arXiv:2601.01733v1 [math.OA] 5 Jan 2026

完全有界表示到冯·诺伊曼代数及康尼斯嵌入问题

JUNSHENG FANG、CHUNLAN JIANG、LIGUANG WANG 和 YANLI WANG

Abstract. 在本文中，我们证明：若 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 C^*代数， $\mathcal{M}$ 是具有 Kirchberg 商弱期望性质（QWEP）的冯·诺伊曼代数，且 $\phi: \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ 是一个含幺完全有界表示，则存在一个可逆算子 $S \in \mathcal{M}$，使得 $S\phi(\cdot)S^{-1}$ 是一个 $*$表示。另一方面，Gilles Pisier 证明了以下结果：含幺 C^*代数 $\mathcal{A}$ 是核的，当且仅当对于任意含幺完全有界表示 ϕ，若其将 $\mathcal{A}$ 表示到任意冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$ 中，则存在一个可逆算子 $S \in \mathcal{M}$，使得 $S\phi(\cdot)S^{-1}$ 是一个 $*$表示。这意味着存在并非 QWEP 的冯·诺伊曼代数。Eberhard Kirchberg 证明了，当且仅当每个带迹冯·诺伊曼代数都嵌入超有限 II_1 型因子的超幂 $\mathcal{R}^w$ $\mathcal{R}$中时，每个冯·诺伊曼代数才具有 QWEP。这为康尼斯嵌入问题给出了否定答案。本文建立在 Gilles Pisier 和 Florin Pop 先前工作的基础之上。

1. Introduction

在一篇发表于 1955 年的论文中，Richard V.Kadison [11]考察了以下问题：任意有界的非自伴表示 ϕ，即在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的某个 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 的表示，是否都与一个 $*$-表示相似？也就是说，是否存在一个可逆算子 $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得 $S\phi(\cdot)S^{-1}$ 是 $\mathcal{A}$的一个 $*$-表示？相似性问题至今仍未解决，尽管人们已经取得了一些部分结果。利用 Alain Connes [5]关于内射冯·诺伊曼代数的深刻结果，以及 [4], 中给出的关于核 C^*-代数的刻画，可以证明，核 C^*-代数的每个有界表示都与一个 $*$-表示相似 [3, 6]。任意 C^*-代数的有界循环表示的相似性问题最初由 B. A. Barnes [1]考察。 他证明，当ϕ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的某个 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 的有界表示，且 $\phi(\mathcal{A})$ 和 $\phi(\mathcal{A})^*$ 具有一个公共循环向量 ξ时，则存在 $\mathcal{H}$上的一个闭内射算子S，使得 S 和 S^{-1} 稠密定义，并且 $x \to S\phi(x)S^{-1}$ 是一个 $*$代数的表示。J. W. Bunce [3] 进一步证明， S 可以取为有界算子，但不一定具有有界逆。他还去除了 ξ 是 $\phi(\mathcal{A})^*$的循环向量这一条件。Erik Christensen [6] 证明，每个 C^*代数的不可约有界表示都与一个 $*$表示相似。最后，Uffe Haagerup [8]证明，每个具有循环向量 ξ 的 C^*代数的有界表示都与一个 $*$表示相似。此外，还证明了以下定理。

定理 1.1。 (Haagerup –Hadwin – Wittstock)[8, 9, 21] 设 ϕ 是 C^*代数 $\mathcal{A}$ 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的有界非退化表示。则以下命题等价:

(1) ϕ 是完全有界表示。(2) ϕ 与一个 $*$-表示相似。

后来，Erik Christensen [7] 证明，具有性质 Γ 的 II_1 型因子的每个有界表示都与一个 $*$-表示相似。最近，Florin Pop [19] 证明，对于 II_1 型因子的每个有界表示 $\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{N}$，只要 $\mathcal{M}$ 或 $\mathcal{N}$ 可以嵌入超双曲 II_1 型因子 $\mathcal{R}$ 的超幂代数 $\mathcal{R}^w$，该表示就与一个 $*$-表示相似。以下重要定理（[19], 命题3.1）在 Florin Pop 的工作中发挥了关键作用，在我们（两人）证明主要结果（定理 1.4）的过程中也发挥了关键作用。

定理 1.2。 (Pop)[19] 设 $\mathcal{A}_1$、$\mathcal{A}_2$、$\mathcal{B}_1$、$\mathcal{B}_2$ 为 C^*代数，且 $\mathcal{A}_1$ 具有提升性质，$\mathcal{B}_1$ 为 *QWEP*。若 $\alpha: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{B}_1$ 是完全有界同态，且 $\varphi: \mathcal{A}_2 \to \mathcal{B}_2$ 是幺正完全正映射（u.c.p.）映射，则映射 $\alpha \otimes \varphi$ 可扩张为从 $\mathcal{A}_1 \otimes_{max} \mathcal{A}_2$ 到以 $\mathcal{B}_1 \otimes_{max} \mathcal{B}_2$ 为值域的完全有界映射，并满足 $\|\alpha \otimes \varphi\|_{cb} \leq \|\alpha\|_{cb}$。

本文将考虑 Kadison相似问题的以下推广版本：若 ϕ 是从 C^*代数 $\mathcal{A}$ 到冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$的有界表示，是否存在可逆元 $S \in \mathcal{M}$，使得 $S\phi(\cdot)S^{-1}$ 是一个 $*$-同态? 这一问题最初在 [20] 中得到研究，作者证明了：若 ϕ 是从 C^*代数到有限冯·诺伊曼代数的有界表示，则 ϕ 与一个 $*$-表示相似。沿着这一思路，Gilles Pisier证明了以下重要结果（[17] 定理 1, [15]定理2.11）。

定理 1.3。 （Pisier）[17]一个含幺 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 是核的，当且仅当对于从 $\mathcal{A}$ 到任意冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$的每个含幺完全有界同态 ϕ，其都与一个 $*$-表示相似；也就是说，存在一个可逆算子 $S \in \mathcal{M}$，使得$S\phi(\cdot)S^{-1}$ 是一个 $*$-表示。

下面的结果是我们的主定理。

定理 1.4。 </style}设 是一个含幺可分 -代数，是一个具有 QWEP 的冯·诺伊曼代数。令： $\mathcal{A} \to \mathcal{M}$ 为一个含幺完全有界表示。则存在一个正可逆算子 $S \in \mathcal{M}$，使得 $S\phi(\cdot)S^{-1}$ 是一个 $*$-表示。

结合定理 1.3 和定理 1.4，非核含幺可分 C^*-代数的存在性意味着存在不是 QWEP 的冯·诺伊曼代数。这依据 Kirchberg 的工作，为康尼斯嵌入问题提供了否定的答案。康尼斯嵌入问题 [5] 表述为：每个带迹冯·诺伊曼代数都能以保迹的方式嵌入超幂 $\mathcal{R}^w$ 中的超有限 II_1 因子 $\mathcal{R}$。康尼斯嵌入问题被认为是算子代数领域中最重要的开放问题之一。值得注意的是，Kirchberg 的开创性工作 [13], 表明，康尼斯嵌入问题等价于其他一系列重要猜想（见 [18]的命题 13.1），这些猜想涉及算子代数的大多数子领域，也涉及其他一些数学分支，例如非交换实代数几何和量子信息论。其中包括 QWEP 猜想：每个冯·诺伊曼代数是否都具有 QWEP 性质（见 [18]的定理 14.1）。在 [10], 中，作者证明了量子复杂性理论中一个被称为 MIP^* =RE 的里程碑式定理。作为应用，他们证明康尼斯嵌入问题的答案是否定的。在本文中，我们给出这一结果的一个“算子代数”证明。

本文结构如下。第 2 节包含一些预备结果。在第 3 节中，我们证明主定理。在第 4 节中，我们给出另一种证明

主定理的方法，假设 $\mathcal{M}$ 是可分的（具有可分的预对偶）。第 5 节包含一些可能有助于解决原始 Kadison相似问题的思路。关于算子空间、 C^*-代数和冯·诺伊曼代数的理论，请参阅书籍 [18, 2, 12]。

2. Preliminary results

关于下述定理的证明，请参阅 [12]。

定理2.1。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 C^*-代数。则存在一个定义在$\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ 上的 C^*-范数 $\otimes_{\max}$，使得对每个 $s\in\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ 以及定义在 $\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$上的每个 C^*-半范数 α，都有$\|s\|_{\max}\geq\alpha(s)$。此外，若 $s=\sum_{j=1}^{n}a_j\otimes b_j$，则

$$\|s\|_{\max}=\sup\Big\|\sum_{j=1}^{n}\varphi(a_j)\psi(b_j)\Big\|,$$

其中，上确界取遍 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$的 $*$-表示的所有对易对(φ,ψ) 。

以下定义由 C. Lance 在 [14] 中提出。

定义 2.2。设 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*代数，且 $\pi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个忠实的含幺 $*$ 表示。若存在一个含幺完全正映射 $\varphi:\mathcal{B}(\mathcal{H})\to\pi(\mathcal{A})''$，使得对每个 $a\in\mathcal{A}$ 都有 $\varphi(\pi(a))=\pi(a)$，则称 $\mathcal{A}$ 具有弱期望性质 （WEP）。

定义 2.3。设 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*代数。若 $\mathcal{A}$ 是一个具有 WEP 的 C^*代数的商，则称 $\mathcal{A}$ 具有商弱期望性质 （QWEP）。

我们汇总 QWEP 代数 [16] 的一些性质。

定理 2.4。我们有以下结果。

(1) 若对所有 $i\in I$，$\mathcal{A}_i$ 都是 *QWEP*，则 $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$ 也是如此。*(2)* 若 $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$ 是弱 *cp* 补的，且 $\mathcal{B}$ 是 *QWEP*，则 $\mathcal{A}$ 也是如此。*(3)* 设 $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{A}$ （分别为 $\mathcal{M}$）中的一个（可能不含幺的） C^* 子代数递增网，其并在范数（分别为弱*）拓扑下稠密。若所有 $\mathcal{A}_i$ 都是 *QWEP*，则 $\mathcal{A}$（分别为 $\mathcal{M}$）也是如此。*(4)* 一个 C^* 代数 $\mathcal{A}$ 是 *QWEP*，当且仅当其二重对偶 $\mathcal{A}^{**}$ 是 *QWEP*。*(5)* 若 $\mathcal{A}$ 是 *QWEP* 且 $\mathcal{B}$ 是核的，则 $\mathcal{A}\otimes_{\min}\mathcal{B}$ 是 *QWEP*。若 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是 *QWEP*，则 $\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{N}$ 也是如此。*(6)* 若 $\mathcal{A}$（分别为 $\mathcal{M}$）是 *QWEP*，且 α 是可约群 Γ 的一个作用，则 $\Gamma\ltimes_\alpha\mathcal{A}$（分别为 $\Gamma\ltimes_\alpha\mathcal{M}$）是 *QWEP*。*(7)* 交换子 $\mathcal{M}'$ 是 *QWEP*，当且仅当 $\mathcal{M}$ 是 *QWEP*。*(8)* 设 $\mathcal{M}=\int^{\oplus}\mathcal{M}(\gamma)\,d\gamma$ 是可分冯·诺伊曼代数的直积分。那么，$\mathcal{M}$ 是 *QWEP*，当且仅当对几乎所有 γ，$\mathcal{M}(\gamma)$ 都是 *QWEP*。

定义 2.5。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为 C^*-代数，且 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{B}$的闭双边理想。若对于每个完全正收缩映射 $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}/\mathcal{J}$，都存在完全正收缩映射 $\psi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$，使得 $\varphi=\pi\circ\psi$，其中 $\pi:\mathcal{B}\to\mathcal{B}/\mathcal{J}$ 为商映射，则称 $\mathcal{A}$ 具有提升性质 （LP）。

以下结果的证明参见 [16]。

定理 2.6. 可数自由群 F_∞ 的满 C^*-代数 $C^*(F_\infty)$ 具有提升性质。

3. Main theorem

引理 3.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数， $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺伊曼代数，且 $\phi: \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ 是一个完全有界表示。则以下条件等价:

(1)存在一个可逆算子 $h \in \mathcal{M}$，使得 $h\phi(\cdot)h^{-1}$ 是一个 $*$-表示。(2)存在一个正可逆算子 $S \in \mathcal{M}$，使得 $S\phi(\cdot)S^{-1}$ 是一个 $*$-表示。(3)存在一个正可逆算子 $T \in \mathcal{M}$，使得对每个 $x \in \mathcal{A}$，$T\phi(x) = \phi(x^*)^*T$。

证明。 (3) $\Rightarrow$ (2)。假设存在一个正可逆算子 $T \in \mathcal{M}$，使得对于每个 $x \in \mathcal{A}$， $T\phi(x) = \phi(x^*)^*T$。令 $S = T^{1/2}$。则 $S \in \mathcal{M}$并且

$$S\phi(x)S^{-1} = S^{-1}\phi(x^*)^*S.$$

令 $\psi(x) = S\phi(x)S^{-1}$。则

$$\psi(x^*) = S\phi(x^*)S^{-1} = S^{-1}\phi(x)^*S = (S\phi(x)S^{-1})^* = \psi(x)^*,$$

因此 $S\phi(\cdot)S^{-1}$ 是一个 $*$-表示。

(2) $\Rightarrow$ (1) 显然。

(1) $\Rightarrow$ (3)。假设存在一个可逆算子 $h \in \mathcal{M}$，使得 $h\phi(\cdot)h^{-1}$ 是一个 $*$-表示。令 $\psi(x) = h\phi(x)h^{-1}$。则

$$h\phi(x^*)h^{-1} = \psi(x^*) = \psi(x)^* = (h^*)^{-1}\phi(x)^*h^*.$$

这意味着

$$h^*h\phi(x^*) = \phi(x)^*h^*h.$$

将 x 替换为 x^*，可得

$$h^*h\phi(x) = \phi(x^*)^*h^*h.$$

设 $T = h^*h$。则正算子 $T \in \mathcal{M}$。此外，由于 $T = h^*h$ 是可逆的，存在一个正可逆算子 $T \in \mathcal{M}$，使得 $T\phi(x) = \phi(x^*)^*T$。□

定义 3.2。 冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 称为内射的，如果存在一个条件期望 $E : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{M}$。

定理 3.3。 设 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数， $\mathcal{M}$ 是一个内射冯·诺伊曼代数，且 ϕ: $\mathcal{A} \to \mathcal{M}$ 是一个完全有界表示。那么存在一个正可逆算子$S \in \mathcal{M}$，使得 $S\phi(\cdot)S^{-1}$ 是一个 $*$-表示。

证明。 不失一般性，假设 $\mathcal{M}$ 忠实地作用在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上，因此 ϕ 是 C^* 代数 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{H}$上的完全有界表示。由定理 1.1， ϕ 与 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的一个 $*$表示相似。由引理 3.1，存在一个正可逆算子 $h \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得

$$h\phi(x) = \phi(x^*)^*h.$$

由于 $\mathcal{M}$ 是内射冯·诺伊曼代数，存在一个条件期望$E:\ \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{M}$。令 $T = E(h) \in \mathcal{M}$。由于 h 是正可逆有界算子，存在常数 $0 < \alpha < \beta$ 使得 $\alpha I \le h \le \beta I$。因此，

$$\alpha I \le T = E(h) \le \beta I.$$

因此， T 也是一个可逆的正有界算子。此外，

$$T\phi(x) = E(h\phi(x)) = E(\phi(x^*)^* h) = \phi(x^*)^* T, \quad \forall x \in \mathcal{A}.$$

根据引理 3.1，存在一个正可逆算子 $S = T^{1/2} \in \mathcal{M}$ ，使得 $S\phi(\cdot)S^{-1}$ 是一个 $*$-表示。□

下面的结果众所周知。为完整起见，我们给出证明。

定理 3.4。 设 $\mathcal{A}$ 是一个核 C^*-代数， $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺伊曼代数，且 ϕ: $\mathcal{A} \to \mathcal{M}$ 是一个有界表示。则存在一个正可逆算子 $S \in \mathcal{M}$ ，使得 $S\phi(\cdot)S^{-1}$ 是一个 $*$-表示。

证明。 不失一般性，假设 $\mathcal{M}$ 忠实地作用在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上，从而 ϕ 是核 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{H}$ 上的有界表示。根据 [6], ϕ 在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中与一个 $*$-表示相似，即存在一个正可逆算子 $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得 $T^{-1}\phi(\cdot)T$ 是一个 $*$-表示 $\pi(\cdot)$。因此，

$$\phi(a) = T\pi(a)T^{-1}, \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Defi在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ b上， C^*是 $\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{M}'$ 代数的一个表示 y

$$\Phi : \mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

$$\Phi\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i\Big) := \sum_{i=1}^{n} \phi(a_i)x_i \quad \forall a_i \in \mathcal{A}, x_i \in \mathcal{M}'.$$

Φ是良定义的。注意， $\phi(a_i)x_i = x_i\phi(a_i)$，且 $\phi(a_i) = T\pi(a_i)T^{-1}$。因此， $\pi(a_i)T^{-1}x_iT = T^{-1}x_iT\pi(a_i)$。根据核 C^*代数的定义和定理2.1，我们有

$$\begin{aligned}
\Big\|\Phi\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i\Big)\Big\| &= \Big\|\sum_{i=1}^{n} \phi(a_i)x_i\Big\| \\
&= \Big\|\sum_{i=1}^{n} T\pi(a_i)T^{-1}x_iTT^{-1}\Big\| \\
&\leq \|T\|\|T^{-1}\|\Big\|\sum_{i=1}^{n} \pi(a_i)T^{-1}x_iT\Big\| \\
&\leq \|T\|\|T^{-1}\|\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes T^{-1}x_iT\Big\|_{\mathcal{A}\otimes_{\max}\pi(\mathcal{A})'} \\
&= \|T\|\|T^{-1}\|\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes T^{-1}x_iT\Big\|_{\mathcal{A}\otimes_{\min}\pi(\mathcal{A})'} \\
&= \|T\|\|T^{-1}\|\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes T^{-1}x_iT\Big\|_{\mathcal{A}\otimes_{\min}\mathcal{B}(\mathcal{H})} \\
&\leq \|T\|^2\|T^{-1}\|^2\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i\Big\|_{\mathcal{A}\otimes_{\min}\mathcal{B}(\mathcal{H})} \\
&= \|T\|^2\|T^{-1}\|^2\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i\Big\|_{\mathcal{A}\otimes_{\min}\mathcal{M}'}.
\end{aligned}$$

因此， Φ在 $\mathcal{A}\otimes_{\min}\mathcal{M}'$的一个稠密子集上有界，从而 Φ在 $\mathcal{A}\otimes_{\min}\mathcal{M}'$上有界。考虑表示

$$\Phi^{(n)} : \mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{M}' \otimes_{\min} M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes_{\min} M_n(\mathbb{C})$$

定义为

$$\Phi^{(n)}\Big(\sum_{i=1}^{k}(a_{rs}^i) \otimes x_i\Big) := \sum_{i=1}^{k}(\phi(a_{rs}^i)x_i) \quad \forall a_{rs}^i \in \mathcal{A}, x_i \in \mathcal{M}'.$$

同样,

$$\begin{aligned}
\Big\|\Phi^{(n)}\Big(\sum_{i=1}^{k}(a_{rs}^{i})\otimes x_i\Big)\Big\| &= \Big\|\sum_{i=1}^{k}(\phi(a_{rs}^{i})x_i)\Big\| \\
&= \Big\|\sum_{i=1}^{k}(T\pi(a_{rs}^{i})T^{-1}x_iTT^{-1})\Big\| \\
&\le \|T\|\|T^{-1}\|\Big\|\sum_{i=1}^{k}(\pi(a_{rs}^{i}))(T^{-1}\otimes I_n)(x_i\otimes I_n)(T\otimes I_n)\Big\| \\
&\le \|T\|\|T^{-1}\|\Big\|\sum_{i=1}^{k}(a_{rs}^{i})\otimes T^{-1}x_iT\Big\|_{M_n(\mathcal{A})\otimes_{\max}\pi(\mathcal{A})'} \\
&= \|T\|\|T^{-1}\|\Big\|\sum_{i=1}^{k}(a_{rs}^{i})\otimes T^{-1}x_iT\Big\|_{M_n(\mathcal{A})\otimes_{\min}\pi(\mathcal{A})'} \\
&= \|T\|\|T^{-1}\|\Big\|\sum_{i=1}^{k}(a_{rs}^{i})\otimes T^{-1}x_iT\Big\|_{M_n(\mathcal{A})\otimes_{\min}\mathcal{B}(\mathcal{H})} \\
&\le \|T\|^2\|T^{-1}\|^2\Big\|\sum_{i=1}^{k}(a_{rs}^{i})\otimes x_i\Big\|_{M_n(\mathcal{A})\otimes_{\min}\mathcal{B}(\mathcal{H})} \\
&= \|T\|^2\|T^{-1}\|^2\Big\|\sum_{i=1}^{k}(a_{rs}^{i})\otimes x_i\Big\|_{M_n(\mathcal{A})\otimes_{\min}\mathcal{M}'}.
\end{aligned}$$

因此， Φ 在 $\mathcal{A}\otimes_{\min}\mathcal{M}'$的一个稠密子集上是完全有界的，故 Φ 是 $\mathcal{A}\otimes_{\min}\mathcal{M}'$的完全有界表示。

由定理 1.1， Φ 与 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的一个 $*$-表示相似。由引理 3.1，存在正可逆算子 $h\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, 使得

$$h\Phi\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i\otimes x_i\Big)=\Phi\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^{*}\otimes x_i^{*}\Big)^{*}h,\quad \forall a_i\in\mathcal{A},\ x_i\in\mathcal{M}'.$$

特别地，对于 $x\in\mathcal{M}'$，我们有

$$h\Phi(1\otimes x)=\Phi(1\otimes x^{*})^{*}h.$$

由于 $\Phi(1\otimes x)=x$ 且 $\Phi(1\otimes x^{*})=x^{*}$，这意味着对所有 $x\in\mathcal{M}'$都有 $hx=xh$。因此，$h\in\mathcal{M}''$。由双交换子定理， $\mathcal{M}''=\mathcal{M}$，故 $h\in\mathcal{M}$。由引理 3.1，存在正可逆算子 $S=h^{1/2}\in\mathcal{M}$ ，使得对所有 $a\in\mathcal{A}$,

$$h\phi(a)=\phi(a^{*})^{*}h,$$

这意味着 $S\phi(\cdot)S^{-1}$ 是一个 $*$-表示。 □

定理 3.5。 设 $\mathcal{A}$ 是一个 C^{*}-代数， $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺伊曼代数，且 $\varphi:\ \mathcal{A}\to\mathcal{M}$ 是一个有界表示。则以下命题等价:

(1) φ 与 $\mathcal{M}$中的一个 $*$-表示相似;

(2) Φ 是一个完全有界表示，其中 Φ： $\mathcal{A}\otimes_{max}\mathcal{M}'\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 定义为

$$\Phi(\sum_{i=1}^{n}a_i\otimes x_i):=\sum_{i=1}^{n}\varphi(a_i)x_i\quad\forall\ a_i\in\mathcal{A},x_i\in\mathcal{M}';$$

(3) $\varphi=\varphi_1-\varphi_2+i(\varphi_3-\varphi_4)$，其中 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4\in CP(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 是从 $\mathcal{A}$到 $\mathcal{M}$ 的完全正映射集合;

(4) 存在 $\phi_1,\phi_2\in CP(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 使得 $\Psi:\mathcal{A}\to\mathcal{M}\otimes\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ 定义如下

$$\Psi(a)=\begin{pmatrix}\phi_1(a) & \varphi(a^*)^*\\ \varphi(a) & \phi_2(a)\end{pmatrix}\quad\forall\ a\in\mathcal{A}$$

是一个完全正映射;

(5) 存在一个完全正映射 $\phi:\ \mathcal{A}\to\mathcal{M}$ 以及 $T,S\in\mathcal{M}$ 使得$\varphi(a)=T^*\phi(a)S$, $\forall a\in\mathcal{A}$; (6) 存在有限多个完全正映射 $\phi_i:\ \mathcal{A}\to\mathcal{M}$ 以及 $T_i,S_i\in\mathcal{M}_n$使得 $\varphi(a)=\sum_{i=1}^{n}T_i^*\phi_i(a)S_i$, $\forall a\in\mathcal{A}$;(7) 存在有限多个 $*$-表示 $\pi_i:\ \mathcal{A}\to\mathcal{M}$、正可逆算子 ${}_nT_i\in\mathcal{M}$以及 $\alpha_i>0$，满足 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ 使得 $\varphi(a)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iT_i\pi_i(a)T_i^{-1}$, $\forall a\in\mathcal{A}$.

证明。 (1) $\Rightarrow$ (7)、(7) $\Rightarrow$ (6)、(6) $\Rightarrow$ (3)，以及(1) $\Rightarrow$ (5)显然成立。

(1) $\Rightarrow$ (2)。若 φ 与 $\mathcal{M}$中的一个 $*$-表示相似，则存在一个正可逆算子 $T^{-1}\in\mathcal{M}$，使得 $T^{-1}\varphi(\cdot)T=\pi(\cdot)$是一个 $*$-表示。考虑

$$\begin{aligned}\|\Phi(\sum_{i=1}^{n}a_i\otimes x_i)\|&=\|\sum_{i=1}^{n}\varphi(a_i)x_i\|=\|\sum_{i=1}^{n}T\pi(a_i)T^{-1}x_iTT^{-1}\|\\&\le\|T\|\|T^{-1}\|\|\sum_{i=1}^{n}\pi(a_i)T^{-1}x_iT\|\\&=\|T\|\|T^{-1}\|\|\sum_{i=1}^{n}\pi(a_i)x_iT^{-1}T\|\\&=\|T\|\|T^{-1}\|\|\sum_{i=1}^{n}\pi(a_i)x_i\|\\&\le\|T\|\|T^{-1}\|\|\sum_{i=1}^{n}a_i\otimes x_i\|_{\mathcal{A}\otimes_{max}\mathcal{M}'}.\end{aligned}$$

因此， Φ 在 $\mathcal{A}\otimes_{max}\mathcal{M}'$的一个稠密子集上有界，故 Φ 在 $\mathcal{A}\otimes_{max}\mathcal{M}'$上有界。

考虑表示

$$\Phi^{(n)}:\mathcal{A}\otimes\mathcal{M}'\otimes M_n(\mathbb{C})\longrightarrow\mathcal{B}(\mathcal{H})\otimes M_n(\mathbb{C})$$

定义为

$$\Phi^{(n)}(\sum_{i=1}^{k}(a_{rs}^i)\otimes x_i)=\sum_{i=1}^{k}(\varphi(a_{rs}^i))(x_i\otimes I_n)\quad\forall\ a_{rs}^i\in\mathcal{A},x_i\in\mathcal{M}'.$$

Then

$$\begin{aligned}
\|\Phi^{(n)}(\sum_{i=1}^{k}(a_{rs}^i)\otimes x_i)\| &= \|\sum_{i=1}^{k}(\varphi(a_{rs}^i))(x_i\otimes I_n)\| \\
&= \|\sum_{i=1}^{n}(T\otimes I_n)(\pi(a_{rs}^i))(T^{-1}\otimes I_n)(x_i\otimes I_n)(TT^{-1}\otimes I_n)\| \\
&\leq \|T\|\|T^{-1}\|\|\sum_{i=1}^{n}(\pi(a_{rs}^i))(T^{-1}\otimes I_n)(x_i\otimes I_n)(T\otimes I_n)\| \\
&= \|T\|\|T^{-1}\|\|\sum_{i=1}^{n}(\pi(a_{rs}^i))(x_i\otimes I_n)(T^{-1}\otimes I_n)(T\otimes I_n)\| \\
&= \|T\|\|T^{-1}\|\|\sum_{i=1}^{n}(\pi(a_{rs}^i))(x_i\otimes I_n)\| \\
&\leq \|T\|\|T^{-1}\|\|\sum_{i=1}^{n}(a_{rs}^i)\otimes x_i\|_{\mathcal{A}\otimes_{max}\mathcal{M}'\otimes M_n(\mathbb{C})}.
\end{aligned}$$

因此， Φ 在 $\mathcal{A}\otimes_{max}\mathcal{M}'$的一个稠密子集上是完全有界的，所以 Φ 是 $\mathcal{A}\otimes_{max}\mathcal{M}'$上的完全有界表示。

(2) ⇒ (1)。如果 Φ 是完全有界表示，那么根据定理 **1.1**， Φ 与 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的一个 $*$- 表示相似。由引理 **3.1**，存在一个正可逆算子 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得对于所有 $x\in\mathcal{A}\otimes_{max}\mathcal{M}'$， $T\Phi(x)=\Phi(x^*)^*T$。特别地，对于任意 $x\in\mathcal{M}'$， $Tx=xT$，因此 $T\in\mathcal{M}''$。根据冯·诺伊曼代数的双交换子定理， $T\in\mathcal{M}$。

对于任意 $a\in\mathcal{A}$， $1\in\mathcal{M}'$，

$$T\varphi(a)=T\Phi(a\otimes 1)=\Phi(a^*\otimes 1)^*T=\varphi(a^*)^*T.$$

由引理 **3.1**， φ 与 $\mathcal{M}$ 中的一个 $*$-表示相似。

(1) ⇒ (3)。如果 φ 与 $\mathcal{M}$ 中的一个 $*$-表示相似，那么存在一个正可逆算子 $T\in\mathcal{M}$，使得 $T\varphi(\cdot)T^{-1}=\pi(\cdot)\in\mathcal{M}$ 是一个 $*$-表示，因此 $\varphi(\cdot)=T^{-1}\pi(\cdot)T$。

对于任意 $a\in\mathcal{A}$，考虑

$$\begin{aligned}
(T+T^{-1})\pi(a)(T+T^{-1}) &= T\pi(a)T+T^{-1}\pi(a)T^{-1}+T^{-1}\pi(a)T+T\pi(a)T^{-1}, \\
(T+iT^{-1})\pi(a)(T-iT^{-1}) &= T\pi(a)T+T^{-1}\pi(a)T^{-1}+i(T^{-1}\pi(a)T-T\pi(a)T^{-1}).
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
\varphi(a) &= T^{-1}\pi(a)T \\
&= \frac{1}{2}[(T+T^{-1})\pi(a)(T+T^{-1})-(T\pi(a)T+T^{-1}\pi(a)T^{-1})] \\
&\quad +\frac{1}{2}i[(T\pi(a)T+T^{-1}\pi(a)T^{-1})-(T+iT^{-1})\pi(a)(T-iT^{-1})].
\end{aligned}$$

Let

$$\varphi_1(a)=\frac{1}{2}(T+T^{-1})\pi(a)(T+T^{-1}),\quad \varphi_2(a)=\frac{1}{2}(T\pi(a)T+T^{-1}\pi(a)T^{-1}),$$
$$\varphi_3(a)=\frac{1}{2}(T\pi(a)T+T^{-1}\pi(a)T^{-1}),\quad \varphi_4(a)=\frac{1}{2}(T+iT^{-1})\pi(a)(T-iT^{-1}).$$

于是 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4\in CP(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 和 $\varphi=\varphi_1-\varphi_2+i(\varphi_3-\varphi_4)$。

(3) $\Rightarrow$ (2)。若 $\varphi=\varphi_1-\varphi_2+i(\varphi_3-\varphi_4)$，其中 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4\in CP(\mathcal{A},\mathcal{M})$。考虑

$$\begin{aligned}\|\Phi(\sum_{i=1}^{n}a_i\otimes x_i)\|&=\|\sum_{i=1}^{n}\varphi(a_i)x_i\|=\|\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(a_i)x_i+\varphi_2(a_i)x_i+\varphi_3(a_i)x_i+\varphi_4(a_i)x_i\|\\&\le\|\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(a_i)x_i\|+\|\sum_{i=1}^{n}\varphi_2(a_i)x_i\|+\|\sum_{i=1}^{n}\varphi_3(a_i)x_i\|+\|\sum_{i=1}^{n}\varphi_4(a_i)x_i\|\\&\le(\|\varphi_1\|+\|\varphi_2\|+\|\varphi_3\|+\|\varphi_4\|)\|\sum_{i=1}^{n}a_i\otimes x_i\|_{\mathcal{A}\otimes_{max}\mathcal{M}'}.\end{aligned}$$

因此， Φ 在 $\mathcal{A}\otimes_{max}\mathcal{M}'$ 的稠密子集上有界，故 Φ 在 $\mathcal{A}\otimes_{max}\mathcal{M}'$ 上有界。考虑该表示

$$\Phi^{(n)}:\mathcal{A}\otimes_{max}\mathcal{M}'\otimes M_n(\mathbb{C})\longrightarrow\mathcal{B}(\mathcal{H})\otimes M_n(\mathbb{C})$$

定义为

$$\Phi^{(n)}(\sum_i(a_{rs}^i)\otimes x_i)=\sum_i(\varphi(a_{rs}^i))(x_i\otimes I_n)\quad\forall\ a_{rs}^i\in\mathcal{A},x_i\in\mathcal{M}'.$$

Then

$$\begin{aligned}\|\Phi^{(n)}(\sum_{i=1}^{k}(a_{rs}^i)\otimes x_i)\|&=\|\sum_{i=1}^{k}(\varphi(a_{rs}^i))(x_i\otimes I_n)\|\\&=\|\sum_{i=1}^{n}(\varphi_1(a_{rs}^i))(x_i\otimes I_n)+(\varphi_2(a_{rs}^i))(x_i\otimes I_n)\\&\quad+(\varphi_3(a_{rs}^i))(x_i\otimes I_n)+(\varphi_4(a_{rs}^i))(x_i\otimes I_n)\|\\&\le\|\sum_{i=1}^{n}(\varphi_1(a_{rs}^i))(x_i\otimes I_n)\|+\|(\varphi_2(a_{rs}^i))(x_i\otimes I_n)\|\\&\quad+\|(\varphi_3(a_{rs}^i))(x_i\otimes I_n)\|+\|(\varphi_4(a_{rs}^i))(x_i\otimes I_n)\|\\&\le(\|\varphi_1\|+\|\varphi_2\|+\|\varphi_3\|+\|\varphi_4\|)\|\sum_{i=1}^{n}(a_{rs}^i)\otimes x_i\|_{\mathcal{A}\otimes_{max}\mathcal{M}'\otimes M_n(\mathbb{C})}.\end{aligned}$$

因此， Φ 在 $\mathcal{A}\otimes_{max}\mathcal{M}'$的一个稠密子集上是完全有界的，故 Φ 是$\mathcal{A}\otimes_{max}\mathcal{M}'$上的完全有界表示。

（5） ⇒ （3）。如果 $\varphi:\ \mathcal{A}\to\mathcal{M}$, $\varphi(a)\ =T^*\phi(a)S$ 是一个完全有界映射，其中T, $S\in\mathcal{M}$, $\phi:\ \mathcal{A}\to\mathcal{M}$ 是一个完全正映射，令

$$\varphi_1=\frac{1}{4}(T^*+S^*)\phi(T+S),\quad \varphi_2=\frac{1}{4}(T^*-S^*)\phi(T-S),$$
$$\varphi_3=\frac{1}{4}(T^*+iS^*)\phi(T-iS),\quad \varphi_4=\frac{1}{4}(T^*-iS^*)\phi(T+iS),$$

那么 $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4\in CP(\mathcal{A},\ \mathcal{M})$，并且

$$\varphi_1-\varphi_2=\frac{1}{2}(T^*\phi S+S^*\phi T),\quad \varphi_3-\varphi_4=\frac{1}{2}i(-T^*\phi S+S^*\phi T).$$

因此

$$\varphi=T^*\phi S=\varphi_1-\varphi_2+i(\varphi_3-\varphi_4).$$

(3) ⇒(4)。设 $\varphi=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i$、 $c_i\in\mathbb{C}$和 $\varphi_i\in CP(\mathcal{A},\ \mathcal{M})$, 那么

$$\phi_1=\phi_2=\sum_{i=1}^{n}\|c_i\|\varphi_i\in CP(\mathcal{A},\mathcal{M})$$

使得

$$\Psi:\mathcal{A}\to\mathcal{M}\otimes\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

定义为

$$\Psi(a)=\begin{pmatrix}\phi_1(a) & \varphi(a^*)^*\\ \varphi(a) & \phi_2(a)\end{pmatrix}\quad\forall\ a\in\mathcal{A}$$

是一个完全正映射。

(4) ⇒(3)。令

$$\varphi_1=\frac{1}{4}(\phi_1+\phi_2+\varphi+\varphi^*),\quad \varphi_2=\frac{1}{4}(\phi_1+\phi_2-\varphi-\varphi^*),$$
$$\varphi_3=\frac{1}{4}(\phi_1+\phi_2-i\varphi+i\varphi^*),\quad \varphi_4=\frac{1}{4}(\phi_1+\phi_2+i\varphi-i\varphi^*).$$

那么 $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4\in CP(\mathcal{A},\ \mathcal{M})$ 和 $\varphi=\varphi_1-\varphi_2+i(\varphi_3-\varphi_4)$。 □

定理 3.6。设 $\mathcal{A}$ 是一个可分的 C^*-代数，且 $\mathcal{M}$ 是一个具有 *QWEP* 的冯·诺伊曼代数。设 ϕ: $\mathcal{A}\to\mathcal{M}$ 是一个完全有界表示。那么存在一个正可逆算子 $S\in\mathcal{M}$，使得 $S\phi(\cdot)S^{-1}$ 是一个 $*$-表示。

证明。我们不妨假设 $\mathcal{M}$ 忠实地作用于 $\mathcal{H}$，即 $\mathcal{M}\subset\mathcal{B}(\mathcal{H})$。由于 $\mathcal{A}$ 可分，它是 $C^*(F_\infty)$ 的一个商。令

$$\phi_1:C^*(F_\infty)\longrightarrow\mathcal{A}$$

是自然的满射 $*$-同态。那么

$$\phi\circ\phi_1:C^*(F_\infty)\longrightarrow\mathcal{M}$$

是一个完全有界表示。记为 $\phi_2=\phi\circ\phi_1$。

由于 $C^*(F_\infty)$ 具有提升性质，且 $\mathcal{M}$ 是具有 QWEP 的冯·诺伊曼代数，并且恒等映射 id: $\mathcal{M}'\to\mathcal{M}'$ 是一个幺正完全正映射，定理 1.2 表明，$\phi_2\otimes id$ 可延拓为一个完全有界表示

$$C^*(F_\infty)\otimes_{\max}\mathcal{M}'\overset{\phi_2\otimes id}{\longrightarrow}\mathcal{M}\otimes_{\max}\mathcal{M}',$$

满足 $\|\phi_2 \otimes id\|_{\mathrm{cb}} \leq \|\phi_2\|_{\mathrm{cb}}$。

令 π： $\mathcal{M} \otimes_{\max} \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为满足以下条件的有界含幺 $*$-表示

$$\pi(x \otimes b) = xb, \quad x \in \mathcal{M}, b \in \mathcal{M}'.$$

定义 Φ： $C^*(F_\infty) \otimes_{\max} \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 如下

$$\Phi(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes b_i) = \sum_{i=1}^{n} \phi_2(x_i) b_i, \quad x_i \in C^*(F_\infty), b_i \in \mathcal{M}'.$$

那么， $\Phi = \pi \circ (\phi_2 \otimes id)$ 是 $C^*(F_\infty) \otimes_{\max} \mathcal{M}'$ 在 $\mathcal{H}$ 上的完全有界表示。根据定理 1.1， Φ 与 $*$-表示相似，且该表示属于 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$。根据引理 3.1，存在正可逆算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得

$$T\Phi\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes b_i\Big) = \Phi\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes b_i^*\Big)^* T, \quad \forall x_i \in C^*(F_\infty),\ b_i \in \mathcal{M}'.$$

特别地，对于任意 $b \in \mathcal{M}'$，

$$T\Phi(1 \otimes b) = \Phi(1 \otimes b^*)^* T.$$

由于 $\Phi(1 \otimes b) = b$ 且 $\Phi(1 \otimes b^*) = b^*$，这意味着 $Tb = bT$。因此， T 与 $\mathcal{M}'$ 的每个元素都交换，所以 $T \in \mathcal{M}''$。根据双交换子定理， $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$，从而 $T \in \mathcal{M}$。此外，对于任意 $x \in C^*(F_\infty)$，

$$T\phi_2(x) = \phi_2(x^*)^* T.$$

由于 ϕ_1 是一个满射的 $*$-同态，对于任意 $a \in \mathcal{A}$ ，都存在一个 $x \in C^*(F_\infty)$，使得 $\phi_1(x) = a$ 且 $\phi_1(x^*) = a^*$。因此，

$$T\phi(a) = T\phi(\phi_1(x)) = T\phi_2(x) = \phi_2(x^*)^* T = (\phi \circ \phi_1(x^*))^* T = \phi(a^*)^* T, \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

根据引理 3.1，令 $S = T^{1/2} \in \mathcal{M}$ ，可得 $S\phi(\cdot)S^{-1}$ 是一个 $*$-表示。这就完成了证明。

□

4. A second approach to the main theorem

以下引理归功于 Don Hadwin（参见定理 3 的 (1)⇒(3) 的证明） [9]。

引理 4.1。 (Hadwin) 若 ϕ： $\mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则以下条件等价：

(1) ϕ 是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的幺正完全有界线性映射；(2) 存在一个幺正 $*$-表示 π： $\mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 以及算子 $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得 $XY = I$ 且对每个 $a \in \mathcal{A}$，都有 $\phi(a) = X\pi(a)Y$。

引理 4.2。 若 $\phi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是幺正完全有界线性映射，则存在可逆正算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得 $T\phi(a) = \phi(a^*)^* T$。

证明。 根据引理 4.1，存在一个含幺的 $*$-表示 $\pi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 以及算子X， $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得 $XY = I$ 且对于每个 a 属于 $\mathcal{A}$， $\phi(a) = X\pi(a)Y$。由于 $XY = I$，对于每个 $\xi \in \mathcal{H}$，

$$\|\xi\| = \|XY\xi\| \leq \|X\|\|Y\xi\|,$$

也就是说 $\|Y\xi\| \geq \frac{1}{\|X\|}\|\xi\|$。因此

$$\||Y|\xi\| = \|Y\xi\| \geq \frac{1}{\|X\|}\|\xi\|.$$

这意味着 $|Y|$ 是内射的且值域闭。因此， $|Y|$ 可逆。由于$XY = I$, $Y^*X^* = I$。类似地, $|X^*|$ 可逆。

令 $Y = V_1|Y|$, $X = |X^*|V_2$ 为极分解。则 $XY = I$ 推出$|X^*|V_2V_1|Y| = I$。由于 $|Y|$, $|X^*|$ 可逆， V_2V_1 可逆。因此， $RanV_2 = \mathcal{H}$且 $V_2V_2^* = I$。注意， $V_1^*V_2^*$也可逆。因此 $V_1^*V_1 = I$。令 $T = |X^*|^{-2}$。断言$T\phi(a) = \phi(a^*)^*T$。由于 $|X^*|V_2V_1|Y| = I$, 我们有 $I = |Y|V_1^*V_2^*|X^*|$，因此$|X^*|^{-1}V_2 = |Y|V_1^*$. 由于

$$\phi(a) = X\pi(a)Y = |X^*|V_2\pi(a)V_1|Y|,$$
$$\phi(a^*)^* = |Y|V_1^*\pi(a)V_2^*|X^*|,$$

我们有

$$|X^*|^{-1}V_2\pi(a)V_1|Y| = |Y|V_1^*\pi(a)V_2^*|X^*|^{-1}$$

因此

$$T\phi(a) = \phi(a^*)^*T.$$

证明至此完成。 □

关于下述引理的证明，请参见 [18] 中的命题 1.48。

引理 4.3. 设 $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ 是一族 C^*-代数。那么，当且仅当对所有 $i \in I$， $\mathcal{A}_i$ 都是内射的时，$(\oplus\sum_{i\in I}\mathcal{A}_i)_\infty$ 才是内射的。特别地，$(\oplus\sum_{n=1}^\infty M_n(\mathbb{C}))_\infty$ 是一个含幺内射C^*-代数。

关于下述引理的证明，请参见 [18] 中的定理 4.11

引理 4.4。 存在一个满射含幺完全正映射

$$P_G : L(G)\otimes_{\max} L(G) \to C^*(G).$$

此外，对于所有的 a、$b \in L(G)$，其中 $a(\delta_e) = \sum_{t\in G} a(t)\delta_t$ 以及 $b(\delta_e) = \sum_{t\in G} b(t)\delta_t$，我们有

$$P_G(a\otimes b) = \sum_{t\in G} a(t)b(t)U_G(t).$$

特别地，限制 $P_G|_{L(G)\otimes\mathbb{C}} \to C^*(G)$ 是一个到希尔伯特空间中的幺正完全正映射，并且 $Ran(P_G|_{L(G)\otimes\mathbb{C}})$ 包含 $\{U_G(t) \mid t \in G\}$。

引理 4.5。 存在一个（不可分）希尔伯特空间 $\mathcal{K}$ 以及一个幺正完全正映射 θ： $\mathcal{B}(\mathcal{K}) \to C^*(F_\infty)$，使得 $Ran(\theta)$ 包含 $\{U_{F_\infty}(t) \mid t \in F_\infty\}$.

证明。 根据引理 4.3，存在一个（不可分）希尔伯特空间 $\mathcal{K}$ 以及一个条件期望 E_1，从 $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ 到 $(\oplus\sum_{n=1}^\infty M_n(\mathbb{C}))_\infty$. 根据定义，存在一个满射 *-同态

$$\pi : (\oplus\sum_{n=1}^\infty M_n(\mathbb{C}))_\infty \to \prod_{n=1}^\omega M_n(\mathbb{C}).$$

由于 $L(F_\infty)$ 可以嵌入 $\prod_{n=1}^\omega M_n(\mathbb{C})$，因此存在一个从 $\prod_{n=1}^\omega M_n(\mathbb{C})$ 到 $L(F_\infty)$ 的条件期望 E_2。根据引理 4.4，存在一个幺正完全正

映射 P_{F_∞} ： $L(F_\infty) \to C^*(F_\infty)$，使得 Ran$(P_{F_\infty})$ 包含 $\{U_{F_\infty}(t) \mid t \in F_\infty\}$。令 $\theta = P_{F_\infty} \circ E_2 \circ \pi \circ E_1$。则 θ 满足引理 4.5。□

定理 4.6。设 ϕ： $\mathcal{A} \to \mathcal{M}$ 是从可分 C^*代数 $\mathcal{A}$ 到具有 *QWEP* 的可分冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$ 的幺正完全有界表示。则存在一个正可逆算子 $S \in \mathcal{M}$，使得 $S\phi(\cdot)S^{-1}$ 是一个 $*$表示。

证明。不妨设 $\mathcal{A} = C^*(F_\infty)$ 和 $\mathcal{M}$ 作用在标准形式的 $\mathcal{H}$ 上。存在一个弱稠密的 C^*-子代数 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}'$ 以及一个满射 $*$-同态 φ： $C^*(F_\infty) \to \mathcal{B}$。根据引理 4.5，存在一个希尔伯特空间 $\mathcal{K}$和一个幺正完全正映射θ： $\mathcal{B}(\mathcal{K}) \to C^*(F_\infty)$，使得 Ran$(\theta)$ 包含 $\{U_{F_\infty}(t) \mid t \in F_\infty\}$。

现在考虑以下图表:

$$C^*(F_\infty) \otimes_{max} \mathcal{B}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\phi\otimes id} \mathcal{M} \otimes_{max} \mathcal{B}(\mathcal{K}) \xrightarrow{id\otimes\theta} \mathcal{M} \otimes_{max} C^*(F_\infty) \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

其中 $\pi(x \otimes b) = x\varphi(b)$ 是一个幺正有界 $*$-表示。注意， $id \otimes \theta$ 是一个幺正完全正映射。根据定理 1.2， $\phi \otimes id$ 可延拓为一个完全有界表示。

定义

$$\Phi : C^*(F_\infty) \otimes_{max} \mathcal{B}(\mathcal{K}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

by

$$\Phi(a \otimes x) = \phi(a)\varphi(\theta(x)).$$

于是 $\Phi = \pi \circ (id \otimes \theta) \circ (\phi \otimes id)$ 是一个幺正完全有界线性映射。根据引理 4.2，存在一个可逆正算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得 $T\Phi(a \otimes x) = \Phi(a^* \otimes x^*)^* T$。令 $a = 1$。则

$$T\varphi(\theta(x)) = \varphi(\theta(x))T$$

对所有 $x \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ 都成立。注意， $Ran(\theta)$ 包含 $\{U_{F_\infty}(t) \mid t \in F_\infty\}$。因此， $Ran\varphi(\theta(x))$ 生成 $\mathcal{M}'$。于是 $T \in (\mathcal{M}')' = \mathcal{M}$。令 $x = 1$。则对所有 $a \in A$， $T\phi(a) = \phi(a^*)^* T$。置 $S = T^{1/2} \in \mathcal{M}$。根据引理 3.1， $T\phi(\cdot)T^{-1}$ 是一个 $*$-表示。□

5. The classical similarity problem revisited

以下引理归功于 Uffe Haagerup [8]。

引理 5.1. (Haagerup) 设 φ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上某个 C^*-代数 $\mathcal{A}$的循环有界表示。那么存在一个可逆正算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 以及一个
$*$-表示 π，它将 $\mathcal{A}$映入 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得

$$\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leq \|\varphi\|^3 \quad and \quad \varphi(a) = T^{-1}\pi(a)T \quad \forall a \in A.$$

定理 5.2. 设 $\phi : C^*(F_\infty) \to \mathcal{M} = \mathcal{B}(l^2)$ 是一个有界表示。假设$\mathcal{M}$ 作用于 $\mathcal{H}$，且 $\xi \in H$ 是 $\mathcal{M}$的循环分离向量。设 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}'$ 是一个弱稠密的 C^*-代数。那么以下条件等价:

(1) ϕ 与一个从 $C^*(F_\infty)$ 到 $\mathcal{B}(l^2)$的 $*$-表示相似；(2) $\Phi : C^*(F_\infty) \otimes_{\max} \mathcal{B} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 由下式给出

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\right) = \sum_{i=1}^n \phi(a_i)b_i$$

是有界表示。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2)。注意， $\phi(a) = T^{-1}\pi(a)T \in \mathcal{M} = \mathcal{B}(l^2)$，其中可逆正算子 T 和 $*$-表示 $\pi(a) \in M$ 对所有 $a \in C^*(F_\infty)$，则

$$\begin{aligned}\|\Phi\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\right)\| &= \|\sum_{i=1}^n \phi(a_i)b_i\| \\ &= \|\sum_{i=1}^n T^{-1}\pi(a_i)Tb_i\| \\ &= \|\sum_{i=1}^n T^{-1}\pi(a_i)b_iT\| \\ &\leq \|T\|\|T^{-1}\|\|\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\|_{C^*(F_\infty)\otimes_{\max}\mathcal{B}}.\end{aligned}$$

这意味着 Φ 是有界表示。

(2) $\Rightarrow$(1)。由于

$$[\Phi(C^*(F_\infty) \otimes_{\max} \mathcal{B})\xi] \supseteq [\mathcal{B}\xi] = [\mathcal{M}'\xi] = \mathcal{H},$$

Φ 是有界循环表示。由引理 5.1，存在一个可逆正算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得

$$T\Phi(a \otimes b) = \Phi(a^* \otimes b^*)^*T.$$

设 $a = 1$。则对所有 $b \in \mathcal{B}$，都有 $Tb = bT$。由于 $\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{M}'$中弱稠密， $T \in (\mathcal{M}')' = \mathcal{M}$。设 $b = 1$。则

$$T\phi(a) = \phi(a^*)^*T$$

对所有 $a \in \mathcal{A}$，均成立。由引理 3.1， ϕ 与一个从 $C^*(F_\infty)$到$\mathcal{B}(l^2)$的 $*$-表示相似。□

命题 5.3。 设 ρ_1 是 $\mathcal{B}(l^2)$ 上的一个态， ρ_2 是核 C^*-代数 $\mathcal{B}$上的一个态。假设 ϕ： $C^*(F_\infty) \to \mathcal{B}(l^2)$ 是一个有界表示，且 Φ: $C^*(F_\infty) \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{B}(l^2) \otimes \mathcal{B}$由下式给出

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\right) = \sum_{i=1}^n \phi(a_i) \otimes b_i.$$

那么 $\rho_1 \otimes \rho_2((\sum_{i=1}^n \phi(a_i) \otimes b_i)^*(\sum_{i=1}^n \phi(a_i) \otimes b_i))^{1/2} \leq \|\phi\|^3\|\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\|$。

证明。 考虑 GNS 构造， π_{ρ_1}： $\mathcal{B}(l^2) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ 和 π_{ρ_2}： $\mathcal{B} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ 是 $*$-表示。因此， $\pi_{\rho_1} \otimes \pi_{\rho_2}$： $\mathcal{B}(l^2) \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)\otimes\mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ 是一个 $*$-表示。存在单位向量 $\xi \in \mathcal{H}_1$ 和 $\eta \in \mathcal{H}_2$，使得

$$\begin{aligned}&\rho_1 \otimes \rho_2((\sum_{i=1}^n \phi(a_i) \otimes b_i)^*(\sum_{i=1}^n \phi(a_i) \otimes b_i)) \\ &= \langle(\sum_{i=1}^n \varphi(a_i) \otimes b_i)^*(\sum_{i=1}^n \phi(a_i) \otimes b_i)(\xi \otimes \eta), \xi \otimes \eta\rangle \\ &= \|\sum_{i=1}^n \phi(a_i)\xi \otimes b_i\eta\|^2.\end{aligned}$$

设 $\mathcal{K}_1 = [\phi(C^*(F_\infty))\xi] \subseteq \mathcal{H}_1$。根据引理 5.1， $\phi(a) = T^{-1}\pi(a)T$，其中 T， $\pi(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_1)$ 且 $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leq \|\phi\|^3$，因此

$$\begin{aligned} \|\sum_{i=1}^{n} \phi(a_i)\xi \otimes b_i\eta\|^2 &\leq \|\sum_{i=1}^{n} (T^{-1}\pi(a_i)T \otimes b_i)(\xi \otimes \eta)\|^2 \\ &\leq \|\sum_{i=1}^{n} T^{-1}\pi(a_i)T \otimes b_i\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K}_1)\overline{\otimes}\mathcal{B}(\mathcal{H}_2)} \\ &\leq \|T^{-1}\|^{-2}\|T\|^2\|\sum_{i=1}^{n} \pi(a_i) \otimes b_i\|^2 \\ &\leq \|\phi\|^6\|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\|^2. \end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

6. A Concluding Remark

结合定理 1.3 和定理 1.4，并注意到 $C^*(F_\infty)$不是核的，我们得出并非每个冯·诺伊曼代数都是 QWEP。根据 [18], 的定理 14.1，这意味着并非每个可分迹冯·诺伊曼代数都能嵌入到 $\mathcal{R}^\omega$中，即超双曲 II_1 因子 $\mathcal{R}$的超幂代数。这为康尼斯嵌入问题给出了否定的答案。

7. 附录

在附录中，为方便读者，我们给出 [19] 引理 2.3 的证明。这个思路归功于 Florin Pop 教授。

设 $\mathcal{B}$ 是一个 C^*-代数， $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{B}$ 的闭理想。我们将在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上考虑 $\mathcal{B}$ 的泛表示 π_u。于是可以将 $\pi_u(\mathcal{B})''$ 与 $\mathcal{B}^{**}$ 等同。存在一个中心投影 P 属于 $\mathcal{B}^{**}$，使得 $(I-P)\mathcal{B}^{**} = \mathcal{J}^{**}$， $P\mathcal{B}^{**} = (\mathcal{B}/\mathcal{J})^{**}$。因此，我们将 $\mathcal{B}/\mathcal{J}$ 视为在希尔伯特空间 $P\mathcal{H}$ 上的泛表示。

引理 7.1。 $\mathcal{B} \cap \mathcal{J}^{**} = \mathcal{J}$。

证明。显然，我们只需证明 $\mathcal{B} \cap \mathcal{J}^{**} \subseteq \mathcal{J}$。否则，存在一个元素 $b \in \mathcal{B} \cap \mathcal{J}^{**}$，使得 $b \notin \mathcal{J}$。根据哈恩–巴拿赫分离定理，存在一个定义在 $\mathcal{B}$ 上的有界线性泛函 φ，使得 $\varphi(\mathcal{J}) = 0$ 且 $\varphi(b) \neq 0$。于是， φ 诱导出一个定义在 $\mathcal{B}/\mathcal{J}$ 上的有界线性泛函 ϕ，使得 $\phi(\rho(b)) \neq 0$，其中 $\rho: \mathcal{B} \to \mathcal{B}/\mathcal{J}$ 是商映射。根据 [12], 的注 10.1.3，存在向量 ξ， $\eta \in P\mathcal{H}$，使得

$$\phi(\rho(b)) = \langle b\xi, \eta\rangle = \langle bP\xi, P\eta\rangle = 0$$

因为 $b \in \mathcal{J}^{**}$ 和 $Pb = bP = 0$。这与 $\phi(\rho(b)) \neq 0$矛盾。 □

推论 7.2。 $P\mathcal{B} = \mathcal{B}/\mathcal{J}$ 使得 $Pb = \rho(b)$ 对于 $b \in \mathcal{B}$，其中 $\rho: \mathcal{B} \to \mathcal{B}/\mathcal{J}$ 是商映射。

证明。 考虑由 $\phi(b) = Pb$ for$b \in \mathcal{B}$ 定义的满射 $*$-同态 $\phi: \mathcal{B} \to P\mathcal{B}$。那么 $\phi(b) = 0$ 当且仅当 $(I-P)b = b$，即 $b \in \mathcal{J}^{**}$。根据引理 7.1， $b \in \mathcal{J}$。因此 $\phi = \rho$。 □

下面的定理是 [19], 的引理 2.3，在定理 1.2 的证明中起着关键作用。

定理 7.3。(Pop) 设 $\mathcal{A}$ 是一个具有提升性质的 C^*-代数，且 $\pi\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}/\mathcal{J}$ 是完全有界同态。则存在完全有界映射 $\beta\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$，使得 $\|\beta\|_{cb}\le\|\pi\|_{cb}$ 且 $\pi=\rho\circ\beta$，其中 $\rho\colon \mathcal{B}\to\mathcal{B}/\mathcal{J}$ 是商映射。

证明。由于 $\mathcal{B}^{**}=(\mathcal{B}/\mathcal{J})^{**}\oplus\mathcal{J}^{**}$，我们将在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上考虑 $\mathcal{B}$ 的泛表示，并用 P 表示 $\mathcal{B}^{**}$ 中满足 $(I-P)\mathcal{B}^{**}=\mathcal{J}^{**}$、$P\mathcal{B}^{**}=(\mathcal{B}/\mathcal{J})^{**}$ 的中心投影。因此，我们将 $\mathcal{B}/\mathcal{J}$ 视为在希尔伯特空间$P\mathcal{H}$上的泛表示。算子 $X\in\mathcal{B}(P\mathcal{H})$ 可自然地视为 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的算子 $X\oplus 0$。根据推论 7.2，存在 $P\mathcal{B}=\rho(\mathcal{B})$，使得对 $b\in\mathcal{B}$，有 $Pb=\rho(b)$。设 $S\in\mathcal{B}(P\mathcal{H})$ 是可逆算子，且 $\theta\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}(P\mathcal{H})$ 是一个 $*$-同态，满足 $\pi(\cdot)=S^{-1}\theta(\cdot)S$ 和 $\|S^{-1}\|\|S\|=\|\pi\|_{cb}$。如有必要，我们可以通过重新缩放假设 $\|S\|=1$。考虑由 $T=S\oplus(I-P)$ 定义的可逆算子 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$。显然，$\|T\|=1$、$\|T^{-1}\|=\|S^{-1}\|$，并且对所有 $j\in\mathcal{J}$，都有 $TjT^{-1}=j$。由此可得，非自伴代数 $T\mathcal{B}T^{-1}$ 将 $\mathcal{J}$ 作为一个理想包含在内。

考虑商映射：$\tilde{\rho}(TbT^{-1})=TPbT^{-1}=T\rho(b)T^{-1}$从 $T\mathcal{B}T^{-1}$到$T\mathcal{B}T^{-1}/\mathcal{J}$。注意，$T\mathcal{B}T^{-1}/\mathcal{J}$是一个以 P为单位元的含幺非自伴代数。由于

$$\pi=S^{-1}\theta S=T^{-1}\theta T,$$

$$\theta=T\pi T^{-1} \tag{7.1}$$

是一个从 $\mathcal{A}$到 $T\mathcal{B}T^{-1}/\mathcal{J}$的含幺 $*$-同态，且 $\mathcal{J}$是自伴的。令 $\mathcal{C}=T\mathcal{B}T^{-1}$和 $\mathcal{C}^*=\{X^*:X\in\mathcal{C}\}$。则 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^*$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的范数闭含幺代数。由于$\mathcal{J}$ 是自伴的，$\mathcal{J}\subset\mathcal{C}^*$。注意，$\theta(\mathcal{A})\subset\mathcal{C}^*/\mathcal{J}$。注意，$(\mathcal{C}\cap\mathcal{C}^*)/\mathcal{J}=(\mathcal{C}/\mathcal{J})\cap(\mathcal{C}^*/\mathcal{J})$（参见 [19]的引理 4.2）。令 $\mathcal{D}=\mathcal{C}\cap\mathcal{C}^*$。则 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$的含幺 C^*-子代数，且$\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{D}$的一个理想。注意，$\theta(\mathcal{A})\subset\mathcal{D}/\mathcal{J}$，且 θ 是一个从 $\mathcal{A}$ 到$\mathcal{D}/\mathcal{J}$的含幺 $*$-同态。

由于 $\mathcal{A}$具有提升性质，存在一个幺正完全正映射 $\alpha\colon \mathcal{A}\to\mathcal{D}\subset T\mathcal{B}T^{-1}$，使得 $\theta=\tilde{\rho}\circ\alpha$。定义 $\beta=T^{-1}\alpha T\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$。根据等式 (7.1)，

$$\rho\circ\beta=\rho\circ(T^{-1}\alpha T)=T^{-1}\tilde{\rho}(TT^{-1}\alpha TT^{-1})T=T^{-1}(\tilde{\rho}\circ\alpha)T=T^{-1}\theta T=\pi.$$

证明至此完成。 □

References

[1] *B. A. Barnes*，《 B^*代数表示的相似性问题》，《密歇根数学杂志》，*22*（*1975*），*25–32*。[2] *N. Brown* 和 *N. Ozawa*，《 C^*代数与有限维近似》，罗德岛州普罗维登斯：美国数学会，*2008*。[3] *J. W. Bunce*，《 C^*代数表示的相似性问题》，《美国数学会会刊》，*81*（*1981*），*409–414*。[4] *M. D. Choi* 和 *E. G. Effros*，核 C^*代数与内射性：一般情形，《印第安纳大学数学杂志》，*26*（*1977*），*443–446*。[5] *A. Connes*，内射因子的分类，《数学年刊》，*104*（*1976*），*73–116*。[6] *E. Christensen*，关于 C^*代数的非自伴表示，《美国数学杂志》，*103*（*1981*），*817–833*。[7] *E. Christensen*，具有性质 Γ的 II_1 因子的相似性，《算子理论杂志》，*15*（*1986*），*281–288*。[8] *U. Haagerup*，C^*代数循环表示相似性问题的解，《数学年刊》，*118*（*1983*），*215–240*。

[9] D. Hadwin，线性映射的膨胀与哈恩分解，《加拿大数学杂志》，33（1981），826–839。[10] Z. Ji、A. Natarajan、T. Vidick、J. Wright 和 H. Yuen，MIP* = RE，预印本，arXiv:2001.04383，2021。[11] R. V. Kadison，关于算子表示的正交化，《美国数学杂志》，77（1955），600–620。[12] R. V. Kadison 和 J. Ringrose，《算子代数理论基础》，第二卷，Birkhäuser Boston, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，1992。[13] E. Kirchberg，关于群 C^*代数的非半分裂扩张、张量积与正合性，《数学发明》，112（1993），449–489。[14] C. Lance，关于核 C^*代数，《泛函分析杂志》，12（1973），157–176。[15] N. Ozawa，关于相似问题的简介，预印本。[16] N. Ozawa，关于 QWEP 猜想，《国际数学杂志》，15（2004），501–530。[17] G. Pisier，同时相似、有界生成与可 amen 性，《东北数学杂志》，59（2007），79–99。[18] G. Pisier， C^*代数与算子空间的张量积——Connes-Kirchberg 问题，剑桥：剑桥大学出版社，2020。[19] F. Pop，III 型 II_1 因子张量积的相似性，《积分方程与算子理论》，89（2017），455–463。[20] F. H. Vasilescu 和 L. Zsido，有限 W^*代数中的一致有界群，塞格德数学科学学报，36（1974），189–192。[21] G. Wittstock，一条算子值 Hahn-Banach 定理，《泛函分析杂志》，40（1981），127–150。

School of Mathematical Sciences, Hebei Normal University, Shijiazhuang, Hebei, 050024, China电子邮箱：junshengfang@hotmail.comSchool of Mathematical Sciences, Hebei Normal University, Shijiazhuang, Hebei, 050024, China电子邮箱：cljiang@hebtu.edu.cnSchool of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, Qufu, Shandong, 273165,China电子邮箱：wangliguang0510@163.com
School of Mathematical Sciences, Hebei Normal University, Shijiazhuang, Hebei, 050024, China电子邮箱：ylwangmathematics@outlook.com