \xi) \neq 0$ 的 (g, v) 构成。将 $\mathrm{U}_{V,\xi}$ 记为 U^+_V 的开子簇，它由满足 $\det(g-\xi) \neq 0$ 的元素 (g, v) 构成，并将 $\mathfrak{y}'_V$

$\mathfrak{y}_V$的开子簇由满足 $\det(A-2)\neq 0$ 的 $(A,\ b)$ 构成。于是，Y_V^ξ 和 $\mathfrak{y}'_V$ 在 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 中的（概形论）像分别记为 $\mathcal{A}^\xi$ 和 $\mathcal{B}'$。

我们定义 Cayley 变换

$$\mathfrak{c}_\xi : \mathfrak{y}'_V \to Y_V^\xi, \quad (A,b)\mapsto \left(\xi(1+A/2)(1-A/2)^{-1}, b\right)\in \mathrm{U}_V^{+,\xi}.$$

它诱导出一个映射 $\mathfrak{c}_\xi : \mathcal{B}'\to\mathcal{A}^\xi$。我们对一般线性群和酉群上的 Cayley 变换也使用相同的记号 $\mathfrak{c}_\xi$，但这不会造成混淆。

设 S 是一个有限地点集。对于 $\varphi\in\mathcal{S}(Y_V^\xi(F_\mathrm{S}))$，定义 $\varphi_\natural\in\mathcal{S}(\mathfrak{y}'_V(F_S))$ b y

$$\varphi_\natural(X)=\varphi(\mathfrak{c}_\xi(X)).$$

若 $f^+\in\mathcal{S}(\mathrm{U}_V^+(F_\mathrm{S}))$，则记作 $f_\natural^+=(\varphi_{f^+})_\natural$。

命题 3.6。固定 $\alpha\in\mathcal{B}(F)$。若 S 是满足与命题 3.3相同条件的赋值集合。那么，对于任意 $f_\mathrm{S}\in\mathcal{S}(\mathrm{U}^+{}_{,V}{}^\tau(F_\mathrm{S}))$ 以及充分大的 $T\in\mathfrak{a}_0$，我们有

$$j^T_{\mathfrak{c}_\xi(\alpha)}\left(f_\mathrm{S}\otimes 1_{\mathrm{U}_V^+(\mathcal{O}^S)}\right)=\mathfrak{j}^T_\alpha\left((f_\mathrm{S})_\natural\otimes 1_{\mathfrak{y}^V(\mathcal{O}^S)}\right).$$

如命题 3.6的证明一样，这可由以下讨论得出：[Zyd20，第 5], 参见 [Zyd20，推论 5。8]。

设 S 是一个有限地点集，且 $f_{+,\ \mathrm{S}}\in\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,\ +}(F_\mathrm{S}))$，则我们置

$$f_{+,\mathrm{S},\natural}=\left(f^\ddagger_{+,\mathrm{S}}\right)_\natural.$$

推论 3.7. 设 S 是满足命题 3.3 中条件的有限地点集，并且$f_+=\mathbf{1}_{\mathrm{U}_{V,\ +}(\mathcal{O}_F^\mathrm{S})}\otimes f_{+,\ \mathrm{S}}$ 其中 $f_{+,\ \mathrm{S}}\in\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,\ +}(F_\mathrm{S}))$，则

$$J^T_{\mathfrak{c}_\xi(\alpha)}\left(f_{+,\mathrm{S}}\otimes\mathbf{1}_{\mathrm{U}_{V,+}(\mathcal{O}_F^\mathrm{S})}\right)=\mathfrak{j}^T_\alpha\left(f_{+,\mathrm{S},\natural}\otimes\mathbf{1}_{\mathfrak{y}^V(\mathcal{O}_F^\mathrm{S})}\right)$$

4. Matching of test functions

4.1. 正则半单轨道。设 $(\gamma,\ w,\ v)$ 是 $X(F)$ 或 $\mathfrak{x}(F)$ 中的一个元素。我们称 $(\gamma,\ w,\ v)$ 为正则半单，当且仅当

$$\det(w,w\gamma,\dots,w\gamma^{n-1}),\quad \det(v,\gamma v,\dots,\gamma^{n-1}v)$$

二者均非零。设 X_rs 和 $\mathfrak{x}_\mathrm{rs}$ 分别为 X 和 $\mathfrak{x}$ 中对应于正则半单元素的开子簇。G'_n 在 X_rs 和 $\mathfrak{x}_\mathrm{rs}$ 上的作用是自由的。设 $(g,\ w,\ v)$ 是 $G^+(F)$ 中的一个元素。若其在 $X(F)$ 中的像是正则半单的，则称其为正则半单。设 G^+_rs 是正则半单元素构成的开子概形。

令 $(\delta\ \ v)$ 是 $Y^V(F)$ 或 $\mathfrak{y}^V(F)$ 中的一个元素。若满足以下条件，则称其为正则半单：

$$v,\delta v,\dots,\delta^{n-1}v$$

在 V 中线性无关。令 Y^V_rs 和 $\mathfrak{y}^V_\mathrm{rs}$ 分别为 Y^V 和 $\mathfrak{y}^V$ 中对应于正则半单元素的开子簇。$\mathrm{U}(V)$ 在 Y^V_rs 和 $\mathfrak{y}^V_\mathrm{rs}$ 上的作用是自由的。

令 $(g,\ v)$ 为 $\mathrm{U}_V^+(F)$ 和 $g=(g_1,\ g_2)$ 中的元素，$g_i\in \mathrm{U}(V)(F)$。若其在 $Y^V(F)$ 中的像是正则半单的，则称其为正则半单。令 $\mathrm{U}_{V,\mathrm{rs}}^+$ 为正则半单元素组成的开子簇。

如果 $G^+(F)$ 中的一个正则半单元与 $\mathrm{U}_V^+(F)$ 中的一个正则半单元在 $\mathcal{A}(F)$ 中的像相同，我们就称它们匹配。类似地，如果 $\mathfrak{x}_{n,\mathrm{rs}}(F)$ 中的一个正则半单元与 $\mathfrak{u}_{V,\mathrm{rs}}^+(F)$ 中的一个正则半单元在 $\mathcal{B}(F)$ 中的像相同，我们就称它们匹配。正则半单元的匹配只取决于相应元素的轨道，因此我们可以谈论轨道的匹配。

注记 4.1. 我们用 V_τ 表示其底层空间为 V、厄米形式为

$$q_{V_\tau}=2(-1)^{n-1}\tau^{-1}q_V.$$

于是 $\mathrm{U}(V_\tau)$ 与 $\mathrm{U}(V)$ 实际上是同一个群。定义

$$\mathrm{U}_{V_\tau}^+=\mathrm{U}_{V_\tau}\times V_\tau,\quad \mathfrak{y}^{V_\tau}=\mathfrak{u}(V_\tau)\times V_\tau.$$

它们分别与 U_V^+ 和 $\mathfrak{y}^V$ 实际上相同。我们按照 V 中的情形定义 $\mathrm{U}_{V_\tau}^+$ 和 $\mathfrak{y}^{V_\tau}$ 中的正则半单元。空间 $\mathrm{U}_{V_\tau}^+$ 和 $\mathfrak{y}^{V_\tau}$ 是雅各凯–拉利斯相对迹公式中出现的空间，这些公式用于研究贝塞尔周期，例如参见 [CZ21, Zha14a] 。虽然 $\mathfrak{y}^V$ 与 $\mathfrak{y}^{V_\tau}$ 的识别使我们的匹配概念与 [BP21b, CZ21, Zha14a] 中的完全相同。更准确地说，正则半单元素 $(\gamma,v,w)\in\mathfrak{x}(F)$ 与 $(\delta,b)\in\mathfrak{y}^V$匹配，当且仅当将 (δ,b) 视为 $\mathfrak{y}^{V_\tau}$ 中的元素时，它们按照 [BP21b, CZ21, Zha14a] 的意义匹配。这一识别将使后续的局部计算更容易追踪。

我们用 $\mathcal{H}$ 表示 E上 n维厄米空间（等距类）的集合。若 S 是 F的有限地点集，则用 $\mathcal{H}_{\mathrm{S}}$ 表示 E_{S}上 n维厄米空间（等距类）的集合。

命题4.2. 正则半单轨道的匹配给出一个双射 s

$$\begin{aligned}G_{\mathrm{rs}}^+(F)/H(F)\times G'(F)&\leftrightarrow\coprod_{V\in\mathcal{H}}\mathrm{U}_{V,\mathrm{rs}}^+(F)/\mathrm{U}_V'(F)\times\mathrm{U}_V'(F),\\ \mathfrak{x}_{\mathrm{rs}}(F)/G_n'(F)&\leftrightarrow\coprod_{V\in\mathcal{H}}\mathfrak{y}_{rs}^V(F)/\mathrm{U}(V)(F).\end{aligned}\tag{4.1}$$

设 S 是 F 的有限地点集。那么，我们可以用同样的方式定义 $G_{\mathrm{rs}}^+(F_{\mathrm{S}})$ 与 $\mathrm{U}_{V,\mathrm{rs}}^+(F_{\mathrm{S}})$ 中正则半单轨道的匹配，以及 $\mathfrak{x}(F_{\mathrm{S}})$ 与 $\mathfrak{y}^V(F_{\mathrm{S}})$ 中正则半单轨道的匹配。这再次给出双射（4.1），其中 F 替换为 F_{S}。为便于后续引用，我们再次记录该双射。

$$\begin{aligned}G_{\mathrm{rs}}^+(F_{\mathrm{S}})/H(F_{\mathrm{S}})\times G'(F_{\mathrm{S}})&\leftrightarrow\coprod_{V\in\mathcal{H}_{\mathrm{S}}}\mathrm{U}_{V,\mathrm{rs}}^+(F_{\mathrm{S}})/\mathrm{U}_V'(F_{\mathrm{S}})\times\mathrm{U}_V'(F_{\mathrm{S}}),\\ \mathfrak{x}_{\mathrm{rs}}(F_{\mathrm{S}})/G_n'(F_{\mathrm{S}})&\leftrightarrow\coprod_{V\in\mathcal{H}_{\mathrm{S}}}\mathfrak{y}_{\mathrm{rs}}^V(F_{\mathrm{S}})/\mathrm{U}(V)(F_{\mathrm{S}}),\end{aligned}\tag{4.2}$$

4.2. 正则半单轨道积分。 本小节将引入正则半单轨道积分。首先要指出的是，所有这些定义都依赖于各种测度的选择。在引入相对迹公式中的其他术语时，这一点也隐含其中。我们会预先固定若干测度选择，仅在需要时才说明具体采用的测度，例如在基本引理中。

设 $(g,\ w,\ v)\ \in G^+(F)$ 是一个映射到 $\alpha \in \mathcal{A}(F)$ 的正则半单元。设 $f_+ \in \mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))$。那么几何分布 $I_\alpha(f_+)$ 可化简为

$$I_\alpha(f_+) = \int_{H(\mathbb{A})} \int_{G'(\mathbb{A})} f_+^\dagger(h^{-1}gg', wg_2', g_2'^{-1}v)\eta_{G'}(g')\mathrm{d}g'\mathrm{d}h. \tag{4.3}$$

右侧的积分仅取决于 α，而不取决于映射到它的具体元素 $(g,\ w,\ v)$。这是 f_+的通常正则半单轨道积分。

全局轨道积分可以分解为乘积。取 $f_{+,v} \in \mathcal{S}(G_+(F_v))$，并设 (g,w,v) 是 $G^+(F_v)$ 中的一个正则半单元，我们用同一公式 (4.3) 定义局部轨道积分 $O((g,w,v)f_{+,v})$，只需改为对 $H(F_v)$ 和 $G'(F_v)$ 积分。于是，若 $f_+ = \otimes f_{+,v}$，其中$f_{+,v} \in \mathcal{S}(G_+(F_v))$，则

$$I_\alpha(f_+) = \prod_v O((g,w,v), f_{+,v}).$$

设 S 是 F 的有限地点集，且 $f_{+,\ \mathfrak{s}} \in \mathcal{S}(G_+(F_\mathfrak{s}))$，则可用同样的方式定义正则半单轨道积分 $O((g,\ w,\ v)f_{+,\ \mathfrak{s}})$。

对于每个 $\alpha \in \mathcal{A}(F)$，我们都有一个定义在 $\mathcal{S}(\mathrm{U}_V^+(\mathbb{A}))$ 上的分布 J_α。我们将同时考虑所有 V 对应的这个分布，因此添加上标 V，并记作 J_α^V，以强调其对 V 的依赖。设 $(g,v)\ \in \mathrm{U}_V^+(F)$ 是一个映到 $\alpha \in \mathcal{A}(F)$ 的正则半单元。令 $f_+^V \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(\mathbb{A}))$。那么，几何分布 $J_\alpha^V(f_+^V)$ 可化简为

$$J_\alpha^V(f_+^V) = \int_{\mathrm{U}_V'(\mathbb{A})} \int_{\mathrm{U}_V'(\mathbb{A})} f_+^{V,\ddagger}(x^{-1}gy, y^{-1}v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4.4}$$

右侧的积分只依赖于 α，而不依赖于映到它的具体元素 (δ,b)。这是 f_+^V 的通常正则半单轨道积分。

全局轨道积分可以分解。取 $f_{+,v}^V \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(F_v))$，并设 (δ,b) 是 $\mathrm{U}_{V,+}(F_v)$ 中的正则半单元。我们用同一公式（4.4）定义局部轨道积分 $O((\delta,b)\, f_{+,v}^V)$，只是改为在 $\mathrm{U}(V)(F_v)$ 上积分。于是，若 $f_+^V = \otimes f_{+,v}^V$，其中 $f_{+,v}^V \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(F_v))$，则

$$J_\alpha^V(f_+^V) = \prod_v O((\delta,b), f_{+,v}^V).$$

设 S 是 F和 $f_{+的\mathfrak{s}} \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,\ +}(F_\mathfrak{s}))$ 的一个有限地点集，我们便可以用同样的方式定义正则半单轨道积分 $O((\delta,\ b)\, f_{+,\ \mathfrak{s}}^V)$。

现在我们转向无穷小不变量。设 $(X,w,v)\ \in \mathfrak{x}(F)$ 是映射到 $\alpha \in \mathcal{B}(F)$ 的正则半单元。设 $f^+ \in \mathcal{S}(\mathfrak{x}(\mathbb{A}))$。那么几何分布 $\mathfrak{i}_\alpha(f^+)$ 可简化为

$$\mathfrak{i}_\alpha(f^+) = \int_{G_n'(\mathbb{A})} f^+(g^{-1}Xg, wg, g^{-1})\eta(\det g)\mathrm{d}g. \tag{4.5}$$

右侧的积分仅取决于 α，而不取决于映射到它的具体元素 (X, w, v)。这是通常的 f^+ 的正则半单轨道积分，曾出现在 [CZ21, Zha14a] 中。该轨道积分可分解。若 $f_v^+ \in \mathcal{S}(\mathfrak{x}(F_v))$ 且 (X, w, v) 是 $\mathfrak{x}(F_v)$ 中的正则半单元，我们以相同方式，按照同一公式 (4.5) 定义局部轨道积分 $O((X, w, v) f_v^+)$，只是改为对 $G_n'(F_v)$ 积分。于是，若 $f^+ = \otimes f_v^+$，其中 $f_v^+ \in \mathcal{S}(\mathfrak{x}(F_v))$，则

$$\mathfrak{i}_\alpha(f^+) = \prod_v O((X, w, v), f_v^+).$$

设 S 是 F 和 $f_S^+ \in \mathcal{S}(\mathfrak{x}(F_S))$ 的有限地点集，则我们可以用同样的方式定义正则半单轨道积分 $O((X, w, v) f_S^+)$。

对于每个 $\alpha \in \mathcal{B}(F)$，我们在 $\mathcal{S}(\mathfrak{y}^V(\mathbb{A}))$ 上都有一个分布 $\mathfrak{j}_\alpha$。同样，我们将同时考虑所有 V 的这个分布，因此加上上标 V，并写作 $\mathfrak{j}_\alpha^V$，以强调它对 V 的依赖。设 $(\delta, b) \in \mathfrak{y}^V(F)$ 是映到 $\alpha \in \mathcal{B}(F)$ 的正则半单元素。设 $f^{V,+} \in \mathcal{S}(\mathfrak{y}^V(\mathbb{A}))$。那么几何分布 $\mathfrak{j}_\alpha^V(f^{+,V})$ 可简化为

$$\mathfrak{j}_\alpha^V(f^{+,V}) = \int_{\mathrm{U}(V)(\mathbb{A})} f^{+,V}(g^{-1}\delta g, g^{-1}v)\mathrm{d}g.$$

右侧的积分仅依赖于 α，而不依赖于映到它的具体元素 (δ, b)。这是 $f^{+,V}$ 中通常的正则半单轨道积分，该积分曾出现在 [CZ21、Zha14a]。

全局轨道积分可以因子分解。若 $f^{+,V} = \otimes_v f^{+,V}$ 和 (δ, b) 是 $\mathfrak{y}^V(F_v)$ 中的正则半单元，我们以相同方式，按照同一公式 $O((\delta, b) f^{+,V})$ 定义局部轨道积分，只是改为在 U()() 上积分。于是若，$f^{+,V} = \otimes_v f^{+,V}$ 其中 $f^{+,V} \in \mathcal{S}(\mathfrak{y}^V(F_v))$，则

$$\mathfrak{j}_\alpha^V(f^{+,V}) = \prod_v O((\delta, b), f_v^{+,V}).$$

设 S 是 F 的有限地点集，且 $f^{+,V} \in \mathcal{S}(\mathfrak{y}^V(F_S))$，那么我们可以用同样的方式定义正则半单轨道积分 $O((\delta, b) f^{+,V})$。

4.3. 局部转移。 现在我们比较局部正则半单轨道积分。固定 F 的一个地方v。对于正则半单的 $x = (X, w, v) \in X(F_v)$ 或 $\mathfrak{x}(F_v)$，我们定义

$$\Delta_+(x) = \det(w, wX, wX^2, \ldots, wX^{n-1}).$$

定义 $X_{rs}(F_v)$ 或 $\mathfrak{x}_{rs}(F_v)$ 的转移因子 Ω_v：$\Omega_v(x) = \mu((-1)^n\Delta_+(x))$。符号 $(-1)^n$ 的引入是为了使其与 [BP21b] 中的转移因子相容。函数 $x \mapsto \Omega_v(x)O(x, \varphi)$（其中 $x \in \mathfrak{x}_{rs}(F_v)$ 且 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathfrak{x}(F_v))$）下降为 $\mathcal{B}_{rs}(F_v)$ 上的一个函数，我们仍用相同记号表示。

我们如下定义 $G^+(F_v)$ 上的转移因子 Ω_v。设 $((g_1, g_2) w, v) \in G^+(F_v)$ 是一个正则半单元。置 $\gamma = \nu(g_1^{-1}g_2) \in S_n(F_v)$。我们置

$$\Omega_v((g_1, g_2), w, v) = \mu\left((-1)^n(\det g_1^{-1}g_2)^{-n+1}\det\Delta_+(\gamma, w, v)\right).$$

对于 $f_+ \in \mathcal{S}(G_+(F_v))$，函数 $x \mapsto \Omega_v(x)O(x, f_+)$（其中 $x \in G^+_{rs}(F_v)$）下降为 $\mathcal{A}_{\mathrm{rs}}(F_v)$ 上的一个函数，我们也将其记为 $x \mapsto \Omega_v(x)O(x, f_+)$。

若对于所有匹配的正则半单元素 $x \in G^+(F_v)$ 和 $y \in \mathrm{U}^+_V(F_v)$，均有以下关系，则称函数 $f_+ \in \mathcal{S}(G_+(F_v))$ 与函数族 $\{f^V_+\}_{V\in\mathcal{H}_v}$（其中 $f^V_+ \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(F_v))$）相匹配：

$$\Omega_v(x)O(x, f_+) = O(y, f^V_+).$$

若存在 $\mathrm{U}_{V,+}(F_v)$ 上的函数族与 $G_+(F_v)$ 上的函数相匹配，则称 $G_+(F_v)$ 上的函数具有可迁移性。若存在 $G_+(F_v)$ 上的函数与 $\mathrm{U}_{V,+}(F_v)$ 上的函数族相匹配，则称 $\mathrm{U}_{V,+}(F_v)$ 上的函数族具有可迁移性。对于固定的 V，若函数 f^V_+ 在 $\mathrm{U}_{V,+}(F_v)$ 上具有可迁移性，则称其具有可迁移性，当且仅当函数族 $(f^V_+, 0, \ldots, 0)$ 具有可迁移性。

若对于所有匹配的正则半单元素 $x \in \mathfrak{x}_n(F_v)$ 和 $y \in \mathfrak{y}^V(F_v)$，均有以下关系，则称 $\varphi' \in \mathcal{S}(\mathfrak{x}(F_v))$ 与函数族 $\{\varphi^V\}_{V\in\mathcal{H}_v}$（其中 $\varphi^V \in \mathcal{S}(\mathfrak{y}^V(F_v))$）相匹配：

$$\Omega_v(x)O(x, \varphi') = O(y, \varphi^V).$$

如果存在一组定义在 $\mathfrak{y}^V(F_v)$ 上、与定义在 $\mathfrak{x}(F_v)$ 上的函数相匹配的函数，我们就称该函数是可转移的。如果存在一个定义在 $\mathfrak{x}(F_v)$ 上、与定义在 $\mathfrak{y}^V(F_v)$ 上的一组函数相匹配的函数，我们就称这组函数是可转移的。对于固定的 V，如果函数组 $(\varphi^V, 0, \ldots, 0)$ 是可转移的，我们就称单个函数 φ^V 定义在 $\mathfrak{y}^V(F)$ 上时是可转移的。

定理 4.3。如果 F 是非阿基米德的，则其中所有函数

$$\mathcal{S}(G_+(F_v)),\ \mathcal{S}(\mathfrak{x}(F_v)),\ \mathcal{S}(G^V_+(F_v)),\ \mathcal{S}(\mathfrak{y}^V(F_v))$$

均可转移。如果 F 是阿基米德的，则可转移函数构成这些空间的稠密子空间 *s.*

证明。如果 F 是非阿基米德的，则 $\mathcal{S}(\mathfrak{x}(F_v))$ 和 $\mathcal{S}(\mathfrak{y}^V(F_v))$ 的情形已在 [Zha14a] 中证明。$\mathcal{S}(G_+(F_v))$ 和 $\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(F_v))$ 的情形见 [Xue14]。这是由积分变换 (3.1) 和 (3.5) 为满射这一事实得出的。

如果 F_v 是阿基米德的，那么 $\mathcal{S}(\mathfrak{x}(F_v))$ 和 $\mathcal{S}(\mathfrak{y}^V(F_v))$ 的情形已在 [Xue19] 中证明。$\mathcal{S}(G_+(F_v))$ 和 $\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(F_v))$ 的情形由 (3.1) 和 (3.5) 的满射性以及开映射定理得出，参见 [Xue19，第 2] 节。其满射性比非阿基米德情形稍复杂。我们来说明 $\mathcal{S}(G_+(F_v))$ 的情形。首先，傅里叶变换 $-^\dagger$ 是连续双射。映射 $f^+ \mapsto \varphi_{f^+}$ 是满射，因为 $G^+(F_v) \to X(F_v)$ 是满射且淹没的，参见 [AG08，定理 B.2.4]。于是，开映射定理保证，$\mathcal{S}(X(F_v))$ 中稠密子集的原像在 $\mathcal{S}(G_+(F_v))$ 中仍然稠密。□

回顾一下，我们已经定义了映射 $f_+ \mapsto f_{+,\natural}$ 以及 $f^V_+ \mapsto f^V_{+,\natural}$，见第 3.2 和 3.3 小节。这些映射依赖于一个元素 $\xi \in E^1$。固定这样一个 ξ。下面的引理可由定义及对转移因子的简短计算得出。

引理 4.4. 若 f_+ 与集合 $\{f^V_+\}_{V\in\mathcal{H}_v}$ 匹配，则 $f_{+,\natural}$ 与集合 $\{f^V_{+,\natural}\}_{V\in\mathcal{H}_v}$ 也匹配。

在 $\mathfrak{x}(F_v)$ 上定义了一个配对：

$$\langle (X_1, w_1, v_1), (X_2, w_2, v_2) \rangle = \operatorname{Trace} X_1 X_2 + w_1 v_2 + w_2 v_1. \tag{4.6}$$

若 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathfrak{x}(F_v))$，我们定义其傅里叶变换

$$\widehat{\varphi}(y) = \int_{\mathfrak{x}(F_v)} \varphi(x) \overline{\psi(\langle x, y \rangle)} \mathrm{d}x.$$

这里 $\mathrm{d}x$ 是自对偶测度。设 V 是一个非退化斜厄米空间。在 $\mathfrak{y}^V(F_v)$ 上定义一个双线性型如下：

$$\langle (X, v), (Y, w) \rangle = \operatorname{Trace} XY + 2(-1)^{n-1} \operatorname{Tr}_{E/F} \tau^{-1} q_V(v, w),$$

以及一个傅里叶变换

$$\mathcal{F}_V \varphi^V(y) = \int_{\mathfrak{y}^V(F_v)} \varphi^V(x) \overline{\psi(\langle x, y \rangle)} \mathrm{d}x.$$

这里 $\mathrm{d}x$ 是自对偶测度。

注记 4.5。这实质上意味着，我们将 φ^V 视为 $\mathcal{S}(\mathfrak{y}^{V_\tau}(F_v))$ 中的一个元素，并按照 [BP21b、CZ21、Zha14a], 中的方式进行傅里叶变换，其中 ψ 替换为我们的 ψ。

设 v 是 F 的一个地方。令 $\lambda(\psi_v) = \epsilon(\frac{1}{2}, \eta_v, \psi_v)$，其中 $\epsilon(s, \eta_v, \psi_v)$ 是局部根数。它是一个四次单位根，并满足以下性质：

$$\lambda(\overline{\psi_v}) = \eta_v(-1)\lambda(\psi_v).$$

在 $E_v/F_v = \mathbb{C}/\mathbb{R}$ 和 $\psi_v(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}x}$ 的情形下，我们有 $\lambda(\psi_v) = -\sqrt{-1}$。

定理 4.6。假设 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathfrak{x}(F_v))$ 与函数族 $\varphi^V \in \mathcal{S}(\mathfrak{y}^V(F_v))$ 相匹配。那么 $\widehat{\varphi}$ 与集合 $\lambda(\psi_v)^{\frac{n(n+1)}{2}} \eta_v((2\tau)^n$ 离散 $V)^n \mathcal{F}_V \varphi^V$ 也相匹配。

这在 [Zha14a] 中当 v 为非阿基米德时得到证明，而在 [Xue19] 中当 v 为阿基米德时得到证明。参见 [BP21b，定理 5.32，注 5。33]其中给出了对 [Zha14a]的修正。

注 4.7。注意，$\operatorname{disc} V_\tau = (2\tau)^n \operatorname{disc} V$。我们还注意到，在傅里叶变换中我们使用了 ψ_v。因此，$\lambda(\psi_v)$ 在 [BP21b] 中被替换为 $\lambda(\psi_v)$，这抵消了因子 $\eta_v(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$，该因子出现在 [BP21b]中。

最后，我们转而讨论非分歧情形下的测试函数匹配，也就是基本引理。

定理 4.8。假设满足以下条件。

(1) v 是奇的非分歧地方。元素 $\tau \in \mathfrak{o}_{E_v}^\times$。特征 ψ_v 和 μ_v 是非分歧的。(2) 斜厄米空间 V 是分裂的，并包含自对偶 $\mathfrak{o}_{E_v}$ 格。

于是，函数

$$\operatorname{vol} H(\mathfrak{o}_{F_v})^{-1} \operatorname{vol} G'(\mathfrak{o}_{F_v})^{-1} \mathbf{1}_{G_+(\mathcal{O}_{F_v})} \quad and \quad \operatorname{vol} \mathrm{U}(V)(\mathfrak{o}_{F_v})^{-2} \mathbf{1}_{\mathrm{U}_{V,+}(\mathcal{O}_{F_v})}$$

相匹配。这些函数

$$\operatorname{vol} H(\mathfrak{o}_{F_v})^{-1} \operatorname{vol} G'(\mathfrak{o}_{F_v})^{-1} \mathbf{1}_{\mathfrak{k}(\mathcal{O}_{F_v})} \quad and \quad \operatorname{vol} \mathrm{U}(V)(\mathfrak{o}_{F_v})^{-2} \mathbf{1}_{\mathfrak{y}^V(\mathcal{O}_{F_v})}$$

也相匹配。体积使用与我们定义轨道积分时相同的测度计算。

证明。 无穷小版本最初由 [Yun11] 在剩余域特征较大时证明。当剩余域特征满足相同假设时，群版本由无穷小版本根据 [Liu14，定理 515]推出。无穷小情形下剩余特征较小时的情形后来由 [BP21c、Zha21]证明。 [Liu14] 需要较大的剩余域特征，唯一的原因是当时 [BP21c、Zha21] 尚未发表。一旦这一结果可用， [Liu14]中的结果便不再需要关于剩余域特征的假设（除了要求其为奇数）。事实上，定理中的群版本基本引理在 [Zha21]中被称为“半李”情形。 □

4.4. 整体转移。 现在我们比较整体几何项 I_α 和 J_α^V。进一步假设 S 包含所有阿基米德地方和分歧处，则记 $\mathcal{H}^{\mathrm{S}}$ 为所有非退化斜厄米空间 V 在 E 上的同构类的集合，其维数为 n，并且对于所有 $v \notin \mathrm{S}$， $V_v = V \otimes E_v$ 都包含一个自对偶 $\mathcal{O}_{E_v}$ 格。

如果存在一个来自 F 的有限地点集 S，包含所有阿基米德地方以及 E中的分歧地方，使得满足以下条件，则称测试函数 $f_+ \in \mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))$ 与测试函数集 $\{f_+^V\}_{V\in\mathcal{H}}$，其中 $f_+^V \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_V^+(\mathbb{A}))$，相匹配。

- $f_+^V = 0$ 对于 $V \notin \mathcal{H}^{\mathrm{S}}$。
- 对于每个 $V \in \mathcal{H}^{\mathrm{S}}$ $f_+^V = f_{+,\,\mathrm{S}}^V \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{U}_V^+(\mathcal{O}^{\mathrm{S}})}$，其中 $f_{+,\,\mathrm{S}}^V \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_V^+(F_{\mathrm{S}}))$。
- $f_+ = f_{+,\,\mathrm{S}} \otimes \mathbf{1}_{G_+(\mathcal{O}^{\mathrm{S}})}$，其中 $f_{+,\,\mathrm{S}} \in \mathcal{S}(G_+(F_{\mathrm{S}}))$。
- $f_{+,\,\mathrm{S}}$ 与 $\{f_{+,\mathrm{S}}^V\}_{V\in\mathcal{H}^{\mathrm{S}}}$ 相匹配。

定义轨道积分的测度满足：对于所有 $v \notin \mathrm{S}$， $\operatorname{vol} H(\mathfrak{o}_{F_v}) = \operatorname{vol} G'(\mathfrak{o}_{F_v}) = \mathrm{U}(V)(\mathfrak{o}_{F_v}) = 1$。

类似地，若存在一个由 F 的有限地点集 S，使得满足以下条件，则称 $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{k}(\mathbb{A}))$ 与集合 $\{f^V\}_{V\in\mathcal{H}}$where $f^V \in \mathcal{S}(\mathfrak{u}_V^+(\mathbb{A}))$ 相匹配。

- $f^V = 0$ 对 $V \notin \mathcal{H}^{\mathrm{S}}$。
- 对于每个 $V \in \mathcal{H}^{\mathrm{S}}$, $f^V = f_{\mathrm{S}}^V \otimes \mathbf{1}_{\mathfrak{u}_V^+(\mathcal{O}^{\mathrm{S}})}$，其中 $f_{\mathrm{S}}^V \in \mathcal{S}(\mathfrak{u}_V^+(F_{\mathrm{S}}))$。
- $f = f_{\mathrm{S}} \otimes \mathbf{1}_{\mathfrak{k}(\mathcal{O}^{\mathrm{S}})}$，其中 $f_{\mathrm{S}} \in \mathcal{S}(\mathfrak{k}(F_{\mathrm{S}}))$。
- f_{S} 且 $\{f_{\mathrm{S}}^V\}_{V\in\mathcal{H}^{\mathrm{S}}}$ 相匹配。
- 定义轨道积分所用的测度满足：对所有 $v \notin \mathrm{S}$， $\operatorname{vol} G'(\mathfrak{o}_{F_v}) = \mathrm{U}(V)(\mathfrak{o}_{F_v}) = 1$。

注意，在群情形和李代数情形中，若 f 和 $\{f^V\}_{V\in\mathcal{H}}$ 在上述赋值集合 S 上一致，那么对于任何包含 S 的赋值集合，它们也一致。

下述定理证明见 [CZ21，定理 13.3.4。1]这就是 [CZ21]中所称的奇异转移。

定理 4.9。若 $f\in\mathcal{S}(\mathfrak{x}(\mathbb{A}))$ 且集合族 $\{f^V\}_{V\in\mathcal{H}}$ 满足： $f^V\in\mathcal{S}(\mathfrak{y}^V(\mathbb{A}))$ 匹配，则对每个 $\alpha\in\mathcal{B}(F)$，有

$$\mathfrak{i}_\alpha(f)=\sum_{V\in\mathcal{H}}\mathfrak{j}_\alpha^V(f^V).$$

由此我们推出奇异转移的群版本。

定理 4.10。若 $f_+\in\mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))$ 且 $\{f^V\}_{V\in\mathcal{H}}$ 满足： $f_+^V\in\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(\mathbb{A}))$ 是转移，则对每个 $\alpha\in\mathcal{A}(F)$，有

$$I_\alpha(f_+)=\sum_{V\in\mathcal{H}}J_\alpha^V(f_+^V).$$

证明。固定一个 $\alpha\in\mathcal{A}(F)$。按照整体测试函数匹配的定义，取一个足够大的有限地点集 S。于是

$$f_+=\mathbf{1}_{G_+(\mathcal{O}_F^{\mathsf{S}})}\otimes f_{+,\mathsf{S}},\quad f_+^V=\mathbf{1}_{\mathrm{U}_{V,+}(\mathcal{O}_F^{\mathsf{S}})}\otimes f_{+,\mathsf{S}}^V.$$

我们可以扩大S ，使得命题3.3 的条件成立。

取 $\xi\in E$ 使其范数为 1，且满足 $\alpha\in\mathcal{A}^\xi(F)$. 则有函数 $f_{+,\ \mathsf{S},\ \natural}$ 和 $f_{+,\ \mathsf{S},\ \natural}^V$ 它们仍然由引理4.4 匹配。根据命题3.3和 3.6，可得

$$I_\alpha(f_+)=\mathfrak{i}_\alpha(\mathbf{1}_{\mathfrak{x}(\mathcal{O}^{\mathsf{S}})}\otimes f_{+,\mathsf{S},\natural}),\quad J_\alpha^V(f_+^V)=\mathfrak{j}_\alpha^V(\mathbf{1}_{\mathfrak{y}^V(\mathcal{O}^{\mathsf{S}})}\otimes f_{+,\mathsf{S},\natural}^V).$$

根据定义，$f_{+、\ \mathsf{S}、\ \natural}$ 和 $f_{+、\ \mathsf{S}、\ \natural}^V$ 相匹配。因此，该定理由定理 4.9得证。 □

第2 部分：匹配的谱刻画

本文余下部分均处于局部情形。因此， F 是特征零局部域， E 是 F上的二次 étale 代数。除第 E 8 节外，我们均假设 E 是一个域。

5. Preliminaries on the spectral comparison

5.1. **一般记号与约定**。 下面引入一些一般记号 .

设 X是定义在 F上的代数簇。我们通常将 X的 F-点简记为 X。所有代数群都是 F-群。若 V是 E上的向量空间，则通过标量限制，它可视为F 上的仿射簇。

设 G 是定义在 F上的约化群。设 Ξ^G 是 G上的 Harish-Chandra Xi 函数。它取决于 K 中 G所选的极大紧子群。不同的选择会得到等价的函数。由于我们使用 Ξ^G 仅仅是为了进行估计，因此 K 的选择并不重要。我们将用到它的性质记载于 [BP20，命题 1.5 中。1]。我们还固定 ς^G 上的一个对数高度函数 $G(F)$，参见 [BP20第 1 节。5]。

设 X 是定义在特征零局部域 F 上的光滑代数簇。设 $\mathcal{S}(X)$ 为施瓦茨空间。若 F 是非阿基米德的，则该空间为 $C_c^\infty(X)$，即局部常值紧支撑函数构成的空间。若 F 是阿基米德的，则该空间为 X 上的施瓦茨函数空间，其中 X 被视为 Nash流形，参见 [AG08]。

令 $\mathcal{C}(G)$ 和 $\mathcal{C}^w(G)$ 分别为 G 上的 Harish-Chandra Schwartz函数空间和缓增函数空间，参见 [BP21b，第 2 节。假设 G 是拟分裂的，并令 N 为一个 Borel子群的幂零根，ξ 为 N 的一般位置特征。我们还定义了空间 $\mathcal{S}(N\backslash G,\xi)$ 和 $\mathcal{C}^w(N\backslash G,\xi)$，见 [BP21b，第 2 节。这些是核 Fr´echet 空间或 LF 空间。我们将用到的一个重要性质是，$\mathcal{S}(G)$ 在 $\mathcal{C}^w(G)$ 中稠密。

5.2. 测度。 本文这一部分的目标是证明两个球特征之间的一个精确等式，因此与本文第一部分不同，这里我们需要指定测度。我们沿用第 1 部分的记号。

我们分别在 F 和 E^- 上相对于 ψ 取自对偶测度，并在 E 上相对于 ψ_E 取自对偶测度。我们有

$$\mathrm{d}_{E^-}(\tau^{-1}y)=|\tau|_E^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}_F y,\quad \mathrm{d}_E z=2\mathrm{d}_F x\mathrm{d}_{E^-}y,\ \text{if } z=x+y.$$

E 和 F 上的（归一化）绝对值分别记为 $|\cdot|_E$ 和 $|\cdot|$。它们满足以下性质：$\mathrm{d}(ax)=|a|\mathrm{d}x$，且当 $x\in F$时，$|x|_E=|x|^2$。

我们在 $G_n'=\mathrm{GL}_n(F)$（分别在 $G_n=\mathrm{GL}_n(E)$）上赋予 Haar 测度

$$\mathrm{d}g=\frac{\prod_{i,j}\mathrm{d}_F g_{i,j}}{|\det g|^n},\quad \left(\text{resp. } \mathrm{d}g=\frac{\prod_{i,j}\mathrm{d}_E g_{i,j}}{|\det g|_E^n}\right).$$

通过取乘积，我们得到 G_+、G^+、G、G' 和 H上的 Haar 测度。

S_n 在 $s=1$ 处的切空间为 $\mathfrak{s}_n$。在 $\mathfrak{s}_n$ 上有一个双线性型，定义如下：

$$\langle X,Y\rangle=\mathrm{Tr}\,XY.$$

然后，利用特征 ψ，我们在 $\mathfrak{s}_n$上赋予一个自对偶测度。这等同于将 $\mathfrak{s}_n$ 与 $(E^-)^{n^2}$识别后得到的测度。回忆一下，我们定义了 Cayley 变换（此处仅考虑 $\xi=1$ 的情形，并省略下标 ξ）

$$\mathfrak{c}:\mathfrak{s}_n\dashrightarrow S_n,\quad X\mapsto\frac{1+X/2}{1-X/2}.$$

我们在 S_n 上赋予唯一的 G_n'-不变测度，使得 $\mathfrak{c}$ 在$X=0$附近是局部保测的。若 F 是非阿基米德的，这意味着当 $\mathcal{U}$ 是零点的一个足够小的邻域时，$\mathfrak{c}(\mathcal{U})$和 $\mathcal{U}$ 的体积相同。若 F 是阿基米德的，这意味着当我们将邻域 $\mathcal{U}$ 缩小到 0 时，$\mathfrak{c}(\mathcal{U})$与 $\mathcal{U}$ 的体积之比趋于 1。

设 V 是一个厄米空间或斜厄米空间。在 $\mathrm{U}(V)$ 的李代数 $\mathfrak{u}(V)$ 上有一个双线性型，定义为

$$\langle X,Y\rangle=\mathrm{Tr}\,XY.$$

然后使用 特征 ψ，我们在 $\mathfrak{u}(V)$ 上取自对偶测度。我们有一个 Cayley 变换

$$\mathfrak{c} : \mathfrak{u}(V) \dashrightarrow \mathrm{U}(V), \quad X \mapsto \frac{1 + X/2}{1 - X/2}.$$

我们在 $\mathrm{U}(V)$ 上赋予 Haar 测度 $\mathrm{d}h$，并将其归一化，使得 Cayley 变换在 $X = 0$ 附近局部保测；这里的解释方式与 $\mathfrak{s}_n$ 的情形相同。由此在 U'_V 和 U_V 上得到测度。通过取乘积，我们在 $\mathrm{U}_{V,+}$ 和 U^+_V 上得到测度。

回顾第 4 节中，我们定义了正则半单轨道匹配的记号，从而得到双射（4.2）（集合$\mathfrak{s}$ 仅由本部分所关注的一个地方组成）。由于我们只考虑正则半单元，（4.2）中出现的作用都是自由的。因此，G^+_{rs} 等处的测度自然下降为（4.2）中各种商上的商测度。根据我们对测度的选择，采用与 [BP21b，引理 5.11]相同的论证，可得如下引理。

引理 5.1。双射 （4.2） 保持测度不变。

5.3. **表示**。设 G 是特征零局部域 F 上的约化群。若 F 是非阿基米德的，则 G 的表示是指光滑表示。若 F 是阿基米德的，则 G 的表示是指具有中等增长的光滑表示。对于 $\alpha \in \mathfrak{a}^*_{G,\ \mathbb{C}}$ 以及 G 的表示 π，我们定义

$$\pi_\alpha(g) = \pi(g) e^{\langle \alpha, H_G(g) \rangle}.$$

我们用 $\Pi_2(G)$（分别用 $\mathrm{Temp}(G)$）表示 $G(F)$ 的不可约平方可积（分别为温和）表示的同构类集合。

令 $\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)$ 为形如 $\mathrm{Ind}_P^G \sigma$ 的同构类集合，其中 $P = MN$ 遍历 G 的所有抛物子群，且 $\sigma \in \Pi_2(M)$。由于 $\mathrm{Temp}(G)$ 中的每个 $\pi \in$ 都是 $\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)$ 中某个元素的子表示。因此我们有一个映射 $\mathrm{Temp}(G) \to \mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)$。集合 $\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)$ 具有拓扑空间结构，且有无穷多个连通分支，这些连通分支具有如下形式

$$\mathcal{O} = \{\mathrm{Ind}_P^G \sigma_\alpha \mid \alpha \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*_M\}.$$

令 $W(G, M) = N_G M / M$ 为 Weyl 群，并且

$$W(G, \sigma) = \{w \in W(G, M) \mid w\sigma \simeq \sigma\}.$$

则映射

$$\mathrm{Ind}_P^G : \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*_M / W(G, \sigma) \to \mathcal{O}, \quad \alpha \mapsto \mathrm{Ind}_P^G \sigma_\alpha,$$

是满射，且在 0 处是局部同胚。

令 $\mathcal{V}$ 为 Fr´echet 空间，或更一般地，为 LF 空间。我们将频繁使用取值于 $\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)$ 的施瓦茨函数的概念。这个空间记作 $\mathcal{S}(\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)\ \mathcal{V})$。若 $\mathcal{V} = \mathbb{C}$，我们就简记为 $\mathcal{S}(\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G))$。这一概念的定义及详细讨论见 [BP21b，第 2 节。9]。

特别地， $\mathcal{S}(\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G))$ 是一个 Fr´echet 空间，若 F 是阿基米德的；若 F 是非阿基米德的，则它是一个 LF 空间。取值于 $\mathcal{V}$ 的 $\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)$上的施瓦茨函数，其最重要的性质是关于我们下文定义的 $\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)$上的测度绝对可积。

若 $f \in \mathcal{S}(G)$，则对每个 $\pi \in \mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)$，我们定义

$$f_\pi(g) = \mathrm{Trace}(\pi(g^{-1})\pi(f)), \quad g \in G.$$

则 $f_\pi \in \mathcal{C}^w(G)$，根据 [BP21b，命题 2.13。1] 映射

$$\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G) \to \mathcal{C}^w(G), \quad \pi \mapsto f_\pi \tag{5.1}$$

是施瓦茨函数。

现在我们专门讨论酉群的情形。设 V 是一个 n 维厄米空间，且 $G = \mathrm{U}(V)$。若 $\pi \in \mathrm{Temp}(G)$，记其到 $\mathrm{GL}_n(E)$ 的局部基变换为 $\mathrm{BC}(\pi)$，参见 [Mok15, KMSW]。设 V' 是另一个 n 维厄米空间（可能与 V 相同），且 $\sigma \in \mathrm{Temp}(\mathrm{U}(V'))$，若 π 和 σ 具有相同的局部基变换，则记为 $\pi \sim \sigma$。于是我们得到一个定义良好的满射

$$\mathrm{Temp}(G) \to \mathrm{Temp}(G)/\sim, \quad \mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G) \to \mathrm{Temp}(G)/\sim .$$

5.4. **谱测度**。设 A_M 为 A_M 的酉特征集合。它带有一个归一化测度 $\mathrm{d}\chi$，参见 [BP21b，（2.4.2）]。映射

$$\sqrt{-1}\mathfrak{a}_M^* \to \widehat{A_M}, \quad \chi \otimes \alpha \mapsto (a \mapsto \chi(a)|a|^\alpha)$$

是局部同胚。令 $\mathrm{d}\alpha$ 为 $\sqrt{-1}\mathfrak{a}_M^*$ 上的测度，使得此映射是局部保测的。

现在我们按照 $\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}$（$G$）为其赋予测度，遵循 [BP21b，第 2 节。7]首先考虑 Π_2（M）。我们赋予唯一的测度 $\mathrm{d}\sigma$ 给 Π_2（M），使得该映射

$$\Pi_2(M) \to \widehat{A_M}, \quad \sigma \mapsto \omega_\sigma|_{A_M}$$

是局部保测的。这里，ω_σ 表示 σ的中心特征。接下来我们考虑映射

$$\mathrm{Ind}_P^G : \Pi_2(M) \to \mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G), \quad \sigma \mapsto \mathrm{Ind}_P^G \sigma.$$

该映射是准有限且适当的，其像是 $\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)$ 的某些连通分支的集合。因此，我们在像上赋予推前测度

$$\frac{1}{|W(G,M)|}\mathrm{Ind}_{M,*}^G \mathrm{d}\sigma.$$

$\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)$ 上的测度，其在 Ind_P^G 的像上的限制等于此测度，记为 $\mathrm{d}\pi$。在点 $\pi_0 = \mathrm{Ind}_P^G \sigma \in \mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)$ 附近，该测度可更明确地描述如下。设 $\mathcal{V}$ 是 $W(G, \sigma)$-不变的一个充分小的邻域，使得映射 Ind_P^G

诱导 $\mathcal{V}/W(G,\ \sigma)$ 与 π_0 的一个小邻域 $\mathcal{U}$ 之间的拓扑同构。那么对每个 $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{U})$，我们有

$$\int_{\mathcal{U}} \varphi(\pi)\mathrm{d}\pi = \frac{1}{|W(G,\sigma)|}\int_{\mathcal{V}} \varphi(\pi_\alpha)\mathrm{d}\alpha.$$

固定一个分裂斜厄米空间 V_{qs} 和 $G = \mathrm{U}(V_{qs})$（或它们的乘积）。根据 [BP21b，引理 2.101]，，在 $\mathrm{Temp}(G)/\sim$ 上存在唯一的拓扑，使得映射 $\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G) \to \mathrm{Temp}(G)/\sim$ 局部为同构；并且对于每个连通分支 $\mathcal{O} \subset \mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)$，该映射都诱导出 $\mathcal{O}$ 与 $\mathrm{Temp}(G)/\sim$的一个连通分支之间的同构。因此，$\mathrm{Temp}(G)/\sim$ 上存在唯一的测度，使得当 $\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)$赋予测度 $\mathrm{d}\pi$时，映射 $\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G) \to \mathrm{Temp}(G)/\sim$ 局部保测。我们仍将 $\mathrm{Temp}(G)/\sim$ 上的此测度记为 $\mathrm{d}\pi$。

$\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)$上存在唯一的博雷尔测度 $\mathrm{d}\mu_G$，其特征由下式刻画：

$$f = \int_{\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)} f_\pi \mathrm{d}\mu_G(\pi), \tag{5.2}$$

对所有 $f \in \mathcal{S}(G)$，参见 [HC76,Wal03]。此处右侧的积分是在 $\mathcal{C}^w(G$中进行的，并且按 [BP21b 第 2 节3]的意义绝对收敛。此测度称为 $\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G$上的普朗歇尔测度。

存在一个函数 μ_G^* 使得 $\mathrm{d}\mu_G(\pi) = \mu_G^*(\pi)\mathrm{d}\pi$ 对所有 $\pi \in \mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)$均成立。如果 $G = \mathrm{U}(V)$，其中 V是一个 n维厄米空间或斜厄米空间，那么根据 [BP21b，定理 5。53]，我们有

$$\mu_G^*(\pi) = \frac{|\gamma^*(0,\pi,\mathrm{Ad},\psi)|}{|S_\pi|}. \tag{5.3}$$

这里 S_π 是某个有限阿贝尔群（ L参数的中心化子群 π），参见 [BP21b，第 2 节。11]，并且 $\gamma^*(0,\pi,\mathrm{Ad}\ \psi)$ 是如下给出的伴随伽马因子的归一化值。如果 m 是伴随伽马因子的极点阶数 $\gamma(s,\pi,\mathrm{Ad}\ \psi)$ 在 $s=0$处，那么

$$\gamma^*(0,\pi,\mathrm{Ad},\psi) = \lim_{s\to 0}\zeta_F(s)^n\gamma(s,\pi,\mathrm{Ad},\psi).$$

这里我们将 $\zeta_F(s)$ 记作 F 的局部ζ函数，即

$$\zeta_F(s) = \begin{cases} (1-q_F^{-s})^{-1}, & F \text{ is non-Archimedean;} \\ \pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2}), & F = \mathbb{R}. \end{cases}$$

5.5. 惠特克函数的估计。令 G 为定义在 F上的拟分裂约化群。固定一个 Borel子群 $B = TN$。令 ξ为 N的一般位置特征。令 A_0为 T的极大分裂子环面，令 Δ为 A_0作用在 N上的单根集合。对于 $f \in \mathcal{S}(G)$ 和 $g_1,\ g_2 \in G$，我们定义

$$W_f(g_1,g_2) = \int_N f(g_1^{-1}ug_2)\xi(u)\mathrm{d}u.$$

对于 $a \in T$和 $\alpha \in \Delta$，我们将 $e^{\langle \alpha,\ H_0(a)\rangle}$记作 a^α。

引理 5.2。 对于任意 $N>0$ 和 $d>0$，在 $\mathcal{S}(G)$ 上存在一个连续半范数 $\|\cdot\|$，使得

$$|W_f(a_1k_1,a_2k_2)|\ll\delta_B(a_1a_2)^{\frac{1}{2}}\prod_{\alpha\in\Delta}(1+a^\alpha)^{-N}\varsigma(a_1)^d\varsigma(a_2)^{-d}\|f\|$$

对任意 a_1、$a_2\in T$ 以及 k_1、$k_2\in K$ 均成立。

证明。 我们首先证明，对任意 N，$d>0$，存在一个连续半范数 $\|\cdot\|$，定义在 $\mathcal{S}(G)$ 上，使得

$$|W_f(a_1k_1,a_2k_2)|\ll\delta_B(a_1a_2)^{\frac{1}{2}}\varsigma(a_1)^d\varsigma(a_2)^{-d}\|f\| \tag{5.4}$$

对任意 a_1，$a_2\in T$ 以及 k_1，$k_2\in K$ 均成立。事实上，我们可以假设 $k_1=k_2=1$，于是

$$W_f(a_1,a_2)=\int_N f(a_1^{-1}ua_2)\xi(u)\mathrm{d}u=\delta_B(a_1)\int_N f(ua_1^{-1}a_2)\ll\delta_B(a_1)\varsigma(a_1^{-1}a_2)^{-d}\|f\|,$$

对于某个连续半范数 $\|\cdot\|$ 定义在 $\mathcal{S}(G)$ 上。类似地 $W_f(a_1,\ a_2)\ll\delta_B(a_2)\varsigma(a_1^{-1}a_2)^{-d}\|f\|$。因此（5.4）成立。

根据 [BP21d 引理 2.5 的证明，1], 对于任意 $W\in\mathcal{C}_d^w(N\backslash G,\ \xi)$，只要满足

$$W(ak)\leq C\delta_B(a)^{\frac{1}{2}}\varsigma(a)^d$$

对于任意 $(a,\ k)\in T\times K$，则对于任意 $N>0$

$$W(ak)\leq C_1C\prod_{\alpha\in\Delta}(1+a^\alpha)^{-N}\delta_B(a)^{\frac{1}{2}}\varsigma(a)^d,$$

对于任意 $(a,\ k)\in T\times K$。此外，

(1) 若 F 是非阿基米德的，常数 C_1 仅取决于 N 和满足 W 右 J-不变的开紧子群 $J\subset G$。

(2) 若 F 是阿基米德的，

$$C_1=1+\sup_{u\in\mathcal{K}_N}\sup_{(a,k)\in T\times K}|R(u)W(ak)|\prod_{\alpha\in\Delta}\delta(a)^{-\frac{1}{2}}\varsigma(a)^{-d},$$

其中 $\mathcal{K}_N$ 是 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 的紧子集，取决于 N。

将此应用于 $W(\cdot,\ a_2)$，随着 a_2 变化，我们看到常数 C_1 是一致的，引理由（5.4）得出。□

6. Local spherical characters

6.1. 酉群上的球特征。 设 V 是一个非退化的 n维斜厄米空间。回顾一下，我们固定了非平凡特征 ψ 以及 $E^\times$的特征 μ 。于是我们得到相对于特征 ψ,μ 和ψ^{-1},μ^{-1} 的 $\mathrm{U}(V)$ 的韦伊表示 ω 和 $\omega^\vee$ 。它们实现于 $\mathcal{S}(L^\vee)$上，其中 Res $V=L+L^\vee$ 是辛空间 Res V的一个极化。

设 π 是 U_V的一个有限长度温和表示。我们定义

$$m(\pi)=\dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}'_V}(\pi\widehat{\otimes}\omega^\vee,\mathbb{C}).$$

若 π 不可约，则有 $m(\pi)\leq 1$ 见 [Sun12、SZ12]。

由于每个 $\pi\in\mathrm{Temp}(\mathrm{U}_V)$ 都嵌入 $\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{U}_V)$ 中的唯一一个表示，因此存在一个映射 $\mathrm{Temp}(\mathrm{U}_V)\to\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{U}_V)$。令 $\mathrm{Temp}^{\mathrm{U}'_V}(\mathrm{U}_V)\subset\mathrm{Temp}(\mathrm{U}_V)$ 为 π 中满足 $m(\pi)\neq 0$的子空间。根据 [Xue，命题 3。4], 自然映射

$$\mathrm{Temp}_{\mathrm{U}'_V}(\mathrm{U}_V)\to\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{U}_V)$$

是单射，且其像是 $\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{U}_V)$ 的一族连通分支。因此，我们赋予 $\mathrm{Temp}^{\mathrm{U}'_V}(\mathrm{U}_V)$ 从 $\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{U}_V)$ 继承的拓扑。

对于 $f_+\in\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+})$，我们令

$$f_+^\ddagger((g_1,g_2),v)=\int_{L^\vee}\omega_{(1)}^\vee(g_1)f_+((g_1,g_2),x+l',x-l')\psi(-2\,\mathrm{Tr}_{E/F}\,q_V(x,l))\mathrm{d}x, \tag{6.1}$$

其中 $g_i\in\mathrm{U}(V)$，并记 $v=l+l'$ 其中 $l\in L$ 且 $L^\vee$。这是（2.7）的局部对应形式。符号 $\omega_{(1)}^\vee(g_1)f_+((g_1,g_2)\ x+l',x-l')$ 的含义如下。首先，f_+ 是 $\mathrm{U}_V\times L^\vee\times L^\vee$ 上的施瓦茨函数。我们在 (g_1,g_2) 处对其求值，得到 $L^\vee\times L^\vee$ 上的施瓦茨函数。然后，g_1 通过韦伊表示作用于第一个因子，从而得到另一个施瓦茨函数。接着，我们在 $(x+l',x-l')$ 处对其求值。积分变换 (6.1) 定义了一个连续同构

$$\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+})\to\mathcal{S}(\mathrm{U}_V^+).$$

对于 $\mathcal{C}^w(\mathrm{U}_V)\ \widehat{\otimes}\,\mathcal{S}(L^\vee\times L^\vee)$ 中的函数，定义表达式是有意义的，因为积分只涉及 L 中的变量。因此我们得到一个映射

$$\mathcal{C}^w(\mathrm{U}_V)\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{S}(L^\vee\times L^\vee)\to C^\infty(\mathrm{U}_V^+),$$

我们仍将其记为 $-^\ddagger$。注意，该映射的像不再是 $\mathcal{C}^w(\mathrm{U}_V)\ \widehat{\otimes}\,\mathcal{S}(V)$。

引理 6.1. 设 $f_+\in\mathcal{C}^w(\mathrm{U}_V)\ \widehat{\otimes}\,\mathcal{S}(L^\vee\times L^\vee)$。积分

$$\int_{\mathrm{U}'_V}f_+^\ddagger(h,0)\mathrm{d}h$$

绝对 收敛，并在 $\mathcal{C}^w(\mathrm{U}_V)\ \widehat{\otimes}\,\mathcal{S}(L^\vee\times L^\vee)$ 上定义一个连续线性形式 .

证明。这基本上是 [Xue23，引理 3。3]。严格来说，[Xue23] 只讨论F 阿基米德情形，但非阿基米德情形也可用同样的论证处理。□

我们用 $\mathcal{L}$ 表示引理中的线性泛函。若 $f\in\mathcal{C}^w(\mathrm{U}_V)$ 且 $\phi_1,\ \phi_2\in\mathcal{S}(L^\vee)$，则 $\mathcal{L}$ 的形式更为熟悉

$$\mathcal{L}(f\otimes\phi_1\otimes\phi_2)=\int_{\mathrm{U}'_V}f(h^{-1})\langle\omega^\vee(h)\phi_1,\overline{\phi_2}\rangle_{L^2}\mathrm{d}h, \tag{6.2}$$

其中我们回顾一下，$\langle-,-\rangle_{L^2}$ 表示 L^2-内积。

回顾一下，若 $f \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_V)$且 π 是有限长度的温和表示，则我们定义$f_\pi(g) = \mathrm{Trace}(\pi(g^{-1})\pi(f))$和 $f_\pi \in \mathcal{C}^w(\mathrm{U}_V)$。我们可以将其扩展为一个连续映射

$$\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}) = \mathcal{S}(\mathrm{U}_V)\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{S}(L^\vee \times L^\vee) \to \mathcal{C}^w(\mathrm{U}_V)\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{S}(L^\vee \times L^\vee), \quad f_+ \mapsto f_{+,\pi}.$$

令 $f_+ \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+})$。我们定义一个线性泛函

$$J_\pi(f_+) = \mathcal{L}(f_{+,\pi}).$$

上述引理确保这一定义是有意义的，并且 J_π 在 $\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+})$ 上定义了一个连续线性形式。若 $f_+ = f \otimes \phi_1 \otimes \phi_2$其中 $f \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_V)$ 且 $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}(L^\vee)$，则该线性泛函可写成更为熟悉的形式

$$J_\pi(f \otimes \phi_1 \otimes \phi_2) = \int_{\mathrm{U}'_V} \mathrm{Trace}(\pi(h)\pi(f))\langle \omega^\vee(h)\phi_1, \overline{\phi_2}\rangle_{L^2}\mathrm{d}h.$$

引理 6.2。对于固定的 $f_+ \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+})$，由 $\pi \mapsto J_\pi(f_+)$ 给出的 $\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{U}_{V,+})$ 上的函数是施瓦茨函数。此外，映射

$$\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}) \to \mathcal{S}(\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{U}_{V,+})), \quad f_+ \mapsto (\pi \mapsto J_\pi(f_+))$$

是连续的。

证明。对于固定的 $f_+ \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+})$，映射

$$\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{U}_V) \to \mathcal{C}^w(\mathrm{U}_V)\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{S}(L^\vee \times L^\vee), \quad \pi \mapsto f_{+,\pi}$$

是取值于 $\mathcal{C}^w(\mathrm{U}_V)\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{S}(L^\vee \times L^\vee)$ 的施瓦茨函数，并且根据 5.1，该映射关于 f_+ 连续依赖于 [BP21b，(2.6.1)]。由引理6.1即可得到结论。 □

Xue [Xue] 的一个主要结果如下。

命题 6.3. 若 $\pi \in \mathrm{Temp}(\mathrm{U}_V)$，则 $m(\pi) \neq 0$ 当且仅当 J_π 不恒为零 .

现在我们考虑幺幂轨道积分的谱展开。令 $f_+ \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(F_v))$. 置

$$O(1, f_+) = f_{+,\natural}(0),$$

这里回顾一下，右侧在推论 3.7之前定义。更具体地说，若 $f_+ = f \otimes \phi_1 \otimes \phi_2$，则

$$O(1, f \otimes \phi_1 \otimes \phi_2) = \int_{\mathrm{U}'_V} f(g^{-1})\langle \omega^\vee(g)\phi_1, \overline{\phi_2}\rangle_{L^2}\mathrm{d}g.$$

根据傅里叶反演公式，我们有

$$O(1, f_+) = \int_{\mathfrak{y}^V} \mathcal{F}_V f_{+,\natural}(y)\mathrm{d}y. \tag{6.3}$$

显然，映射 $f_+ \mapsto O(1, f_+)$ 是 $\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(F_v))$ 上的连续线性形式。

引理 6.4. 对于所有 $f_+ \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+})$，都有

$$O(1, f_+) = \int_{\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{U}_V)} J_\pi(f_+) \mathrm{d}\mu_{\mathrm{U}_V}(\pi). \tag{6.4}$$

右侧绝对收敛，并在 $\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+})$ 上定义一个连续线性形式。

证明。右侧的绝对收敛性和连续性由引理 6.2 得出。显然，左侧也定义了一个连续线性形式。在附加假设 $f_+ = f \otimes \phi_1 \otimes \phi_2$ 的条件下，我们可以证明该引理，其中 $f \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_V)$ 且 $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}(L^\vee)$。

由群 U_V 上的 Plancherel公式，我们有

$$f = \int_{\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{U}_V)} f_\pi \mathrm{d}\mu_{\mathrm{U}_V}(\pi),$$

其中积分在 $\mathcal{C}^w(\mathrm{U}_V)$ 上绝对收敛，参见（5.2）。由引理 6.1 我们有

$$O(1, f \otimes \phi_1 \otimes \phi_2) = \int_{\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{U}_V)} \int_{\mathrm{U}'_V} f_\pi(h^{-1}) \langle \omega(h)\phi_1, \overline{\phi_2} \rangle_{L^2} \mathrm{d}h \mathrm{d}\mu_{\mathrm{U}_V}(\pi).$$

这就证明了该引理。 □

6.2. **线性群上的球特征**。现在我们考察一般线性群上的球特征。我们将使用以下记号。

- 回顾一下，$G_n = \mathrm{Res}^{E/F}\mathrm{GL}_{n,E}$, $G'_n = \mathrm{GL}_{n,F}$, $G = G_n \times G_n$, $G' = G'_n \times G'_n$，以及对角嵌入于 G中的 $H = G_n$。
- 设 B_n 为 G_n 的由上三角矩阵组成的极小抛物子群。设T_n 为对角环面，N_n 为幂零根。

- 设 $e_n = (0, \ldots, 0, 1) \in E_n$，并设 P_n 为 G_n 的米拉波利克子群，它由最后一行为 e_n的矩阵组成。
- 定义 G 的子群如下：$B = B_n \times B_n$、$T = T_n \times T_n$、$N = N_n \times N_n$和 $P = P_n \times P_n$。
- 我们固定 G的一个极大紧子群 K 。
- 若 X 是 G的子群，则记 $X_H = X \cap H$。

令 ξ 为 N_n 给出的特征

$$\xi(u) = \psi^E((-1)^n(u_{1,2} + \ldots + u_{n-1,n})), \quad u \in N_n.$$

令 $\psi_N = \xi \boxtimes \xi^{-}$。关于记号，本文第一部分用 ξ 表示 E^1中的一个元素。但在本文第二部分中，E^1中的该元素总是取为 1，而 ξ 将表示我们在此定义的特征。

对于 $W \in \mathcal{C}^w(N\backslash G, \psi_N)$ 和 $\Phi \in \mathcal{S}(E_n)$，我们定义一个线性泛函

$$\lambda(W \otimes \Phi) = \int_{N_H \backslash H} W(h)\Phi(e_n h)\mu(\det h)^{-1} |\det h|_E^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}h. \tag{6.5}$$

引理 6.5。该积分绝对收敛，并延拓为定义在$\mathcal{C}^w(N\backslash G, \psi_N) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{S}(E_n)$上的连续线性形式。

证明。 根据伊瓦萨瓦分解，该积分有如下界

$$\int_{T_H}\int_{K_H}|W(ak)\Phi(e_nak)||a_1\cdots a_n|_E^{\frac{1}{2}}\delta_n^{-1}(a)\mathrm{d}k\mathrm{d}a,$$

其中 $a=(a_1,\ldots,a_n)\in T_H$、$a_i\in E^\times$ 以及 δ_n 的模特征 B_H。根据 [BP21b，引理 2.4，3]，存在一个 $d>0$，使得对于所有 $N>0$，我们都可以找到一个连续半范数 $\nu_{d,N}$ 在 $\mathcal{C}^w(N\backslash G,\psi_N)$ 上，满足

$$|W(ak)|\leq\prod_{i=1}^{n-1}(1+|a_ia_{i+1}^{-1}|)^{-N}\delta_n(a)^{\frac{1}{2}}\varsigma(a)^d\nu_{d,N}(W).$$

这里，$\varsigma(a)$ 是定义在 T_H 上的一个固定对数高度函数。由于 $\Phi\in\mathcal{S}(E_n)$，对于任意 $N>0$，存在 ν_N' 上的一个连续半范数 $\mathcal{S}(E_n)$，使得我们还有

$$\Phi(e_nak)\leq(1+|a_n|)^{-N}\nu_N'(\Phi).$$

于是该引理归结为 [BP21b，引理 2.4。4]。 □

对于 $W\in\mathcal{C}^w(N\backslash G,\psi_N)$，定义线性形式

$$\beta_\eta(W)=\int_{N'\backslash P'}W(h)\eta_{G'}(h)\mathrm{d}h, \tag{6.6}$$

根据 [BP21b，引理 2.15，1] 该积分绝对收敛，并在 $\mathcal{C}^w(N\backslash G,\psi_N)$ 上定义一个连续线性形式。

设 Π 是 G 的不可约温和表示。设 $\mathcal{W}(\Pi,\psi_N)$ 为其惠特克模型。则 $\mathcal{W}(\Pi,\psi_N)\subset\mathcal{C}^w(N\backslash G,\psi_N)$，见 [BP21b，引理 2.8。1]。我们在 $\mathcal{W}(\Pi,\psi_N)$ 上定义一个内积如下:

$$\langle W_1,W_2\rangle_G^{\mathrm{Wh}}=\int_{N\backslash P}W_1(p)\overline{W_2(p)}\mathrm{d}p. \tag{6.7}$$

这里，$\mathrm{d}p$ 表示 P上的右不变测度。

接下来我们将使用以下构造。对于 $f\in\mathcal{S}(G)$，我们定义

$$W_f(g_1,g_2)=\int_N f(g_1^{-1}ug_2)\psi_N(u)\mathrm{d}u,\quad g_1,g_2\in G. \tag{6.8}$$

于是根据 [BP21b，第 2 节.14]，对于任意 $g_1\in G$，有 $\overline{W_f}(g_1,\cdot)\in\mathcal{S}(N\backslash G,\psi_N)$。如 [BP21b，第 2 节 .14]，所述，通过将 $\int_N$ 替换为正则化版本 $\int_N^*$，这一构造实际上可扩展到所有 $f\in\mathcal{C}^w(G)$。根据 [BP21b，引理 2.14.1]，所得函数 W_f属于 $\mathcal{C}^w(N\backslash G\times N\backslash G,\psi_N\boxtimes\psi_N)$，且映射

$$\mathcal{C}^w(G)\to\mathcal{C}^w(N\backslash G\times N\backslash G,\psi_N\boxtimes\overline{\psi_N}),\quad f\mapsto W_f$$

是连续的。

对于 $f\in\mathcal{S}(G)$ 和 $\Pi\in\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)$（注意，$\mathrm{Temp}(G)=\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)$ 作为拓扑空间，参见 [BP21b，第4.1小节，第245-246]页），我们定义

$$W_{f,\Pi}=W_{f_\Pi}\in\mathcal{C}^w(N\backslash G\times N\backslash G,\psi_N\boxtimes\overline{\psi_N}). \tag{6.9}$$

于是映射 $f \mapsto W_{f,\ \Pi}$ 是连续的。此外，根据 [BP21b，命题 2.14。2] 映射

$$\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G) \to \mathcal{C}^w(N\backslash G \times N\backslash G, \psi_N \boxtimes \overline{\psi_N}), \quad \Pi \mapsto W_{f,\Pi}$$

是施瓦茨函数。

我们有惠特克函数的 Plancherel公式，参见 [BP21b，命题 2.14。2]。对于任意 $f \in \mathcal{S}(G)$，有

$$W_f = \int_{\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)} W_{f,\Pi} \mathrm{d}\mu_G(\Pi). \tag{6.10}$$

wh此处右侧在 $\mathcal{C}^w(N\backslash G \times N\backslash G,\ \psi_N \boxtimes \psi_N)$ 中绝对收敛。

最后由 [BP21b，（2.14.3）]

$$W_{f,\Pi} = |\tau|_E^{-n(n-1)} \sum_W \Pi(f)W \otimes \overline{W}, \tag{6.11}$$

其中求和遍历 $\mathcal{W}(\Pi,\ \psi_N)$ 的一个标准正交基，且右侧在 $\mathcal{C}^w(N\backslash G \times N\backslash G,\ \psi_N \boxtimes \psi_N)$ 中绝对收敛。

设 $f \in \mathcal{S}(G)$ 和 $\Phi \in \mathcal{S}(E_n)$。定义

$$I_\Pi(f \otimes \Phi) = \sum_W \lambda(\Pi(f)W, \Phi)\overline{\beta_\eta(W)}, \tag{6.12}$$

其中求和遍历 $\mathcal{W}(\Pi, \psi_N)$ 的一组标准正交基。

引理 6.6. 对固定的 f 和 Φ，定义在 $\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)$ 上的函数为

$$\Pi \mapsto I_\Pi(f \otimes \Phi)$$

是施瓦茨函数。此外，该映射

$$\mathcal{S}(G) \otimes \mathcal{S}(E_n) \to \mathcal{S}(\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)), \quad f \otimes \Phi \mapsto (\Pi \mapsto I_\Pi(f \otimes \Phi))$$

可延拓为一个连续映射

$$\mathcal{S}(G_+) \to \mathcal{S}(\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(G)).$$

证明。该映射

$$\mathcal{S}(G) \to \mathcal{C}^w(N\backslash G \times N\backslash G, \psi_N \boxtimes \overline{\psi_N}), \quad f \mapsto W_{f,\Pi}$$

可延拓为一个映射

$$\mathcal{S}(G_+) = \mathcal{S}(G) \widehat{\otimes} \mathcal{S}(E_n) \to \mathcal{C}^w(N\backslash G \times N\backslash G, \psi_N \boxtimes \overline{\psi_N}) \widehat{\otimes} \mathcal{S}(E_n)$$

以显然的方式，我们仍将其记为 $f_+ \mapsto W_{f_+,\Pi}$ 其中 $f_+ \in \mathcal{S}(G_+$).

采用这一记号，恒等式 (6.11) 也可推广，并且在 $f_+ \in \mathcal{S}(G_+)$ 时仍然成立。这里，f_+ 在 $W \in \mathcal{W}(\Pi, \psi_N)$ 上的作用定义为

$$\int_G f_+(g, x)\Pi(g)W \mathrm{d}g$$

且是 $\mathcal{W}(\Pi,\psi_N)\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{S}(E_n)$ 中的一个元素。由于级数 (6.11) 绝对收敛，我们得出

$$I_\Pi(f_+)=|\tau|_E^{n(n-1)}(\lambda\,\widehat{\otimes}\,\beta_\eta)(W_{f_+,\Pi}). \tag{6.13}$$

这里 $\lambda\,\widehat{\otimes}\,\beta_\eta$ 是 [BP21b引理—定义 2.41] 中定义的线性泛函。引理的其余部分由以下事实推出：$\Pi\mapsto W_{f_+,\Pi}$ 是施瓦茨函数，且映射 $f_+\mapsto W_{f_+,\Pi}$ 是连续的。□

6.3. **一般线性群中的正则幺幂轨道积分**。令

$$\xi_+=(-1)^n\left(\begin{pmatrix}0&\tau^{-1}&&\\&0&\ddots&\\&&\ddots&\tau^{-1}\\&&&0\end{pmatrix},(0,\dots,0),\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\\tau^{-1}\end{pmatrix}\right)\in\mathfrak{x}(F_v),$$

and

$$\xi_-=(-1)^n\left(\begin{pmatrix}0&&&\\\tau&0&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\tau&0\end{pmatrix},(0,\dots,0,\tau),\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\right)\in\mathfrak{x}(F_v).$$

对 $\varphi\in\mathcal{S}\ \mathfrak{x}$ 定义( )

$$O(s,\xi_+,\varphi)=\int_{G'_n}\varphi(\xi_+\cdot h)\eta(\det h)|\det h|^s\mathrm{d}h.$$

根据 [BP21b，命题 5.7， $O(s,\xi_+,\varphi)$ 的这个积分在 Re $s>1-\frac{1}{n}$ 时绝对收敛。此外，函数 $s\mapsto O(s,\xi_+,\varphi)$ 可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$，且在 $s=0$ 处全纯。令 $O(\xi_+,\varphi)=O(s,\xi_+,\varphi)|_{s=0}$，则有

$$\gamma\mu((-1)^{n-1}\tau)^{\frac{n(n+1)}{2}}O(\xi_+,\varphi)=\int_{\mathfrak{x}}\Omega(x)\widehat{\varphi}(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathcal{B}_{\mathrm{rs}}}\Omega(x)O(x,\widehat{\varphi})\mathrm{d}x, \tag{6.14}$$

其中

$$\gamma=\prod_{i=1}^n\gamma(1-i,\eta^i,\overline{\psi}). \tag{6.15}$$

注 6.7。严格来说， [BP21b] 描述的是 G'_n 在 $\mathfrak{s}_{n+1}$ 上的共轭作用所对应的幂零轨道积分，其中 G'_n 被视为 G'_{n+1} 左下角上的一个子群。这个作用与我们的作用本质相同，因为 $\mathfrak{s}_{n+1}$ 中的右下角元素在 G'_n的作用下不变。我们对 $\xi_\pm$ 的选取旨在使它们与 [BP21b]中使用的对象完全对应。

如果 $f_+\in\mathcal{S}(G_+)$，则记

$$O_+(f_+)=O(\xi_+,f_{+,\natural}),$$

其中，在映射 $f_+\mapsto f_{+,\natural}$ 中，我们任取 1 的一个小邻域 $\mathcal{U}$。映射 $\varphi\mapsto O(\xi_+,\varphi)$ 和 $f_+\mapsto f_{+,\natural}$ 是连续的。因此，映射 $f_+\mapsto O_+(f_+)$ 也是连续的。

引理 6.8。 设 $f \in \mathcal{S}(G)$ 且 $\Phi \in \mathcal{S}(E_n)$。则

$$\gamma O_+(f \otimes \Phi) = |\tau|_E^{\frac{n(n-1)}{4}} \int_{N_H \backslash H} \int_{N' \backslash G'} W_f(h,g)\Phi(e_n h)\mu(\det h)^{-1}|\det h|_E^{\frac{1}{2}}\eta_{G'}(g)\mathrm{d}g\mathrm{d}h. \tag{6.16}$$

右侧绝对收敛。

证明。 右侧的绝对收敛性由引理 5.2 得出。展开定义可知，(6.16) 的右侧等于

$$\int_{N_n' \backslash G_n'} \int_{N_n' \backslash G_n'} \int_{N_H \backslash H} \int_{N_n} \int_{N_n}$$
$$f(h^{-1}u_1 g_1, h^{-1}u_2 g_2)\xi(u_1 u_2^{-1})\Phi(e_n h)|\det h|_E^{\frac{1}{2}}\mu(\det h)^{-1}\eta(\det g_1 g_2)^{n+1}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}h\mathrm{d}g_2\mathrm{d}g_1.$$

作变量替换 $u_2 \mapsto u_1 u_2$，并合并对 u_1 和 h 的积分，得到

$$\int_{N_n' \backslash G_n'} \int_{N_n' \backslash G_n'} \int_H \int_{N_n}$$
$$f(h^{-1}g_1, h^{-1}u_2 g_2)\xi(u_2)^{-1}\Phi(e_n h)|\det h|_E^{\frac{1}{2}}\mu(\det h)^{-1}\eta(\det g_1 g_2)^{n+1}\mathrm{d}u_2\mathrm{d}h\mathrm{d}g_2\mathrm{d}g_1.$$

再作一次变量替换 $h \mapsto g_1 h$，将 $u \in N_n$ 上的积分拆分为 N_n' 和 N_n/N_n'，并将 N_n' 吸收到对 $g_2 \in N_n' \backslash G_n'$ 的积分中。得到

$$\int_{N_n' \backslash G_n'} \int_{G_n'} \int_{G_n} \int_{N_n/N_n'}$$
$$f(h^{-1}, h^{-1}g_1^{-1}u_2 g_2)\xi(u_2)^{-1}(\mathrm{R}_{\mu^{-1}}(h)\Phi)(e_n g_1)|\det g_1|\eta(\det g_1)^n\eta(\det g_2)^{n+1}\mathrm{d}u_2\mathrm{d}h\mathrm{d}g_2\mathrm{d}g_1.$$

回忆一下，对于任意 $\Phi \in \mathcal{S}$（E_n），我们定义了部分傅里叶变换 m

$$\Phi^\dagger(x^-, y^-) = \int_{F_n} \Phi(x + x^-)\psi((-1)^n \tau x y^-)\mathrm{d}x.$$

于是我们得到一个反演公式

$$\Phi(x + x^-) = |\tau|_E^{\frac{n}{2}} \int_{E^{-,n}} \Phi^\dagger(x^-, y^-)\psi((-1)^{n+1}\tau x y^-)\mathrm{d}y^-. \tag{6.17}$$

由此可得

$$(\mathrm{R}_{\mu^{-1}}(h)\Phi)(e_n g_1) = |\tau|_E^{\frac{n}{2}}|\det g_1|^{-1} \int_{E^{-,n}} (\mathrm{R}_{\mu^{-1}}(h)\Phi)^\dagger(0, g_1^{-1}y)\psi((-1)^{n+1}\tau e_n y)\mathrm{d}y.$$

将其代回前一个积分，我们得到（6.16）的右侧等于

$$|\tau|_E^{\frac{n}{2}} \int_{N_n' \backslash G_n'} \int_{G_n'} \int_{G_n} \int_{N_n/N_n'} \int_{E^{-,n}} f(h^{-1}, h^{-1}g_1^{-1}u_2 g_2) \tag{6.18}$$
$$\xi(u_2)^{-1}(\mathrm{R}_{\mu^{-1}}(h)\Phi)^\dagger(0, g_1^{-1}y)\psi((-1)^{n+1}\tau e_n y)\eta(\det g_1)^n\eta(\det g_2)^{n+1}\mathrm{d}y\mathrm{d}u_2\mathrm{d}h\mathrm{d}g_2\mathrm{d}g_1.$$

内侧的四个积分（除 g_1之外的积分）都是绝对收敛的。理由如下。回顾一下，$\mathrm{R}_{\mu^{-1}}^\dagger$ 是 $\mathcal{S}($ $E_n^- \times E^{-,n})$上 G_n 的唯一表示，使得对所有 $\Phi \in \mathcal{S}(E_n^- \times E^{-,n})$，$\mathrm{R}_{\mu^{-1}}^\dagger(h)\Phi^\dagger = (\mathrm{R}^{\mu^{-1}}(h)\Phi)^\dagger$。它与 $\mathrm{R}^{\mu^{-1}}$ 同构，因此具有中等增长。因此，函数

$$(g_1, g_2, x, y) \mapsto f(g_1^{-1}, g_1^{-1}g_2)(\mathrm{R}_{\mu^{-1}}(g_1)\Phi)^\dagger(x, y)$$

其中 $g_1, g_2 \in G_n$, $x \in E_n^-$和 $y \in E^{-,n}$，也是 $G_n \times G_n \times E_n^- \times E^{-,n}$上的施瓦茨函数。此外，映射

$$G_n \times N_n/N_n' \times G_n' \to G_n \times G_n, \quad (g, u, h_2) \mapsto (g^{-1}, g^{-1}uh_2)$$

是一个闭嵌入。因此，(6.18)中的内层四重积分是在一个闭子流形上对 ()()上的施瓦茨函数^n 进行积分，故收敛。因此，我们可以交换内层四重积分的积分次序，从而得到

$$(6.18) = |\tau|_E^{\frac{n}{2}} \int_{N_n' \backslash G_n'} \int_{N_n/N_n'} \int_{E^{-,n}} \varphi_{f\otimes\Phi}(g_1^{-1}u_2\overline{u_2}^{-1}g_1, 0, g_1^{-1}y) \\ \xi(u_2)^{-1}\psi((-1)^{n+1}\tau e_n y)\mathrm{d}y\mathrm{d}u_2\mathrm{d}h_1.$$

这里$\varphi_{f\otimes\Phi}$ 由 (3.1) 定义（更确切地说，是由其局部对应物定义）。根据定义，我们有

$$\xi(u_2)^{-1}\psi((-1)^{n+1}\tau e_n y) = \overline{\psi(\langle \xi_-, (A, 0, y)\rangle)},$$

其中 $A \in \mathfrak{s}_n$ 和 $\mathfrak{c}(A) = u_2 u_2^{-1}$，右侧的配对 $\langle -, - \rangle$ 是在 $\mathfrak{x}$上的配对，在小节3.2中由 (4.6) 定义。根据我们对测度的选择，最后一个积分等于

$$|\tau|_E^{\frac{n}{2}} \int_{N_n' \backslash G_n'} \int_{\mathfrak{n}_X} (f \otimes \Phi)_\natural(h_1^{-1}Yh_1)\overline{\psi(\langle \xi_-, Y\rangle)}\mathrm{d}Y\mathrm{d}h_1,$$

这等于

$$|\tau|_E^{\frac{n}{2} - \frac{n(n+1)}{4}} \gamma O_+(f \otimes \Phi),$$

根据 (6.20). 这就证明了引理。 □

6.4. **正则幺幂积分的谱展开**。记 V_{qs} 为一个固定的分裂 n维斜厄米空间。另回忆一下， γ 是 (6.15) 中定义的常数。

命题 6.9。设 $f_+ \in \mathcal{S}(G_+)$。我们有

$$\gamma O_+(f_+) = |\tau|_E^{-\frac{n(n-1)}{4}} \int_{\mathrm{Temp}(\mathrm{U}_{V_{qs}})/\sim} I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_+) \frac{|\gamma^*(0, \pi, \mathrm{Ad}, \psi)|}{|S_\pi|}\mathrm{d}\pi. \tag{6.19}$$

右侧绝对收敛。

在证明此命题之前，我们需要做一些准备。令 N_S 为 N_n 在 S_n中的像，并令 $\mathfrak{n}_S$ 为其在 1 处的切空间。它们赋予商测度。于是，Cayley 变换保持 N_S 和 $\mathfrak{n}_S$上的测度。令 $\mathfrak{n}_X = \mathfrak{n}_S \times \{0\} \times E^{-,\,n}$ 并赋予其显然的测度。于是我们有 $\mathfrak{n}_X \cong N_n/N_n' \times \{0\} \times E^{-,\,n}$，它保持测度。回忆一下，我们有一个 G_n' 在 $\mathfrak{x}$ 上的右作用，由（3.4）给出。文献 [BP21b，引理 573]（参见（6.7）之后的注6.14）中证明了，对于任意 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathfrak{x})$，我们有

$$\gamma O(\xi_+, \varphi) = |\tau|_E^{\frac{n(n+1)}{4}} \int_{G_n'/N_n'} \int_{\mathfrak{n}_X} \varphi(x \cdot h)\overline{\psi(\langle \xi_-, x\rangle)}\eta(\det h)\mathrm{d}x\mathrm{d}h. \tag{6.20}$$

这是一个收敛的迭代积分。

命题的证明 6.9。 (6.19)右侧的绝对收敛性由引理 6.6以及函数 $\frac{|\gamma^*(0,\pi,\mathrm{Ad},\psi|}{|S_\pi|}$具有中等增长这一事实得出，参见 [BP21b，引理 2。~~45]和 [BP21b~~，(2.7.4)]。连续性也由引理 6.6得出。

由于等式两边关于 f_+ 都是连续的，我们还可以假设测试函数 f_+ 具有 $f\otimes\Phi$ 的形式，其中 $f\in\mathcal{S}(G(F))$ 且 $\Phi\in\mathcal{S}(E_n)$。

由引理 6.8可得

$$\gamma O_+(f\otimes\Phi)=|\tau|_E^{\frac{n(n-1)}{4}}\int_{N_H\backslash H}\int_{N'\backslash G'}W_f(h,g)\Phi(e_nh)\mu(\det h)^{-1}|\det h|_E^{\frac12}\eta_{G'}(g)\mathrm{d}g\mathrm{d}h.$$

对于任意 固定的 $h\in H$，根据 [BP21b，推论 3.51，定理 4.22] 内积分等式 ls

$$|\tau|_E^{\frac{n(n-1)}{2}}\int_{\mathrm{Temp}(\mathrm{U}_{V_{qs}})/\sim}\beta_\eta(W_{f,\mathrm{BC}(\pi)}(h,\cdot))\frac{|\gamma^*(0,\pi,\mathrm{Ad},\psi)|}{|S_\pi|}\mathrm{d}\pi.$$

这里，线性泛函 β_η 作用于变量 $\cdot$，且关于 π 的积分绝对收敛。因此

$$\begin{aligned}\gamma O_+(f\otimes\Phi)=|\tau|_E^{\frac{n(n-1)}{4}+\frac{n(n-1)}{2}}&\int_{N_H\backslash H}\int_{\mathrm{Temp}(\mathrm{U}_{V_{qs}})/\sim}\beta_\eta(W_{f,\mathrm{BC}(\pi)}(h,\cdot))\\&\Phi(e_nh)\mu(\det h)^{-1}|\det h|_E^{\frac12}\frac{|\gamma^*(0,\pi,\mathrm{Ad},\psi)|}{|S_\pi|}\mathrm{d}\pi\mathrm{d}h.\end{aligned}$$

对于固定的 Φ，我们将线性泛函 $W\mapsto\lambda(W,\ \Phi)$ 记为 λ_Φ。于是

$$\begin{aligned}&\gamma O_+(f\otimes\Phi)\\=&|\tau|_E^{\frac{n(n-1)}{4}+\frac{n(n-1)}{2}}\int_{\mathrm{Temp}(\mathrm{U}_{V_{qs}})/\sim}(\lambda_\Phi\widehat{\otimes}\beta_\eta)\left(W_{f,\mathrm{BC}(\pi)}\right)\frac{|\gamma^*(0,\pi,\mathrm{Ad},\psi)|}{|S_\pi|}\mathrm{d}\pi.\end{aligned}$$

此外，根据（6.13）

$$(\lambda_\Phi\widehat{\otimes}\beta_\eta)\left(W_{f,\mathrm{BC}(\pi)}\right)=|\tau|_E^{-n(n-1)}I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f\otimes\Phi).$$

由此可得

$$\gamma O_+(f\otimes\Phi)=|\tau|_E^{-\frac{n(n-1)}{4}}\int_{\mathrm{Temp}(\mathrm{U}_{V_{qs}})/\sim}I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f\otimes\Phi)\frac{|\gamma^*(0,\pi,\mathrm{Ad},\psi)|}{|S_\pi|}\mathrm{d}\pi.$$

这就证明了该命题。 □

7. Local relative trace formulae

7.1. 酉群上的局部迹公式。 设 V 为一个 n维斜厄米空间。在本小节中，我们考虑 $f_{1,+}$，$f_{2,+}\in\mathcal{S}(\mathrm{U}_V,+)$。令

$$T(f_{1,+},f_{2,+})=\int_{\mathrm{U}_V'}\int_{\mathrm{U}_V'}\int_{\mathrm{U}_V}\int_V f_{1,+}^\ddagger(h_1gh_2,vh_2)\overline{f_{2,+}^\ddagger(g,v)}\mathrm{d}v\mathrm{d}g\mathrm{d}h_1\mathrm{d}h_2.\tag{7.1}$$

引理 7.1. 积分 (7.1) 绝对收敛，并在 $\mathcal{S}(\mathrm{U}_V,+)$上定义一个连续厄米形式。

证明。我们假设 F 是阿基米德的。非阿基米德情形类似且更简单。由于 $f_i^{\ddagger,+} \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_V^+)$，由法图引理可知，该引理可由以下事实推出。对于任意 $f_i \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_V)$ 和 $\phi_i \in \mathcal{S}(V)$，$i = 1,2$，存在定义在 $\mathcal{S}(\mathrm{U}_V)$ 上的连续半范数 ν，以及定义在$\mathcal{S}(V)$上的连续半范数 ν'，使得

$$\int_{\mathrm{U}_V'}\int_{\mathrm{U}_V'}\int_{\mathrm{U}_V}\int_V |f_1(h_1gh_2)\phi_1(vh_2)f_2(g)\phi_2(v)|\mathrm{d}g\mathrm{d}v\mathrm{d}h_1\mathrm{d}h_2 \leq \nu(\varphi_1)\nu(\varphi_2)\nu'(\phi_1)\nu'(\phi_2). \tag{7.2}$$

我们固定 V 上的一个范数函数如下。我们可以选取一个范数 $\|\cdot\|_V$，定义在 V 上，且在 K ($\mathrm{U}(V)$的一个固定极大紧子群）的平移作用下不变。于是，(7.2)的收敛性归结为证明存在一个 $d > 0$ 使得

$$\int_{\mathrm{U}_V'}\int_{\mathrm{U}_V'}\int_{\mathrm{U}_V}\int_V |f_1(h_1gh_2)f_2(g)|(1+\|v\|)^{-d}(1+\|vh_2\|)^{-d}\mathrm{d}v\mathrm{d}g\mathrm{d}h_1\mathrm{d}h_2 \leq \nu(\varphi_1)\nu(\varphi_2).$$

先积分对 h_1 和 g_1 积分，并先进行变量替换。问题归结为证明

$$\int_{\mathrm{U}_V'}\int_{\mathrm{U}_V'}\int_V f_3(h_2^{-1}g_2h_2)f_4(g_2)(1+\|v\|)^{-d}(1+\|vh_2\|)^{-d}\mathrm{d}v\mathrm{d}h_2\mathrm{d}g_2$$

绝对收敛，其中 f_3，f_4 是 $\mathrm{U}(V)$ 上的正施瓦茨函数。

由于 $\mathcal{S}(\mathrm{U}\ \ (V))$ 包含于 $\mathcal{C}(\mathrm{U}(V))$（嵌入是连续的），我们需要证明 e

$$\int_{\mathrm{U}(V)}\int_{\mathrm{U}(V)}\int_V \Xi^{\mathrm{U}(V)}(h_2^{-1}g_2h_2)\Xi^{\mathrm{U}(V)}(g_2)\varsigma(g_2)^{-d}(1+\|v\|)^{-d}(1+\|vh_2\|)^{-d}\mathrm{d}v\mathrm{d}h_2\mathrm{d}g_2$$

当 d 足够大时收敛（这是一种相当粗略的化简，但确实有效）。利用 $\Xi^{\mathrm{U}(V)}$ 的倍增原理，我们只需证明以下表达式收敛：

$$\int_{\mathrm{U}(V)} \Xi(g_2)^2\varsigma(g_2)^{-d}\mathrm{d}g_2$$

and

$$\int_{\mathrm{U}(V)}\int_V \Xi(h_2)^2(1+\|v\|)^{-d}(1+\|vh_2\|)^{-d}\mathrm{d}v\mathrm{d}h_2$$

当 d 足够大时。第一个结论见 [Wal03，引理 II.1。5]。第二个结论由嘉当分解推出 $h_2 = k_1ak_2$，$a \in A^+$，k_1，$k_2 \in K$ 以及

$$\int_V (1+\|v\|)^{-d}(1+\|va\|)^{-d}\mathrm{d}v \leq C \times |a_1\cdots a_r|_E$$

其中 C 为某个常数。 □

命题 7.2. 设 $f_{1,\ +}$，$f_{2,\ +} \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,\ +})$。我们有

$$\int_{\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{U}_V)} J_\pi(f_{1,+})\overline{J_\pi(f_{2,+})}\mathrm{d}\mu_G(\pi) = \int_{\mathcal{A}_{\mathrm{rs}}} O(y,f_{1,+})\overline{O(y,f_{2,+})}\mathrm{d}y.$$

两边均绝对收敛，并在 $\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,\ +})$ 上定义连续厄米形式。注意，如果 $y \in \mathcal{A}$ 不在 U_V^+ 的像中（按照我们的约定，回顾一下，这里的全部含义都是指它们的 F-点），则我们约定 $O(y、f_{i,\ +}) = 0$。

证明。 我们用两种方式计算积分（7.1）。根据引理 7.1 ，我们可以改变积分次序。作变量替换

$$h_1 \mapsto h_1 h_2^{-1} g_1^{-1}, \quad g_2 \mapsto g_1 g_2,$$

然后先对 h_1 和 g_1 积分。我们将变量 $g_2 \in \mathrm{U}(V)$ 和 $v \in V$ 合并为一个变量 $y \in Y^V$。于是得到

$$T(f_1, f_2) = \int_{Y^V(F)} \int_{\mathrm{U}(V)} \varphi_{f_{1,+}^\ddagger}(y \cdot h_2) \overline{\varphi_{f_{2,+}^\ddagger}(y)} \mathrm{d}h_2 \mathrm{d}y.$$

这里我们回顾一下，$\varphi_{f_i^\ddagger,+}$ 是由（3.5）定义的函数。由于 Y_{rs}^V 在 Y^V 中具有零测补集（回忆一下，they 表示带下划线的代数簇的 F点），这等于

$$\int_{Y_{\mathrm{rs}}^V} O(y, f_{1,+}) \overline{\varphi_{f_{2,+}^\ddagger}(y)} \mathrm{d}y.$$

根据 $\mathcal{A}_{\mathrm{rs}}$上的测度定义，参见引理5.1，这等于

$$\int_{\mathcal{A}_{\mathrm{rs}}^V(F)} O(y, f_{1,+}) \overline{O(y, f_{2,+})} \mathrm{d}y.$$

现在我们对（7.1）进行谱地计算，并证明

$$(7.1) = \int_{\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{U}_V)} J_\pi(f_{1,+}) \overline{J_\pi(f_{2,+})} \mathrm{d}\mu_G(\pi).$$

根据引理 6.2，右侧绝对收敛。由于两边关于$f_{1,+}$ 和$f_{2,+}$连续，我们可以假设$f_{1,+} = f_1 \otimes \phi_1 \otimes \phi_2$，$f_{2,+} = f_2 \otimes \phi_3 \otimes \phi_4$，其中$f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_V)$ 和 $\phi_1, \dots \phi_4 \in \mathcal{S}(L)$。首先对 $v \in V$积分。由于 L^2-范数在傅里叶变换下保持不变，积分（7.1）变为

$$\int_{\mathrm{U}_V'} \int_{\mathrm{U}_V'} \int_{\mathrm{U}_V} f_1(h_1 g h_2) \overline{f_2(g) \langle \omega^\vee(h_1)\phi_3, \phi_1 \rangle} \langle \omega^\vee(h_2)\phi_2, \phi_4 \rangle \mathrm{d}g \mathrm{d}h_1 \mathrm{d}h_2,$$

其等于

$$\int_{\mathrm{U}_V'} \int_{\mathrm{U}_V'} \left(f_2^* * L(h_1^{-1}) f_1\right)(h_2) \overline{\langle \omega^\vee(h_1)\phi_3, \phi_1 \rangle} \langle \omega^\vee(h_2)\phi_2, \phi_4 \rangle \mathrm{d}h_2 \mathrm{d}h_1.$$

这里 $f_2^*(g) = \overline{f_2(g^{-1})}$， $*$表示 $\mathcal{S}(G(F))$ 中的通常卷积积，而 $L(h_1^{-1}) f_1$是函数 $g \mapsto f_1(h_1 g)$。利用 Plancherel公式（5.2），该积分等于

$$\int_{\mathrm{U}_V'} \int_{\mathrm{U}_V'} \int_{\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{U}_V)} \mathrm{Trace}\left(\pi(h_2^{-1})\pi(f_2^*)\pi(h_1^{-1})\pi(f_1)\right) \overline{\langle \omega^\vee(h_1)\phi_3, \phi_1 \rangle} \langle \omega^\vee(h_2)\phi_2, \phi_4 \rangle \mathrm{d}\mu_{\mathrm{U}_V}(\pi) \mathrm{d}h_2 \mathrm{d}h_1.$$

这里需要引用 [Xue第 3]节中的结果。我们定义了一个线性泛函

$$\mathcal{L}_{\pi^J} : (\pi \widehat{\otimes} \omega^\vee) \widehat{\otimes} \overline{\pi \widehat{\otimes} \omega^\vee} \to \mathbb{C}^\times,$$

以及一个映射

$$L_\pi^{\phi,\phi'} : \pi \to \mathrm{Hom}(\overline{\pi}, \mathbb{C}^\times)$$

在 [Xue，第 3 节。1]。对 h_1 首先，根据 [Xue，（3.4）], 上述积分等于

$$\int_{\mathrm{U}_V'}\int_{\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{U}_V)}\mathrm{Trace}\left(\pi(h_2^{-1})\pi(f_2^*)L_\pi^{\phi_1,\phi_3}\pi(f_1)\right)\langle\omega^\vee(h_2)\phi_2,\phi_4\rangle\mathrm{d}\mu_{\mathrm{U}_V}(\pi)\mathrm{d}h_2.$$

对 h_2 积分，得到

$$\int_{\mathcal{X}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{U}_V)}\mathcal{L}_{\pi^J}\left(\left(\pi(f_2^*)L_\pi^{\phi_1,\phi_3}\pi(f_1)\right)^{\phi_4,\phi_2}\right)\mathrm{d}\mu_{\mathrm{U}_V}(\pi).$$

根据 [Xue，引理 3，6] 我们有

$$(\pi(f_2^*)L_\pi^{\phi_1,\phi_3}\pi(f_1))^{\phi_4,\phi_2}=\pi(f_2^*)^{\phi_4,\phi_3}L_{\pi^J}\pi(f_1)^{\phi_1,\phi_2},$$

并且根据 [Xue，引理 3，5] 我们有

$$\mathcal{L}_{\pi^J}(\pi(f_2^*)^{\phi_4,\phi_3}L_{\pi^J}\pi(f_1)^{\phi_1,\phi_2})=\mathcal{L}_{\pi^J}(\pi(f_2^*)^{\phi_4,\phi_3})\mathcal{L}_{\pi^J}(\pi(f_1)^{\phi_1,\phi_2})).$$

根据定义

$$\mathcal{L}_{\pi^J}(\pi(f_2^*)^{\phi_4,\phi_3})=\overline{J_\pi(f_2\otimes\phi_3\otimes\phi_4)},\quad \mathcal{L}_{\pi^J}(\pi(f_1)^{\phi_1,\phi_2})=J_\pi(f_1\otimes\phi_1\otimes\phi_2).$$

这就证明了该命题。 □

7.2. 线性群上的局部迹公式。现在考虑 $f_{1,\ +}$，$f_{2,\ +}\in\mathcal{S}(G_+(F))$。令

$$T'(f_{1,+},f_{2,+})=\int_H\int_{G'}\int_{G_+}f_{1,+}^\dagger(x\cdot(h,g'))\overline{f_{2,+}^\dagger(x)}\eta_{G'}(g')\mathrm{d}x\mathrm{d}h\mathrm{d}g'. \tag{7.3}$$

引理 7.3。积分 (7.3)绝对收敛。它在 $\mathcal{S}(G'(F)\times E_n)$上定义了一个连续厄米形式。此外

$$T'(f_{1,+},f_{2,+})=\int_{\mathcal{A}_{\mathrm{rs}}(F)}O(x,f_{1,+})\overline{O(x,f_{2,+})}\mathrm{d}x, \tag{7.4}$$

其中积分绝对收敛。

证明。证明与命题7.2的轨道积分部分基本相同。 □

我们将对 $T'(f_{1,+},f_{2,+})$ 进行谱地计算。我们假设 $f_{1,+}=f_1\otimes\Phi_1$ 以及$f_{2,+}=f_2\otimes\Phi_2$ 其中 f_1, $f_2\in\mathcal{S}(G)$，并且 $\Phi_1,\Phi_2\in\mathcal{S}(E_n)$。我们需要做一些准备。下面引理的证明类似于引理 7.1 和 [BP21b、引理 5.4.2 (ii)], ，这里略去证明。

引理 7.4。对于任意 Φ_1、$\Phi_2\in\mathcal{S}(E_n)$ 以及 $\phi\in\mathcal{C}^w(G)$，积分

$$\int_H\int_{E_n}\phi(h)|\det h|_E^{\frac{1}{2}}\Phi_1(vh)\overline{\Phi_2(v)}dvdh$$

绝对收敛，并在 $\phi\in\mathcal{C}^w(G)$ 上定义一个连续线性形式。特别是，如果$\varphi_2\in\mathcal{C}^w(G_n)$，那么对于每个 $\varphi_1\in\mathcal{C}^w(G_n)$，积分

$$\int_{G_n}\int_{E_n}\varphi_1(h)\varphi_2(h)|\det h|_E^{\frac{1}{2}}\Phi_1(vh)\overline{\Phi_2(v)}dvdh$$

绝对收敛，并在 $\varphi_1\in\mathcal{C}^w(G_n)$ 上定义一个连续线性形式。

按照 [BP21b], 对任意不可约温和表示 Π的 G，我们在 $\mathcal{S}(G)$ 上定义一个连续厄米形式如下：

$$\langle f_1, f_2\rangle_{X,\Pi} = \sum_{W\in\mathcal{W}(\Pi,\psi_{N'})} \beta(\Pi(f_1^\vee)W)\overline{\beta(\Pi(f_2^\vee)W)}.$$

其中 $f^\vee(x) = f(x^{-1})$. 此处的线性泛函 β 是 β_η 的一种变体，参见（6.6），其定义为

$$\beta : \mathcal{C}^w(N\backslash G, \psi_N) \to \mathbb{C}, \quad W \mapsto \beta(W) = \int_{N'\backslash P'} W(p)\mathrm{d}p.$$

根据 $\mathcal{C}^w(N\backslash G, \psi_N)$，它是 [BP21b、引理 2.15 中的连续线性形式。1]。下标 X表示对称簇 $G'\backslash G$。就我们的目的而言，无需了解其细节，只需将$\langle -,-\rangle_{X,\Pi}$ 视为一个整体记号。

引理 7.5。函数

$$\Pi \mapsto \langle f_1, f_2\rangle_{X,\Pi}$$

是施瓦茨函数。映射

$$\mathcal{S}(G)^2 \to \mathcal{S}(\mathrm{Temp}(G)), \quad (f_1, f_2) \mapsto (\Pi \mapsto \langle f_1, f_2\rangle_{X,\Pi})$$

是连续的。此外

$$\begin{aligned}&\int_H \int_{E_n} (\mathrm{L}(h^{-1})f_1, f_2)_{X,\Pi}\mu(\det h)^{-1}|\det h|_E^{\frac{1}{2}}\Phi_1(vh)\overline{\Phi_2(v)}\mathrm{d}v\mathrm{d}h\\ =&|\tau|_E^{-\frac{n(n-1)}{2}} I_\Pi(f_1\otimes\Phi_1)\overline{I_\Pi(f_2\otimes\Phi_2)}.\end{aligned} \tag{7.5}$$

证明。 我们着重证明等式（7.5）。其余部分的证明与 [BP21b，引理 4.21、命题 5.4.3] 中的证明完全相同。

首先，如 [BP21b，式（5.4.2）的证明]所示，函数之和

$$g \mapsto \sum_{W_1,W_2\in\mathcal{W}(\Pi,\psi_N)} \langle\Pi(g)W_1, W_2\rangle^{\mathrm{Wh}}\beta(\Pi(f_1^\vee)W_1)\overline{\beta(\Pi(f_2^\vee)W_2)}$$

在 $\mathcal{C}^w(G$ 中绝对收敛。这里我们称 $\langle -,-\rangle^{\mathrm{Wh}}$ 为由（6.7）给出的惠特克模型上的内积。由此可得表达式

$$\begin{aligned}&\int_H \int_{E_n} \sum_{W_1,W_2\in\mathcal{W}(\Pi,\psi_N)} \langle\Pi(h)W_1, W_2\rangle^{\mathrm{Wh}}\beta(\Pi(f_1^\vee)W_1)\overline{\beta(\Pi(f_2^\vee)W_2)}\\ &\mu(\det h)^{-1}|\det h|_E^{\frac{1}{2}}\Phi_1(vh)\overline{\Phi_2(v)}\mathrm{d}v\mathrm{d}h\end{aligned}$$

绝对收敛，且等于（7.5）的左端。因此，我们可以交换求和与积分的次序。我们将证明，对于所有 W_1, $W_2 \in \mathcal{W}(\Pi, \psi_N)$，都有

$$\begin{aligned}&\int_H \int_{E_n} \langle\Pi(h)W_1, W_2\rangle^{\mathrm{Whitt}}\mu(\det h)^{-1}|\det h|_E^{\frac{1}{2}}\Phi_1(vh)\overline{\Phi_2(v)}\mathrm{d}v\mathrm{d}h\\ =&|\tau|_E^{-\frac{n(n-1)}{2}} \lambda(W_1,\Phi_1)\overline{\lambda(W_2,\Phi_2)},\end{aligned} \tag{7.6}$$

这直接推出（7.5）。

首先，（7.6）的两边都是 W_1 和 W_2 上的连续线性形式，由 [BP21b，（2.6.1）] 和引理 7.4 可知，因此不妨设 $\Pi = \Pi' \boxtimes \Pi''$，其中 Π'、Π'' 是 G_n 的不可约温和表示，并且 $W_i = W_i' \otimes W_i''$其中

$$W_i' \in \mathcal{W}(\Pi', \xi), \quad W_i'' \in \mathcal{W}(\Pi'', \bar{\xi}).$$

我们断言，对于任意 $\phi \in \mathcal{C}^w(G_n)$ 以及任意 W_1''，$W_2'' \in \mathcal{W}(\Pi'', \bar{\xi})$，都有

$$\begin{aligned} &\int_{G_n} \int_{E_n} \phi(h) \langle \Pi(h) W_1'', W_2'' \rangle^{\mathrm{Wh}} \mu(\det h)^{-1} |\det h|_E^{\frac{1}{2}} \Phi_1(vh) \overline{\Phi_2(v)} \mathrm{d}v \mathrm{d}h \\ =&\iint_{(N_n \backslash G_n)^2} W_\phi(h, g) W_1''(h) \overline{W_2''(g)} \mu(\det hg)^{-1} |\det hg|_E^{\frac{1}{2}} \Phi_1(e_n h) \overline{\Phi_2(e_n g)} \mathrm{d}h \mathrm{d}g, \end{aligned} \tag{7.7}$$

这里回顾一下，W_ϕ 定义于（6.8）中。

我们先说明这蕴含（7.6）。（7.6）的左端等于

$$\int_{G_n} \int_{E_n} \langle \Pi'(h) W_1', W_2' \rangle^{\mathrm{Whitt}} \langle \Pi''(h) W_1'', W_2'' \rangle^{\mathrm{Whitt}} \mu(\det h)^{-1} |\det h|_E^{\frac{1}{2}} \Phi_1(vh) \overline{\Phi_2(v)} \mathrm{d}v \mathrm{d}h.$$

将（7.7）应用于，即可得到（7.6

$$\phi(g) = \langle \Pi'(g) W_1', W_2' \rangle_{G_n}^{\mathrm{Whitt}}$$

并利用（6.11）。

最后我们证明（7.7）。等式两边都是关于 ϕ 的连续线性形式（左端由引理7.4 可知，右端由引理 6.5 可知），因此不妨设$\phi \in \mathcal{S}$（G_n），这样所有积分都绝对收敛。我们先将对 $v \in E_n$的积分 $g \in P_n \backslash G_n$替换为。（7.7）的左端等于

$$\int_H \int_{P_n \backslash G_n} \phi(h) \langle \Pi(h) W_1, W_2 \rangle^{\mathrm{Wh}} \mu(\det h)^{-1} |\det h|_E^{\frac{1}{2}} |\det g|_E \Phi_1(e_n gh) \overline{\Phi_2(e_n g)} \mathrm{d}g \mathrm{d}h.$$

作变量替换 $h \mapsto g^{-1}h$，我们得到

$$\int_{P_n \backslash (G_n \times G_n)} \phi(g^{-1}h) \langle \Pi(h) W_1, \Pi(g) W_2 \rangle_{G_n}^{\mathrm{Wh}} \mu(\det g^{-1}h)^{-1} |\det hg|_E^{\frac{1}{2}} \Phi_1(e_n h) \overline{\Phi_2(e_n g)} \mathrm{d}g \mathrm{d}h.$$

这里 P_n 沿对角线嵌入 $G_n \times G_n$。代入 $\langle -, - \rangle^{\mathrm{Wh}}$ 的定义，我们得到

$$\int_{N_n \backslash (G_n \times G_n)} \phi(g^{-1}h) W_1(h) \overline{W_2(g)} \mu(\det g^{-1}h)^{-1} |\det hg|_E^{\frac{1}{2}} \Phi_1(e_n h) \overline{\Phi_2(e_n g)} \mathrm{d}g \mathrm{d}h.$$

最后，我们将关于 $N_n \backslash (G_n \times G_n)$ 的积分分解为关于 N_n 的积分，随后是关于 $(N_n \backslash G_n)^2$ 的二重积分，并得出上述积分等于

$$\int_{(N_n \backslash G_n)^2} \int_{N_n} \phi(g^{-1}uh) \overline{\xi(u)} W_1(h) \overline{W_2(g)} \mu(\det g^{-1}h)^{-1} |\det hg|_E^{\frac{1}{2}} \Phi_1(e_n h) \overline{\Phi_2(e_n g)} \mathrm{d}u \mathrm{d}g \mathrm{d}h.$$

根据 W_ϕ 的定义，这等于式（7.7）的右侧。至此，引理的证明完成。□

命题 7.6。我们有

$$|\tau|_E^{-\frac{n(n-1)}{2}} \int_{\mathrm{Temp}(\mathrm{U}_{V_{qs}})/\sim} I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_{1,+})\overline{I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_{2,+})}\frac{|\gamma^*(0,\pi,\mathrm{Ad},\psi)|}{|S_\pi|}\mathrm{d}\pi$$
$$= \int_{\mathcal{A}_{\mathrm{rs}}(F)} O(x,f_{1,+})\overline{O(x,f_{2,+})}\mathrm{d}x.$$

证明。 根据引理 7.3，我们只需证明

$$T'(f_{1,+},f_{2,+}) = |\tau|_E^{-\frac{n(n-1)}{2}} \int_{\mathrm{Temp}(\mathrm{U}_{V_{qs}})/\sim} I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_{1,+})\overline{I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_{2,+})}\frac{|\gamma^*(0,\pi,\mathrm{Ad},\psi)|}{|S_\pi|}\mathrm{d}\pi. \tag{7.8}$$

积分的绝对收敛性源于函数 $\Pi \mapsto I_\Pi(f_i')$ 是施瓦茨函数，而函数 $|\gamma^*(0,\frac{\pi}{|S_\pi|},\psi|,\mathrm{Ad})$具有中等增长。

由于 (7.8) 两边关于 $f_{1,+}$ 和 $f_{2,+}$ 均连续，根据引理6.6，我们可以假设它们都属于 $\mathcal{S}(G)\otimes\mathcal{S}(E_n)$。因此，我们只需计算

$$T'(f_1\otimes\Phi_1, f_2\otimes\Phi_2)$$

其中 f_1， $f_2\in\mathcal{S}(G)$ 和 Φ_1， $\Phi_2\in\mathcal{S}(E_n)$。

由于部分傅里叶变换保持 L^2-范数不变，先对 $E_n^-\times E^{-,n}$ 积分，得到

$$\int_H\int_{G'}\int_G\int_{E_n} f_1(hxg')\overline{f_2(x)}\Phi_1(vh)\overline{\Phi_2(v)}\mu(\det h)^{-1}|\det h|_E^{\frac{1}{2}}\eta_{n+1}(g')\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}g'\mathrm{d}h.$$

此表达式同样绝对收敛，因此我们可以先对 g' 和 x 积分。根据 [BP21b，命题 5.61]对 g' 和 x 的积分给出给出

$$\int_{\mathrm{Temp}(\mathrm{U}_{V_{qs}})/\sim}\langle \mathrm{L}(h_1^{-1})f_1,f_2\rangle_{X,\mathrm{BC}(\pi)}\Phi_1(vh_1)\overline{\Phi_2(v)}\frac{|\gamma^*(0,\pi,\mathrm{Ad},\psi)|}{|S_\pi|}\mathrm{d}\pi.$$

严格来说， [BP21b] 中的陈述与此并不完全相同。但如同 [BP21b，命题 5。61], 由于两边都是关于 f_1 和 f_2 的连续线性形式，我们可以假设f_1， $f_2\in\mathcal{S}(G_n)\otimes\mathcal{S}(G_n)$，因此所需的恒等式归结为 G_n上的两个恒等式，而二者均可直接由 [BP21b，定理 4 得出。22] （ [BP21b]中的情形归结为一个关于 G_n 的恒等式，另一个关于 G_{n+1}。）

由此得到

$$\int_H\int_{E_n}\int_{\mathrm{Temp}(\mathrm{U}_{V_{qs}})/\sim}\langle \mathrm{L}(h^{-1})f_1,f_2\rangle_{X,\mathrm{BC}(\pi)}\Phi_1(vh)\overline{\Phi_2(v)}\frac{|\gamma^*(0,\pi,\mathrm{Ad},\psi)|}{|S_\pi|}\mathrm{d}\pi\mathrm{d}v\mathrm{d}h.$$

与 [BP21b中的情形 (5.6.9)], 一样，此表达式绝对收敛，且恒等式（7.8）由引理7.5得出。

□

7.3. 特征标恒等式。我们现在可以比较相对特征标了。我们先给出下面这个较弱版本的命题。

命题 7.7。对于任意 $\pi \in \mathrm{Temp}^{\mathrm{U}'_V}(\mathrm{U}_V)$，存在一个常数 $\kappa(\pi)$，使得

$$J_\pi(f_+^V) = \kappa(\pi) I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_+),$$

for 匹配测试函数 $f_+ \in \mathcal{S}(G_+)$ 和 $f_+^V \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+})$。此外，该函数 n

$$\pi \in \mathrm{Temp}_{\mathrm{U}'_V}(\mathrm{U}_V) \mapsto \kappa(\pi)$$

i是连续的。这里关于 $\mathrm{Temp}^{\mathrm{U}'_V}(\mathrm{U}_V)$ 上的拓扑，参见小节 *6.1* .

证明。 证明与 [BP21a，命题4.2 相同。1] 留给有兴趣的读者，参见 [BP21b，命题 5。81]。 □

现在我们计算 $\kappa(\pi)$。理论上，我们可以直接利用幺幂轨道积分的谱展开来计算。但当 F 是阿基米德时，由于并非所有测试函数都有匹配函数，我们需要先验地计算 $|\kappa(\pi)|$；而这只能通过局部相对迹公式来实现。

$^{n(n-1)}$**命题 7.8**。 对于任意 $\pi \in \mathrm{Temp}^{\mathrm{U}'_V}(\mathrm{U}_V)$，均有 $|\kappa(\pi)| = |\tau|_E^{\frac{n(n-1)}{4}}$。特别地，它与 π无关。

证明。 取 $f_{1,+}^V$，$f_{2,+}^V \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+})$ 以及 $f_{1,+}$，$f_{2,+} \in \mathcal{S}(G_+)$。假设它们相匹配，则由命题 7.2 和命题7.6 可得

$$\begin{aligned}
&|\tau|_E^{-\frac{n(n-1)}{2}} \int_{\mathrm{Temp}(\mathrm{U}_{V_{qs}})/\sim} I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_{1,+}) \overline{I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_{2,+})} \frac{|\gamma^*(0,\pi,\mathrm{Ad},\psi)|}{|S_\pi|} \mathrm{d}\pi \\
=&\sum_{V\in\mathcal{H}} \int_{\mathrm{Temp}_{\mathrm{U}'_V}(\mathrm{U}_V)} J_\pi(f_{1,+}^V) \overline{J_\pi(f_{2,+}^V)} \mathrm{d}\mu_{\mathrm{U}_V}(\pi).
\end{aligned}$$

由命题 7.7可知

$$\begin{aligned}
&|\tau|_E^{-\frac{n(n-1)}{2}} \int_{\mathrm{Temp}(\mathrm{U}_{V_{qs}})/\sim} I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_{1,+}) \overline{I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_{2,+})} \frac{|\gamma^*(0,\pi,\mathrm{Ad},\psi)|}{|S_\pi|} \mathrm{d}\pi \\
=&\sum_{V\in\mathcal{H}} \int_{\mathrm{Temp}_{\mathrm{U}'_V}(\mathrm{U}_V)} I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_{1,+}) \overline{I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_{2,+})} |\kappa(\pi)|^2 \mathrm{d}\mu_{\mathrm{U}_V}(\pi).
\end{aligned}$$

利用积分公式 [BP21b，（2.10.1）]，以及酉群的形式度猜想 [BP21b，定理 5。53](这是 [BP21b] 的主要结果之一），我们得出

$$\begin{aligned}
&|\tau|_E^{-\frac{n(n-1)}{2}} \int_{\mathrm{Temp}(\mathrm{U}_{V_{qs}})/\sim} I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_{1,+}) \overline{I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_{2,+})} \frac{|\gamma^*(0,\pi,\mathrm{Ad},\psi)|}{|S_\pi|} \mathrm{d}\pi \\
=&\int_{\mathrm{Temp}(\mathrm{U}_{V_{qs}})/\sim} \left(\sum_V \sum_{\substack{\sigma\in\mathrm{Temp}_{\mathrm{U}'_V}(\mathrm{U}_V) \\ \sigma\sim\pi}} |\kappa(\sigma)|^2 \right) I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_{1,+}) \overline{I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_{2,+})} \frac{|\gamma^*(0,\pi,\mathrm{Ad},\psi)|}{|S_\pi|} \mathrm{d}\pi.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

先验地，这个恒等式对所有可转移的 $f_{1,+}$,$f_{2,+}$ 都成立。现在我们说明，它对所有 $f_{1,+}$,$f_{2,+}$ 都成立。若 F 是非阿基米德的，则无需证明，因为所有测试函数都是可转移的。

假设 F 是阿基米德的。由于可转移函数构成 $\mathcal{S}(G_+)$ 的稠密子空间，只需说明等式两侧在 $f_{1,+},f_{2,+}$ 中定义了连续线性形式。由于对任意 $\Pi\in\mathrm{Temp}(G)$，I_Π 都是连续线性形式，只需说明 (7.9) 两侧绝对收敛。左侧显然如此，因为映射 $\pi\to I_{\mathrm{BC}(\pi)}$ 和 $|\gamma^*(0,\pi,\mathrm{Ad},\psi)|/|S_\pi|$ 在 π 中具有中等增长。接下来需要说明右侧绝对收敛。为此，我们应用柯西–施瓦茨不等式，得出若 $f_{1,+},f_{2,+}$ 可转移，则将 $I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_{i,+})$ 替换为其绝对值后，(7.9) 的右侧有如下界

$$|\tau|_E^{-\frac{n(n-1)}{2}}\nu(f_{1,+})^{\frac12}\nu(f_{2,+})^{\frac12}$$

其中 ν us 是 $\mathcal{S}(G_+)$ 上由下式给出的连续半范数

$$\nu(f_{i,+})=\int_{\mathrm{Temp}(\mathrm{U}_{V_{qs}})/\sim}|I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_{i,+})|^2\frac{|\gamma^*(0,\pi,\mathrm{Ad},\psi)|}{|S_\pi|}\mathrm{d}\pi.$$

于是，根据法图引理以及可转移函数的稠密性，我们得出同样的结论对所有 $f_{1,\ +}$，$f_{2,\ +}$ 均成立。这证明了右侧的绝对收敛。

一旦我们证明了 (7.9) 对所有 $f_{1,\ +}$，$f_{2,\ +}$ 均成立，我们便应用 [BP21b，引理 582] 中的谱分离技巧，并得出

$$|\tau|_E^{-\frac{n(n-1)}{2}}I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_{1,+})\overline{I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_{2,+})}=\sum_V\sum_{\substack{\sigma\in\mathrm{Temp}_{\mathrm{U}'_V}(\mathrm{U}_V)\\ \sigma\sim\pi}}|\kappa(\sigma)|^2I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_{1,+})\overline{I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_{2,+})},$$

对每个 $\pi\in\mathrm{Temp}(\mathrm{U}^{V_{qs}})/\sim$，根据局部 Gan–Gross–Prasad 猜想 [GI16，Xue]，，右侧双重求和中存在唯一一个 σ，使得 $\sigma\in\mathrm{Temp}^{\mathrm{U}'_V}(\mathrm{U}_V)$。由于 $I_{\mathrm{BC}(\pi)}$ 并非恒等于零（这可由命题 6.3推出），我们得出

$$|\kappa(\sigma)|^2=|\tau|_E^{-\frac{n(n-1)}{2}}$$

对于这个 σ。 □

引理 7.9。设 $f_+\in\mathcal{S}(G_+)$ 且集合 $f_+^V\in\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+})$ 为匹配测试函数。于是

$$\gamma O_+(f_+)=\sum_{V\in\mathcal{H}}\eta((2\tau)^n\operatorname{disc}V)^n\mu((-1)^{n-1}\tau)^{-\frac{n(n+1)}{2}}\lambda(\psi)^{\frac{n(n+1)}{2}}O(1,f_+^V).$$

我们回顾一下，γ 是 (6.15)中定义的常数。

证明。根据（6.14），我们有

$$\gamma\mu((-1)^{n-1}\tau)^{\frac{n(n+1)}{2}}O_+(f_+)=\int_{\mathcal{B}_{\mathrm{rs}}}\Omega(x)O(x,\widehat{f_{+,\natural}})\mathrm{d}x.$$

$\widehat{\ }$由引理5.1，轨道的匹配保留测度；根据定理 4.6， $f_\natural$ 以及函数集 $\lambda(\psi)^{n_{(n+1)^2}}\ \eta((2\tau)^n \operatorname{disc} V)^n \mathcal{F}_V f_{+,\natural}^V$相匹配。因此我们有

$$\begin{aligned}&\gamma\mu((-1)^{n-1}\tau)^{\frac{n(n+1)}{2}}O_+(f_+)\\=&\sum_V \lambda(\psi)^{\frac{n(n+1)}{2}}\eta((2\tau)^n\operatorname{disc}V)^n\int_{\mathcal{B}_{\mathrm{rs}}}O(y,\mathcal{F}_V f_{+,\natural}^V)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由（6.3），右侧等于

$$\sum_V \lambda(\psi)^{\frac{n(n+1)}{2}}\eta((2\tau)^n\operatorname{disc}V)^n O(1,f_+^V).$$

这就证明了引理。 □

定理 7.10. 对于所有 $\pi\in\mathrm{Temp}^{\mathrm{U}'_V}(\mathrm{U}_V)$，我们有

$$\kappa(\pi)=|\tau|_E^{-\frac{n(n-1)}{4}}\eta((2\tau)^n\operatorname{disc}V)^n\mu((-1)^{n-1}\tau)^{\frac{n(n+1)}{2}}\lambda(\psi)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

证明。 对于每个 n 维斜厄米空间 V，我们定义

$$\epsilon_V=\eta((2\tau)^n\operatorname{disc}V)^n\mu((-1)^{n-1}\tau)^{-\frac{n(n+1)}{2}}\lambda(\psi)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

若 f_+ 且集合 f_+^V 相匹配，则由引理 7.9 可得

$$\gamma O_+(f_+)=\sum_V \epsilon_V O(1,f_+^V),$$

其中求和遍及所有非退化 n 维斜厄米空间（按同构类计）。由引理6.4 和命题6.9，可得

$$|\tau|_E^{-\frac{n(n-1)}{4}}\int_{\mathrm{Temp}(\mathrm{U}_{Vqs})/\sim}I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_+)\frac{|\gamma^*(0,\pi,\mathrm{Ad},\psi)|}{|S_\pi|}\mathrm{d}\pi=\sum_V\epsilon_V\int_{\mathrm{Temp}_{\mathrm{U}'_V}(\mathrm{U}_V)}J_\pi(f_+^V)\mathrm{d}\mu_{\mathrm{U}_V}(\pi).$$

利用命题7.7、积分公式 [BP21b，（2.10.1）]以及形式次数猜想 [BP21b，定理5。53]我们得到

$$\begin{aligned}&|\tau|_E^{-\frac{n(n-1)}{4}}\int_{\mathrm{Temp}(\mathrm{U}_{Vqs})/\sim}I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f')\frac{|\gamma^*(0,\pi,\mathrm{Ad},\psi)|}{|S_\pi|}\mathrm{d}\pi\\=&\int_{\mathrm{Temp}(\mathrm{U}_{Vqs})/\sim}\left(\sum_V\epsilon_V\sum_{\sigma\in\mathrm{Temp}_{\substack{H^V(F)\\ \sigma\sim\pi}}(G^V(F))}\kappa(\sigma)\mu_{G^V}^*(\sigma)\right)I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f')\frac{|\gamma^*(0,\pi,\mathrm{Ad},\psi)|}{|S_\pi|}\mathrm{d}\pi.\end{aligned}\tag{7.10}$$

这个恒等式先验地对可迁移的 f'成立。现在我们说明它对所有 f'都成立。如果 F是非阿基米德的，则所有 f' 都是可迁移的。如果 F 是阿基米德的，则这对所有可迁移的f'都成立。假设 F 是阿基米德的。那么正如命题 7.8的证明中所述，我们需要说明两侧都是绝对收敛的。左侧显然成立，因为 $\pi\mapsto I_{\mathrm{BC}(\pi)}$ 是施瓦茨函数。右侧的绝对收敛性则由以下额外事实推出：根据命题 $|\kappa(\sigma)|$ 对所有 $\sigma\in\mathrm{Temp}^{\mathrm{U}(V)}(\mathrm{U}_V)$ 都是一个常数，并且根据局部 Gan-Gross-Prasad 猜想，内层双重求和中恰有一项非零。

运用 [BP21b中所述的谱分离技巧，由于命题6.3，我们得到

$$\sum_V \epsilon_V \sum_{\substack{\sigma\in \mathrm{Temp}_{\mathrm{U}(V)}(\mathrm{U}_V)\\ \sigma\sim\pi}} \kappa(\sigma) = |\tau|_E^{-\frac{n(n-1)}{2}}.$$

再次由局部 GGP 猜想，右侧恰有一项非零。因此定理得证。□

7.4. **特征标恒等式与匹配。** 设 V是一个非退化的 n维斜厄米空间。对于任意 $\pi \in \mathrm{Temp}(\mathrm{U}_V)$，令 $\kappa(\pi)$ 如定理 7.10所述。以下定理通过球特征标恒等式刻画测试函数匹配。

定理 7.11. 令 $f_+^V \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+})$， $f_+ \in \mathcal{S}(G_+)$。以下条件等价。

(1) 对于所有 $\pi \in \mathrm{Temp}^{\mathrm{U}'_V}(\mathrm{U}_V)$，均有

$$\kappa(\pi) I_{\mathrm{BC}(\pi)}(f_+) = J_\pi(f_+^V).$$

(2) 对于所有匹配的 $x \in G_+$ 和 $y \in \mathrm{U}_{V,+}$ 均有

$$\Omega(x) O(x, f_+) = O(y, f^V).$$

证明。 (2) $\Longrightarrow$ (1) 是命题 7.7。证明 (1) $\Longrightarrow$ (2)。令 $f_{1,+}^V \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+})$ 以及$f_{1,+} \in \mathcal{S}(G_+)$ 为匹配的测试函数。由命题 7.2、命题 7.6 和定理 7.10，可得

$$\int_{\mathcal{A}_{rs}(F)} O(x, f_+)\overline{O(x, f_{1,+})}\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{A}_{rs}(F)} O(y, f_+^V)\overline{O(y, f_{1,+}^V)}\mathrm{d}y. \tag{7.11}$$

设 $x \in \mathcal{A}_{rs}$ 为一个正则半单点，并设 $U \subset \mathcal{A}_{rs}$ 为其一个小邻域。由于映射 $G^+ \to \mathcal{A}$ 和 $\mathrm{U}_V^+ \to \mathcal{A}$ 在 x 附近局部构成纤维化，我们看到，对于任意 $\varphi \in C_c^\infty(U)$，存在 $f_{1,+}$ 和 $f_{1,+}^V$，使得

$$\varphi(x) = \Omega(x) O(x, f_{1,+}) = O(x, f_{1,+}^V).$$

根据定义，$f_{1,+}$ 和$f_{1,+}^V$ 相匹配。由于 φ 是任意的，我们由（7.11）得出

$$\Omega(x) O(x, f_+) = O(y, f_+^V).$$

这证明了（1） $\Longrightarrow$ （2）。 □

8. The split case

8.1. 设定。现在我们对 $E = F \times F$ 的情形作几点说明。伽罗瓦共轭 c 交换 E 的两个因子。同样，我们可以谈论正则半单元素、轨道积分和球特征。

我们可以找到一个 $\tau_1 \in F^\times$ 使得 $\tau = (\tau_1, -\tau_1)$。我们有一个非平凡的加性特征标 ψ，其定义在 F 上，并且 $\psi^E((x_1, x_2)) = \psi(\tau_1(x_1 - x_2)$。特征 μ 具有如下形式 $\mu = (\mu_1, \mu_1^{-1})$，其中48

μ_1 是 $F^\times$的一个特征。我们有如下识别： $G = G_n \times G_n = (G'_n \times G'_n) \times (G'_n \times G'_n)$, $H = G_n = G'_n \times G'_n$通过 $(h_1, h_2) \mapsto ((h_1, h_2), (h_1, h_2))$ 嵌入到 G 中；而 $G' = G'_n \times G'_n$通过 $(g_1, g_2) \mapsto ((g_1, g_1), (g_2, g_2))$ 嵌入。对称空间 S_n由形如 (a, a^{-1}) 且满足 $a \in G'_n$ 的元素组成。通过投影到第一个因子，它可与 G'_n 识别。投影ν：$G_n \to S_n$ 由 $(a, b) \mapsto (ab^{-1}, a^{-1}b)$ 给出。部分傅里叶变换 $-^\dagger$ 由下式给出

$$\mathcal{S}(E_n) = \mathcal{S}(F_n \times F_n) \to \mathcal{S}(F_n \times F^n), \quad \Phi^\dagger(x, y) = \int_{F_n} \Phi(l + x, l - x)\psi((-1)^n \tau_1 l y)\mathrm{d}l$$

这里我们作了如下恒等认定： $E^- = \{(x, -x) \mid x \in F\} = F$。回顾一下，若 $f = f_1 \otimes f_2 \in \mathcal{S}(G)$, 其中 $f_i \in \mathcal{S}(G_n)$，且 $\Phi \in \mathcal{S}(F_n \times F_n)$，则我们通过（3.1）定义了函数 $\varphi_{(f\otimes\Phi)^\dagger} \in \mathcal{S}(X)$。对于 $a \in G'_n$, $x = ((a, a^{-1}) w, v) \in X = S_n \times F_n \times F^n$，我们有

$$\varphi_{(f\otimes\Phi)^\dagger}(x) = \int_{G'_n} \int_H f_1(h^{-1}) f_2(h^{-1}(a, 1)g)(R_{\mu^{-1}}(h)\Phi)^\dagger(w, v)\mathrm{d}h\mathrm{d}g. \tag{8.1}$$

轨道积分等于

$$\begin{aligned} &O((((1, 1), (a, 1)), w, v), f \otimes \Phi) \\ &= \int f_1(h_1^{-1}h_2^{-1}, h_2^{-1}) f_2(h_1^{-1}g_1^{-1}ag_2, g_1^{-1}g_2) \left(\mathrm{R}_{\mu^{-1}}((h_1, 1))\Phi\right)^\dagger (wg_1, g_1^{-1}v)\mathrm{d}h_1\mathrm{d}h_2\mathrm{d}g_1\mathrm{d}g_2. \end{aligned} \tag{8.2}$$

这里的积分取遍 $h_1, h_2, g_1, g_2 \in G'_n$。

我们将斜厄米空间 $V = F^n \times F^n$ 认定为带有如下斜厄米形式的空间

$$q_V((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ({}^t x_1 y_2, -{}^t x_2 y_1).$$

$\operatorname{Res} V$ 的一个极化给出为

$$\operatorname{Res} V = L + L^\vee, \quad L = \{(0, x) \mid x \in F^n\}, \quad L^\vee = \{(x, 0) \mid x \in F^n\}.$$

将 $\mathrm{U}(V)$ 认定为子群 $\{(g, {}^t g^{-1}) \mid g \in G'_n\}$，它是 G_n 的子群，并通过投影到第一因子同构于 G'_n。于是 U_V 被认定为 $G'_n \times G'_n$，而 $\mathrm{U}(V) = G'_n$ 对角嵌入 U_V 中。将 L 和 $L^\vee$ 都认定为 F^n。韦伊表示 ω 实现在 $\mathcal{S}(L^\vee)$ 上，并由下式给出

$$\omega(g)\phi(x) = |\det g|^{\frac{1}{2}} \mu_1(\det g)\phi({}^t g x), \quad \phi \in \mathcal{S}(F^n).$$

我们注意到， $G'_n \times G'_n$ 的表示 $\omega^\vee \otimes \omega$ 同构于 $\mathrm{R}^{\mu^{-1}}$。部分傅里叶变换 $-^\ddagger$ 是

$$\mathcal{S}(F^n \times F^n) \to \mathcal{S}(F^n \times F^n), \quad (\phi_1 \otimes \phi_2)^\ddagger(x, y) = \int_{F^n} \phi_1(u + x)\phi_2(u - x)\psi(-2\,{}^t u y)\mathrm{d}l,$$

参见（6.1）。

回想一下，若 $f^V = f_1^V \otimes f_2^V \in \mathcal{S}(G'_n \times G'_n)$, $f_1^V, f_2^V \in \mathcal{S}(G'_n)$, 且 $\phi_1^V, \phi_2^V \in \mathcal{S}(F^n)$，我们已通过 $\varphi_{(f^V\otimes\phi_1^V\otimes\phi_2^V)^\ddagger}$（3.5）定义了一个函数。虽然只有一个 V，我们仍写出上标以便

将此记号与 GL 侧的记号区分开来。若 $a\in G'_n$和 $y=(a,w,v)\in Y=(G'_n\times G'_n)\times F^n\times F^n$是正则半单的，则有

$$\varphi_{(f\otimes\phi_1\otimes\phi_2)^\ddagger}(y)=\int_{G'_n}f(g^{-1}(1,a))(\omega^\vee(g)\phi_1\otimes\phi_2)^\ddagger(x,y)\mathrm{d}g. \tag{8.3}$$

轨道积分等于

$$\begin{aligned}&O(((1,a),(x,y)),f^V\otimes\phi_1^V\otimes\phi_2^V)\\&=\int_{G'_n}\int_{G'_n}f_1^V(h^{-1})f_2^V(h^{-1}g^{-1}ag)\left(\omega^\vee(h)\phi_1^V\otimes\phi_2^V\right)^\ddagger({}^tgx,g^{-1}y)\mathrm{d}h\mathrm{d}g.\end{aligned} \tag{8.4}$$

8.2. 匹配。 现在考虑轨道积分的匹配。令

$$x=((g_1,g_2),w,v)\in G^+,\quad y=((a_1,a_2),x,y)\in \mathrm{U}_V^+,$$

为正则半单元素。置 $\gamma=\nu(g_1^{-1}g_2)\in S_n\simeq G'_n$ 以及 $\delta\in a_1^{-1}a_2\in \mathrm{U}(V)\simeq G'_n$。根据定义，当且仅当 γ 和 δ 在 G'_n 中共轭，并且对所有$i=0,\dots,n-1$都有 $w\gamma^iv=2(-1)^{n-1}\tau_1^{-1}\,{}^tx\delta^iy$ 时，它们匹配。后一条件等价于 $(-1)^n\tau_1w\gamma^iv=-2\,{}^tx\delta^iy$。

引理 8.1。 取 $f_{11},f_{12},f_{21},f_{22}\in\mathcal{S}(G'_n)$、$\phi_1,\phi_2\in\mathcal{S}(F_n)$。置

$$f_1=f_{11}\otimes f_{12},\ f_2=f_{21}\otimes f_{22}\in\mathcal{S}(G_n),\quad f=\mu_1(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}f_1\otimes f_2\in\mathcal{S}(G),$$

and

$$f_1^V=f_{11}*f_{12}^\vee,\ f_2^V=f_{21}*f_{22}^\vee\in\mathcal{S}(G'_n),\quad f^V=f_1^V\otimes f_2^V\in\mathcal{S}(G'_n\times G'_n),$$

以及函数 $\Phi\in\mathcal{S}(E_n)$ 定义为

$$\Phi({}^tx,y)=\phi_1^V(x)\phi_2^V(y),\quad x,y\in F^n.$$

则 $f\otimes\Phi$ 和 $f^V\otimes\phi_1^V\otimes\phi_2^V$匹配。

证明。这由轨道积分的显式形式（8.2）和（8.4）得出。因子$\mu_1(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 来自转移因子。事实上，在此情形下，对于任意正则半单的 $((g_1,g_2)\ w,v)\in G^+$，我们有 $\Omega(((g_1,g_2)\ w,v))=\mu_1(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$。□

我们可以像之前一样定义球特征。根据上述匹配，我们有相同的特征标恒等式。令 κ 为定理 7.10 中定义的常数。由于 $E=F\times F$，它可简化为

$$\kappa=|\tau_1|^{-\frac{n(n-1)}{2}}\mu_1(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

以下是定理7.10的分裂版本。

命题 8.2. 设 $\pi=\sigma_1\otimes\sigma_2$ 是 $G'_n\times G'_n$的不可约温和表示。设 $\Pi_i=\sigma_i\otimes\sigma_i^\vee$是 σ_i 到 G_n的（分裂）基变换。令 $\Pi=\Pi_1\otimes\Pi_2$，它是 G的不可约温和表示。设 $f,\Phi,f^V,\phi_1^V,\phi_2^V$为引理 *8.1*中定义的函数。则

$$J_\pi(f^V\otimes\phi_1^V\otimes\phi_2^V)=\kappa I_\Pi(f\otimes\Phi).$$

证明。设

$$\xi_1(u) = \psi(\tau_1(u_{12} + \cdots + u_{n-1,n})), \quad u \in N_n'$$

是 N_n' 的一般位置特征，并且我们令 $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}(\sigma_1, \xi_1)$ 和 $\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}(\sigma_2, \overline{\xi_1})$ 分别为 σ_1 和 σ_2 的惠特克模型。因子 τ_1 的出现是为了与非分裂情形中所使用的惠特克模型保持相容。令 $\mathcal{W}_1^\vee = \mathcal{W}(\sigma_1^\vee, \xi_1)$ 和 $\mathcal{W}_2^\vee = \mathcal{W}(\sigma_2^\vee, \xi_1)$分别为 $\sigma_1^\vee$ 和 $\sigma_2^\vee$ 的惠特克模型。若 $W \in \mathcal{W}_i$，我们定义 $W^\vee \in \mathcal{W}_i^\vee$ 为

$$W^\vee(g) = W(w_n {}^t g^{-1})$$

其中，w_n 是 G_n' 中最长的韦伊群元素，其反对角线元素均为 1。若 W 遍历 $\mathcal{W}_i$ 的一个正交基，则 $W^\vee$ 遍历 $\mathcal{W}_i^\vee$ 的一个正交基。

根据定义，我们有

$$J_\pi(f^V \otimes \phi_1^V \otimes \phi_2^V) = \sum_{W_1, W_2} \int_{G_n'} \langle \sigma_1(h)\sigma_1(f_1^V)W_1, W_1\rangle^{\mathrm{Wh}} \langle \sigma_2(h)\sigma(f_2^V)W_2, W_2\rangle^{\mathrm{Wh}} \langle \omega^\vee(h)\phi_1, \overline{\phi_2}\rangle \mathrm{d}h.$$

其中，W_1，W_2 分别遍历 $\mathcal{W}_1$ 和 $\mathcal{W}_2$ 的标准正交基。

现在我们计算 I_Π。在此情形下，线性泛函 β 化为 $\mathcal{W}_i$ 与 $\mathcal{W}_i^\vee$、$i = 1, 2$ 之间的配对。因此

$$I_\Pi(f \otimes \Phi) = \mu_1(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{W_1, W_2} \lambda(\sigma_1(f_{11})W_1 \otimes \sigma_2(f_{21})W_2 \otimes \phi_1)\lambda(\sigma_1(f_{12})W_1^\vee \otimes \sigma_2(f_{22})W_2^\vee \otimes \phi_2),$$

其中 W_1 和 W_2 分别遍历 $\mathcal{W}_1$ 和 $\mathcal{W}_2$ 的正交归一基。它也等于

$$I_\Pi(f \otimes \Phi) = \mu_1(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{W_1, W_2} \lambda(\sigma_1(f_1)W_1 \otimes \sigma_2(f_2)W_2 \otimes \phi_1)\lambda(W_1^\vee \otimes W_2^\vee \otimes \phi_2).$$

我们将 $\mathcal{W}_i^\vee$与 $\mathcal{W}_i$等同。于是命题由下面的引理推出。该引理是此命题证明的一部分，但我们将其单独列出，因为它或许具有一定的独立价值。□

引理 8.3. 记号与上述证明中的相同。对于任意的 $W_i \in \mathcal{W}_i$, $i = 1,2$ 和 $\phi \in \mathcal{S}(F_n)$，有

$$\begin{aligned} &|\tau_1|^{-\frac{n(n-1)}{2}} \lambda(W_1, W_2, \phi)\overline{\lambda(W_1, W_2, \phi)} \\ =& \int_{G_n'} \langle \sigma_1(h)W_1, W_1\rangle^{\mathrm{Wh}} \langle \sigma_2(h)W_2, W_2\rangle^{\mathrm{Wh}} \langle \omega^\vee(h)\phi, \phi\rangle \mathrm{d}h. \end{aligned}$$

证明。 证明此引理时，使用惠特克模型 $\mathcal{W}(\sigma_i, \xi)$,$i = 1,2$ 更为方便，其中

$$\xi(u) = \psi(u_{12} + \cdots + u_{n-1,n}), \quad u \in N_n'$$

是 N_n'的一般位置特征，即不含因子 τ_1。暂且设

$$\epsilon = \mathrm{diag}[\tau_1^{n-1}, \tau_1^{n-2}, \ldots, 1] \in G_n(F).$$

若 $W_i \in \mathcal{W}(\sigma_i, \xi)$，则 $W_i^\epsilon \in \mathcal{W}(\sigma_i, \xi_1)$，其中

$$W_i^\epsilon(g) = W_i(\epsilon g).$$

作此变更后，对于 $W_i \in \mathcal{W}(\sigma_i, \xi)$，我们有 $i = 1, 2$

$$\lambda(W_1^\epsilon, W_2^\epsilon, \Phi) = |\tau_1|^{\frac{n(n+1)(n-1)}{6}} \lambda(W_1, W_2, \Phi), \quad \langle W_i^\epsilon, W_i^\epsilon \rangle^{\mathrm{Wh}} = |\tau_1|^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \langle W_i, W_i \rangle^{\mathrm{Wh}}.$$

因此，引理中所需的等式可归结为

$$\lambda(W_1, W_2, \phi_1)\overline{\lambda(W_1, W_2, \phi_2)} = \int_{G_n(F)} \langle \sigma_1(h) W_1, W_1 \rangle^{\mathrm{Wh}} \langle \sigma_2(h) W_2, W_2 \rangle^{\mathrm{Wh}} \langle \omega^\vee(h)\phi, \phi \rangle \mathrm{d}h \tag{8.5}$$

对所有 $W_i \in \mathcal{W}(\sigma_i, \xi)$ 均成立。

(8.5) 两边分别定义了中的非零元素

$$\mathrm{Hom}_{G'_n}(\sigma_1 \widehat{\otimes} \sigma_2 \widehat{\otimes} \mathcal{S}(F_n), \mathbb{C}) \otimes \overline{\mathrm{Hom}_{G'_n}(\sigma_1 \widehat{\otimes} \sigma_2 \widehat{\otimes} \mathcal{S}(F_n), \mathbb{C})},$$

根据 [Sun12、SZ12]，此 Hom空间是一维的。因此，若能找到某个 $W_i \in \mathcal{W}(\sigma_i, \xi)$、$i = 1$、2，以及一个 $\Phi \in \mathcal{S}(F_n)$，使得对这组选择，(8.5) 成立且非零，则 (8.5) 便成立。为此，我们将把它归结为关于 $G'_n \times G'_{n+1}$的 Rankin–Selberg积分的类似命题，该命题已由 [Zha14b命题 4 证明。10]。

我们自然地将 G'_n 视为 G'_{n+1}的一个子群，依据是 $g \mapsto \begin{pmatrix} g & \\ & 1 \end{pmatrix}, g \in G'_n$。回顾一下，若 σ_3是 G'_{n+1} 的一个不可约温和表示，则众所周知，$C_c^\infty(N'_n \backslash G'_n, \xi)$ 包含于 $\mathcal{W}(\sigma_i, \xi)$ 中，参见 [GK75, 定理 6] 和 [Kem15, 定理 1]。设 $f \in C_c^\infty(N'_{n-1} \backslash G'_{n-1}, \xi)$，则存在一个 $W_f \in \mathcal{W}(\sigma_2, \xi)$ 使得 $W_f|_{G'_n} = f$。令 $\phi \in C_c^\infty(F_{n-1} \times F^\times)$。考虑定义在 G'_n 上的函数

$$\varphi(g) = W_f(g)\mu(\det g)^{-1}|\det g|^{\frac{1}{2}}\phi(e_n g).$$

根据上述选择，我们得出 $\varphi \in C_c^\infty(N'_n \backslash G'_n, \xi)$。设 σ_3 是 G'_{n+1} 的一个不可约温和表示。那么存在一个 $W_\varphi \in \mathcal{W}(\sigma_3, \xi)$，使其限制到 G'_n 后等于 φ。

根据 [Zha14b，命题 4。10] 对任意 $W_1 \in \mathcal{W}(\sigma_1, \xi)$，我们有

$$\lambda'(W_1, W_\varphi)\overline{\lambda'(W_1, W_\varphi)} = \int_{G'_n} \langle \sigma_1(h) W_1, W_1 \rangle^{\mathrm{Wh}} \langle \sigma_3(h) W_\varphi, W_\varphi \rangle^{\mathrm{Wh}} \mathrm{d}h. \tag{8.6}$$

这里 λ' 表示 $G'_n \times G'_{n+1}$ 的 Rankin–Selberg积分，即

$$\lambda'(W_1, W_\varphi) = \int_{G'_n} W_1(h) W_\varphi(h) \mathrm{d}h.$$

根据我们的选择，我们有

$$\lambda'(W_1, W_\varphi) = \lambda(W_1, W_f, \phi), \quad \langle W_\varphi, W_\varphi \rangle^{\mathrm{Wh}} = \langle W_f, W_f \rangle^{\mathrm{Wh}} \langle \phi, \phi \rangle.$$

因此，等式（8.6）归结为（8.5）。从上述构造可以清楚看出，我们可以选取W_1、f 和 ϕ，使得上述积分不为零。这就完成了引理的证明，从而也完成了命题8.2的证明。□

局部迹公式命题7.2 和7.6 在局部特征标恒等式定理7.10的证明中发挥了重要作用。需要指出的是，在当前假设 $E = F \times F$下，同一局部相对迹公式仍然成立。只需作显然的修改，证明即可照常进行。请注意， [BP20中的对应结果（定理5，53], 即形式度猜想）对一般线性群成立，见 [HII08]。

References

[AG08] A. Aizenbud 和 D. Gourevitch， *Schwartz functions on Nash manifolds*，《国际数学研究通知》IMRN 5（2008），第 rnm 155 号文章，37 页，DOI 10.1093/imrn/rnm155。MR2418286（2010g:46124） ↑11, 21, 25[BP20]R. Beuzart-Plessis, *A local trace formula for the Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups: theArchimedean case*，《Ast´erisque》418（2020），viii + 299，DOI 10.24033/ast（英文，附英文和法文摘要）。MR4146145 ↑24，53[BP21a] , *Comparison of local relative characters and the Ichino-Ikeda conjecture for unitary groups*，《Jussieu 数学研究所杂志》20（2021），第 6 期，1803–1854，DOI 10.1017/S1474748019000707。MR4332778 ↑45[BP21b] , *Plancherel formula for* $\mathrm{GL}_n(F)\backslash\mathrm{GL}_n(E)$ *and applications to the Ichino-Ikeda and formal degree conjectures for unitary groups*，《数学发明》225（2021），第 1 期，159–297，DOI 10.1007/s00222-021-01032-6。MR4270666 ↑18，20，22，25，26，27，28，31，33，34，35，37，38，41，42，43，44，45，46，47，48[BP21c] , *A new proof of the Jacquet-Rallis fundamental lemma*，《杜克数学杂志》170（2021），第 12 期，2805–2814，DOI 10.1215/00127094-2020-0090。MR4305382 ↑23[BP21d] R. Beuzart-Plessis, *Archimedean Theory and ϵ-Factors for the Asai Rankin-Selberg Integrals*，《相对迹公式》，2021，第 1–50 页。 ↑29[BLX] P. Boisseau、W. Lu 和 H. Xue， *The global Gan–Gross–Prasad conjecture for Fourier–Jacobi periods on unitary groups I: coarse spectral expansions*。预印本。 ↑1，2，3，4，5，6，7，8，9，10[CZ21] P.-H. Chaudouard 和 M. Zydor， *Le transfert singulier pour la formule des traces de Jacquet–Rallis*，《组合数学》157（2021），第 2 期，303–434，DOI 10.1112/S0010437X20007599。 ↑2，8，13，18，20，22，24[GK75] I. M. Gelfand 和 D. A. Kajdan， *Representations of the group GL（n， K） where K is a local field*（1975）。↑52[GI16] W. T. Gan 和 A. Ichino， *The Gross-Prasad conjecture and local theta correspondence*，《数学发明》206（2016），第 3 期，705–799，DOI 10.1007/s00222-016-0662-8。MR3573972 ↑46[HC76] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on real reductive groups. III. The Maass-Selberg relations and thePlancherel formula*，《数学年刊》104（1976），117–201。 ↑28[HII08] K. Hiraga、A. Ichino 和 T. Ikeda, *Formal degrees and adjoint γ-factors*，《美国数学会杂志》21（2008），第 1 期，283–304，DOI 10.1090/S0894-0347-07-00567-X。MR2350057 ↑53[Kem15] A. Kemarsky, *A note on the Kirillov model for representations of* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$，《巴黎科学院数学报告》353（2015），第 7 期，579–582，DOI 10.1016/j.crma.2015.04.002（英文，附英文和法文摘要）。MR3352025 ↑52[KMSW] T. Kaletha、A. Minguez、S. W. Shin 和 P.-J. White， *Endoscopic Classification of Representations: Inner Forms of Unitary Groups*。arXiv:1409.3731v3。 ↑27[Liu14] Y. Liu, *Relative trace formulae toward Bessel and Fourier-Jacobi periods on unitary groups*，《数学手稿》145（2014），第 1-2 期，1–69，DOI 10.1007/s00229-014-0666-x。MR3244725 ↑23[Mok15] C. P. Mok, *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups*，《美国数学会回忆录》235（2015），第 1108 号，vi+248，DOI 10.1090/memo/1108。MR3338302 ↑27

[Sun12] B. Sun, *Multiplicity one theorems for Fourier-Jacobi models*, 《美国数学杂志》134（2012），第 6 期，1655–1678，DOI 10.1353/ajm.2012.0044。MR2999291 ↑30，52[SZ12] B. Sun 和 C.-B. Zhu, *Multiplicity one theorems: the Archimedean case*, 《数学年刊》（第 2 辑）175（2012），第 1 期，23–44，DOI 10.4007/annals.2012.175.1.2。MR2874638 ↑30，52[Wal03] J.-L. Waldspurger, *La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques (d'après Harish-Chandra)*, 《Jussieu 数学研究所杂志》2（2003），第 2 期，235–333，DOI 10.1017/S1474748003000082（法文，附法文摘要）。MR1989693 ↑28，39[Yun11] Z. Yun, *The fundamental lemma of Jacquet and Rallis*, 《杜克数学杂志》156（2011），第 2 期，167–227，DOI 10.1215/00127094-2010-210。附录由 Julia Gordon 撰写。MR2769216 ↑23[Xue14] H. Xue, *The Gan-Gross-Prasad conjecture for* U(n) × U(n), 《数学进展》262（2014），1130–1191，DOI 10.1016/j.aim.2014.06.010。MR3228451 ↑21[Xue19]，*On the global Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups: approximating smooth transfer ofJacquet-Rallis*, 《纯粹与应用数学杂志》756（2019），65–100，DOI 10.1515/crelle-2017-0016。MR4026449 ↑21，22[Xue23]，*Bessel models for real unitary groups: the tempered case*, 《杜克数学杂志》172（2023），第 5 期，995–1031，DOI 10.1215/00127094-2022-0018。MR4568696 ↑30[Xue]，*Fourier–Jacobi models for real unitary groups*。即将在《美国数学杂志》发表。↑30，31，40，41，46[Zha14a] W. Zhang, *Fourier transform and the global Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups*, 《数学年刊》（第 2 辑）180（2014），第 3 期，971–1049。MR3245011 ↑13，15，18，20，21，22[Zha14b]，*Automorphic period and the central value of Rankin-Selberg L-function*, 《美国数学会杂志》27（2014），第 2 期，541–612，DOI 10.1090/S0894-0347-2014-00784-0。MR3164988 ↑52[Zha21] W. Zhang, *Weil representation and arithmetic fundamental lemma*, 《数学年刊》（第 2 辑）193（2021），第 3 期，863–978，DOI 10.4007/annals.2021.193.3.5。MR4250392 ↑23[Zyd18] M. Zydor, *La variante infinitésimale de la formule des traces de Jacquet-Rallis pour les groupes linéaires*, 《Jussieu 数学研究所杂志》17（2018），第 4 期，735–783，DOI 10.1017/S1474748016000141（法文，附英文和法文摘要）。MR3835522 ↑13，16[Zyd20]，*Les formules des traces relatives de Jacquet-Rallis grossières*, 《纯粹与应用数学杂志》762（2020），195–259，DOI 10.1515/crelle-2018-0027（法文，附英文和法文摘要）。MR4195660 ↑15，17

Paul Boisseau, Max Planck Institute for Mathematics, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany
Email address: boisseau@mpim-波恩.mpg.de

Weixiao Lu, Aix Marseille Univ, CNRS, I2M, Marseille, 13009, France
Email address: weixiao.lu@univ-amu.fr

Hang Xue, Department of Mathematics, The University of Arizona, Tucson, AZ, 85721, USA
Email address: xuehang@arizona.edu