arXiv:2601.01731v1 [math.NA] 5 Jan 2026

# 非局部交叉扩散系统的广义 Scharfetter–Gummel 格式

¨Ansgar Jüngel、Panchi Li 和 Zhiwei Sun

Abstract. 本文分析了多维环面上非局部交叉扩散系统的隐式欧拉有限体积格式。该方程描述具有排斥或吸引相互作用的种群物种的动力学。该数值格式基于对非局部通量项的广义 Scharfetter–Gummel 离散。对于仅可积的核函数，该格式保持正性、总质量和熵结构。本文证明了离散解的存在性，以及当网格尺寸趋于零时，离散解收敛到连续问题的一个解。一个关键难点是广义伯努利函数在 Scharfetter–Gummel 近似中的退化。通过证明离散费舍尔信息的一致估计，克服了这一问题；这需要同时使用玻尔兹曼熵不等式和 Rao 熵不等式。数值模拟展示了该格式在一维和二维空间中的特性。

## 1. Introduction

非局部交叉扩散系统出现在相互作用种群物种的建模中，其动力学不仅由局部密度梯度驱动，也受非局部相互作用项驱动。这些系统能够描述广泛的集体行为，包括排斥性和吸引性的自相互作用或交叉相互作用。本文针对以下种群密度非局部问题，设计并分析一种保持结构的隐式欧拉有限体积离散格式，其中 $u_i$ 表示第 $i$ 个物种：

$$\partial_t u_i - \kappa\Delta u_i = \operatorname{div}(u_i\nabla p_i(u)), \tag{1}$$

$$p_i(u)(x) = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{T}^d} W_{ij}(x-y)u_j(y)\mathrm{d}y \quad \text{in } \mathbb{T}^d,\ t>0, \tag{2}$$

$$u_i(0) = u_i^0 \quad \text{in } \mathbb{T}^d, \tag{3}$$

日期：2026年1月6日。2020 数学学科分类。65M08，65M12；35Q92，92D25。关键词和短语。交叉扩散方程、熵方法、有限体积法、Scharfetter–Gummel 格式、结构保持。第一作者感谢奥地利科学基金（FWF）项目10.55776/F65的部分资助，以及奥地利联邦妇女、科学与研究部通过 OAD 实施的 MultHeFlo 项目所提供的资助。¨本研究获得了欧洲研究理事会（ERC）在欧盟地平线2020研究与创新计划框架下提供的资助，具体为 ERC Advanced Grant NEUROMORPH，编号101018153。为实现开放获取，作者已针对因本次投稿产生的任何作者接受稿版本，申请采用知识共享署名许可协议（CC BY）公共版权许可。

其中，$\mathbb{T}^d$ 是 $d$ 维环面，$\kappa > 0$ 是扩散系数，$W_{ij}\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ 是相互作用核（周期性延拓至 $\mathbb{R}^d$），$u = (u_1, \ldots, u_n)$ 是解向量。函数 $p_i = p_i(u)$ 可解释为以非局部方式依赖于密度的势函数。

当核 $W_{ij}$ 为半正定（按下文（6）的定义）时，方程（1）–（2）刻画了具有排斥相互作用的种群动态。这些方程是在平均场型极限下从相互作用粒子系统推导而来，见 [13]。关于整体存在性的分析可见 [22]。当核 $W_{ij}$ 收敛到狄拉克δ分布乘以因子 $a_{ij} \in \mathbb{R}$ 时，非局部方程收敛到局部方程（1），其中 $p_i(u) = \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j$（见 [22, 定理 5] 和 [14, 定理 8]）。局部系统是 Busenberg 和 Travis 首先提出的种群模型的推广 [3]。在一般情况下（$W_{ij}$ 不是半正定的），相互作用力可能具有吸引性，包括多细胞黏附效应 [9]。在假设总质量较小或核具有有界变差的条件下，[10] 证明了 $n$物种聚集–扩散系统整体解的存在性。

我们的研究旨在开发一种稳定的数值格式，使其在 $\kappa > 0$ 取任意值时都能保持有效，尤其是在 $\kappa$ 较小的漂移主导区域。此外，我们还旨在建立一套适用于不可微核的稳健数值分析框架。在低扩散情形下，标准离散化方法往往会变得不稳定。为应对这一挑战，我们采用 Scharfetter–Gummel 型离散化，即使在这些情形下也能确保稳定性。我们的工作将文献中已有的方法拓展至非局部交叉扩散系统以及更广泛的一类 Bernoulli 型函数。值得注意的是，我们首次对具有不可微势函数的 Scharfetter–Gummel 格式进行了数值分析，即使在单物种情形下也是如此。

**1.1. 熵结构。** 我们的目标是设计一种能够保持方程 (1)–(2) 结构的数值格式，即保证密度的正性、总质量守恒以及熵产生。为说明最后一点，我们引入 Boltzmann 熵和 Rao 熵

$$\mathcal{H}_B(u) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{T}^d} u_i(\log u_i - 1)\mathrm{d}x,$$
$$\mathcal{H}_R(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{T}^d} W_{ij}(x-y)u_i(x)u_j(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

形式计算表明，熵等式

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_B}{\mathrm{d}t} + 4\kappa\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{T}^d} |\nabla\sqrt{u_i}|^2\mathrm{d}x = -\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{T}^d} \nabla u_i \cdot \nabla p_i \mathrm{d}x, \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_R}{\mathrm{d}t} + \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{T}^d} u_i|\nabla p_i|^2\mathrm{d}x = -\kappa\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{T}^d} \nabla u_i \cdot \nabla p_i \mathrm{d}x \tag{5}$$

若核是对称的，则上述结论成立（见下文的假设（H4））。式（4）左侧的最后一个积分称为费舍尔信息。如果核是半正定的

在.....意义下

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{T}^d} W_{ij}(x-y)v_i(x)v_j(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq 0 \tag{6}$$

对于函数 $v_i \in L^2(\mathbb{T}^d)$，(4) 和 (5) 的右端项均非正，因此可得到关于 $\nabla u_i$ 的估计。对于一般情形（包括吸引相互作用），则无法使用这一论证。梯度流结构提供了另一种等式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\kappa\mathcal{H}_B+\mathcal{H}_R)+\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{T}^d} u_i|\nabla(\kappa\log u_i+p_i)|^2\mathrm{d}x=0, \tag{7}$$

由此可得熵的先验界。如 [26], 所示，当核 $W_{ij}$ 具有 $C^1$-正则性时，可以得到关于$\nabla\sqrt{u_i}$ 的界。然而，对于不可微核 $W_{ij}$，这种方法便难以实施。文献 [10] 通过假设总质量较小解决了这一问题。事实上，根据 H¨older 不等式和 Young 卷积不等式 [10,(4.11)]，我们可以估计

$$\begin{aligned}-\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{T}^d}\nabla u_i\cdot\nabla p_i\mathrm{d}x &\leq \sum_{i,j=1}^{n}\|\nabla u_i\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}\|W_{ij}*\nabla u_j\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}\\ &\leq 4\max_{j=1,\dots,n}\sum_{i=1}^{n}\|W_{ij}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}\|u_i\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}\|\nabla\sqrt{u_i}\|^2_{L^1(\mathbb{T}^d)}.\end{aligned}$$

因此，若总质量 $\max_j\|u_j\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}$ 足够小，我们便可以用 (4) 中的费舍尔信息吸收右端项。这一论证的优点是不要求核具有可微性。我们的目标是在 Scharfetter–Gummel 离散框架下，将这些性质“转化”到离散层面。

**1.2. 研究现状与主要思路。** 已有多项研究探讨了非局部交叉扩散系统数值格式的设计与分析。文献 [7]研究了方程 (1)–(2) 的一种保持正性的一维有限体积格式，该方程包含双物种及额外的局部交叉扩散项，并重点关注分离稳态。随后，文献 [8]建立了收敛性分析。对于物种数任意的系统，文献[23]进一步研究了保结构有限体积格式。我们还提及文献 [19], ，该文关注非局部 Shigesada–Kawasaki–Teramoto 种群系统的数值逼近。

Scharfetter–Gummel离散最初于 [25]针对半导体漂移扩散方程提出。早期针对多维情形的扩展见于 [16], ，并在 [1, 11]中将其适配到有限体积框架。 [4]对用于具有非局部自排斥相互作用的问题的多种 Scharfetter– Gummel 格式进行了数值比较。这些格式已扩展至非线性扩散问题 [1,21]。近期， [26] 提出了一种专用于一般非局部聚集-扩散方程的 Scharfetter–Gummel格式，重点研究 $C^1$-正则的相互作用核。从结构角度看， [20]指出，经典 Scharfetter–Gummel 格式是与能量 $\kappa\mathcal{H}_B+\mathcal{H}_R$的某种离散类比相关联的广义梯度流。

尽管大多数研究聚焦于两点近似， [24]分析了一种多点离散对偶有限体积方法。据我们所知，Scharfetter–Gummel格式向（局部）交叉扩散系统的唯一扩展见于 [5], ，其中提出了一种适用于（局部）Poisson–Planck–Nernst模型且具有收敛性的混合平方根近似 Scharfetter–Gummel 格式。

本文首次对非局部交叉扩散系统采用 Scharfetter–Gummel格式进行数值研究。一项关键创新是处理不可微的相互作用核，这即使对于单组分非局部聚集扩散模型也是一项重大进展。我们的方法应对了三项主要挑战：

- 由于存在非局部相互作用，最大值原理通常不适用，这使得它们有别于局部半导体模型。
- Scharfetter–Gummel格式在离散层面并不天然保持玻尔兹曼熵等式 (4)。
- Scharfetter–Gummel格式对势差 $\mathrm{D}_{K,\sigma}p^k$ 呈指数依赖（见下文），这使得涉及不可微核的情形难以处理。

为克服这些挑战，我们提出了 Scharfetter–Gummel格式的一种新表述，该表述仅对 $\mathrm{D}_{K,\sigma}p^k$呈线性依赖。此外，我们证明这种重表述满足一个类似于 (4) 的离散玻尔兹曼熵不等式。

为说明我们的主要思想，我们考虑标量方程 $\partial_t u + \operatorname{div}\mathcal{F} = 0$ with $\mathcal{F} = -\kappa\nabla u - u\nabla p$。先引入一些记号。设 $\mathcal{T}$为区域 $\mathbb{T}^d$的三角剖分，由控制体 $K$ 组成；设 $t_k = k\Delta t$ 为步长为 $\Delta t > 0$ 的时间步长。设 $(u_K^k)_{K\in\mathcal{T}}$ 和 $(p_K^k)_{K\in\mathcal{T}}$ 分别为网格单元 $K$ 上 $u(t_k)$ 和 $p(t_k)$ 的分片常数近似，并设 $\sigma = K|L$ 为两个控制体 $K$和 $L$之间的一条边或一个面。其差记为 $\mathrm{D}_{K,\sigma}u^k := u_L^k - u_K^k$。

经典Scharfetter–Gummel通量定义为

$$\mathcal{F}_{K,\sigma}^{(1)}[u^k,p^k] = \tau_\sigma\big(B_\kappa(\mathrm{D}_{K,\sigma}p^k)u_K^k - B_\kappa(-\mathrm{D}_{K,\sigma}p^k)u_L^k\big),$$

其中， $\tau_\sigma > 0$ 为所谓的传输系数（见下文公式 (16)）， $B_\kappa(s) = \kappa B(s/\kappa)$，而 $B(s)$ 是伯努利函数 $B(s) = s/(\exp s - 1)$，其中 $s \neq 0$ 且 $B(0) = 1$。（本文将使用广义伯努利函数。）该通量也可等价地写为

$$\mathcal{F}_{K,\sigma}^{(1)}[u^k,p^k] = -\tau_\sigma\left(\widetilde{B}_\kappa(\mathrm{D}_{K,\sigma}p^k)\mathrm{D}_{K,\sigma}u^k + \frac{u_K^k+u_L^k}{2}\mathrm{D}_{K,\sigma}p^k\right), \quad \text{where} \tag{8}$$
$$\widetilde{B}_\kappa(\mathrm{D}_{K,\sigma}p^k) = \frac{1}{2}\big(B_\kappa(\mathrm{D}_{K,\sigma}p^k) + B_\kappa(-\mathrm{D}_{K,\sigma}p^k)\big),$$

这揭示了均值漂移，并将扩散部分与漂移部分分离开来 [26, (2.8)]。文献中提出了通量表述 $\mathcal{F} = -u(\kappa\nabla\log u + \nabla p)$ 的离散类比 [4, (3.7)]:

$$\mathcal{F}_{K,\sigma}^{(2)}[u^k,p^k] = -\tau_\sigma(a_1u_K^k + a_2u_L^k)\big(\kappa\mathrm{D}_{K,\sigma}\log u^k + \mathrm{D}_{K,\sigma}p^k\big), \tag{9}$$

其中

$$a_1 = \frac{B(z) - B(y)}{y - z}, \quad a_2 = \frac{B(-y) - B(-z)}{y - z}, \quad y = \mathrm{D}_{K,\sigma} \log u^k, \quad z = \kappa^{-1} \mathrm{D}_{K,\sigma} p^k.$$

这一表述等价于 $\mathcal{F}_{K,\sigma}^{(1)}[u^k, p^k]$，并蕴含熵等式 (7) 的一个离散类比，但由于涉及对数，其实现颇为棘手。

我们希望找到玻尔兹曼熵等式 (4) 的一个离散类比。为此，我们根据扩散部分 $-\kappa \nabla u$ 和漂移部分 $-u \nabla p$将数值通量分为两部分，即 $\mathcal{F}_{K,\sigma} = \mathcal{F}_{K,\sigma}^{\mathrm{diff}} + \mathcal{F}_{\text{漂移}K,\sigma}$。我们的目标是证明以下不等式

$$-\sum_{\sigma=K|L} \mathcal{F}_{K,\sigma}^{\mathrm{diff}} \mathrm{D}_{K,\sigma} \log u_K^k \geq \sum_{\sigma=K|L} \tau_\sigma |\mathrm{D}_{K,\sigma} (u^k)^{1/2}|^2, \tag{10}$$

$$-\sum_{\sigma=K|L} \mathcal{F}_{K,\sigma}^{\mathrm{drift}} \mathrm{D}_{K,\sigma} \log u_K^k \geq \sum_{\sigma=K|L} \tau_\sigma \mathrm{D}_{K,\sigma} u^k \mathrm{D}_{K,\sigma} p^k, \tag{11}$$

这些不等式与 (4) 相关。采用经典 Scharfetter–Gummel 格式 (8) 时，不等式 (11) 通常不成立，这表明此表述中的（均值）漂移项过小。表述 (9) 也存在这一问题。因此，有必要寻找一种能够增大漂移项的新结构。

我们的第一个想法是对 Scharfetter–Gummel 通量采用迎风公式。其动机如下。由公式 $B(-s) + B(s) = s$，我们可以推导出以下两种等价表述

$$\mathcal{F}_{K,\sigma}^{(1)}[u^k, p^k] = -\tau_\sigma \big( B_\kappa(\mathrm{D}_{K,\sigma} p^k) \mathrm{D}_{K,\sigma} u^k + u_L^k \mathrm{D}_{K,\sigma} p^k \big), \tag{12}$$

$$\mathcal{F}_{K,\sigma}^{(1)}[u^k, p^k] = -\tau_\sigma \big( B_\kappa(-\mathrm{D}_{K,\sigma} p^k) \mathrm{D}_{K,\sigma} u^k + u_K^k \mathrm{D}_{K,\sigma} p^k \big). \tag{13}$$

现在，若 $\mathrm{D}_{K,\sigma} p^k \geq 0$，则选择公式 (12)；若 $\mathrm{D}_{K,\sigma} p^k < 0$，则选择公式 (13)。由此得到

$$\mathcal{F}_{K,\sigma}^{(3)}[u^k, p^k] = -\tau_\sigma \big( B_\kappa(|\mathrm{D}_{K,\sigma} p^k|) \mathrm{D}_{K,\sigma} u^k + \widehat{u}_\sigma^k \mathrm{D}_{K,\sigma} p^k \big), \tag{14}$$

其中，$\widehat{u}_\sigma^k = u_L^k$ 若 $\mathrm{D}_{K,\sigma} p^k \geq 0$，而 $\widehat{u}_\sigma^k = u_K^k$ 若 $\mathrm{D}_{K,\sigma} p^k < 0$。这种表述有两个优点。首先，它使我们能够推导漂移部分的不等式 (11)。其次，由于界 $1 - |s|/2 \leq B(|s|) \leq 1$，这种表述中的伯努利函数与 $\mathrm{D}_{K,\sigma} p^k$呈线性关系，这与 (8) 中 $B_\kappa$ 的指数关系形成对比。

遗憾的是，表述 (14) 受到扩散部分退化的影响（因为$B(s) \to 0$ 当 $s \to \infty$时），因此不等式 (10) 的推导无法成立。为解决这一问题，我们的第二个想法是为费舍尔信息 $\int_{\mathbb{T}^d} |\nabla \sqrt{u}|^2 \mathrm{d}x$的离散类比推导一个估计。为此，我们利用 Rao 熵，并考虑满足以下条件的广义伯努利函数：$B(s) \geq 1 - \alpha s$，其中某个 $0 \leq \alpha < 1$。（经典伯努利函数 $B(s) = s/(\exp s - 1)$ 在 $\alpha = 1/2$ 时满足该条件。）随后，离散费舍尔信息可由离散玻尔兹曼熵产生项、拉奥熵产生项以及交叉项 $\int_{\mathbb{T}^d} \nabla u \cdot \nabla p \mathrm{d}x$ 的离散类比控制；参见引理 6。我们利用这一估计计算离散熵不等式（假设采用隐式欧拉时间

离散化），从而得到

$$\begin{aligned}\frac{1-\alpha}{\Delta t}\big(H_B(u^k)-H_B(u^{k-1})\big)+\frac{\alpha}{\kappa\Delta t}\big(H_R(u^k)-H_R(u^{k-1})\big)\\ +\kappa(1-\alpha)^2\sum_{\sigma=K|L}\tau_\sigma|\mathrm{D}_{K,\sigma}(u^k)^{1/2}|^2\le 0,\end{aligned}\tag{15}$$

其中， $H_B$ 和 $H_R$ 分别是离散玻尔兹曼熵和Rao熵，定义见下文式（31）。对于半正定核（引理 8）以及吸引相互作用（若初始数据足够小；引理 10），该不等式均成立。$(u^k)^{1/2}$ 的离散梯度界是收敛性分析的关键估计。我们将前述论证严格化，并将其推广至多组分问题。

**1.3. 结果**。我们的主要结果概述如下（详见第 2.4 节）：

- 我们在定理 1 中证明，采用 Scharfetter–Gummel通量（14）的隐式欧拉有限体积格式存在解。解的各分量均为正，且保持离散质量，并满足熵不等式（4）和（5）的退化离散版本。
- 对于排斥和吸引相互作用，我们都推导出了关于离散费舍尔信息的估计，且该估计关于网格参数一致；见引理 8 和 10。该界的关键思路是对广义伯努利函数使用条件 $B(|s|)\ge 1-\alpha|s|$，并推导非退化离散熵不等式（15）。
- 我们证明了，对于排斥性相互作用和吸引相互作用，当网格尺寸趋于零时，离散解均收敛于方程 (1)–(3) 的弱解；参见定理 3 和 4。
- 我们开展了一些数值实验，以验证所提出方法的主要特征，并展示空间中的二阶收敛率和时间上的一阶收敛率。利用所提出的方法，我们研究了排斥性相互作用和吸引相互作用。强排斥性自相互作用在一维和二维空间中可能会表现出小尺度振荡；参见第 6 节。

本文组织如下。第 2 节介绍符号和精确的定理。第 3 节证明离散解的存在性，第 4 节给出离散费舍尔信息的一致估计。在第 5 节中，基于紧性论证，我们进一步推导估计并证明格式的收敛性。数值实验见第 6 节。

## 2. Notation and main results

我们介绍有限体积格式所需的符号和定义，并详细说明主要结果。

**2.1. 有限体积记号**。我们用三元组 $(\mathcal{T},\mathcal{E},\mathcal{P})$ 表示开环面 $\mathbb{T}^d$ 上的笛卡尔有限体积网格。集合 $\mathcal{T}$ 是由 $M_1\times\cdots\times M_d$ 个相同超矩形组成的控制体（或网格单元）集合。第 $\ell$ 个

方向的长度为 $\Delta x_\ell = 1/M_\ell$。集合 $\mathcal{E}$ 由网格的边（或超曲面）组成，每条边都位于一个余维为一的仿射超平面内。它划分为内部边集合$\mathcal{E}_{\rm int} = \mathcal{E} \cap \mathbb{T}^d$ 和周期边界边对 $\mathcal{E}_{\rm per}$。集合 $\mathcal{E}_{\rm per}$ 由边对 $(\sigma, \sigma')$ 组成，其中 $\sigma$ 和 $\sigma'$ 是几何上重合、分别位于区域相对边界上的边。我们将每一对 $(\sigma, \sigma')$ 识别为 $\mathcal{E}$中的一个单独元素。这一识别体现了区域的环面拓扑。最后，集合 $\mathcal{P}$ 包含所有控制体 $K$的中心 $x_K \in \mathbb{T}^d$；也就是说，对于由 $(i_1, \ldots, i_d)$ 索引的网格单元 $K$，其中心为

$$x_K = \big((i_1 - 1/2)\Delta x_1, \ldots, (i_d - 1/2)\Delta x_d\big), \quad \text{where } i_\ell \in \{1, \ldots, M_\ell\}.$$

鉴于采用周期边界条件，我们将索引为 $(i_1, \ldots, i_\ell, \ldots, i_d)$ 和 $(i_1, \ldots, i_\ell + M_\ell, \ldots, i_d)$ 的中心视为同一点。当两个网格单元 $K$ 和 $L$ 通过内部边或周期边界相邻时，记作 $\sigma = K|L$。

给定 $K \in \mathcal{T}$，$\mathcal{E}_K$ 表示 $K$ 的边集。对于 $\sigma \in \mathcal{E}$，我们引入距离

$$\mathrm{d}_\sigma = \begin{cases} \mathrm{d}(x_K, x_L) & \text{if } \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\rm int}, \\ \mathrm{d}(x_K, \sigma) + \mathrm{d}(\sigma', x_L) & \text{if } (\sigma, \sigma') \in \mathcal{E}_{\rm per},\ \sigma \subset \partial K, \sigma' \subset \partial L, \end{cases}$$

其中，$\mathrm{d}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的欧几里得距离。由于采用均匀网格，对于某个 $\ell \in \{1, \ldots, d\}$，有 $\mathrm{d}_\sigma = \Delta x_\ell$。我们定义传输系数

$$\tau_\sigma = \frac{\mathrm{m}(\sigma)}{\mathrm{d}_\sigma}. \tag{16}$$

设 $T > 0$ 和 $N \in \mathbb{N}$。我们定义时间步长 $\Delta t = T/N$ 以及时间步 $t_k = k\Delta t$，其中 $k = 0, \ldots, N$。时空离散 $\mathcal{D}$ 的大小由下式定义；该离散由网格 $\mathcal{T}$ 和数值 $(\Delta t, N)$ 构成：

$$\delta = \max\{h, \Delta t\}, \quad h = \max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_d\}. \tag{17}$$

为了得到收敛结果，我们引入 $\mathcal{T}$的对偶网格 $\mathcal{T}^*$。对于 $K \in \mathcal{T}$和 $\sigma \in \mathcal{E}_K$，我们关联一个对偶单元 $\Delta_\sigma \in \mathcal{T}^*$:

- “菱形”：若$\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\rm int}$，则 $\Delta_\sigma$ 是$\sigma \cup \{x_K, x_L\}$的凸包内部。
- “三角形”：若$\{\sigma, \sigma'\} \in \mathcal{E}_{\rm int}$ 且满足 $\sigma \subset \partial K$，则 $\Delta_\sigma$ 是 $\sigma \cup \{x_K\}$的凸包内部，同时也是 $\sigma' \cup \{x_L\}$的凸包。

对偶单元 $\Delta_\sigma$ 的体积计算如下

$$d\mathrm{m}(\Delta_\sigma) = \mathrm{m}(\sigma)\mathrm{d}_\sigma \quad \text{for } \sigma \in \mathcal{E}. \tag{18}$$

注意，对于 $\sigma \in \mathcal{E}_K$，$\mathrm{m}(\sigma)\mathrm{d}_\sigma = \mathrm{m}(K)$。我们为 $\sigma = K|L$ 引入差分算子

$$\mathrm{D}_{K,\sigma} v = v_L - v_K, \quad \mathrm{D}_\sigma v = |\mathrm{D}_{K,\sigma} v|$$

以及离散梯度

$$\nabla_\sigma^h v = d\frac{\mathrm{D}_{K,\sigma} v}{\mathrm{d}_\sigma} \nu_{K,\sigma}, \tag{19}$$

其中 $\nu_{K,\,\sigma}=(x_L-x_K)/\mathrm{d}_\sigma$ 是垂直于 $\sigma$ 且指向其外部的单位向量。对于任意满足 $x_K=x_L+\Delta x_\ell e_\ell$ 的 $\sigma=K|L$，其中 $\ell\in\{\pm1,\dots,\pm d\}$，且 $e_\ell$ 是 $\mathbb{R}^d$的欧几里得单位向量，我们稍微滥用一下记号，

$$\mathrm{D}_{K,\ell}v:=\mathrm{D}_{K,\sigma}v, \tag{20}$$

其中 $e_{-\ell}:=-e_\ell$对于 $\ell=1$、.....、$d$。

最后，我们引入以下重构算子。设给定 $u=(u_K^k)_{K\in\mathcal{T}、\ k=1.....、\ N}$以及 $v=(v_\sigma^k)_{\sigma\in\mathcal{E}、\ k=1.....、\ N}$。于是我们定义

$$\begin{aligned}\pi_\delta u(t,x)&=u_K^k\quad\text{for }(t,x)\in(t_{k-1},t_k]\times K,\\ \pi_\delta^* v(t,x)&=v_\sigma^k\quad\text{for }(t,x)\in(t_{k-1},t_k]\times\Delta_\sigma.\end{aligned} \tag{21}$$

**2.2. 离散函数空间。** 设给定 $u=(u_K)_{K\in\mathcal{T}}$，并设 $1\le p<\infty$。离散 $L^p(\mathbb{T}^d)$范数定义为

$$\|u\|_{0,p,\mathcal{T}}=\left(\sum_{K\in\mathcal{T}}\mathrm{m}(K)|u_K|^p\right)^{1/p}.$$

对于定义在边上的函数 $v=(v_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{E}}$，相应的离散 $L^p(\mathbb{T}^d)$ 范数为

$$\|v\|_{0,p,\mathcal{T}^*}=\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\mathrm{m}(\Delta_\sigma)|v_\sigma|^p\right)^{1/p}.$$

于是离散 $W^{1、\,p}(\mathbb{T}^d)$ 范数表示为

$$\|u\|_{1,p,\mathcal{T}}=\|u\|_{0,p,\mathcal{T}}+\|\nabla^h u\|_{0,p,\mathcal{T}^*},$$

其中 $\nabla^h u=(\nabla_\sigma^h u)_{\sigma\in\mathcal{E}}$。设 $p>1$和 $1/p+1/q=1$。关于 $L^2(\mathbb{T}^d)$ 内积的 $L^p(\mathbb{T}^d)$ 范数的对偶范数为

$$\|u\|_{-1,q,\mathcal{T}^*}=\sup_{\|\phi\|_{1,p,\mathcal{T}}=1}\left|\sum_{K\in\mathcal{T}}\mathrm{m}(K)u_K\phi_K\right|.$$

对于时空离散函数（$u_K^k$），离散时间导数记为 y

$$\partial_t^{\Delta t}u^k=\frac{u^k-u^{k-1}}{\Delta t}\quad\text{for }k=1,\dots,N. \tag{22}$$

采用这一记号，对于函数 $u=(u_K)_{K\in\mathcal{T}}$，有以下恒等式:

$$\|u\|_{0,p,\mathcal{T}}=\|\pi_\delta u\|_{L^p(\mathbb{T}^d)},\quad \|\nabla^h u\|_{0,q,\mathcal{T}^*}=\|\pi_\delta^*(\nabla^h u)\|_{L^q(\mathbb{T}^d)}.$$

**2.3. 数值格式**。我们为交叉扩散系统 (1)–(3) 引入两点近似有限体积格式。初始数据近似为

$$u_{i,K}^0 = \frac{1}{\mathrm{m}(K)} \int_K u_i^0(x)\mathrm{d}x \quad \text{for all } K \in \mathcal{T},\ i = 1, \dots, n.$$

给定 $u_K^{k-1} = (u_{1\,K}^{k-1}, \dots, u_{n\,K}^{k-1})$，其中 $K \in \mathcal{T}$。对于数值 $u_{i,K}^k$，隐式欧拉有限体积格式定义为：该数值近似于网格单元 $K$ 上的 $u_i(t_k)$，具体为

$$\mathrm{m}(K)\frac{u_{i,K}^k - u_{i,K}^{k-1}}{\Delta t} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathcal{F}_{K,\sigma}[u_i^k, p_i^k] = 0. \tag{23}$$

下面我们定义数值通量 $\mathcal{F}_{K,\sigma}[u_i^k, p_i^k]$ 以及离散势 $p_i^k$。

设 $B \in C^0([0,\infty))$ 为满足 $0 < B(s) \le 1$ for $s \ge 0$ 的权重函数，并假设存在 $0 \le \alpha < 1$ 使得

$$B(s) \ge 1 - \alpha s \quad \text{for } 0 \le s \le 1/\alpha.$$

这些条件意味着 $B(0) = 1$。例如，标准迎风格式满足 $B(s) = 1$（其中 $\alpha = 0$）；Scharfetter–Gummel格式采用伯努利函数 $B(s) = s/(e^s - 1)$（其中 $\alpha = 1/2$）；几何平均格式为 $B(s) = e^{-s/2}$（其中 $\alpha = 1/2$）。借助Stolarsky平均还可以构造更多例子；参见 [18,(1.7)]。此外，对于 $s \ge 0$，我们令 $B_\kappa(s) = \kappa B(s/\kappa)$。正如引言中所述，数值通量 $\mathcal{F}_{K,\sigma}$ 由广义 Scharfetter–Gummel 通量给出

$$\mathcal{F}_{K,\sigma}[u_i^k, p_i^k] = -\tau_\sigma\big(B_\kappa(\mathrm{D}_\sigma p_i^k)\mathrm{D}_{K,\sigma}u_i^k + \widehat{u}_{i,\sigma}^k \mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k\big), \tag{24}$$

其中 $\widehat{u}_{i,\,\sigma}^k$ 是具有迎风结构的边浓度：

$$\widehat{u}_{i,\sigma}^k = \widehat{u}_{i,\sigma}^k(p_i^k) = \left.\begin{cases} u_{i,L}^k & \text{if } \mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k \ge 0 \\ u_{i,K}^k & \text{if } \mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k < 0 \end{cases}\right\} = \frac{[\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^+}{\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k}u_{i,L}^k - \frac{[\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^-}{\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k}u_{i,K}^k \tag{25}$$

对于 $\sigma = K|L$ 和 $[s]^+ = \max\{0, s\}$，$[s]^- = \max\{0, -s\}$。我们回顾分片常值函数的离散分部积分公式（$v_K$） [6, (14)]:

$$\sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} \mathcal{F}_{K,\sigma}[u_i^k, p_i^k]v_K = -\sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \mathcal{F}_{K,\sigma}[u_i^k, p_i^k]\mathrm{D}_{K,\sigma}v. \tag{26}$$

我们通过以下方式引入离散核 $W_{KJ}^{ij}$

$$W_{KJ}^{ij} = \frac{1}{\mathrm{m}(K)\mathrm{m}(J)} \int_K \int_J W_{ij}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \quad \text{for } K, J \in \mathcal{T},\ i, j = 1, \dots, n. \tag{27}$$

离散核有多种方法。我们采用的方法对应于 [20, 注 2.3]。例如，其他方法可见 [8, (7)], [20, 第 2 节2], 和 [23, (13)]。

为定义离散势，我们区分排斥性和吸引性自相互作用。对于排斥性自相互作用，我们通过一个在时间上完全隐式的$p_{i,K}^k$

格式:

$$p_{i,K}^k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{J \in \mathcal{T}} \mathrm{m}(J) W_{KJ}^{ij} u_{j,J}^k, \tag{28}$$

对于吸引性自相互作用，我们采用中点时间平均 :

$$p_{i,K}^k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{J \in \mathcal{T}} \mathrm{m}(J) W_{KJ}^{ij} \frac{u_{j,J}^k + u_{j,J}^{k-1}}{2}. \tag{29}$$

2.4. **假设与主要结果的精确表述**。 我们提出以下假设:

**(H1)** 区域与初始数据：令 $T > 0$、$\Omega_T = (0, T) \times \mathbb{T}^d$ 且令 $u_i^0 \in L^2(\mathbb{T}^d)$ 满足$u_i^0 \geq 0$于 $\mathbb{T}^d$, $\|u_i^0\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \neq 0$对 $i = 1, \ldots, n$成立。**(H2)** 权重函数： $B \in C^0([0, \infty))$ 满足 $0 < B(s) \leq 1$ 对 $s \geq 0$成立。**(H3)** 非一致强制性：存在 $0 \leq \alpha < 1$ 使得

$$B(s) \geq 1 - \alpha s \quad \text{for } 0 \leq s \leq 1/\alpha.$$

**(H4)** 对称性： $W_{ij} \in L^1(\mathbb{T}^d)$ 满足 $W_{ij}(x) = W_{ji}(-x)$，对所有 $i, j = 1, \ldots, n$ 以及几乎处处的 $x \in \mathbb{T}^d$成立。**(H5)** 半正定性： $W_{ij} \in L^1(\mathbb{T}^d)$ 对所有 $v_1, \ldots, v_n \in L^2(\Omega)$ 满足,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{T}^d} \int_{\mathbb{T}^d} W_{ij}(x - y) v_i(x) v_j(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \geq 0.$$

（H6）有界性： $W_{ij} \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ 对于 $i$， $j = 1$，……， $n$。

假设（H1）中的条件 $\|u_i^0\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \neq 0$ 是确保$u_{i,K}^k > 0$对所有 $K \in \mathcal{T}$、 $i = 1$，……， $n$ 以及 $k \geq 1$ 均具有正性的必要条件。一项重要的技术难点在于，权重函数 $B$ 可能并非一致为正，因为可能出现 $B(s) \to 0$ ，其中$s \to \infty$ 。我们在假设（H3）中假定，至少对较小的 $s > 0$，其正性受到控制。有趣的是，我们不需要对 $B$ 施加任何单调性条件。假设（H4）中核的对称性是推导离散 Rao 熵不等式所需的条件之一。对于自排斥情形，我们要求假设（H5）满足半正定性；而对于自吸引情形，则需要假设（H6）中的 $W_{ij}$ 有界。

在假设（H4）下，离散核 $W_{KJ}^{ij}$按以下意义是对称的： $W_{KJ}^{ij} = W_{JK}^{ji}$；而在假设（H5）下，对于任意离散函数（$v_{i,K}$）$_{K \in \mathcal{T}}$和 $i = 1$，…， $n$，

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{K,J \in \mathcal{T}} \mathrm{m}(K) \mathrm{m}(J) W_{KJ}^{ij} v_{i,K} v_{j,J} = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{T}^d} \int_{\mathbb{T}^d} W_{ij}(x - y) \pi_\delta v_i(x) \pi_\delta v_j(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \geq 0, \tag{30}$$

其中我们回顾插值算子 $\pi_\delta$ 的定义（21）。我们引入离散玻尔兹曼熵和 Rao熵

$$
\begin{aligned}
H_B(u^k) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{K\in\mathcal{T}} \mathrm{m}(K) u_{i,K}^k (\log u_{i,K}^k - 1), \\
H_R(u^k) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{K,J\in\mathcal{T}} \mathrm{m}(K)\mathrm{m}(J) W_{KJ}^{ij} u_{i,K}^k u_{j,J}^k .
\end{aligned} \tag{31}
$$

我们的第一个主要结果是证明格式 (23)–(25) 存在离散解，并具有熵产生性质。

**定理 1** （离散解的存在性）。 设假设 *(H1)–(H2)* 成立。则格式 (23)–(25) 存在一个满足正性和质量守恒的解 $(u_K^k)$ ：

$$
u_{i,K}^k > 0 \quad \textit{for all } K \in \mathcal{T}, \quad \sum_{K\in\mathcal{T}} \mathrm{m}(K) u_{i,K}^k = \sum_{K\in\mathcal{T}} \mathrm{m}(K) u_{i,K}^0
$$

对所有 $i = 1,\ldots,n$ 均成立。若进一步假设 *(H3)–(H5)* 成立，则离散 *Boltzmann* 熵不等式和 *Rao* 熵不等式成立：

$$
\frac{1}{\Delta t}\big(H_B(u^k) - H_B(u^{k-1})\big) + P_B(u^k, p^k) \le -X(u^k, p^k), \tag{32}
$$

$$
\frac{1}{\Delta t}\big(H_R(u^k) - H_R(^{k-1})\big) + (1-\alpha) P_R(u^k, p^k) \le -\kappa X(u^k, p^k), \tag{33}
$$

其中，熵产生项 $P_B(u^k, p^k)$ 和 $P_R(u^k, p^k)$ 以及交叉项 $X(u^k, p^k)$定义如下：

$$
\begin{aligned}
P_B(u^k, p^k) &= 4\kappa \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma B_\kappa(\mathrm{D}_\sigma p_i^k) |\mathrm{D}_\sigma (u_i^k)^{1/2}|^2, \\
P_R(u^k, p^k) &= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma \widehat{u}_{i,\sigma}^k |\mathrm{D}_\sigma p_i^k|^2, \\
X(u^k, p^k) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma (\mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k)(\mathrm{D}_{K,\sigma} u_i^k).
\end{aligned}
$$

不等式 (32) 和 (33) 是熵等式 (4) 和 (5) 的离散类比，其中考虑了伯努利函数 $B_\kappa$。事实上，当 $\alpha = 0$ 时，这些公式完全一致，这对应于针对 $s \ge 0$ 的迎风选择 $B(s) = 1$ 。若 $\alpha > 0$，Rao 熵产生项会减小，这是采用我们格式所付出的代价。

**注 2** （零扩散极限）。 在零扩散极限 $\kappa \to 0$ 下，该格式形式上收敛到聚集方程的迎风有限体积近似。事实上，由于 $B_\kappa(s) \to [s]^-$ 当 $\kappa \to 0$ 且根据构造有 $\mathrm{D}_\sigma p_i^k \ge 0$ ，我们得到

$$
\mathcal{F}_{K,\sigma}[u^k, p^k] \to -\tau_\sigma \widehat{u}_{i,\sigma}^k \mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k \quad \text{as } \kappa \to 0.
$$

使用经典Scharfetter–Gummel通量 (8)， [20, 定理 B]证明了这一极限，其意义是梯度流的能量耗散原理。□

第二个主要结果涉及格式的收敛性。为此，我们采用假设（H5）或（H6）。设 $(\mathcal{D}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 是一列由网格大小 $\delta_m = \max\{h_m, \Delta t_m\}$ 索引的 $[0,T]\times\mathbb{T}^d$ 时空离散化，满足$\delta_m \to 0$，当 $m\to\infty$时。为简化记号，我们定义 $(u_{m,\,i},\ p_{m,\,i}) := (\pi_{\delta_m}u_i,\ \pi_{\delta_m}p_i)$ 和 $(\nabla^m u_{m,\,i},\ \nabla^m p_{m,\,i}) := (\pi^*_{\delta_m}\nabla^{h_m}u_i,\ \pi^*_{\delta_m}\nabla^{h_m}p_i)$。

定理*3*（格式的收敛性；半正定核矩阵）。设假设（*H1*）–（*H5*）成立，且 $r = (d+2)/(d+1)$、$1 \le s < (d+2)/d$。设 $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 是一列与网格 $\mathcal{D}_m$ 相关的格式 *(23)–(25)* 的有限体积解，并令 $p_m = p(u_m)$ 为相应的离散势。那么，存在函数 $u^* \in L^r(0,T;\ W^{1,r}(\mathbb{T}^d))$，满足 $u_i^* \ge 0$ 于 $(0,T)\times\mathbb{T}^d$，且对于 $i = 1$、……、$n$，

$$\begin{aligned} u_{m,i} \to u_i^*, \quad p_{m,i} \to p_i \quad &\text{strongly in } L^s(\Omega_T),\\ \nabla^m u_{m,i} \rightharpoonup \nabla u_i^*, \quad \nabla^m p_{m,i} \rightharpoonup \nabla p_i^* \quad &\text{weakly in } L^r(\Omega_T), \end{aligned}$$

并且 $(u^*、\ p^*)$ 在弱意义下满足 $(1)$–$(3)$ 。

**定理 4**（格式的收敛性；有界核函数）。设假设 *(H1)–(H4)* 和 *(H6)* 成立，并设初始数据足够小，具体而言

$$\max_{j=1,\dots,n}\sum_{i=1}^n \|W_{ij}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}\|u_j^0\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \le \frac{1}{4}\frac{\kappa(1-\alpha)^2}{\alpha(1-\alpha)+1}.$$

此外，我们假设以下两种情况之一成立：存在 $C>0$ 使得

$$\sum_{i=1}^n\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma|\mathrm{D}_\sigma(u_i^0)^{1/2}|^2 \le C \tag{34}$$

或者，对于某个与 $m$ 无关的 $C>0$，抛物标度 $\Delta t_m \le Ch_m^2$ 成立。令$(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 为与网格 $\mathcal{D}_m$ 及离散势 $p_m$ 相关的格式 $(23)$–$(25)$ 的一列有限体积解。则存在函数 $u^*\in L^r(0,T;\ W^{1,r}(\mathbb{T}^d))$，满足定理*3*中的陈述。

在极限 $\kappa\to 0$ 下，初始数据被要求变得越来越小。因此，对于完全吸引相互作用，数值收敛结果并不成立。这并不令人意外，因为例如，当 $n=1$ 和 $p=-u$ 时，聚集方程等于反向多孔介质方程 $\partial_t u = -\mathrm{div}(u\nabla u)$，而后者并非在全局上可解。

## 3. Existence of discrete solutions

我们通过应用 Schaefer 不动点定理，证明格式 (23)–(25) 存在离散解，并推导出离散 Boltzmann 熵不等式和 Rao 熵不等式。

**3.1. 离散福克-普朗克方程。** 为了证明不动点算子的一些性质，我们需要求解一个关于函数 $u^k = (u_K^k)_{K\in\mathcal{T}}$ 的线性离散问题，其满足标量 问题

$$\begin{aligned} &\mathrm{m}(K)\frac{u_K^k - u_K^{k-1}}{\Delta t} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} \mathcal{F}_{K,\sigma}[u^k, p] = 0 \quad \text{for } K\in\mathcal{T}, \\ &\mathcal{F}_{K,\sigma}[u^k, p] = -\tau_\sigma\big(B_\kappa(\mathrm{D}_\sigma p)\mathrm{D}_{K,\sigma}u^k + \widehat{u}_{i,\sigma}^k \mathrm{D}_{K,\sigma}p\big), \end{aligned} \tag{35}$$

其中，对于 $K\in\mathcal{T}$，$u_K^{k-1}\geq 0$ 满足：对某个 $L\in\mathcal{T}$，$u_L^{k-1}>0$； $p=(p_K)_{K\in\mathcal{T}}$ 是给定的势，而 $\widehat{u}_{i,\sigma}^k$ 是式 (25) 中定义的迎风项。

**引理 5.** 离散福克-普朗克方程 (35) 存在唯一解 $u^k$，该解严格为正，并且在以下意义下保持质量

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} \mathrm{m}(K)u_K^k = \sum_{K\in\mathcal{T}} \mathrm{m}(K)u_K^{k-1}.$$

证明。 证明与 [1, 命题 1] 类似；为完整起见，我们给出详细证明。我们可以将格式 (35) 写成矩阵形式

$$A(p)u^k = S(u^{k-1}), \tag{36}$$

其中，矩阵 $A(p)$ 定义为

$$\begin{aligned} A_{KK}(p) &= \frac{\mathrm{m}(K)}{\Delta t} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} \tau_\sigma\big(B_\kappa(\mathrm{D}_\sigma p) + [\mathrm{D}_{K,\sigma}p]^-\big) \quad \text{for } K\in\mathcal{T}, \\ A_{KL}(p) &= -\tau_\sigma\big(B_\kappa(\mathrm{D}_\sigma p) + [\mathrm{D}_{K,\sigma}p]^+\big) \quad \text{for } K,L\in\mathcal{T} \text{ with } \sigma = K|L, \end{aligned}$$

向量 $S(u^{k-1})$ 定义为

$$S_K(u^{k-1}) = \frac{\mathrm{m}(K)}{\Delta t}u_K^{k-1} \quad \text{for } K\in\mathcal{T}.$$

矩阵 $A(p)$ 的对角元素为正，非对角元素为非正。此外，由于 $|[\mathrm{D}_{K,\sigma}p]^+| = |[-\mathrm{D}_{L,\sigma}p]^+| = |[\mathrm{D}_{L,\sigma}p]^-|$ 对于 $\sigma = K|L\in\mathcal{E}_K$，我们有

$$|A_{LL}(p)| - \sum_{K\in\mathcal{T},\,K\neq L} |A_{KL}| = \frac{\mathrm{m}(K)}{\Delta t} > 0.$$

因此， $A(p)$ 按列严格对角占优。根据 [27, 定理 1.]， $A(p)$ 可逆，而且实际上是一个 M-矩阵。这证明了线性系统 (36) 存在唯一解。

M-矩阵性质表明， $A(p)$是逆正的，即 $A(p)^{-1}$的所有元素均非负。因此，由于 $u^{k-1}$ 的分量均非负，解 $u^k$ 的分量也均非负。我们进一步声称它们实际上都为正。反设

存在某个 $K^* \in \mathcal{T}$使得$u_{K^*}^k = 0$。然后，利用格式(35)以及$\widehat{u_i^k}$的定义(25)$\sigma$,

$$0 = \frac{\mathrm{m}(K^*)}{\Delta t} u_{K^*}^{k-1} + \sum_{\sigma=K^*|L\in\mathcal{E}_{K^*}} \tau_\sigma \big(B_\kappa(\mathrm{D}_\sigma p) + [\mathrm{D}_{K^*,\sigma} p]^+\big) u_L^k.$$

我们知道，$u_{K^*}^{k-1}$ 是非负的，并且对于所有 $s \geq 0$，$B_\kappa(s) > 0$。这意味着，对于 $K^*$的所有相邻网格单元 $L$，$u_L^k = 0$。对 $\mathcal{T}$中的所有网格单元重复这一论证，我们得到，对于所有 $K \in \mathcal{T}$，$u_K^k = 0$。于是，格式（35）导致$u_K^{k-1} = 0$，这与我们的假设 $u_L^{k-1} > 0$ 对某个 $L \in \mathcal{T}$成立相矛盾。因此，对于所有 $K \in \mathcal{T}$，$u_K^k > 0$，并且 $k \geq 1$。

最后，质量守恒是数值通量局部守恒的结果:

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} \frac{\mathrm{m}(K)}{\Delta t} u_K^k = \sum_{K\in\mathcal{T}} \frac{\mathrm{m}(K)}{\Delta t} u_K^{k-1} - \sum_{K\in\mathcal{T}} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} \mathcal{F}_{K,\sigma}^k = \sum_{K\in\mathcal{T}} \frac{\mathrm{m}(K)}{\Delta t} u_K^{k-1},$$

证明完毕。 □

**3.2. 定理 1 的证明**。我们通过对 $k \geq 0$进行归纳法来证明存在性结果。对于$k = 0$，该陈述由我们的假设得出。我们假设，对于某个 $k \geq 1$，$u^{k-1}$ 已知，其分量均为非负并保持总质量守恒。我们通过应用 Schaefer 不动点定理，证明格式（23）–（25）存在一个解 $u^k$。为此，给定 $u^* = (u_{i,K}^*)$，并考虑线性问题

$$\mathrm{m}(K)\frac{u_{i,K}^k - u_{i,K}^{k-1}}{\Delta t} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} \mathcal{F}_{K,\sigma}[u_i^k, p_i^*] = 0, \quad p_{i,K}^* = \sum_{j=1}^n \sum_{J\in\mathcal{T}} \mathrm{m}(J) W_{KJ}^{ij} u_{j,J}^*,$$

且 $\mathcal{F}_{K,\sigma}[u_i^k, p_i^*]$ 在（24）中定义。对于给定的 $p_i^*$，由引理 5 可知，该线性问题存在解 $u_i^k$。这定义了映射 $S : \mathbb{R}^{n|\mathcal{T}|} \to \mathbb{R}^{n|\mathcal{T}|}$,$S(u^*) = u^k = (u_i^k)_{i=1,\ldots,n}$。通过标准论证可知，$S$ 是连续的。由质量守恒可推知集合 $\{u^k \in \mathbb{R}^{n|\mathcal{T}|} : \exists\theta \in [0,1], u^k = \theta S(u^*)\}$ 是有界的。根据 Schaefer 不动点定理 [15, 第 9.2 节。2], , 存在 $S$ 的一个不动点 $u^k$，它是格式（23）–（25）的一个解。由引理 5 可知，$u^k$ 具有严格正性并满足质量守恒。

接下来，我们验证离散玻尔兹曼熵不等式（32）。记 $B_{i,\sigma}^k := B(\kappa^{-1}\mathrm{D}_\sigma p_i^k)$。将格式（23）乘以 $\log u_{i,K}^k$（这是有定义的，因为 $u_{i,K}^k > 0$），并对 $i = 1, \ldots, n$ 和 $K \in \mathcal{T}$ 求和。由此得到 $I_1 + I_2 = 0$，其中

$$I_1 = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^n \sum_{K\in\mathcal{T}} \mathrm{m}(K)(u_{i,K}^k - u_{i,K}^{k-1}) \log u_{i,K}^k, \quad I_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{K\in\mathcal{T}} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} \mathcal{F}_{K,\sigma}[u_i^k, p_i^k] \log u_{i,K}^k.$$

由 $s \mapsto s(\log s - 1)$ 的凸性可得

$$I_1 \geq \frac{1}{\Delta t}\big(H_B(u^k) - H_B(u^{k-1})\big).$$

我们应用离散分部积分（见 (26)）可得

$$\begin{aligned} I_2 &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \mathcal{F}_{K,\sigma}[u_i^k,p_i^k]\mathrm{D}_{K,\sigma}\log u_i^k \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma\big(\kappa B_{i,\sigma}^k \mathrm{D}_{K,\sigma}u_i^k + \widehat{u}_{i,\sigma}^k \mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k\big)\mathrm{D}_{K,\sigma}\log u_i^k = I_{21}+I_{22}. \end{aligned}$$

扩散部分 $I_{21}$ 通过使用初等不等式 $(\log a - \log b)(a-b) \geq 4(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ 进行估计，其中 $a, b>0$:

$$I_{21} \geq 4\kappa \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma B_{i,\sigma}^k |\mathrm{D}_\sigma (u_i^k)^{1/2}|^2.$$

由 $\log s \leq s-1$，结合 $s = u_{i,K}^k/u_{i,L}^k$ 和 $s = u_{i,L}^k/u_{i,K}^k$ 可得

$$\frac{\mathrm{D}_{K,\sigma}u_i^k}{u_{i,L}^k} = 1 - \frac{u_{i,K}^k}{u_{i,L}^k} \leq \log\frac{u_{i,L}^k}{u_{i,K}^k} = \mathrm{D}_{K,\sigma}\log u_i^k \leq \frac{u_{i,L}^k}{u_{i,K}^k} - 1 = \frac{\mathrm{D}_{K,\sigma}u_i^k}{u_{i,K}^k},$$

因此，

$$\begin{aligned} I_{22} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma\big([\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^+ u_{i,L}^k \mathrm{D}_{K,\sigma}\log u_i^k - [\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^- u_{i,K}^k \mathrm{D}_{K,\sigma}\log u_i^k\big) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma\big([\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^+ \mathrm{D}_{K,\sigma}u_i^k - [\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^- \mathrm{D}_{K,\sigma}u_i^k\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma \mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k \mathrm{D}_{K,\sigma}u_i^k. \end{aligned}$$

将这些估计合并起来，我们得到

$$\begin{aligned} 0 = I_1 + I_2 \geq \frac{1}{\Delta t}\big(H_B(u^k) - H_B(u^{k-1})\big) &+ 4\kappa\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma B_{i,\sigma}^k |\mathrm{D}_\sigma(u_i^k)^{1/2}|^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma \mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k \mathrm{D}_{K,\sigma}u_i^k, \end{aligned}$$

这就证明了不等式 (32)。

接下来需要验证离散 Rao 熵不等式（33）。为此，我们将格式（23）乘以 $p_{i,K}^k$，并对 $i=1,\dots,n$ 和 $K\in\mathcal{T}$ 求和，得到 $I_3+I_4=0$，其中

$$I_3 = \frac{1}{\Delta t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{K\in\mathcal{T}} \mathrm{m}(K)(u_{i,K}^k - u_{i,K}^{k-1})p_{i,K}^k, \quad I_4 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} \mathcal{F}_{K,\sigma}[u_i^k,p_i^k]p_{i,K}^k.$$

为估计 $I_3$，我们分别讨论全隐式格式和中点法。对于前者，我们利用 $p_{i,K}^k$ 的定义（28）以及对称性 $W_{KJ}^{ij} = W_{JK}^{ji}$；根据假设（H4），可知该对称性成立，因此得到

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{\Delta t}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{K,J\in\mathcal{T}} \mathrm{m}(K)\mathrm{m}(J)W_{KJ}^{ij}u_{j,J}^k(u_{i,K}^k - u_{i,K}^{k-1}) \\ &= \frac{1}{2\Delta t}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{K,J\in\mathcal{T}} \mathrm{m}(K)\mathrm{m}(J)W_{KJ}^{ij}(u_{i,K}^k u_{j,J}^k - u_{i,K}^{k-1}u_{j,J}^{k-1}) \\ &\quad + \frac{1}{2\Delta t}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{K,J\in\mathcal{T}} \mathrm{m}(K)\mathrm{m}(J)W_{KJ}^{ij}(u_{i,K}^k - u_{i,K}^{k-1})(u_{j,J}^k - u_{j,J}^{k-1}). \end{aligned}$$

根据由假设（H5）推出的（30），右端第二项非负，因此

$$I_3 \geq \frac{1}{\Delta t}\big(H_R(u^k) - H_R(u^{k-1})\big).$$

对于中点格式，我们使用 $p_i^k$ 的定义（29）$_K$：

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2\Delta t}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{K,J\in\mathcal{T}} \mathrm{m}(K)\mathrm{m}(J)W_{KJ}^{ij}(u_{i,K}^k - u_{i,K}^{k-1})(u_{j,J}^k + u_{j,J}^{k-1}) \\ &= \frac{1}{2\Delta t}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{K,J\in\mathcal{T}} \mathrm{m}(K)\mathrm{m}(J)W_{KJ}^{ij}\big(u_{i,K}^k u_{j,J}^k - u_{i,K}^{k-1}u_{j,J}^{k-1}\big) \\ &\quad + \frac{1}{2\Delta t}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{K,J\in\mathcal{T}} \mathrm{m}(K)\mathrm{m}(J)W_{KJ}^{ij}u_{i,K}^k u_{j,J}^{k-1} \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta t}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{K,J\in\mathcal{T}} \mathrm{m}(K)\mathrm{m}(J)W_{KJ}^{ij}u_{i,K}^{k-1}u_{j,J}^k. \end{aligned}$$

假设（H4）中的对称性表明最后两项相互抵消。因此，

$$I_3 = \frac{1}{\Delta t}\big(H_R(u^k) - H_R(u^{k-1})\big).$$

我们接下来估计 $I_4$。根据离散分部积分，

$$I_4 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma\big(\kappa B_{i,\sigma}^k \mathrm{D}_{K,\sigma}u_i^k + \widehat{u}_{i,\sigma}^k \mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k\big)\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k = I_{41} + I_{42}.$$

漂移部分 $I_{42}$ 将用于吸收 $I_{41}$ 的一部分。我们通过拆分 $\kappa B_{i,\sigma}^k = \kappa + \kappa(B_{i,\sigma}^k - 1)$，并使用交叉项 $X(u^k, p^k)$ 的定义来重写扩散部分

定理 1:

$$I_{41} = \kappa X(u^k, p^k) + \kappa \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma (B_{i,\sigma}^k - 1) \mathrm{D}_{K,\sigma} u_i^k \mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k.$$

为估计右侧的第二项，我们代入 $\mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k = [\mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k]^+ - [\mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k]^-$ 并使用

$$\begin{aligned} -\mathrm{D}_{K,\sigma} u_i^k \mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k &= -(u_{i,L}^k - u_{i,K}^k)\big([\mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k]^+ - [\mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k]^-\big) \\ &\geq -u_{i,L}^k [\mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k]^+ - u_{i,K}^k [\mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k]^-. \end{aligned}$$

然后，结合不等式

$$0 \leq 1 - B_{i,\sigma}^k \leq \frac{\alpha}{\kappa} \mathrm{D}_\sigma p_i^k, \tag{37}$$

wh该不等式由假设（H4）以及$\widehat{u}_{i,\sigma}^k$的定义（25）推出，我们得到

$$\begin{aligned} I_{41} &\geq \kappa X(u^k, p^k) - \alpha \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma \mathrm{D}_\sigma p_i^k \big(u_{i,L}^k [\mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k]^+ + u_{i,K}^k [\mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k]^-\big) \\ &\geq \kappa X(u^k, p^k) - \alpha \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma \widehat{u}_{i,\sigma}^k |\mathrm{D}_\sigma p_i^k|^2. \end{aligned}$$

我们得出

$$0 \geq \frac{1}{\Delta t}\big(H_R(u^k) - H_R(u^{k-1})\big) + (1-\alpha) \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma \widehat{u}_{i,\sigma}^k |\mathrm{D}_\sigma p_i^k|^2 + \kappa X(u^k, p^k),$$

这等于离散 Rao 熵不等式（33）。定理 1 的证明完成。

## 4. Uniform estimate for the Fisher information

由于因子 $B_\kappa(\mathrm{D}_\sigma p_i^k)$ 通常无法由正数常数从下方界定，因此我们不能直接根据 (32) 得出离散梯度 $\mathrm{D}_\sigma(u_i^k)^{1/2}$ 的一致有界性。因此，我们首先推导一个依赖于熵产率 $P_B$、$P_R$ 和交叉项 $K$ 的费舍尔信息界。结合熵不等式后，即可得到所需的梯度界。

### 4.1. **费舍尔信息**。我们给出一个关于费舍尔信息的不等式 on.

**引理 6** ( 费舍尔信息)。设假设（*H1*）–（*H3*）成立，且 $0 \leq \alpha < 1$。 $n$

$$\kappa(1-\alpha) \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma |\mathrm{D}_\sigma (u_i^k)^{1/2}|^2 \leq \frac{1}{4} P_B(u^k, p^k) + \frac{\alpha}{\kappa} P_R(u^k, p^k) - \alpha X(u^k, p^k),$$

其中， $P_B$、 $P_R$和 $K$ 定义见定理 *1*。

证明。链式法则的离散类比 $\nabla v = 2\sqrt{v}\nabla\sqrt{v}$ 可写为

$$\mathrm{D}_{K,\sigma}u_i^k = 2(\bar{u}_{i,\sigma}^k)^{1/2}\mathrm{D}_{K,\sigma}(u_i^k)^{1/2}, \tag{38}$$

其中，幂平均 $\bar{u}_{i,\sigma}^k$ 定义为

$$\bar{u}_{i,\sigma}^k = \left(\frac{1}{2}(u_{i,K}^k)^{1/2} + \frac{1}{2}(u_{i,L}^k)^{1/2}\right)^2 \quad \text{for } \sigma = K|L. \tag{39}$$

离散链式法则（38）直接由下式得到

$$\mathrm{D}_{K,\sigma}u_i^k = \big((u_{i,L}^k)^{1/2} + (u_{i,K}^k)^{1/2}\big)\big((u_{i,L}^k)^{1/2} - (u_{i,K}^k)^{1/2}\big).$$

因此，交叉项 $X(u^k,\ p^k)$可写为

$$X(u^k,p^k) = 2\sum_{i=1}^n \sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma(\bar{u}_{i,\sigma}^k)^{1/2}\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k\mathrm{D}_{K,\sigma}(u_i^k)^{1/2}.$$

我们将上风交叉项和下风交叉项定义为

$$X_{\mathrm{up}}(u^k,p^k) = \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma(\widehat{u}_{i,\sigma}^k(p_i^k))^{1/2}\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k\mathrm{D}_{K,\sigma}(u_i^k)^{1/2},$$

$$X_{\mathrm{down}}(u^k,p^k) = \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma(\widehat{u}_{i,\sigma}^k(-p_i^k))^{1/2}\mathrm{D}_{K,\sigma}(-p_i^k)\mathrm{D}_{K,\sigma}(u_i^k)^{1/2}.$$

根据上风浓度 $\widehat{u}_{i,\sigma}^k = \widehat{u}_{i,\sigma}^k(p_i^k)$的定义（25），可知 $\widehat{u}_{i,\sigma}^k(-p_i^k)$对应于下风浓度。

将 $\kappa B_{i,\sigma}^k = \kappa + \kappa(B_{i,\sigma}^k - 1)$拆分后，我们将离散费舍尔信息重新表述为

$$\begin{aligned} 4\kappa\sum_{i=1}^n\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma|\mathrm{D}_\sigma(u_i^k)^{1/2}|^2 &= P_B(u^k,p^k) + 4\kappa\sum_{i=1}^n\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma(1-B_{i,\sigma}^k)|\mathrm{D}_\sigma(u_i^k)^{1/2}|^2 \\ &\le P_B(u^k,p^k) + 4\alpha\sum_{i=1}^n\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma|\mathrm{D}_\sigma p_i^k||\mathrm{D}_\sigma(u_i^k)^{1/2}|^2, \end{aligned} \tag{40}$$

其中，最后一步由 $B_{i,\sigma}^k$ 的不等式 (37) 得出。我们估计最后一项

$$R(u^k,p^k) := \sum_{i=1}^n\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma|\mathrm{D}_\sigma p_i^k||\mathrm{D}_\sigma(u_i^k)^{1/2}|^2. \tag{41}$$

将 $|\mathrm{D}_\sigma p_i^k| = [\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^+ + [\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^-$ 分开，我们将 $R(u^k,\ p^k)$ 分为上风部分和下风部分，并利用性质 $[\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^\pm = -[-\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^\mp$:

$$R(u^k,p^k) = \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma\big([\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^+ + [\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^-\big)\big((u_{i,L}^k)^{1/2} - (u_{i,K}^k)^{1/2}\big)\mathrm{D}_{K,\sigma}(u_i^k)^{1/2}$$

$$
\begin{aligned}
(42)\qquad &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma\big([\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^+(u_{i,L}^k)^{1/2} - [\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^-(u_{i,K}^k)^{1/2}\big)\mathrm{D}_{K,\sigma}(u_i^k)^{1/2}\\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma\big([\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^-(u_{i,L}^k)^{1/2} - [\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^+(u_{i,K}^k)^{1/2}\big)\mathrm{D}_{K,\sigma}(u_i^k)^{1/2}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma\big([\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^+(u_{i,L}^k)^{1/2} - [\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^-(u_{i,K}^k)^{1/2}\big)\mathrm{D}_{K,\sigma}(u_i^k)^{1/2}\\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma\big([-\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^+(u_{i,L}^k)^{1/2} - [-\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^-(u_{i,K}^k)^{1/2}\big)\mathrm{D}_{K,\sigma}(u_i^k)^{1/2}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma\big((\widehat{u}_{i,\sigma}^k(p_i^k))^{1/2}\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k - (\widehat{u}_{i,\sigma}^k(-p_i^k))^{1/2}\mathrm{D}_{K,\sigma}(-p_i^k)\big)\mathrm{D}_{K,\sigma}(u_i^k)^{1/2}\\
&= X_{\mathrm{up}}(u^k,p^k) - X_{\mathrm{down}}(u^k,p^k).
\end{aligned}
$$

我们需要估计上风交叉项和下风交叉项。首先，根据柯西–施瓦茨不等式，

$$
X_{\mathrm{up}}(u^k,p^k) \le \frac{\kappa}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma|\mathrm{D}_\sigma(u_i^k)^{1/2}|^2 + \frac{1}{2\kappa}P_R(u^k,p^k). \tag{43}
$$

为了估计下风交叉项，我们将恒等式 $a_1b_1 - a_2b_2 = \frac{1}{2}(a_1-a_2)(b_1+b_2) + \frac{1}{2}(a_1+a_2)(b_1-b_2)$ 应用于 $a_1 = (u_{i,L}^k)^{1/2}$, $a_2 = (u_{i,K}^k)^{1/2}$, $b_1 = [\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^-$, $b_2 = [\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^+$，得到

$$
\begin{aligned}
&[\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^-(u_{i,L}^k)^{1/2} - [\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^+(u_{i,K}^k)^{1/2}\\
&\qquad = \frac{1}{2}|\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k|\mathrm{D}_{K,\sigma}(u_i^k)^{1/2} - \frac{1}{2}\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k\big((u_{i,K}^k)^{1/2} + (u_{i,L}^k)^{1/2}\big).
\end{aligned}
$$

我们将这个恒等式代入下风交叉项：

$$
\begin{aligned}
-X_{\mathrm{down}}(u^k,p^k) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma\big([\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^-(u_{i,L}^k)^{1/2} - [\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k]^+(u_{i,K}^k)^{1/2}\big)\mathrm{D}_{K,\sigma}(u_i^k)^{1/2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma|\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k||\mathrm{D}_{K,\sigma}(u_i^k)^{1/2}|^2\\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k\big((u_{i,K}^k)^{1/2} + (u_{i,L}^k)^{1/2}\big)\mathrm{D}_{K,\sigma}(u_i^k)^{1/2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma|\mathrm{D}_\sigma p_i^k||\mathrm{D}_{K,\sigma}(u_i^k)^{1/2}|^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}} \tau_\sigma\mathrm{D}_{K,\sigma}p_i^k\mathrm{D}_{K,\sigma}u_i^k,
\end{aligned}
$$

其中最后一步用到了恒等式：

$$\big((u_{i,K}^k)^{1/2}+(u_{i,L}^k)^{1/2}\big)\mathrm{D}_{K,\sigma}(u_i^k)^{1/2}=u_{i,L}^k-u_{i,K}^k=\mathrm{D}_{K,\sigma}u_i^k.$$

根据 $R(u^k,\ p^k)$ 的定义 (41)，我们推得

$$-X_{\mathrm{down}}(u^k,p^k)=\frac{1}{2}R(u^k,p^k)-\frac{1}{2}X(u^k,p^k).$$

将 (43) 和前一个表达式代入 (42)，得到

$$R(u^k,p^k)\le\kappa\sum_{i=1}^n\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma|\mathrm{D}_\sigma(u_i^k)^{1/2}|^2+\frac{1}{\kappa}P_R(u^k,p^k)-X(u^k,p^k).$$

最后，将该不等式代入 (40)，可写为

$$\kappa\sum_{i=1}^n\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma|\mathrm{D}_\sigma(u_i^k)^{1/2}|^2\le\frac{1}{4}P_B(u^k,p^k)+\alpha R(u^k,p^k),$$

从而完成证明。 □

**4.2. 全隐式格式的估计。** 首先，我们证明求导法则 $\nabla(B*u)=B*\nabla u$ 的一个离散类比。

**Le引理 7.** 设 $u_i=(u_{i,\ K})_{K\in\mathcal{T}}$ 已给定，并令 $p_i=(p_{i,\ K})_{K\in\mathcal{T}}$ 由下式定义

$$p_{i,K}=\sum_{j=1}^n\sum_{J\in\mathcal{T}}\mathrm{m}(J)W_{KJ}^{ij}u_{j,J}.$$

那么，对于任意 $\ell\in\{\pm1,\dots,\pm d\}$,

$$\mathrm{D}_{K,\ell}p_i=\sum_{j=1}^n\sum_{J\in\mathcal{T}}\mathrm{m}(J)W_{KJ}^{ij}\mathrm{D}_{J,\ell}u_j.$$

证明。 回顾定义 $\mathrm{D}_{K,\ell}u_i=\mathrm{D}_{K,\sigma}u_i$，其中 $\sigma=K|L\in\mathcal{E}$ 满足 $x_L=x_K+\Delta x_\ell e_\ell$，且 $e_\ell$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的第 $\ell$ 个标准单位向量（见（20））。根据 $W_{KJ}^{ij}$ 的定义（27）及周期边界条件，我们计算得：

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{K,\ell}p_i&=\sum_{j=1}^n\sum_{J\in\mathcal{T}}\mathrm{m}(J)(W_{LJ}^{ij}-W_{KJ}^{ij})u_{j,J}\\
&=\sum_{j=1}^n\sum_{J\in\mathcal{T}}\left(\frac{1}{\mathrm{m}(L)}\int_L\int_J W_{ij}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x-\frac{1}{\mathrm{m}(K)}\int_K\int_J W_{ij}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)u_{j,J}\\
&=\sum_{j=1}^n\frac{1}{\mathrm{m}(K)}\int_K\int_{\mathbb{T}^d}\big(W_{ij}(x+\Delta x_\ell e_\ell-y)-W_{ij}(x-y)\big)\pi_\delta u_j(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&=\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{T}^d}\frac{1}{\mathrm{m}(K)}\int_K W_{ij}(x-y)\big(\pi_\delta u_j(y+\Delta x_\ell e_\ell)-\pi_\delta u_j(y)\big)\mathrm{d}y\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{J \in \mathcal{T}} \mathrm{m}(J) W_{KJ}^{ij} \mathrm{D}_{J,\ell} u_j.$$

证明至此完成。 □

我们断言，离散费舍尔信息具有一致界。

**引理 8**（全隐式格式的离散梯度界）。设 $p_i^k$ 由（28）给出。则存在依赖于初始数据的 $C(u^0) > 0$，使得

$$\kappa \sum_{k=1}^{N} \Delta t \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \tau_\sigma |\mathrm{D}_\sigma (u_i^k)^{1/2}|^2 \le C(u^0).$$

证明。将离散玻尔兹曼熵不等式（32）乘以 $1-\alpha$，再将离散 Rao 熵不等式（33）乘以 $\alpha/\kappa$，并将两个不等式相加：

$$\begin{aligned} (44) \qquad & \frac{1-\alpha}{\Delta t}\big(H_B(u^k) - H_B(u^{k-1})\big) + \frac{\alpha}{\kappa \Delta t}\big(H_R(u^k) - H_R(u^{k-1})\big) \\ & \le -(1-\alpha)\left(P_B(u^k,p^k) + \frac{\alpha}{\kappa} P_R(u^k,p^k)\right) - X(u^k,p^k). \end{aligned}$$

由引理 6 可知

$$\begin{aligned} P_B(u^k,p^k) + \frac{\alpha}{\kappa} P_R(u^k,p^k) &\ge \frac{1}{4} P_B(u^k,p^k) + \frac{\alpha}{\kappa} P_R(u^k,p^k) \\ &\ge \kappa(1-\alpha) \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \tau_\sigma |\mathrm{D}_\sigma (u_i^k)^{1/2}|^2 + \alpha X(u^k,p^k). \end{aligned}$$

将此估计代入（44）可得

$$\begin{aligned} (45) \qquad & \frac{1-\alpha}{\Delta t}\big(H_B(u^k) - H_B(u^{k-1})\big) + \frac{\alpha}{\kappa \Delta t}\big(H_R(u^k) - H_R(u^{k-1})\big) \\ & \le -\kappa(1-\alpha)^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \tau_\sigma |\mathrm{D}_\sigma (u_i^k)^{1/2}|^2 - \big(\alpha(1-\alpha)+1\big) X(u^k,p^k). \end{aligned}$$

注意到 $\alpha(1-\alpha) + 1 > 0$。我们还断言，$X(u^k, p^k)$ 非负。事实上，利用网格是均匀的这一事实，并应用引理 7：

$$\begin{aligned} X(u^k,p^k) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{|\ell|=1}^{d} \frac{\mathrm{m}(K)}{(\Delta x_\ell)^2} \mathrm{D}_{K,\ell} p_i^k \mathrm{D}_{K,\ell} u_i^k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{|\ell|=1}^{d} \sum_{K,J \in \mathcal{T}} \frac{\mathrm{m}(K)}{\Delta x_\ell} \frac{\mathrm{m}(J)}{\Delta x_\ell} W_{KJ}^{ij} \mathrm{D}_{K,\ell} u_i^k \mathrm{D}_{J,\ell} u_j^k \ge 0, \end{aligned}$$

其中不等式由 (30) 得出。因此，将 (45) 对 $k = 1$、……、$N$ 求和，

$$(1-\alpha)(H_B(u^N) - H_B(u^0)) + \frac{\alpha}{\kappa}(H_R(u^N) - H_R(u^0))$$

$$+\kappa(1-\alpha)^2\sum_{k=1}^{N}\Delta t\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma|\mathrm{D}_\sigma(u_i^k)^{1/2}|^2\le 0.$$

由于 $H_B(u^N)\ge 0$, $H_R(u^N)\ge 0$, 且 $\alpha<1$, 证明至此完成。 □

**4.3. 中点格式的估计**。我们首先给出交叉项的一个辅助估计。

**Lemma 9.** 设 $u_i^k=(u_{i,K}^k)_{K\in\mathcal{T}}$, 并设 $p_i^k=(p_{i,K}^k)_{K\in\mathcal{T}}$ 由 (29) 定义。则

$$X(u^k,p^k)\le c^*\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma\big(3|\mathrm{D}_\sigma(u_i^k)^{1/2}|^2+|\mathrm{D}_\sigma(u_i^{k-1})^{1/2}|^2\big),$$

其中, $X(u^k,p^k)$ 在定理 *1* 中定义, 且 $c^*>0$ 由下式给出

$$c^*=\max_{j=1,\dots,n}\sum_{i=1}^{n}\|W_{ij}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}\|u_i^0\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}. \tag{46}$$

证明。设 $\sigma=K|J\in\mathcal{E}$ 且 $x_J=x_K+\Delta x_\ell e_\ell$。由于网格由超矩形组成, 我们有 $\tau_\sigma\mathrm{m}(J)=\mathrm{m}(\sigma)^2$。然后, 应用杨氏不等式,

$$\begin{aligned}X(u^k,p^k)&=\frac{1}{2}\sum_{|\ell|=1}^{d}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{K,J\in\mathcal{T}}\mathrm{m}(\sigma)^2W_{KJ}^{ij}\mathrm{D}_{K,\ell}u_i^k\frac{\mathrm{D}_{J,\ell}u_j^k+\mathrm{D}_{J,\ell}u_j^{k-1}}{2}\\&\le\frac{1}{8}\sum_{|\ell|=1}^{d}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{K,J\in\mathcal{T}}\mathrm{m}(\sigma)^2W_{KJ}^{ij}\big(2|\mathrm{D}_{K,\ell}u_i^k|^2+|\mathrm{D}_{J,\ell}u_j^k|^2+|\mathrm{D}_{J,\ell}u_j^{k-1}|^2\big).\end{aligned}$$

由对称性 $W_{KJ}^{ij}=W_{JK}^{ji}$ 可得

$$\begin{aligned}X(u^k,p^k)\le{}&\frac{3}{8}\sum_{|\ell|=1}^{d}\bigg(\sum_{i=1}^{n}\sum_{K\in\mathcal{T}}\mathrm{m}(\sigma)\max_{j,J}(W_{KJ}^{ij})^{1/2}|\mathrm{D}_{K,\ell}u_i^k|\bigg)^2\\&+\frac{1}{8}\sum_{|\ell|=1}^{d}\bigg(\sum_{i=1}^{n}\sum_{K\in\mathcal{T}}\mathrm{m}(\sigma)\max_{j,J}(W_{KJ}^{ij})^{1/2}|\mathrm{D}_{K,\ell}u_i^{k-1}|\bigg)^2.\end{aligned} \tag{47}$$

$\bar{u}_{i,\sigma}^k$ 的定义 (39) 给出 $\mathrm{D}_{K,\ell}u_i^k=2(\bar{u}_{i,\sigma}^k)^{1/2}\mathrm{D}_{K,\ell}(u_i^k)^{1/2}$。接着, 由柯西–施瓦茨不等式以及恒等式 $\mathrm{m}(\sigma)\mathrm{d}_\sigma=\mathrm{m}(K)$ 可得

$$\begin{aligned}&\bigg(\sum_{i=1}^{n}\sum_{K\in\mathcal{T}}\mathrm{m}(\sigma)\max_{j,J}(W_{KJ}^{ij})^{1/2}|\mathrm{D}_{K,\ell}u_i^k|\bigg)^2\\&=4\bigg(\sum_{i=1}^{n}\sum_{K\in\mathcal{T}}\Big\{\mathrm{m}(\sigma)^{1/2}\mathrm{d}_\sigma^{1/2}\max_{j,J}(W_{KJ}^{ij})^{1/2}(\bar{u}_{i,\sigma}^k)^{1/2}\Big\}\Big\{\frac{\mathrm{m}(\sigma)^{1/2}}{\mathrm{d}_\sigma^{1/2}}|\mathrm{D}_{K,\ell}(u_i^k)^{1/2}|\Big\}\bigg)^2\\&\le 4\max_{j,J}\bigg(\sum_{i=1}^{n}\sum_{K\in\mathcal{T}}\mathrm{m}(K)W_{KJ}^{ij}\bar{u}_{i,\sigma}^k\bigg)\bigg(\sum_{i=1}^{n}\sum_{K\in\mathcal{T}}\tau_\sigma|\mathrm{D}_{K,\ell}(u_i^k)^{1/2}|^2\bigg)\end{aligned}$$

$$\le 4 \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} \|W_{ij}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} \|\pi_\delta \bar{u}_i^k\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{K\in\mathcal{T}} \tau_\sigma |\mathrm{D}_{K,\ell}(u_i^k)^{1/2}|^2$$
$$\le 4c^* \sum_{i=1}^{n} \sum_{K\in\mathcal{T}} \tau_\sigma |\mathrm{D}_{K,\ell}(u_i^k)^{1/2}|^2,$$

最后一步用到了质量守恒以及 $c^*$ 的定义（46）。类似地，

$$\left( \sum_{i=1}^{n} \sum_{K\in\mathcal{T}} \mathrm{m}(\sigma) \max_{j,J} (W_{KJ}^{ij})^{1/2} |\mathrm{D}_{K,\ell} u_i^{k-1}| \right)^2 \le 4c^* \sum_{i=1}^{n} \sum_{K\in\mathcal{K}} \tau_\sigma |\mathrm{D}_{K,\ell}(u_i^{k-1})^{1/2}|^2.$$

将前两个估计代入 (47)，并应用对称化论证，即可证明该引理。□

现在，我们证明所需的离散梯度估计。

**引理 10**（中点格式的离散梯度界）。 在定理 *4* 的假设下，存在一个 $C(u^0) > 0$，它依赖于初始数据（以及 $\kappa$），使得

$$\sum_{k=1}^{N} \Delta t \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma |\mathrm{D}_\sigma (u_i^k)^{1/2}|^2 \le C(u^0).$$

证明。 令 $\beta = \alpha(1-\alpha)+1$。我们对 $k = 1,\dots,N$求和估计 (45)，并用引理 9 中的估计替换 $X(u^k, p^k)$:

$$\begin{aligned}
(48) \qquad & (1-\alpha)\big(H_B(u^N) - H_B(u^0)\big) + \frac{\alpha}{\kappa}\big(H_R(u^N) - H_R(u^0)\big) \\
&\le -\kappa(1-\alpha)^2 \sum_{k=1}^{N} \Delta t \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma |\mathrm{D}_\sigma (u_i^k)^{1/2}|^2 - \beta \sum_{k=1}^{N} \Delta t \sum_{k=1}^{N} X(u^k, p^k) \\
&\le -\Big( \kappa(1-\alpha)^2 - 4\beta c^* \Big) \sum_{k=1}^{N} \Delta t \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma |\mathrm{D}_\sigma (u_i^k)^{1/2}|^2 \\
&\quad + \beta c^* \Delta t \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma |\mathrm{D}_\sigma (u_i^0)^{1/2}|^2.
\end{aligned}$$

我们对式（31）中定义的 Rao熵 $H_R(u^N)$ 进行如下估计：

$$\begin{aligned}
|H_R(u^N)| &\le \max_{i,j=1,\dots,n} \|W_{ij}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} \left( \sum_{i=1}^{n} \sum_{K\in\mathcal{T}} \mathrm{m}(K) u_{i,K}^N \right)^2 \\
&= \max_{i,j=1,\dots,n} \|W_{ij}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} \left( \sum_{i=1}^{n} \|u_i^0\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \right)^2 \le C(u^0).
\end{aligned}$$

若初始数据满足式（34），则由式（48）以及 $H_B(u^N)$ 的非负性可得

$$\big(\kappa(1-\alpha)^2 - 4\beta c^*\big)\sum_{k=1}^{N}\Delta t\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma|\mathrm{D}_\sigma(u_i^k)^{1/2}|^2 \le C(u^0).$$

当 $c^* < \kappa(1-\alpha)^2/(4\beta)$ 时，有 $\kappa(1-\alpha)^2 - 4\beta c^* > 0$。这就在条件 (34) 下证明了该结论。

若不满足假设 (34)，则可如下估计 (48) 中的最后一项。由于 $\mathrm{m}(\sigma) = \mathrm{m}(K)/\mathrm{d}_\sigma$ 且 $\mathrm{d}_\sigma \ge Ch$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma|\mathrm{D}_\sigma(u_i^0)^{1/2}|^2 &= \sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}_K}\frac{\mathrm{m}(K)}{\mathrm{d}_\sigma^2}\big|(u_{i,L}^0)^{1/2} - (u_{i,K}^0)^{1/2}\big|^2\\ &\le \frac{C}{h^2}\sum_{K\in\mathcal{T}}\mathrm{m}(K)u_{i,K}^0 = \frac{C}{h^2}\|u_i^0\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}.\end{aligned}$$

若 $\Delta t \le Ch^2$，则得到

$$\Delta t\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma|\mathrm{D}_\sigma(u_i^0)^{1/2}|^2 \le C(u^0).$$

证明完毕。 □

## 5. Uniform estimates, compactness, and convergence

利用前面得到的费舍尔信息一致有界性，我们进一步证明一致估计。随后应用离散紧性论证，推出收敛。

**5.1. 一致估计。** 设 $u^k = (u_K^k)_{K\in\mathcal{T}}$ 对于 $k = 0,\dots,N$ 是格式 (23)–(25) 的一个解，其中势 $p^k = (p_K^k)_{K\in\mathcal{T}}$ 由 (28) 或 (29) 定义。回顾网格尺寸 $\delta$ 的定义 (17)。引理 8 和引理 10 中的质量守恒与离散梯度界给出以下结果。

**引理 11。** 设 $r_1 = (d+2)/d$。则存在一个常数 $C > 0$，它与网格尺寸 $\delta$ 无关，使得对于 $i = 1,\dots,n$，

$$\max_{k=1,\dots,N}\|u_i^k\|_{0,1,\mathcal{T}} + \sum_{k=1}^{N}\Delta t\|(u_i^k)^{1/2}\|_{1,2,\mathcal{T}}^2 \le C, \tag{49}$$

$$\sum_{k=1}^{N}\Delta t\big(\|u_i^k\|_{0,r_1,\mathcal{T}}^{r_1} + \|\widehat{u}_i^k\|_{0,r_1,\mathcal{T}}^{r_1} + \|\bar{u}_i^k\|_{0,r_1,\mathcal{T}}^{r_1}\big) \le C. \tag{50}$$

证明。 估计（49）直接由质量守恒以及引理8和引理10得出。我们声称，估计（50）是离散Gagliardo–Nirenberg不等式[2,定理3.4]的推论。事实上，从不等式出发

$$\|(u_i^k)^{1/2}\|_{0,2r_1,\mathcal{T}} \le C\|(u_i^k)^{1/2}\|_{1,2,\mathcal{T}}^{d/(d+2)}\|(u_i^k)^{1/2}\|_{0,2,\mathcal{T}}^{2/(d+2)}$$

我们对 $k=1,\dots,N$ 求和，得到

$$\sum_{k=1}^{N}\Delta t\|(u_i^k)^{1/2}\|_{0,2r_1,\mathcal{T}}^{2r_1}\le C\max_{k=1,\dots,N}\|u_i^k\|_{0,1,\mathcal{T}}^{2/d}\sum_{k=1}^{N}\Delta t\|(u_i^k)^{1/2}\|_{1,2,\mathcal{T}}^2\le C.$$

为证明上风浓度 $\widehat{u}_i^k$ 的界，我们首先注意到，对于任意满足 $\sigma=K|L$ 且 $t\in(t_{k-1},t_k]$ 的 $x\in\Delta_\sigma$，有 $\pi_\delta^*(\widehat{u}_i)^{1/2}(t,x)\le(u_{i,K}^k)^{1/2}+(u_{i,L}^k)^{1/2}$。然后对其积分可得

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d}|\pi_\delta^*(\widehat{u}_i)^{1/2}|^{2r_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}t&\le\sum_{k=1}^{N}\Delta t\sum_{\sigma=K|L\in\mathcal{E}}\mathrm{m}(\Delta_\sigma)\big((u_{i,K}^k)^{1/2}+(u_{i,L}^k)^{1/2}\big)^{2r_1}\\&\le C\sum_{k=1}^{N}\Delta t\sum_{K\in\mathcal{T}}\mathrm{m}(K)|u_{i,K}^k|^{r_1}\le C.\end{aligned}$$

对 $\bar{u}_i^k$ 也有类似的计算。这就证明了该引理。 □

我们还需要一个梯度估计。

**引理 12 (梯度界)。** 设 $r_2=(d+2)/(d+1)$。那么存在一个与网格尺寸 $\delta$ 无关的常数 $C>0$，使得对于 $i=1,\dots,n$，

$$\sum_{k=1}^{N}\Delta t\big(\|\nabla^h u_i^k\|_{0,r_2,\mathcal{T}}^{r_2}+\|\widehat{u}_i^k\nabla^h p_i^k\|_{0,r_2,\mathcal{T}^*}^{r_2}\big)\le C.$$

证明。 我们使用链式法则 (38) 和 H¨older 不等式，并利用 $1/(2r_1)+1/2=1/r_2$ 来估计扩散项:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\Delta t\|\nabla^h u_i^k\|_{0,r_2,\mathcal{T}^*}^{r_2}&\le 2^{r_2}\sum_{k=1}^{N}\Delta t\|(\bar{u}_i^k)^{1/2}\nabla^h(u_i^k)^{1/2}\|_{0,r_2,\mathcal{T}^*}^{r_2}\\&\le C\sum_{k=1}^{N}\Delta t\|(\bar{u}_i^k)^{1/2}\|_{0,2r_1,\mathcal{T}^*}^{r_2}\|\nabla^h(u_i^k)^{1/2}\|_{0,2,\mathcal{T}^*}^{r_2}\\&\le C\bigg(\sum_{k=1}^{N}\Delta t\|(\bar{u}_i^k)^{1/2}\|_{0,2r_1,\mathcal{T}^*}^{2r_1}\bigg)^{r_2/(2r_1)}\bigg(\sum_{k=1}^{N}\Delta t\|\nabla^h(u_i^k)^{1/2}\|_{0,2,\mathcal{T}^*}^2\bigg)^{r_2/2}\le C,\end{aligned}$$

其中，最后一步由引理 11 得出。我们以类似的方式估计漂移项:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\Delta t\|\widehat{u}_i^k\nabla^h p_i^k\|_{0,r_2,\mathcal{T}}^{r_2}&\le\bigg(\sum_{k=1}^{N}\Delta t\|(\widehat{u}_i^k)^{1/2}\|_{0,2r_1,\mathcal{T}^*}^{2r_1}\bigg)^{r_2/(2r_1)}\\&\quad\times\bigg(\sum_{k=1}^{N}\Delta t\|(\widehat{u}_i^k)^{1/2}\nabla^h p_i^k\|_{0,r_2,\mathcal{T}^*}^2\bigg)^{r_2/2}\le C,\end{aligned}$$

最后一步再次应用引理 11。 □

**引理 13**（势的界）。 存在一个与网格尺寸 $\delta$ 无关的常数 $C>0$，使得对于 $i=1,\dots,n$,

$$\sum_{k=1}^{N}\Delta t\big(\|p_i^k\|_{0,r_1,\mathcal{T}}^{r_1}+\|\nabla^h p_i^k\|_{0,r_2,\mathcal{T}^*}^{r_2}\big)\le C.$$

证明。 我们仅对全隐式格式 (28) 证明该结果，因为中点格式 (29) 的证明方法类似。由 $W_{KJ}^{ij}$ 的定义 (27) 可得

$$p_{i,K}^k=\sum_{j=1}^{n}\sum_{J\in\mathcal{T}}\mathrm{m}(J)W_{KJ}^{ij}u_{j,J}^k=\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{T}^d}W_{K,y}^{ij}\pi_\delta u_j^k(y)\mathrm{d}y,$$

其中 $W_{K,y}^{ij}:=\mathrm{m}(K)^{-1}\int_K W_{ij}(x-y)\mathrm{d}x$。因此,

$$\pi_\delta p_i^k(x)=\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{T}^d}(\pi_\delta W_{K,y}^{ij})(x)\pi_\delta u_j^k(y)\mathrm{d}y\quad\text{for } x\in K. \tag{51}$$

函数 $(x,\ y)\mapsto(\pi_\delta W_{K,y}^{ij})(x)$ 仍是一个核，但严格来说，该积分并非卷积。我们使用以下形式的杨卷积不等式：设 $v\in L^q(\mathbb{T}^d)$ 对于 $1\le q\le\infty$ 成立，且 $W=W(x,\ y)$ 满足

$$\sup_{y\in\mathbb{T}^d}\|W(\cdot,y)\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}<\infty,\quad \sup_{x\in\mathbb{T}^d}\|W(x,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}<\infty.$$

Then

$$\left\|\int_{\mathbb{T}^d}W(\cdot,y)v(y)\mathrm{d}y\right\|_{L^q\mathbb{T}^d)}\le\left(\sup_{y\in\mathbb{T}^d}\|W(\cdot,y)\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}\sup_{x\in\mathbb{T}^d}\|W(x,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}\right)\|v\|_{L^q(\mathbb{T}^d)}.$$

证明可直接由 H¨older 不等式推出，因此略去。将该结果应用于 (51)，可得

$$\|\pi_\delta p_i^k\|_{L^{r_1}(\mathbb{T}^d)}\le C\sum_{j=1}^{n}\|\pi_\delta u_j^k\|_{L^{r_1}(\mathbb{T}^d)},$$

其中常数 $C>0$ 依赖于 $\|W_{ij}\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}$，但与 $\delta$ 无关。对 $k=1,\ \dots\dots,\ N$ 求和可得

$$\sum_{k=1}^{N}\Delta t\|p_i^k\|_{0,r_1,\mathcal{T}}^{r_1}=\sum_{k=1}^{N}\Delta t\|\pi_\delta p_i^k\|_{L^{r_1}(\mathbb{T}^d)}^{r_1}\le C\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\Delta t\|u_j^k\|_{0,r_1,\mathcal{T}}\le C,$$

其中我们使用引理 11 中的界。其余估计由下式得出

$$\sum_{k=1}^{N}\Delta t\|\nabla^h p_i^k\|_{0,r_2,\mathcal{T}^*}^{r_2}=\sum_{k=1}^{N}\Delta t\|\pi_\delta^*\nabla^h p_i^k\|_{L^{r_2}(\mathbb{T}^d)}^{r_2}\le C\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\Delta t\|\pi_\delta\nabla^h u_j^k\|_{L^{r_2}(\mathbb{T}^d)}^{r_2}$$

以及引理 12。 □

接下来需要推导离散时间导数的一致估计。

**引理 14** (离散时间导数的界)。 存在一个与网格尺寸 $\delta$ 无关的常数 $C > 0$，使得对于 $i = 1, \dots, n$，

$$\sum_{k=1}^{N} \Delta t \|\partial_t^{\Delta t} u_i^k\|_{-1,r_2,\mathcal{T}} \le C,$$

其中， $\partial_t^{\Delta t} u_i^k$ 定义于(22)，且 $r_2 = (d+2)/(d+1)$。

证明。 令 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{T}^d)$，并对 $K \in \mathcal{T}$ 设 $\phi_K = \phi(x_K)$。将（23）乘以 $\phi_K$ 并进行分部积分:

$$0 = \sum_{K\in\mathcal{T}} \frac{\mathrm{m}(K)}{\Delta t}(u_{i,K}^k - u_{i,K}^{k-1})\phi_K + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma \big(\kappa B_{i,\sigma}^k \mathrm{D}_{K,\sigma} u_i^k + \widehat{u}_{i,\sigma}^k \mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k\big)\mathrm{D}_{K,\sigma}\phi,$$

其中，我们将函数 $\phi = \phi(x)$和 $\phi = (\phi_K)_{K\in\mathcal{T}}$ 视为相同，并回忆$B_{i,\sigma}^k = B(\kappa^{-1}\mathrm{D}_\sigma p_i^k)$。由（18）和（19）可得

$$\tau_\sigma \mathrm{D}_{K,\sigma} u_i^k \mathrm{D}_{K,\sigma}\phi = \frac{1}{d}\mathrm{m}(\Delta_\sigma)\nabla_\sigma^h u_i^k \cdot \nabla_\sigma^h \phi,$$

由此可推得

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} \frac{\mathrm{m}(K)}{\Delta t}(u_{i,K}^k - u_{i,K}^{k-1})\phi_K = -\frac{1}{d}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \mathrm{m}(\Delta_\sigma)\big(\kappa B_{i,\sigma}^k \nabla_\sigma^h u_i^k + \widehat{u}_{i,\sigma}^k \nabla_\sigma^h p_i^k\big)\cdot\nabla_\sigma^h\phi. \tag{52}$$

综上可得

$$\left|\sum_{K\in\mathcal{T}} \mathrm{m}(K)\partial_t^{\Delta t} u_{i,K}^k \phi_K\right| \le C\big(\|\nabla^h u_i^k\|_{0,r_2,\mathcal{T}^*} + \|\widehat{u}_i^k \nabla^h p_i^k\|_{0,r_2,\mathcal{T}^*}\big)\|\nabla^h\phi\|_{0,r_2',\mathcal{T}^*},$$

其中 $1/r_2 + 1/r_2' = 1$。对 $k = 1, \dots, N$求和，利用引理 12，并对所有 $\phi$取上确界，即可得到所需的界。□

**5.2. 紧性**。 设 $u = (u_1, \dots, u_n)$ 是与网格 $\mathcal{D}_m = (\mathcal{T}_m, \mathcal{E}_m, \mathcal{P}_m; \Delta t_m, N_m)$ 及网格尺寸 $\delta_m \to 0$ as$m \to \infty$ 相对应、并由定理 1 构造得到的格式 (23)– (25) 的有限体积解。引理 12 和 14 中的一致估计使我们可以得出 $(u_m)$ 具有相对紧性。回忆一下， $r_1 = (d+2)/d$ 和$r_2 = (d+2)/(d+1)$。为简化记号，我们设

$$\partial_t^m := \partial_t^{\Delta t_m}, \quad \nabla^m := \nabla^{h_m}, \quad \pi_m := \pi_{\delta_m}, \quad \pi_m^* := \pi_{\delta_m}^*.$$

**引理 15**。 存在一个极限函数 $u_i^* \in L^{r_1}(\Omega_T)$ 满足 $\nabla u_i^* \in L^{r_2}(\Omega_T)$，使得在取一个子列后，对所有 $1 \le r < r_1$ 和 $i = 1, \dots, n$，当 $m \to \infty$ 时，

$$\pi_m u_i \to u_i^* \quad \textit{strongly in } L^r(\Omega_T), \quad \pi_m^* \nabla^m u_i \rightharpoonup \nabla u_i^* \quad \textit{weakly in } L^{r_2}(\Omega_T).$$

证明。 鉴于一致估计

$$\sum_{k=1}^{N_m} \Delta t_m \|u_i^k\|_{1,r_2,\mathcal{T}_m}^{r_2} + \sum_{k=1}^{N_m} \Delta t_m \|\partial_t^m u_i\|_{-1,r_2,\mathcal{T}_m} \le C$$

根据引理 12 和 14，我们可以应用 [17, 定理3。4] 并按照 [23, 第 4 节2] 中的论证，得出存在 $(u_m)$ 的一个子列，使得当 $m \to \infty$ 时，

$$\pi_m u_i \to u_i^* \quad \text{strongly in } L^1(0,T;L^{r_2}(\mathbb{T}^d)).$$

特别地，取一个子列后，$(\pi_m u_i)$ 几乎处处收敛。由 $\pi_m u_i$ 的 $\pi_m u_i \to u_i^*$ 在 $L^r(\Omega_T)$ 中的统一$L^{r_1}(\Omega_T)$ 有界性可知，对于 $r < r_1$， $\pi_m u_i \to u_i^*$ 在 $L^r(\Omega_T)$ 中强收敛。根据引理 12 的一致估计以及引理 4 的证明 [12, 和命题 38]中的论证，可得 $\pi_m^* \nabla^m u_i \rightharpoonup \nabla u_i^*$ 在 $L^{r_2}(\Omega_T)$ 中弱收敛。4] 或 [26, □

**引理 16.** 存在一个极限函数 $p_i^* \in L^{r_1}(\Omega_T)$ 满足 $\nabla p_i^* \in L^{r_2}(\Omega_T)$，使得取一个子列后，对所有 $1 \le r < r_1$ 和 $i = 1, \ldots\ldots, n$，当 $m \to \infty$ 时，

$$\pi_m p_i \to p_i^* \quad \textit{strongly in } L^r(\Omega_T), \quad \pi_m^* \nabla^m p_i \rightharpoonup \nabla p_i^* \quad \textit{weakly in } L^{r_2}(\Omega_T),$$

并且有 $p_i^* = p_i(u^*)$ （见 (2)）。

证明。我们对全隐式格式证明该引理，其中 $p_i^k$ 由 (28) 定义。中点格式 (29) 的证明类似。我们利用表述 (51)，并选取 $x \in K \in \mathcal{T}_m$ 和 $t \in (t_{k-1}, t_k]$，计算 $\pi_m p_i^k$ 与 $p_i^*$ 之间的误差：

$$\begin{aligned}\pi_m p_i^k(x) - p_i^*(x,t) = &\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{T}^d} \big((\pi_m W_{K,y}^{ij})(x) - W_{ij}(x-y)\big)\pi_m u_j^k(y)\mathrm{d}y \\ &+ \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{T}^d} W_{ij}(x-y)\big(\pi_m u_j^k(y) - u_j^*(y)\big)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

回顾定义 $W_{K,y}^{ij} = \mathrm{m}(K)^{-1}\int_K W_{ij}(x-y)\mathrm{d}x$。根据（广义）杨卷积不等式，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^d} |\pi_m p_i^k(x) - p_i^*(x,t)|\mathrm{d}x \le &\sum_{j=1}^n \|u_j^k\|_{0,1,\mathcal{T}_m} \int_{\mathbb{T}^d} \big|(\pi_m W_{K,y}^{ij})(x) - W_{ij}(x-y)\big|\mathrm{d}x \\ &+ \sum_{j=1}^n \|W_{ij}\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \int_{\mathbb{T}^d} \big|\pi_m u_j^k(y) - u_j^*(t,y)\big|\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由 $W_{ij}$ 在 $L^1(\mathbb{T}^d)$ 中的有界性以及几乎处处收敛 $(\pi_m W_{K,y}^{ij})(x) \to W_{ij}(x-y)$，可得右端第一项当 $m \to \infty$时收敛到零。由于 $\pi_m u_i$ 在 $L^1(\Omega_T)$ 中强收敛，右端第二项也收敛到零。因此，$\pi_m p_i \to p_i^* = p_i(u^*)$ 在 $L^1(\Omega_T)$ 中强收敛，并且除去一个子列外几乎处处收敛。引理 13 中的 $L^{r_1}(\Omega_T)$ 界表明，对任意 $1 \le r < r_1$，此收敛性均成立。

引理 13 给出了 $(\nabla^m p_i)$ 的一致有界性。按照引理 15 的证明进行论证，我们得出 $\nabla^m p_i$ 在 $L^{r_2}(\Omega_T)$ 中弱收敛。□

**引理 17.** 对于所有 $1 \le r < r_1 = (d+2)/d$ 和 $1 \le s < \infty$，以下收敛成立：

$$\pi_m^* \widehat{u}_i \to u_i^* \quad \textit{strongly in } L^r(\Omega_T), \quad \pi_m^*(B_i^k) \to 1 \quad \textit{strongly in } L^s(\Omega_T).$$

证明. 令 $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_m$、 $x \in \Delta_\sigma$ 和 $t \in (t_{k-1}, t_k]$。于是我们由

$$\begin{aligned}
&|\pi_m^* \widehat{u}_i(t,x) - \pi_m u_i(t,x)| \\
&\quad = \left| \frac{[\mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k]^+}{\mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k} u_{i,L}^k - \frac{[\mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k]^-}{\mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k} u_{i,K}^k - \frac{[\mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k]^+ - [\mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k]^-}{\mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k} u_{i,K}^k \right| \\
&\quad = \left| \frac{[\mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k]^+}{\mathrm{D}_{K,\sigma} p_i^k} (u_{i,L}^k - u_{i,K}^k) \right| \le |u_{i,L}^k - u_{i,K}^k|
\end{aligned}$$

积分后得到

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} |\pi_m^* \widehat{u}_i - \pi_m u_i| \mathrm{d}x \mathrm{d}t &\le C \sum_{k=1}^N \Delta t_m \sum_{K \in \mathcal{T}_m} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |u_{i,L}^k - u_{i,K}^k| \\
&\le C h_m \|\nabla^m u_i\|_{0,1,\mathcal{T}_m^*} \to 0 \quad \text{as } m \to \infty.
\end{aligned}$$

由引理 15 可知，在 $\Omega_T$ 中几乎处处有 $\pi_m u_i \to u_i^*$，由此可推得几乎处处有 $\pi_m^* \widehat{u}_i \to u_i^*$。然后，引理 11 给出的 $\pi_m u_i$ 的 $L^{r_1}(\mathbb{T}^d)$ 界意味着，对于任意 $1 \le r < r_1$， $\pi_m^* \widehat{u}_i \to u_i^*$ 在$L^r(\Omega_T)$ 中强收敛。

令 $1 \le s < \infty$。第二个收敛性由 $0 < B(s) \le 1$、不等式 (37) 以及 $\nabla_\sigma^m p_i^k$ 的定义 (19) 得到:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N_m} \Delta t_m \int_{\mathbb{T}^d} |1 - \pi_m^*(B_i^k)|^s \mathrm{d}x &\le \sum_{k=1}^{N_m} \Delta t_m \int_{\mathbb{T}^d} |1 - \pi_m^* B(\kappa^{-1} \mathrm{D}_\sigma p_i^k)| \mathrm{d}x \\
&\le C h_m \sum_{k=1}^{N_m} \Delta t_m \int_{\mathbb{T}^d} |\pi_m^* \nabla^m p_i^k| \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

极限 $m \to \infty$ 完成了证明。 □

**5.3. 格式的收敛性**。在本小节中，我们证明当网格尺寸趋于零时，(23)–(25) 的解收敛到 (1)–(3) 的一个解 $(u^*, p^*)$，且满足 $p^* = p(u^*)$。令 $\phi \in C_0^\infty(\Omega_T)$，并对所有 $K \in \mathcal{T}$ 及 $k = 1, \ldots\ldots, N_m$，设 $\phi_K^k = \phi(t_k, x_K)$。我们将格式 (23) 乘以 $\Delta t_m \phi_K^k$，对 $k = 1, \ldots\ldots, N_m$ 求和，并仿照 (52) 推导得到$J_1^m + J_2^m = 0$，其中

$$\begin{aligned}
J_1^m &= \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{K \in \mathcal{T}_m} \mathrm{m}(K)(u_{i,K}^k - u_{i,K}^{k-1}), \\
J_2^m &= \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{N_m} \Delta t_m \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_m} \mathrm{m}(\Delta_\sigma) \big( \kappa B_{i,\sigma}^k \nabla_\sigma^m u_i^k + \widehat{u}_{i,\sigma}^k \nabla_\sigma^m p_i^k \big) \cdot \nabla_\sigma^m \phi^k.
\end{aligned}$$

此外，我们引入以下术语

$$J_{10}^m = -\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \partial_t \phi \pi_m u_i \mathrm{d}x \mathrm{d}t - \int_{\mathbb{T}^d} \phi(0,x) \pi_m u_i(0,x) \mathrm{d}x,$$

$$J_{20}^m = \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \pi_m^* \big(\kappa B_i^k \nabla^m u_i^k + \widehat{u}_i^k \nabla^m p_i^k\big) \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

我们证明，当 $m \to \infty$ 时， $J_1^m - J_{10}^m \to 0$ 和 $J_2^m - J_{20}^m \to 0$。前一种收敛性已在 [12, 定理5.2] 中得到证明。对于后一种收敛性，令 $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_m$、 $x \in \Delta_\sigma$ 和 $t \in （t_{k-1}， t_k]$。于是，由 $\phi_L^k - \phi_K^k = \nabla\phi（t， x）\cdot（x_L - x_K）+ O（\mathsf{d}_\sigma h_m）$，我们推得

$$\Delta t_m \mathrm{m}(\Delta_\sigma)(\phi_L^k - \phi_K^k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{\Delta_\sigma} \nabla\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \cdot (x_L - x_K) + O(h_m \Delta t_m),$$

将 $\nabla_\sigma^m$ 的定义 (19) 乘以 $d\nu_{K,\,\sigma}/\mathsf{d}_\sigma$ 后得到

$$\Delta t_m \mathrm{m}(\Delta_\sigma) \nabla_\sigma^m \phi^k = d \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{\Delta_\sigma} \nabla\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + O(\delta_m).$$

该结果给出

$$\begin{aligned} J_2^m &= \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{\Delta_\sigma} \nabla\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \cdot \big(\kappa B_{i,\sigma}^k \nabla_\sigma^m u_i^k + \widehat{u}_{i,\sigma}^k \nabla_\sigma^m p_i^k\big) + O(\delta_m) \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \nabla\phi \cdot \pi_m^* \big(\kappa B_{i,\sigma}^k \nabla_\sigma^m u_i^k + \widehat{u}_{i,\sigma}^k \nabla_\sigma^m p_i^k\big) \mathrm{d}x\mathrm{d}t + O(\delta_m) = J_{20}^m + O(\delta_m), \end{aligned}$$

从而证明 $J_2^m - J_{20}^m \to 0$。

$\pi_m u_i$ 的强收敛以及事实 $\pi_m u_i(0， x) = \mathrm{m}(K)^{-1} \int_K u_i^0 \mathrm{d}x$ 对于 $x \in K$ 成立，表明

$$J_{10}^m \to -\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \partial_t\phi u_i^* \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{T}^d} \phi(0,x) u_i^0(x) \mathrm{d}x.$$

接下来，我们在 $J_{20}^m$ 中令 $m \to \infty$ 取极限。为此，注意到强收敛 $\pi_m^*(B_i^k) \to 1$ 于 $L^s(\Omega_T)$，对任意 $s < \infty$ 均成立（引理 17），而弱收敛 $\pi_m^* \nabla^h u_i \rightharpoonup \nabla u_i^*$ 于 $L^{r_2}(\Omega_T)$（引理 15），这意味着乘积在 $L^1(\Omega_T)$ 中弱收敛:

$$\kappa \int_0^T \int_\Omega \pi_m^*(B_i^k \nabla^m u_i^k) \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \to \kappa \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \nabla u_i^* \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

由引理 16 和引理 17 可知

$$\begin{aligned} \pi_m^* \widehat{u}_i^k &\to u_i^* \quad \text{in } L^r(\Omega_T) \quad \text{for } r < r_1, \\ \pi_m^* \nabla^h p_i^k &\rightharpoonup \nabla p_i^* \quad \text{in } L^{r_2}(\Omega_T). \end{aligned}$$

此外，引理 12 中的一致有界性推出，对于某个函数 $g \in L^{r_2}(\Omega_T)$， $\pi_m^*(\widehat{u}_i^k \nabla^h p_i^k) \rightharpoonup g$ 在 $L^{r_2}(\Omega_T)$ 中弱收敛。由 [22, 引理 12] 可知，我们可以识别极限，$g = u_i^* \nabla p_i^*$。因此，

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \pi_m^*(\widehat{u}_i^k \nabla^h p_i^k) \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \to \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} u_i^* \nabla p_i^* \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

我们推断

$$J_{20}^m \to \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} (\kappa \nabla u_i^* + u_i^* \nabla p_i^*) \cdot \nabla \phi \mathrm{d}x \mathrm{d}t.$$

总结前面的收敛结果，我们得到

$$\begin{aligned} 0 &= J_1^m + J_2^m = (J_1^m - J_{10}^m) + (J_2^m - J_{20}^m) + J_{10}^m + J_{20}^m \\ &\to -\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \partial_t \phi u_i^* \mathrm{d}x \mathrm{d}t - \int_{\mathbb{T}^d} \phi(0,x) u_i^0(x) \mathrm{d}x + \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} (\kappa \nabla u_i^* + u_i^* \nabla p_i^*) \cdot \nabla \phi \mathrm{d}x \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

由此得证。

## 6. Numerical experiments

本节将介绍若干数值测试。我们考虑排斥相互作用和吸引相互作用，并使用两种不同的核函数。更准确地说，我们需要区分涉及两种不同物种的相互作用与同一物种内部的相互作用。若 $W_{ii} > 0$ ($W_{ii} < 0$)，则称第 $i$ 种物种内部的相互作用为自排斥（自吸引）；若对于 $i \neq j$， $W_{ij} > 0$ ($W_{ij} < 0$)，则称这些相互作用为交叉排斥（交叉吸引）。我们考虑的第一个核函数是高斯核

$$W_{ij}(z) = \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{2\pi\varepsilon^2}} \exp\left(\frac{-|z|^2}{2\varepsilon^2}\right), \quad z \in \mathbb{R}^d, \tag{53}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 和 $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$，该核函数曾用于 [23]。第二个是顶帽核，已在 [10] 中研究:

$$W_{ij}(z) = \begin{cases} \alpha_{ij}/(2R) & \text{if } z \in [-R,R]^d, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{54}$$

其中 $R > 0$ 是检测半径， $\alpha_{ij}$ 表示吸引（$\alpha_{ij} < 0$）或排斥（$\alpha_{ij} > 0$）的强度。在数值模拟中，顶帽核按周期方式延拓，而我们使用整个空间上的高斯核，这会在边界处引入跳跃。我们采用不动点法对系统进行数值求解；参见算法1。我们仅考虑双物种情形；该格式可轻易推广至 $n$ 物种系统。

通量 $\mathcal{F}_{K,\sigma}[u_i^{k,\ell}, p_i^{k,\ell}]$ 和 $\mathcal{F}_{K,\sigma}[u_i^{k,\ell}, p_i^{k,\ell-1}]$ 由 (24) 定义。对于全隐式时间格式 (28)，当 $W_{11} > 0$ 和 $W_{22} > 0$时，我们使用离散势 $p^{k,\ell-1}_{i\,K}$；当 $W_{11} < 0$ 和 $W_{22} < 0$时，则使用中点时间平均格式 (29)。

**6.1. 收敛率。** 我们计算一维和二维空间中的空间和时间收敛率，以验证我们的数值格式。

**例1** (收敛率——一维空间)。 我们首先考虑一维方程。由于通常无法显式求出精确解，因此我们在细网格上计算参考解，取 $\Delta t = T/2096$ (取 $T = 0.1$)，并取$\Delta x$ : $= h = 1/2048$。初始数据为

$$u_1^0(x) = \sin(2\pi x) + 0.5, \quad u_2^0(x) = 0.1(\cos(2\pi x) + 0.5) \quad \text{for } x \in [0,1).$$

**算法 1**双物种系统的迭代方法。 p y

**Input:** tol, $u_i^0, i = 1, 2$.
**Output:** $u_i^{N_T}$.

1: **for** $k = 1, 2, \cdots, N_T$ **do**
2: $u_i^{k,0} = u_i^{k-1}$, $\ell = 1$, $e_k = 1$;
3: **while** $e_k > \text{tol}$ **do**
4: solve the equations

$$\mathrm{m}(K)\frac{u_{i,K}^{k,\ell} - u_{i,K}^{k-1}}{\Delta t} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} \mathcal{F}_{K,\sigma}[u_i^{k,\ell}, p_i^{k,\ell-1}] = 0, \qquad i = 1, 2;$$

5: calculate $e_k = \max_i\{\|u_i^{k,\ell-1} - u_i^{k,\ell}\|_\infty\}$ and let $u_i^{k,\ell} = u_i^{k,\ell-1}$, $\ell = \ell + 1$;
6: **end while**
7: $u_i^k = u_i^{k,\ell}$;
8: **end for**

我们考虑带有 $\varepsilon = 1$、 $\alpha_{ij} = 10^{-3}$ 且满足 $i$、 $j = 1$、2 以及 $\kappa = 0.01$ 的高斯核（53）。不同网格尺寸 $h$ 下的 $L^\infty$ 和 $L^1$ 空间误差列于表1中，证实了离散 $L^1$ 范数下的二阶收敛。隐式欧拉近似为一阶，这一点已通过我们的数值实验得到验证；参见表2。

TABLE 1. 一维空间中的空间收敛率。

| $\Delta x$ | $u_1$ | | $u_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $L^\infty$-误差 | $L^1$ 误差 | $L^\infty$ 误差 | $L^1$-误差 |
| $2^{-5}$ | 1.42e-03 | 9.08e-04 | 1.52e-04 | 9.04e-05 |
| $2^{-6}$ | 3.55e-04 | 2.28e-04 | 4.01e-05 | 2.26e-05 |
| $2^{-7}$ | 8.85e-05 | 5.68e-05 | 1.11e-05 | 5.64e-06 |
| $2^{-8}$ | 2.21e-05 | 1.40e-05 | 3.22e-06 | 1.39e-06 |
| $2^{-9}$ | 9.66e-06 | 3.34e-06 | 9.61e-07 | 3.31e-07 |
| $2^{-10}$ | 3.25e-06 | 6.68e-07 | 2.51e-07 | 6.62e-08 |
| 阶 | 1.75 | 2.07 | 1.83 | 2.07 |

**例2**（收敛率——二维空间）。 我们考虑二维区域 $\Omega = [0, 1)^2$，并对 $i, j = 1, 2$ 和 $\kappa = 0.01$ 使用顶帽核 (54)，其中 $R = \frac{1}{8}$, $\alpha_{ij} = -1$。初始数据等于

$$u_1^0(x, y) = \frac{0.1\kappa(\sin(2\pi(x - y)) + 1)}{\|\sin(2\pi(x - y)) + 1\|_{L^1(\Omega)}}, \quad u_2^0(x, y) = \frac{0.1\kappa(\cos(2\pi(x + y)) + 1)}{\|\cos(2\pi(x + y)) + 1\|_{L^1(\Omega)}}$$

对于 $(x, y)$, $\in\Omega$。终止时间为 $T = 0.01$，参考网格尺寸为 $\Delta t = T/2^8$ 和 $\Delta x = 2^{-8}$（即两个方向上的网格尺寸均为 $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 2^{-8}$）。与前一个示例一样，表3证实了空间上的二阶收敛和一阶

TABLE 2. 一维空间中的时间收敛率。

| $\Delta t$ | $u_1$ | | $u_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $L^\infty$ 误差 | $L^1$-误差 | $L^\infty$ 误差 | $L^1$-误差 |
| $T/2^5$ | 2.33e-05 | 1.52e-05 | 4.00e-06 | 1.48e-06 |
| $T/2^6$ | 1.15e-05 | 7.52e-06 | 1.99e-06 | 7.34e-07 |
| $T/2^7$ | 5.68e-06 | 3.70e-06 | 9.78e-07 | 3.61e-07 |
| $T/2^8$ | 2.75e-06 | 1.79e-06 | 4.73e-07 | 1.75e-07 |
| $T/2^9$ | 1.28e-06 | 8.36e-07 | 2.21e-07 | 8.16e-08 |
| $T/2^{10}$ | 5.50e-07 | 3.58e-07 | 9.46e-08 | 3.50e-08 |
| 阶 | 1.07 | 1.07 | 1.07 | 1.07 |

时间收敛。由于 $u_2$ 的误差几乎完全相同，因此这里只报告$u_1$ 的结果。

TABLE 3. 关于 $u_1$的二维收敛：在 $L^1$ 范数和 $L^\infty$ 范数下测得的空间（左）和时间（右）细化。

| **空间细化** ($\Delta t = T/2^8$) | | | **时间细化** ($\Delta x = 2^{-8}$) | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta x$ | $L^\infty$ 误差 | $L^1$ 误差 | $\Delta t$ | $L^\infty$ 误差 | $L^1$ 误差 |
| $2^{-4}$ | 1.25e-05 | 7.85e-06 | $T/2^3$ | 4.19e-09 | 2.34e-09 |
| $2^{-5}$ | 3.11e-06 | 1.96e-06 | $T/2^4$ | 2.03e-09 | 1.13e-09 |
| $2^{-6}$ | 7.46e-07 | 4.64e-07 | $T/2^5$ | 9.47e-10 | 5.30e-10 |
| $2^{-7}$ | 1.54e-07 | 9.20e-08 | $T/2^6$ | 4.06e-10 | 2.27e-10 |
| 阶 | 2.11 | 2.13 | 阶 | 1.12 | 1.12 |

**6.2. 一些模型特征**。我们针对一维区间 $\Omega = [-L, L)$ 上的吸引情形进行了数值模拟，其中 $L = 10$，并使用顶帽核 (54)。时间步长选为 $\Delta t = \Delta x$。我们的目的是讨论权重函数 $B$以及 (24) 中的参数 $\kappa$ 和 (53) 中的参数 $\varepsilon$ 的选择。

**例3** （权重函数的选择）。我们将经典伯努利权重 $B(s) = s/(\mathrm{e}^s - 1)$与（缩放后的）S形权重进行比较

$$B(s) = \frac{2}{\mathrm{e}^s + 1}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

这两种选择均满足用于定义广义 Scharfetter–Gummel 通量的假设（H2）–（H3）（特别是，对于某个 $0 \le \alpha < 1$，有 $B(|s|) \ge 1 - \alpha|s|$ ）。我们采用取值为 $R = 1$、 $\alpha_{11} = -20$、 $\alpha_{22} = -2$、 $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 10$ 的顶帽核（54）（自吸引和交叉排斥相互作用）。参数为 $\Delta t = \Delta x = 1/25$、$\kappa = 0.25$，初始数据为 $u_1^0 = u_2^0 = \frac{1}{8}1_{[-4,4]}$。图1展示了三个时间点的（$u_1$, $u_2$）。与理论结果一致，两种权重产生相同的定性动力学和几乎相同的分布曲线，这证实了分析适用于广泛的权重

函数，而不仅限于经典的伯努利情形。从实现角度来看，连续的 Sigmoid函数避免了伯努利权重所需的 $s = 0$ 处特殊情况处理。

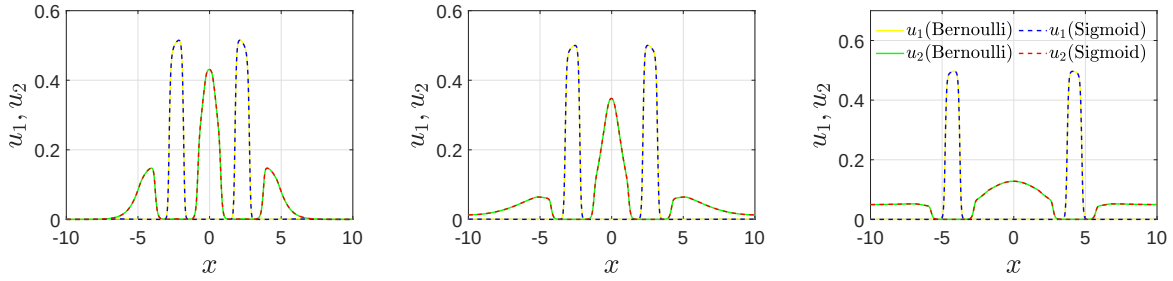


FIGURE 1. 使用 Bernoulli 和 Sigmoid 权重函数得到的解剖面，时间为 $t = 3.4$ （左）、$t = 22.4$ （中）和 $t = 160$ （右）；自吸引/交叉排斥参数为（$-20$，$-2$，10，10）。

**例4** （关于 $\kappa$ 的稳健性）。 Scharfetter–Gummel离散的一项关键优势是其在扩散系数 $\kappa$ 较小时仍具有稳健性。为展示这一性质，我们考虑采用顶帽核（ 54 ）的系统，其中 $R = 1$、 $\alpha_{11} = -5$、 $\alpha_{22} = -2$、$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 15$ （自吸引和交叉排斥相互作用），初始数据为 $u_1^0 = u_2^0 = \frac{1}{2}1_{[-1,1]}$。 网格参数为 $\Delta t = \Delta x = 0.05$。图2展示了不同 $\kappa$ 取值下时间 $t = 200$ 的稳态剖面。正如预期，扩散会抑制分离： $\kappa$ 较大时，支撑集重叠更多；而 $\kappa$ 较小时，界面更加陡峭，重叠减少。值得注意的是，即使扩散非常小（ $\kappa = 5 \times 10^{-3}$），该格式仍保持稳定并保持正性；未观察到伪振荡或过冲。

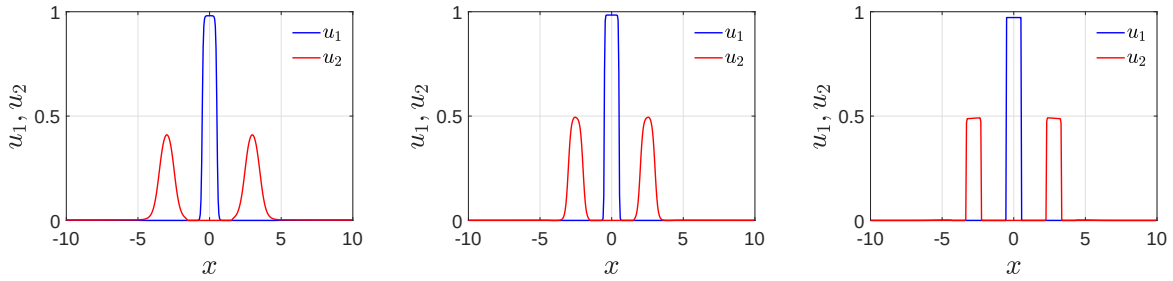


FIGURE 2. 当 $\kappa$ 较小时格式的鲁棒性： $\kappa = 0.1$ （左）、 $\kappa = 0.05$ （中）和 $\kappa = 0.005$ （右）在时间 $t = 200$ 的解剖面。

**例5** （ $\varepsilon$的选择）。我们讨论一维情形下的极限 $\varepsilon \to 0$ ，其中使用高斯核（53），并将其周期性地延拓到整条实线上，且

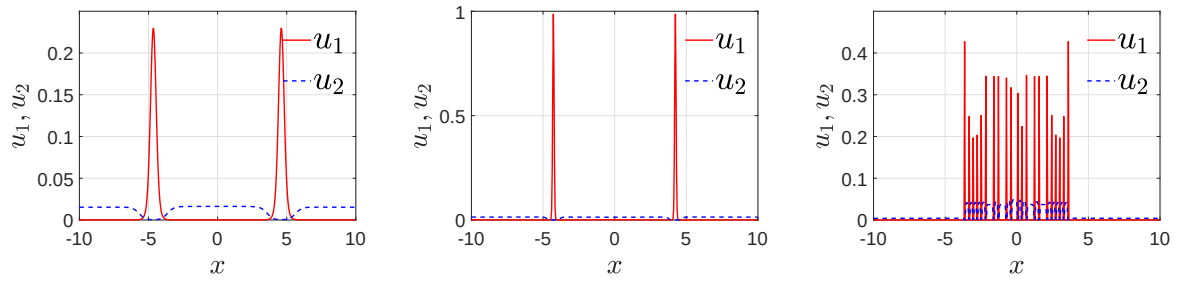


FIGURE 3. $\varepsilon$的变化：使用周期延拓高斯核时，在 $t = 300$ 的解剖面，其中 $\varepsilon = 0.5$（左）、 $\varepsilon = 0.2$ （中）和 $\varepsilon = 0.02$（右）。当 $\varepsilon = 0.02$时，数值模拟失效。

系数为 $\alpha_{11} = 20$、 $\alpha_{22} = 2$、 $\alpha_{12} = \alpha_{21} = -10$ （自排斥、交叉吸引力）和$\kappa = 0.01$。初始数据为$u_1^0 = u_2^0 = \frac{1}{32}1_{[-4,4]}$。我们预期非局部方程收敛到局部方程 [22, 定理 5],

$$\partial_t u_i + \operatorname{div}(u_i \nabla p_i(u)) = 0, \quad p_i(u) = \alpha_{i1}u_1 + \alpha_{i2}u_2, \quad i = 1, 2.$$

仅当矩阵（$\alpha_{ij}$）为正定时，局部系统才有解，而在当前示例中并非如此。因此，当 $\varepsilon$变得过小时，预计数值模拟将失效。这一预期在图3中得到了证实。

**6.3. 熵的演化。**我们研究玻尔兹曼熵和Rao熵 $H_B$ 以及 $H_R$的演化（定义见（31））。在一维空间中，我们取$\Omega = [-L, L)$以及初始数据

$$u_1^0(x) = 1_{[-L/8, L/8]}(x), \quad u_2^0(x) = 1_{[L/8, 3L/4]}(x) \quad \text{for } x \in \Omega,$$

而在二维空间中，我们使用 $\Omega = [-L, L)^2$ 和

$$u_1^0 = 0.1 \cdot 1_{[3L/8, 5L/8] \times [L/2, 3L/4]}, \quad u_2^0 = 0.1 \cdot 1_{[3L/8, 5L/8] \times [L/4, L/2]} \quad \text{for } (x, y) \in \Omega.$$

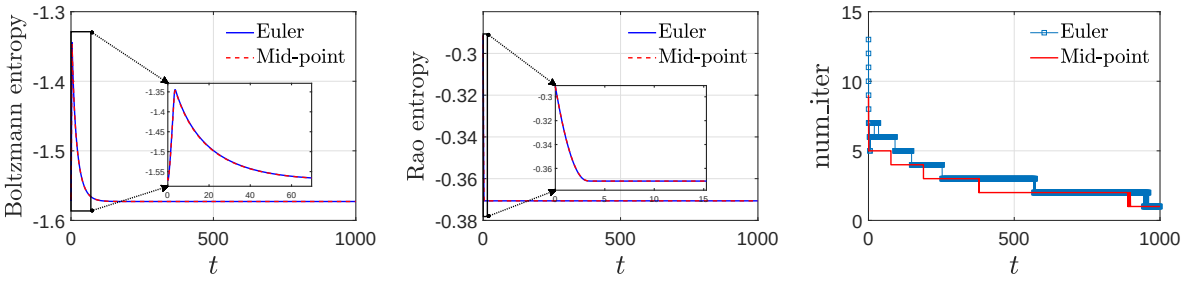


FIGURE 4. 使用顶帽核时吸引相互作用：玻尔兹曼熵（左）和Rao熵（中）的演化，以及迭代次数（右）。

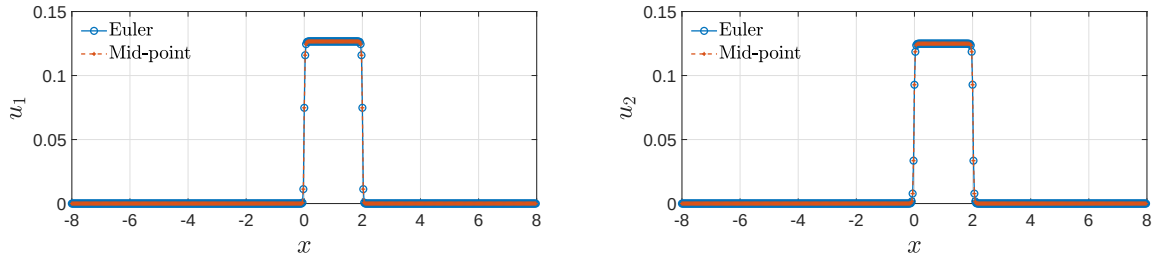


FIGURE 5. 顶帽核下的吸引相互作用：解剖面$u_1$ （左）和 $u_2$ （右）。

**例6** （一维吸引相互作用）。 我们选择顶帽核 (54)，其中 $R = 2$，并采用吸引相互作用， $\alpha_{11} = -20$、 $\alpha_{22} = -6$、 $\alpha_{12} = \alpha_{21} = -10$ 和$\kappa = 0.01$。数值参数为 $T = 1000$、 $L = 8$ 和 $\Delta t = \Delta x = L/2^8$。我们对离散势分别采用隐式欧拉格式和中点格式，并比较玻尔兹曼熵与 Rao 熵的演化；见图4。我们发现，玻尔兹曼熵起初增加，但在之后的所有时间均下降，而 Rao 熵则始终衰减。中点格式所需的迭代次数少于隐式欧拉方法，但两种格式得到的解几乎相同。然而，当我们将检测半径减小至 $R = 0.6$ 时，发现采用中点规则时 Rao 熵会衰减，而隐式欧拉方法则无法收敛，除非减小时间步长。该测试表明，在吸引相互作用的情况下，中点规则更为可取。相应的解剖面见图5。

**例7** （一维排斥相互作用）。我们考虑采用高斯核 (53) 的排斥相互作用，其中 $\varepsilon = 1$、 $\alpha_{11} = 10$、 $\alpha_{22} = 3$、 $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 5$ 和 $\kappa = 0.01$。在此例中，使用隐式欧拉格式或中点格式时，玻尔兹曼熵和 Rao熵均会衰减（见图 6）。当采用全空间高斯核并施加周期边界条件时，区域边界附近会出现边界层；采用周期高斯延拓后，该边界层便会消失。

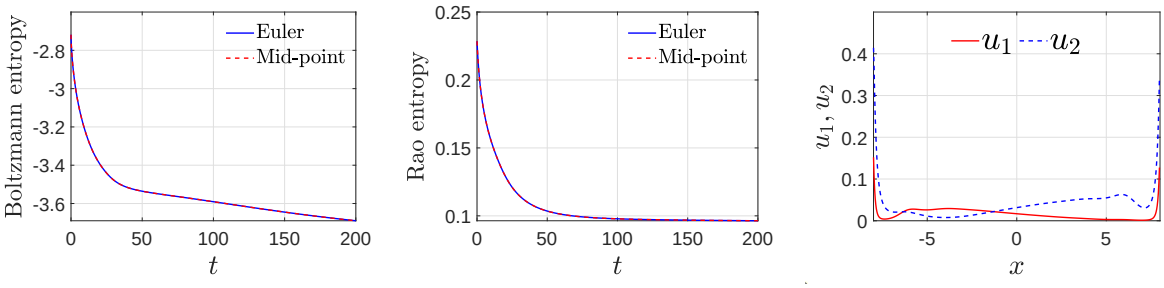


FIGURE 6. 高斯核下的排斥相互作用：玻尔兹曼熵（左）、Rao熵（中）和解剖面（右）的演化。

**例8**（二维排斥与吸引相互作用）。我们考虑在排斥与吸引相互作用中均使用顶帽核(54)。区域为 $\Omega = [0,1)^2$,，网格尺寸为 $\Delta t = \Delta x = 0.01$。相互作用参数为 $\kappa = 0.01$ 和

$$\begin{aligned} &\text{repulsive interactions:} && \alpha_{11} = 10,\ \alpha_{22} = 6,\ \alpha_{12} = \alpha_{21} = 5,\\ &\text{self-attractive interactions:} && \alpha_{11} = -10,\ \alpha_{22} = -6,\ \alpha_{12} = \alpha_{21} = 5. \end{aligned}$$

与前一个示例类似，图7显示，对于排斥相互作用，玻尔兹曼熵和Rao熵随时间递减；而在自吸引情形下，玻尔兹曼熵 initially 增加，Rao熵则递减。在前一种情形下，系统在 $T = 30$时几乎达到其稳态，但后一种情形下的解在 $T = 50$时仍未达到稳态，即熵的相对变化分别为2.40e-05（玻尔兹曼熵）和8.25e-05（Rao熵）。

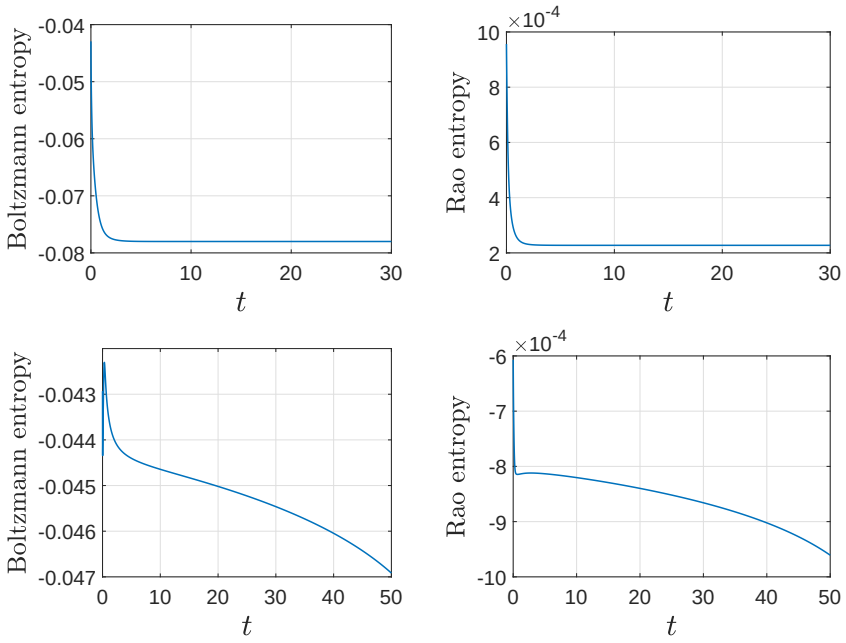


FIGURE 7. 排斥系统（上）和自吸引系统（下）中玻尔兹曼熵（左）与Rao熵（右）的演化。

**6.4. 强排斥相互作用。** 我们通过具有较大系数的核函数来表示强相互作用：

$$\alpha_{11} = 20, \quad \alpha_{22} = 2, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 10. \tag{55}$$

参数为 $\kappa = 0.25$、 $L = 10$ 和 $\Delta t = \Delta x = 1/25$。我们选择具有 $\varepsilon = 1$ 的高斯核和初始数据 $u_1^0 = u_2^0 = \frac{1}{8}1_{[-4,4]}$。正如预期，玻尔兹曼熵和Rao熵随时间递减（未显示）。图8（上排）展示了一维空间中不同时刻的解剖面。由于核不是周期的，边界处会出现跳跃

，从而产生边界层。采用带有周期延拓的截断高斯核时，不会出现边界层（未显示）。我们注意到，离散质量随时间守恒，即使存在边界层也是如此。

当我们使用带有 $R = 1$ 的顶帽核 (54) 和系数 (55) 时，会出现小尺度振荡；见图 8（底排）。当自排斥较强时，在 [10,图 4] 中也能观察到此类振荡。振荡的波长与检测半径 $R$ 有关。事实上，当半径加倍至 $R = 2$ 时，波长也会加倍；见图9。对于较大的扩散系数 $\kappa = 0.5$，小尺度振荡会消失 $t \to \infty$，系统收敛至常数稳态，这与 [10, 第5节 1] 的观察结果一致。这些结果表明，小尺度振荡是否出现由扩散常数和检测半径共同决定。

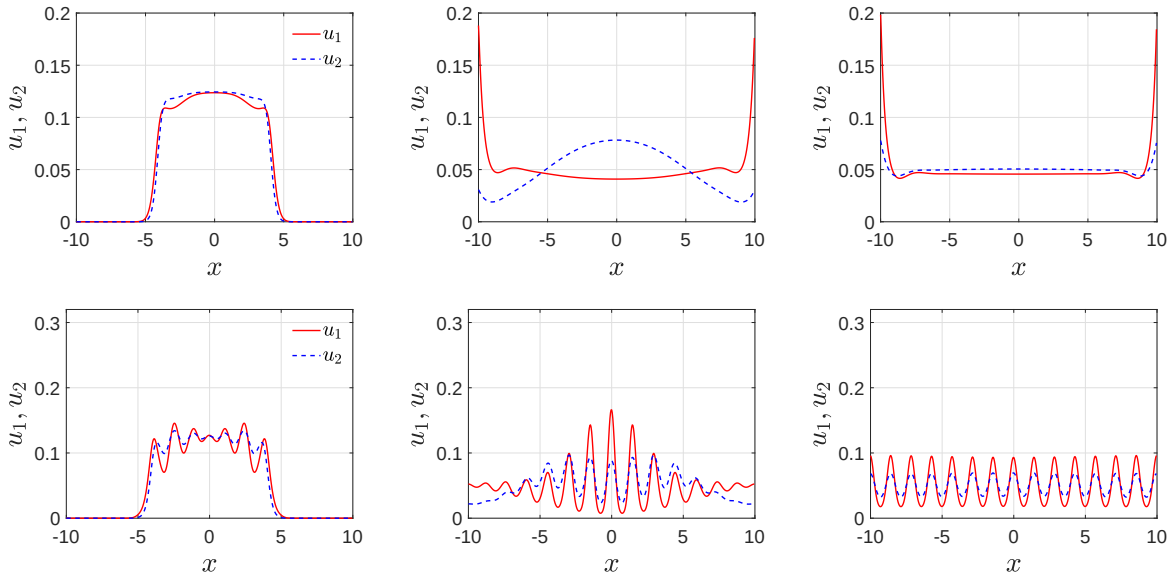


FIGURE 8. 强排斥相互作用：使用高斯核（顶排）和顶帽核（底排）时，时间为 $t = 0.2$（左）、 $t = 22.4$ （中）和 $t = 300$ （右）的解剖面。

最后，我们在二维区域 $\Omega = (0, 1)^2$ 中使用顶帽核以及 $R = 1$ 和系数 (55) 进行了一些数值模拟。我们选择 $\kappa = 0.01$，初始数据

$$u_1^0 = 0.1 \cdot 1_{[1/2,3/4]\times[3/8,5/8]}, \quad u_2^0 = 0.1 \cdot 1_{[1/4,1/2]\times[3/8,5/8]},$$

以及 $\Delta t = \Delta x = 0.01$。 $u_1^0$ 和 $u_2^0$ 的支撑集交集是直线 $\{1/2\} \times [3/8, 5/8]$，这意味着这些物种在初始时几乎完全分离。图10展示了不同时刻的解剖面。同样，我们观察到小尺度振荡。图11所示的玻尔兹曼熵和Rao熵并不

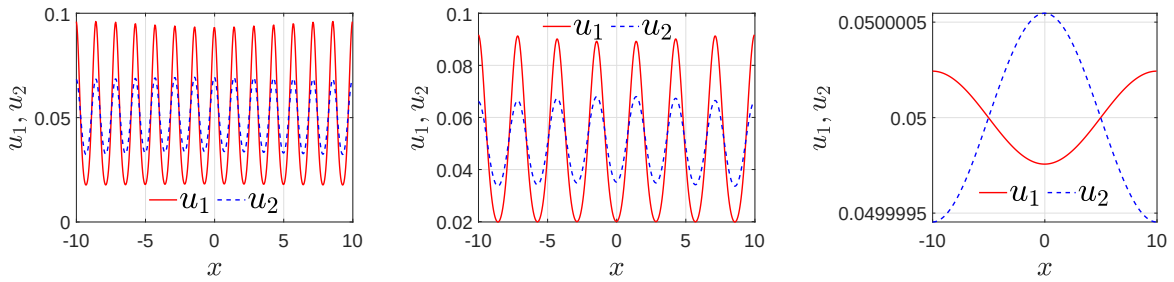


FIGURE 9. 强排斥相互作用：使用顶帽核时， $t = 300$ 处的解剖面，其中 $R = 1$, $\kappa = 0.25$ （左）， $R = 2$, $\kappa = 0.25$ （中），以及 $R = 1$, $\kappa = 0.5$ （右）。

单调。在这个例子中，原因是条件（6）不成立，因此我们无法期待熵衰减。

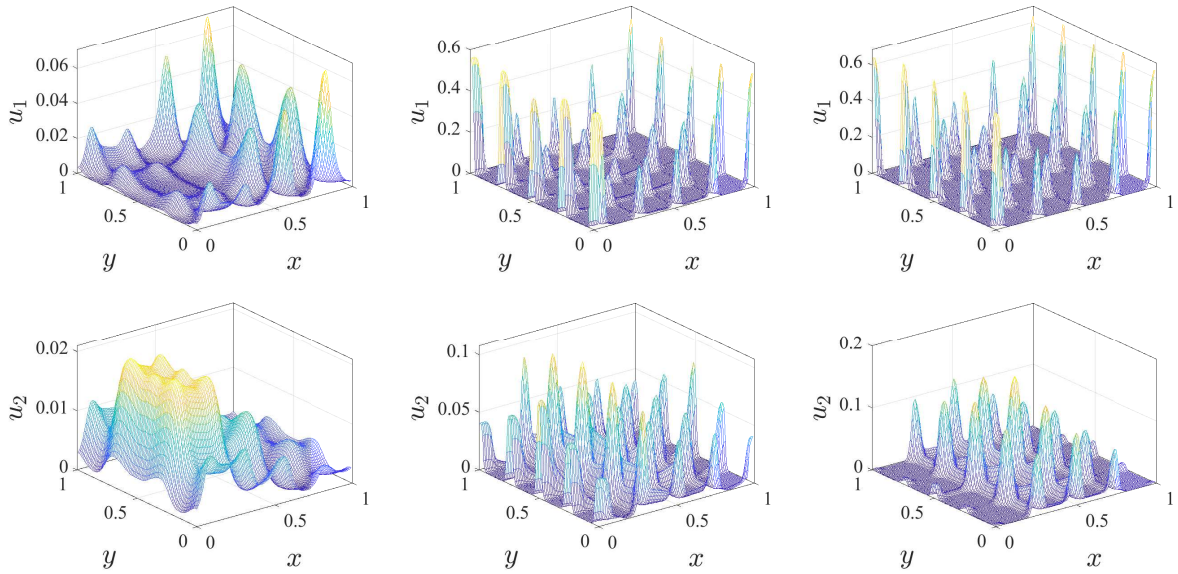


FIGURE 10. 强排斥相互作用：在时间 $t = 4$ （左）、 $t = 10$ （中）和 $t = 34$ （右）处的解剖面， $u_1$ （上）和 $u_2$（下）。

## REFERENCES

[1] M. Bessemoulin–Chatard. 一种用于非线性扩散对流-扩散方程的有限体积格式，由Scharfetter–Gummel格式导出。*Numer. Math.* 121 (2012), 637–670.[2] M. Bessemoulin–Chatard, C. Chainais–Hillairet, 和F. Filbet. 关于若干有限体积格式的离散泛函不等式。*IMA J. Numer. Anal.*35 (2015), 1125–1149.[3] S. Busenberg 和 C. Travis. 人口迁移导致空间传播的流行病模型。*J.Math. Biol.*16 (1983), 181–198。

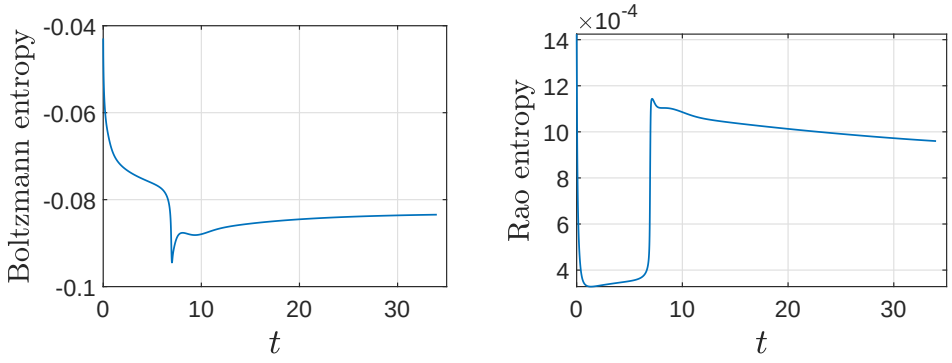


FIGURE 11. 强排斥相互作用：玻尔兹曼熵（左）和 Rao熵（右）的演化。

[4] C. Canc`es, C. Chainais–Hillairet, J. Fuhrmann, 和 B. Gaudeul. 对一种单极退化漂移-扩散模型的若干有限体积格式进行侧重数值分析的比较。*IMA J.Numer. Anal.* 41 (2019), 271–314.[5] C. Canc`es, M. Herda, 和 A. Massimini. 具有交叉扩散和体积排斥的广义泊松-能斯特-普朗克系统的有限体积格式的收敛性与长时间行为。已投稿，2024年。arXiv:2411.11583.[6] C. Canc`es, C. Chainais–Hillairet, A. Gerstenmayer, 和 A. J¨ungel. 一种受离子输运启发的退化交叉扩散模型的有限体积格式。*Numer. Meth. Partial Differ. Eqs.* 35 (2019), 545–575.[7] J. A. Carrillo, Y. Huang, 和 M. Schmidtchen. 双物种非局部交叉扩散模型综述。*SIAM J. Appl. Math.* 78 (2018), 1078–1104.[8] J. A. Carrillo, F. Filbet, 和 M. Schmidtchen. 相互作用物种交叉扩散系统的有限体积格式收敛性。*Numer. Math.*145 (2020), 473–511.[9] J. A. Carrillo, H. Murakawa, M. Sato, 和 M. Wang. 一种新范式：多细胞黏附、排斥与吸引呈现多样的细胞镶嵌图案。*PLOS Comput. Biol.* 21 (2025), 第 e1011909 号，15页。[10] J. A. Carrillo, Y. Salmaniw, 和 J. Skrzeczkowski. 非规则核下聚集-扩散系统的适定性。已投稿，2024年。arXiv:2406.09227.[11] C. Chainais–Hillairet 和 J. Droniou. 带诺伊曼边界条件的非强制椭圆问题有限体积格式。*IMA J. Numer. Anal.*31 (2011), 61–85.[12] C. Chainais–Hillairet, J.-G. Liu, 和 Y.-J. Peng. 多维漂移-扩散方程的有限体积格式及收敛性分析。*ESAIM* 数学建模与数值分析 37 (2003), 319–338.[13] L. Chen, E. Daus, 和 A. J¨ungel. 严格的平均场极限与交叉扩散。*Z. Angew. Math.Phys.* 70 (2019), 第122号，21页。[14] M. Doumic, S. Hecht, B. Perthame, 和 D. Peurichard. 多物种交叉扩散：从非局部平均场到无自扩散的多孔介质系统。*J. Differ. Eqs.*389 (2024), 228–256.[15] L. Evans.偏微分方程. 美国数学会，普罗维登斯，1998年。[16] P. Farrell 和 E. Gartland. 关于漂移-扩散连续性方程的Scharfetter–Gummel离散。载于：J. Miller（编），多维边界层与内层的计算方法，第51–79页。Boole出版社，都柏林，1991年。[17] T. Gallou¨et 和 J.-C. Latch´e. 抛物型偏微分方程离散近似解的紧性——湍流模型中的应用。*Commun. Pure Appl. Anal.* 11 (2012), 2371–2391。

[18] M. Heida、M. Kantner 和 A. Stephan. 福克-普朗克方程一族有限体积离散格式的一致性与收敛性. *ESAIM* 数学建模与数值分析 55 (2021), 3017– 3042.[19] M. Herda 和 A. Zurek. 非局部交叉扩散系统中一种熵耗散有限体积格式的研究. *ESAIM* 数学建模与数值分析57 (2023), 1589–1617.[20] A. Hraivoronska、A. Schlichting 和 O. Tse. Scharfetter–Gummel格式向聚集-扩散方程的变分收敛及消失扩散极限. *Numer. Math.* 156 (2024), 2221–2292.[21] A. J¨ungel. 非线性扩散半导体漂移-扩散模型的数值近似.*Z. Angew. Math. Mech.* 75 (1995), 783–799.[22] A. J¨ungel、S. Portisch 和 A. Zurek. 多物种种群与网络的非局部交叉扩散系统.*Nonlin. Anal.* 219 (2022), 第 112800 号，26 页.[23] A. J¨ungel、S. Portisch 和 A. Zurek. 多物种种群非局部交叉扩散系统的收敛有限体积格式.*ESAIM* 数学建模与数值分析 58 (2024), 759–792.[24] E. H. Quenjel. 多边形网格上对流-扩散方程的正性 Scharfetter–Gummel 有限体积方法. *Appl. Math. Comput.*425 (2022), 第 127071 号，20 页.[25] D. Scharfetter 和 H. Gummel. 硅读出二极管振荡器的大信号分析. *IEEE* 电子器件汇刊 16 (1969), 64–77.[26] A. Schlichting 和 C.Seis. 聚集扩散方程的 Scharfetter–Gummel格式. *IMAJ. Numer. Anal.*42 (2022), 2361–2402.[27] R. Varga.矩阵迭代分析. Prentice-Hall，新泽西州，1962.

Institute of Analysis and Scientific Computing, TU Wien,
Wiedner Hauptstrasse 8–10,1040 Wien, Austria电子邮箱地址: juengel@tuwien.ac.at

Department of Mathematics, The University of Hong Kong, Hong Kong, China电子邮箱地址: lipch@hku.hk

Institute of Analysis and Scientific Computing, TU Wien,
Wiedner Hauptstrasse 8–10,1040 Wien, Austria电子邮箱地址: zhiwei.sun@tuwien.ac.at